Fontainebleau/MM N-592

L'EMERGENCE DE LA LOI DE DARCY

G. MATHERON

Mars 1979

L'EMERGENCE DE LA LOI DE DARCY

Par

G. MATHERON

Table des Matières

1 - LE PROBLEME PHYSIQUE, ET SA TRANSPOSITION PROBABILISTE 1

1.1 - Le principe variationnel 4

2 - LA PERMEABILITE DE FILIERE 8

2.1 - Cas de tuyaux circulaires 9
2.2 - Une borne supérieure pour K_f 11
2.3 - Une borne inférieure pour K_f 13

3 - PREMIERE TENTATIVE DE FORMALISATION 18

3.1 - Le cadre probabiliste, et résultats préliminaires 19
3.2 - Le théorème d'existence et d'unicité 24
3.3 - Propriétés du potentiel Y_c 28
3.4 - Objections 36

4 - LES ESPACES DE DIRICHLET 39

4.1 - Commentaires de la définition 40
4.2 - Le potentiel d'un espace de Dirichlet 44
4.3 - Continuité monotone 47

5 - LES OUVERTS ALEATOIRES ET LEUR PERMEABILITE 55

5.1 - FAPS et OAPS 57
5.2 - VA lipschitziennes et Dirichlets réguliers 61
5.3 - Y_γ ne dépend que de γ 70
5.4 - OAPS périodiques, OAPS grillagés 72

6 - LA PERMEABILITE DE DARCY 77

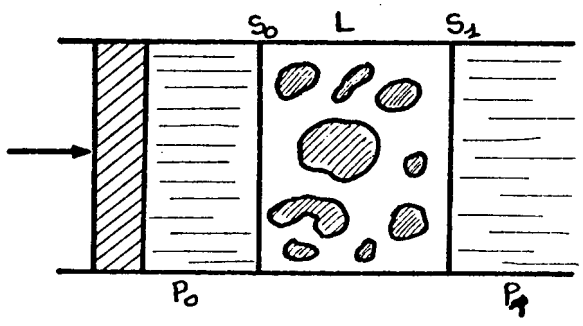
6.1 - Caractérisation de la solution 81
6.2 - Le tenseur des perméabilités 85

L'EMERGENCE DE LA LOI DE DARCY

1. LE PROBLEME PHYSIQUE ET SA TRANSPOSITION PROBABILISTE

Considérons un milieu poreux "homogène". Cette homogénéité est une notion de nature macroscopique. Elle signifie que deux échantillons ayant même taille, même forme et même orientation présenteront les mêmes propriétés globales, pourvu seulement que leur taille soit suffisamment grande vis-à-vis des dimensions granulométriques. L'homogénéité dont il s'agit ici est de nature statistique. Il est clair, en effet, qu'à l'échelle de la granulométrie nos deux échantillons ne sont certainement pas identiques. Leurs grains et leurs pores n'ont ni les mêmes formes ni les mêmes dimensions, et c'est en un sens statistique seulement que leurs géométries complexes peuvent se comparer. Si nous changeons l'échelle d'observation, l'effet d'ergodicité va jouer, et les deux échantillons présenteront les mêmes propriétés macroscopiques.

Parmi ces propriétés, l'une des plus importantes est la perméabilité, liée à la loi de Darcy. Rappelons rapidement le contexte expérimental. Nous prélevons un échantillon ayant la forme d'un cylindre de longueur L et de section S. Nous imperméabilisons la surface latérale, et nous mettons les deux sections terminales S_0 et S_1 en contact avec un même fluide. Nous imposons une différence de pression $\Delta P = P_0 - P_1$, nous attendons qu'un régime permanent s'établisse et nous mesurons le débit Q du fluide traversant le cylindre. On peut, aussi bien, imposer le débit Q et mesurer la différence de pression. Expérimentalement, on observe une relation de proportionnalité



$$Q = C \Delta P \qquad (1\text{-}1)$$

Si nous recommençons l'expérience avec d'autres échantillons cylindriques ayant des longueurs et des sections différentes, nous trouvons que le coefficient C de la relation précédente varie en raison inverse de la longueur L et directe de la section S, soit

$$C = K \frac{S}{L} \tag{1-2}$$

(si le milieu n'est pas macroscopiquement isotrope, il est important de ne comparer entre eux que des échantillons ayant la même orientation in situ : le coefficient K peut dépendre de cette orientation). Notre relation expérimentale peut donc s'écrire :

$$\frac{Q}{S} = K \frac{\Delta P}{L} \tag{1-3}$$

On peut donc, au niveau macroscopique, représenter un écoulement permanent au moyen d'un vecteur q, représentant le flux de fluide, et d'un gradient macroscopique (constant) de pression (ou de charge) grad P, liés par la relation

$$q = - K \text{ grad } P$$

C'est la loi de Darcy. (Si le milieu n'est pas statistiquement isotrope, tout en restant statistiquement homogène, le coefficient scalaire K doit être remplacé par un tenseur). Le coefficient K (scalaire ountensoriel) est, par définition, la perméabilité du milieu. C'est une caractéristique (macroscopique) de ce milieu.

L'émergence, au niveau macroscopique, d'une loi aussi simple mérite réflexion. A l'échelle granulométrique, en effet, un écoulement permanent (suffisamment lent pour que l'on puisse négliger les termes liés à l'énergie cinétique) est régi par l'équation de Navier :

$$\Delta u = \mu \text{ grad } p$$

où u et p représentent la vitesse et la pression en un point du fluide. A cette équation, valable dans les pores, s'ajoutent des conditions aux limites très sévères : pression (ou débit) imposée

sur les faces terminales, vitesse u nulle sur la surface latérale et sur la surface des grains. L'extraordinaire difficulté du problème que pose la résolution d'une telle équation, compte tenu de la complexité de la géométrie des pores, contraste fortement avec le caractère très simple de la loi qui émerge au niveau macroscopique.

A dire vrai, compte tenu de la linéarité de l'équation de Navier (et à supposer que, pour des conditions aux limites données, l'existence et l'unicité de la solution soient tenues pour garanties) la relation (1-1) c'est-à-dire la proportionnalité entre débit global et différence de pression pour un dispositif expérimental donné, était aisément prévisible. Mais la relation (2) est beaucoup moins triviale. Elle signifie, en effet, que pour un flux q et un gradient de pression grad P macroscopiques donnés, les propriétés statistiques de la solution de l'équation de Navier sont indépendantes de la forme de l'échantillon et constituent des caractéristiques macroscopiques du milieu. En particulier, les conditions aux limites sur la surface extérieure de l'échantillon (pourvu que celui-ci soit de taille suffisamment grande) n'exercent pas d'influence sensible, sauf evidemment au voisinage immédiat des parois, sur la structure de l'écoulement. Par exemple, si nous mettons bout à bout des échantillons prismatiques, ou si nous les accolons par leurs parois latérales de manière à constituer un prisme plus grand, la solution relative au grand prisme ne doit pas différer beaucoup de la réunion des solutions que l'on obtiendrait pour chacun des petits prismes considérés isolément.

Cette circonstance suggère un passage à l'infini. Comme il n'existe pas, dans la nature, de milieux poreux infini, il ne peut s'agir que d'un modèle mathématique. Mais ce modèle pourra présenter un grand intérêt pour le physicien, dans la mesure où il nous suggèrera des relations (expérimentalement contrôlables) entre la perméabilité et telle ou telle caractéristique statistique de la géométrie des pores.

La transposition mathématique normale de la notion physique d'un milieu "statistiquement" ou "macroscopiquement" homogène est celle de fonction ou d'ensemble aléatoire stationnaire ergodique.

A l'échelle granulométrique, donc, le milieu sera représenté comme un ensemble aléatoire stationnaire ("les pores") défini, par exemple, par une fonction aléatoire stationnaire et ergodique I(x) en tout ou rien (I(x) = 1 dans les pores, 0 dans les grains). Dans ce modèle, le problème à résoudre serait le suivant :

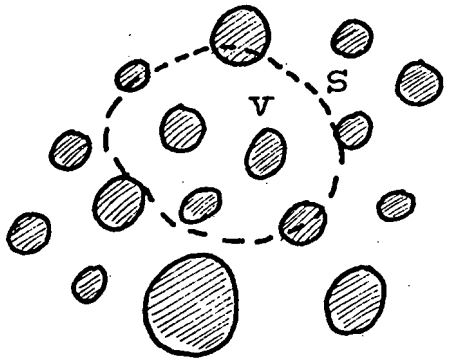
- trouver un vecteur aléatoire stationnaire u(x) vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} I(x)\ \Delta u = I(x)\ \text{grad}\ p \\ I(x)u = u \\ E\,u = q \ \text{(vecteur constant donné)} \end{cases}$$

1.1 - Le Principe Variationnel.

Sous cette forme, il y a peu d'espoir ne serait-ce que d'établir un théorème d'existence et d'unicité. Du point de vue mathématique, l'un des instruments les plus efficaces pour obtenir un théorème d'existence et d'unicité est le théorème des projections dans un espace de Hilbert. D'autre part, en physique, l'énergie se présente souvent comme une forme quadratique positive, susceptible de servir de norme hilbertienne. Ceci suggère de remplacer les équations de Navier par un principe variationnel équivalent, conduisant à rechercher le minimum d'une forme quadratique à signification énergétique. Or cela est possible.

Considérons, en effet, un domaine V limité par une surface S (quelconque) à l'intérieur de notre milieu poreux supposé le siège d'un écoulement permanent. Au niveau granulométrique, la vitesse u = u(x) du fluide vérifie :



$$\begin{cases} \partial_i\ u^i = 0 \\ \Delta\ u^i = \mu\ \partial_i\ p \quad \text{dans les pores} \end{cases}$$

$$u^i = 0 \quad \text{dans les grains}$$

La puissance W consommée dans le domaine V est donc :

$$W = - \int_V u^i \, \partial_i \, p \, dx = - \mu \int_V u_i \, \Delta \, u^i$$

Or :

$$u_i \, \Delta \, u^i = \partial_j (u^i \, \partial^j \, u_i) - (\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \, u^2 - (\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i)$$

An appliquant la formule de Stokes, nous trouvons donc :

$$W = \mu \int_V (\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i) dx - \text{ Flux sur S de } \frac{\mu}{2} \text{ grad } u^2$$

La forme quadratique cherchée est donc :

$$\varphi = (\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i) = \sum_{i,j} (\partial_i \, u_j)^2$$

La puissance W ne diffère de l'intégrale de φ que par un terme où ne figurent que les valeurs de la vitesse sur la surface limite S. Si donc nous considérons la classe de champs de vecteurs u(x) sur V défini par les conditions suivantes :

$\partial_i \, u^i = 0$ dans les pores

$u^i = 0$ dans les grains

u^i donné sur S (en particulier $u^i = 0$ sur les portions éventuelles de S contenues dans les grains).

Il est équivalent de minimiser sur cette classe l'expression de W ou l'intégrale de la forme quadratique φ. Or il est facile de voir que ce minimum est justement caractérisé par l'équation de Navier (Δ u doit être un gradient). Il s'agit donc bien du principe variationnel cherché. Dans la formulation probabiliste, le problème à résoudre est donc le suivant :

Trouver la fonction aléatoire vectorielle $u(x)$ stationnaire et ergodique (si elle existe) minimisant la densité de puissance :

$$\mu \, E \, (\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i)$$

Sous les conditions :

~ $$u(x) = I(x) \, u(x)$$

~ $u(x)$ différentiable (en moyenne quadratique) et :

$$\partial_i \, u^i = 0$$

~ $$E(u^i) = q^i \quad \text{(constantes données)}$$

Supposons acquises l'existence et l'unicité de cette solution pour tout flux macroscopique q donné. Elle dépend, évidemment, de manière linéaire des q^i, de sorte que la densité de puissance W est une fonction quadratique de ces quantités :

(1-4) $$W(q) = \mu \, E(\partial_j \, u^i)(\partial^j \, u_i) = W_{ij} \, q^i \, q^j$$

Or, évaluée au niveau macroscopique, cette même densité est le produit scalaire $- q^i \, \partial_i \, P$; où $\partial_i \, P$ est le gradient "macroscopique" constant (celui qui correspond au terme $\Delta \, P/L$ de l'expérience physique réelle (relation (1-3), $\Delta \, P$ désignant la différence de pression, mesurée ou imposée, entre les faces terminales du cylindre d'épreuve de longueur L). Nous trouvons donc

$$- q^i \, \partial_i \, P = W_{ij} \, q^i \, q^j$$

Naturellement, ce gradient macroscopique constant dépend linéairement du vecteur constant q, puisque les solutions sont additives. En procédant par identification des coefficients des termes en $q^i \, q^j$, la relation précédente donne donc :

$$\partial_i \, P = - W_{ij} \, q^j$$

c'est-à-dire une relation linéaire entre le gradient et le flux macroscopique. J'ai montré ailleurs, par des raisonnements fondés sur des considérations énergétiques, que la matrice W_{ij} est nécessairement symétrique et, bien sûr, de type ≥ 0. Dans le cas d'un milieu réel, $\partial_i P$ ne s'annule pour aucune direction q (sinon, le milieu présenterait, dans cette direction, une perméabilité infinie) de sorte que la matrice W est de type strictement positif, donc inversible. Désignant donc par $K = W^{-1}$ la matrice inverse, nous trouvons :

$$q^j = - K^{ij} \partial_i P$$

c'est-à-dire, précisément, la loi de Darcy.

Ainsi, dans ce modèle, l'émergence macroscopique de la loi de Darcy se trouve entièrement élucidée, sous réserve seulement que l'on ait démontré l'existence et l'unicité de la solution stationnaire u^i associée à chaque vecteur constant $q^i = E\, u^i$. Et la relation (1-4), si l'on est capable de calculer effectivement l'espérance du terme énergétique, donne les valeurs numériques des W_{ij} et donc des termes K^{ij} du tenseur des perméabilités.

En particulier, dans le cas macroscopiquement isotrope, on a $W_{ij} = (1/K)\, \delta_{ij}$, où K est la perméabilité scalaire, et donc :

$$\mu K = \frac{|E(u)|^2}{E(\partial_j u^i \,.\, \partial^j u_i)}$$

Ainsi formulé, ce problème reste très difficile, à cause surtout de la condition aux limites $u = I\, u$. Nous allons donc étudier tout d'abord un cas particulier, d'ailleurs très intéressant par lui-même, dont l'étude nous acheminera vers la solution du cas général.

2. LA PERMEABILITE DE FILIERE.

Nous appellerons filière, pour abréger, un milieu poreux cylindrique (i.e. dont les grains et les pores sont des cylindres). Si nous prenons l'axe des z parallèles à la génératrice des cylindres, l'indicatrice $I(x,y,z)$ des pores est donc une fonction $I(x,y)$ ne dépendant que des deux coordonnées x et y. Le vecteur vitesse et le gradient de pression sont alors eux-mêmes parallèles à l'axe des z (u_1 et $u_2 = 0$, $u_3 = u(x,y)$ et $p = p(z)$). La condition de conservation $\partial_i u^i = 0$ est donc remplie d'elle-même, et $\Delta u = \mu \, dp/dz$ entraine que le gradient $p'(z)$ est nécessairement une constante. Le problème se formule donc ainsi, avec les équations de Navier :

Trouver une fonction aléatoire $u(x,y)$ stationnaire dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = C^{ste} & \text{dans les pores} \\ I\,u = u \\ E\,u = \text{constante donnée} \end{cases}$$

ou sous la forme (plus maniable) du principe variationnel énoncé plus haut :

Trouver la FAST $u(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, différentiable en moyenne quadratique, réalisant le minimum de

$$E(\text{grad } u)^2$$

sous les conditions

$$u = I\,u \quad \text{et} \quad E\,u = \text{constante donnée}$$

Naturellement, rien ne nous empêche de nous poser le même problème dans $\mathbb{R}^n$, bien qu'il ne soit pas aisé à notre imagination de se représenter un écoulement le long de la quatrième dimension dans une filière de $\mathbb{R}^4$ dont nous connaissons la section à 3 dimensions (laquelle serait un milieu poreux ordinaire de $\mathbb{R}^3$). Mais on peut aussi proposer une interprétation électrostatique : les grains (ensemble des x tels que $I(x) = 0$) constituant un conducteur mis au

potentiel 0, nous plaçons une densité de charge (fixe) constante dans les pores. Le potentiel u doit vérifier $\Delta u = C^{ste}$ dans les pores et $u = 0$ dans les grains : c'est bien le même problème.

La perméabilité associée à cet écoulement, ou perméabilité de filière K_f sera alors définie par :

$$K_f = \frac{[E(u)]^2}{E(|\text{grad } u|^2)}$$

(nous prenons $\mu = 1$, de sorte que cette perméabilité a pour dimension le carré d'une longueur).

Avant de passer à une formalisation rigoureuse, traitons quelques exemples élémentaires, mais instructifs.

2.1 - Cas de tuyaux circulaires.

Supposons que la section dans $\mathbb{R}^n$ de notre filière de $\mathbb{R}^{n+1}$ soit constituée de boules p.s. disjointes (par exemple, si $n = 2$, la filière est constituée de tuyaux dans $\mathbb{R}^3$).

Le problème est alors facile à traiter, et d'ailleurs à peu près classique : pour le résoudre, nous n'avons besoin que des deux informations suivantes concernant notre milieu stationnaire :

~ la probabilité p (constante, indépendante de x) pour qu'un point donné x appartienne aux pores

~ la loi F(dR) du rayon R de la boule à laquelle appartient le point x (conditionnellement lorsque x appartient aux pores). Il s'agit d'une granulométrie en mesure. La loi en nombre (si elle existe) est $(1/R^n)$ F(dR) à un facteur près de normalisation. Mais $\int_0^\infty (1/R^n)$ F(dR) peut très bien être infini (il y a alors, en quelque sorte, un nombre infiniment grand de boules infiniment petites, qui ne véhiculent au total qu'un écoulement négligeable).

La solution du problème est bien connue : u est nulle dans les grains, et vaut

$$u(x) = a(R^2 - r^2)$$

si x se trouve à la distance $r \leq R$ du centre d'une boule de rayon R. On a alors :

$$\Delta u = \begin{cases} 0 \text{ dans les grains} \\ -2n\,a \text{ dans les pores} \end{cases}$$

ou encore :

$$|\text{grad } u|^2 = \begin{cases} 0 \text{ dans les grains} \\ 4\,r^2\,a^2 \text{ dans les pores} \end{cases}$$

On en déduit la perméabilité de filière K_f par la formule

$$\frac{1}{K_f} = \frac{E\,|\text{grad } u|^2}{(E\,u)^2} = -\frac{2n\,a}{E\,u}$$

Pour calculer ces espérances, considérons plus généralement une fonction aléatpire Z nulle dans les grains et valant $\varphi(R;r)$ sur une boule de rayon R. Alors :

$$E(Z) = p \int_0^\infty F(dR)\,\frac{n}{R^n} \int_0^R r^{n-1}\,\varphi(R,r)\,dr$$

D'où

$$E(u) = \frac{2\,a\,p}{n+2}\,E\,R^2$$

$$E\,|\text{grad } u|^2 = \frac{4n\,a^2\,p}{n+2}\,E\,R^2$$

et par suite :

(2-1) $$\boxed{K_f = \frac{p}{n(n+2)}\,E(R^2)}$$

$E(R^2)$ représente, rappelons-le, le moment d'ordre 2 de la loi en <u>mesure</u> du rayon R.

Pour n = 1 (filière à deux dimensions), il vient ainsi :

$$K_f = \frac{p}{3}\,E(R^2)$$

Or, ce modèle de filière, très particulier si $n \geq 2$, constitue le cas général lorsque $n = 1$, puisque tout milieu poreux à 1 dimension est constitué d'une alternance de segments de droite appartenant aux grains ou aux pores. On prendra garde seulement que R n'est pas la longueur L d'un segment de grains, mais L/2. D'où, pour $n = 1$

$$K_{f_1} = \frac{p}{12} E(L^2) \tag{2-2}$$

2.2 - Une borne supérieure pour K_f.

On peut déduire de ce qui précède une évaluation par excès de la perméabilité de filière $K_f = K_{f_n}$ d'un milieu quelconque dans $\mathbb{R}^n$ (considéré comme section d'une filière dans $\mathbb{R}^{n+1}$). En effet, considérons un sous-espace V_k (quelconque) à $k < n$ dimensions : le milieu induit sur V_k possède une perméabilité de filière K_{f_k} différente de K_{f_n}. En fait, on a toujours :

$$K_{f_n} \leq K_{f_k} \quad (k < n) \tag{2-3}$$

En effet, soit $u(x_1, x_2 \ldots x_n)$ la solution du problème dans $\mathbb{R}^n$, avec un choix des axes de coordonnées tel que le sous-espace V_k soit défini par $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$. La fonction définie sur $\mathbb{R}^k$ par

$$\tilde{u}(x_1, \ldots x_k) = u(x_1, x_2 \ldots x_k, 0, \ldots 0)$$

vérifie les conditions imposées dans $\mathbb{R}^k$ ($\tilde{u}$ nulle sur les grains et d'espérance donnée). Comme $1/K_{f_k}$ est le minimum de $E\,|\text{grad } u|^2/(E\,u)^2$ dans $\mathbb{R}^k$, on a :

$$\frac{1}{K_{f_k}} \leq \Sigma_1^k \frac{E(\partial_i \tilde{u})^2}{(E\,u)^2} \leq \Sigma_1^n \frac{E(\partial_i u)^2}{(E\,u)^2} = \frac{1}{K_{f_n}}$$

D'où la relation (2-3).

Or, pour $k = 1$, K_{f_1} est donné par la formule générale (2-2). On a donc toujours :

$$K_f \leq \frac{p}{12} \; E(L^2)$$

En fait, on peut améliorer notablement cette borne supérieure. En effet, soit $u(x_1,\ldots x_n)$, comme ci-dessus, la solution du problème dans $\mathbb{R}^n$, et plaçons-nous au point $x = 0$. La FA $x_1 \rightarrow u(x_1,o,o..)$ est stationnaire sur l'axe des x_1, et vérifie donc :

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \geq \frac{1}{K^1_{f_1}} \; (E\,u)^2$$

et de même, pour chaque $i = 1,2,\ldots n$:

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \geq \frac{1}{K^i_{f_1}} \; (E\,u)^2$$

$K^i_{f_1}$ désignant la perméabilité de filière du milieu à une seule dimension induit sur l'axe des x_i. D'autre part, par définition

$$\sum_{i=1}^{n} E \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{K_{f_n}} \; (E(u))^2$$

Par suite :

$$\frac{1}{K_{f_n}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K^i_{f_1}}$$

Autrement dit, si l'on désigne par $\overline{K}_{f_1}$ la moyenne harmonique de perméabilité de filière des milieux à une dimension induits sur les axes de coordonnées, on trouve :

(2-4) $$\boxed{K_{f_n} \leq \frac{1}{n} \; \overline{K}_{f_1}}$$

avec

$$\frac{1}{K_{f_1}} = \frac{1}{n} \; \frac{12}{p} \; \sum_{i=1}^{n} \; \frac{1}{E(L_i^2)}$$

En particulier, dans le cas isotrope, les granulométries linéaires sont les mêmes dans les différentes directions, et par suite :

(2-4') $$\boxed{K_{f_n} \leq \frac{1}{12} \frac{p}{n} E(L^2)}$$

Dans le cas du milieu à boules disjointes envisagé au paragraphe 2-1, il est clair que les milieux induits sur les sous-espaces à $k < n$ dimensions sont encore des milieux à boules disjointes dans $\mathbb{R}^k$. On sait calculer la granulométrie des boules induites dans $\mathbb{R}^k$ connaissant celle des boules de $\mathbb{R}^n$, et réciproquement [1]. En particulier, les moments d'ordre 2 en mesure se correspondent selon la relation :

$$\frac{1}{n+2} E_n(R^2) = \frac{1}{k+2} E_k(R^2)$$

D'après (2-1), donc, les perméabilités de filières dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^k$ se déduisent l'une de l'autre selon la loi :

$$n K_{f_n} = k K_{f_k} = K_{f_1}$$

Soit, explicitement

$$\boxed{K_{f_k} = \frac{1}{k} \frac{p}{12} E(L^2)} \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

REMARQUE : Ainsi les perméabilités de filière augmentent lorsque la dimension diminue. Pour les perméabilités de Darcy, on s'attendrait à un effet inverse, au moins dans le cas isotrope. Intuitivement; en effet, le fluide semble avoir d'autant plus de facilités pour contourner les grains que l'espace présente une dimension plus

1 - Voir mon livre "Eléments pour une Théorie des Milieux Poreux", Paris, Masson et Cie, 1967, III-13.

élevée. Pourtant, cette intuition est en défaut dans le cas anisotrope : la perméabilité de filière K_{f_n} du milieu de $\mathbb{R}^n$ est, en effet, la perméabilité de Darcy (dans la direction de la filière) de la filière correspondante, qui est un milieu poreux anisotrope dans $\mathbb{R}^{n+1}$; et les perméabilités diminuent avec n. Il se peut que, dans le cas isotrope, la perméabilité croisse avec n, mais je n'ai pas de démonstration. Par contre, dans un milieu donné, <u>la perméabilité de Darcy est toujours plus faible que la perméabilité de filière</u> :

$$K \leq K_f \tag{2-5}$$

En effet, considérons le vecteur u (s'il existe...) réalisant :

$$\frac{1}{K} = \text{Inf } E\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\partial_i u^j)^2 \right)$$

sous les conditions

$$\partial_i u^i = 0 \quad , \quad u = 0 \text{ dans les grains}$$

$$E\, u^1 = 1 \quad , \quad E(u^2) = \ldots = E(u^n) = 0$$

Le scalaire $u = u^1$ est différentiable, nul dans les grains et $E\, u = 1$. On a donc :

$$\frac{1}{K_f} \leq E \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 \leq E\left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\partial_i u^j)^2 \right] = \frac{1}{K}$$

d'où résulte (2-5).

2.3 - Une borne inférieure pour K_f.

D'après notre principe variationnel, pour toute fonction aléatoire stationnaire Y(x) différentiable (au sens mq) et p.s. nulle dans les grains, nous obtenons l'inégalité :

$$K_f \geq \frac{(E\, Y)^2}{E(|\text{grad } Y|)^2} \tag{2-6}$$

Nous pouvons donc obtenir des estimations par défaut de K_f en cherchant à maximiser le second membre dans une classe donnée de FAST vérifiant les conditions voulues.

Par exemple, supposons que Y(x) remplisse ces conditions. Considérons un changement de variable de la forme :

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, dx$$

Alors (moyennant des conditions bénignes sur φ, que nous préciserons dans un autre paragraphe) la FAST $f(Y(x))$ est nulle dans les grains, différentiable au sens mq et

$$\text{grad } f(Y) = \varphi(Y) \text{ grad } Y$$

Cherchons donc la fonction φ qui réalise le minimum de $E[\varphi(Y)^2 \, |\text{grad } Y|^2]$ sous $E[f(Y)]$ donné.

Soit G(dy) la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = Y(o)$, et h(y) l'espérance conditionnelle de $|\text{grad } Y|^2$ lorsque $Y = y$. Le problème revient à minimiser :

$$\int \varphi^2(y)\, h(y)\, G(dy)$$

sous la condition :

$$E\, f(Y) = \int_0^\infty \varphi(x)\, [1 - G(x)]dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\, G(x)\, dx = C \text{ donné}$$

On voit que l'on doit avoir

$$h(y)\, \varphi(y)\, G(dy) = \begin{cases} \lambda[1 - G(y)]\, dy & \text{sur } y > 0 \\ \lambda\, G(y)\, dy & \text{sur } y < 0 \end{cases}$$

La loi de y présente un atome en $y = 0$ (puisqu'en général la probabilité pour que x soit dans les grains n'est pas nulle). Si nous supposons qu'elle admet une densité sur $\{y \neq o\}$, on trouvera :

$$(2\text{-}7) \qquad h(y)\,\varphi(y) = \begin{cases} \lambda\,\dfrac{1 - G(y)}{g(y)} & (y > 0) \\ \lambda\,\dfrac{G(y)}{g(y)} & (y < 0) \end{cases}$$

Ces relations permettent le calcul de $E(f(y))$ et de $E[|\text{grad } f(x)|^2)$. En reportant dans l'inégalité (2-4), on obtient ainsi :

$$(2\text{-}8) \qquad K_f \geq \int_0^{\infty} \frac{[1 - G(y)]^2}{h(y)\,g(y)}\,dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{[G(y)]^2}{h(y)\,g(y)}\,dy$$

EXEMPLES

Prenons comme FAST $Y(x)$ la distance $d(x)$ du point x à l'ensemble des grains (supposé fermé) . On a bien $d(x) = 0$ sur les grains. La fonction $d(x)$ est différentiable (au sens usuel) en tout point x, sauf toutefois sur la frontière et sur le squelette des pores, et son gradient a un module unité. Nous verrons que la FAST $d(x)$ est toujours différentiable au sens mq, de sorte que l'on peut appliquer (2-8) avec $h(y) = 1$.

Comme la distance $d(x)$ est ≥ 0, $G(y) = 0$ pour $y < 0$. Si on désigne par $Q(r)$ la probabilité pour que la boule Br de rayon r soit contenue dans les grains (loi du premier point de contact) on a

$$1 - G(r) = Q(r)$$

Donc, à supposer que la dérivée $Q'(r)$ existe (elle existe dans tous les cas usuels) on trouve l'inégalité intéressante :

$$(2\text{-}9) \qquad \boxed{K_f \geq \int_0^{\infty} \frac{[Q(r)]^2}{-Q'(r)}\,dr}$$

Si l'intégrale du second membre diverge, nécessairement la perméabilité de filière est infinie. Sinon, on a une évaluation par défaut.

A titre d'application, considérons le cas où les grains sont les points d'un processus de Poisson ponctuel. On a

$$Q(r) = e^{-\theta\, b_n\, r^n}$$

(θ densité poissonnienne, b_n volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$). Comme

$$-Q'(r) = n\, b^n\, r^{n-1}\, \theta\, Q(r)$$

le second membre, dans (2-9), est infini dès que $n \geq 2$. Ainsi :

La perméabilité de filière du complémentaire d'un processus de Poisson dans $\mathbb{R}^n$ est infinie si $n \geq 2$.

Pour $n = 1$, K_f est finie, et nous connaissons sa valeur, qui est $(1/12)\, E(L^2)$. Comme la loi en mesure de L admet la densité $\theta^2\, \ell \exp(-\theta\ell)$ nous avons en fait :

$$K_f = \frac{1}{2\,\theta^2}$$

Il est intéressant de comparer cette valeur exacte avec l'estimation par défaut que donne la relation (2-9). Comme ici

$$Q(r) = e^{-2\,\theta\, r}$$

nous trouvons :

$$\int_0^\infty \frac{[Q(r)]^2}{-Q'(r)}\, dr = \frac{1}{4\,\theta^2}$$

c'est-à-dire une valeur deux fois trop faible.

On voit sur cet exemple que les grains ne doivent pas constituer un ensemble trop mince si l'on veut que K_f reste finie. D'une manière générale, soit α la dimension (fractale) de l'ensemble des grains. En $r = 0$, $Q'(r)$ est en $r^{n-\alpha-1}$, et l'intégrale diverge donc dès que $n-\alpha-1 \geq 1$, c'est-à-dire $\alpha \leq n-2$:

Pour $\alpha \leq n-2$, on a $K_f = \infty$

Dans le cas du processus de Poisson, $\alpha = 0$ et K_f est infini pour $n \geq 2$. Parmi les variétés linéaires poissoniennes, seuls les hyperplans ($\alpha = n-1$) donnent une perméabilité de filière K_f finie.

A titre de deuxième application, considérons le cas où les grains constituent un processus d'hyperplans poissoniens. Dans le cas isotrope, on a cette fois

$$Q(r) = \exp\left\{ - \frac{2n\, b_n}{b_{n-1}} \lambda\, r \right\}$$

(b_n : volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$), et donc

$$K_f \geq \left(\frac{b_{n-1}}{2n\, b_n} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2}$$

D'autre part, la granulométrie linéaire (en mesure) admet la densité $4\lambda^2 \ell \exp(-2\lambda\ell)$, d'où $E(L^2) = (3/2)(1/\lambda^2)$. En utilisant (2-4), on trouve ainsi :

$$\left(\frac{b_{n-1}}{2n\, b_n} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \leq K_f \leq \frac{1}{8\lambda^2 n}$$

Par exemple, pour $n = 2$ (droites poissoniennes dans le plan)

$$\boxed{\frac{1}{4\pi^2\lambda^2} \leq K_f \leq \frac{1}{16\lambda^2}}$$

(comme π^2 vaut à peu près 10, on obtient une fourchette de 1 à 2,5). Pour $n = 3$ (plans poissoniens dans $\mathbb{R}^3$)

$$\boxed{\frac{1}{64\lambda^2} \leq K_f \leq \frac{1}{24\lambda^2}}$$

(la fourchette est cette fois de 1 à 2,66).

On voit que les inégalités (2-4') et (2-9) donnent au moins un ordre de grandeur pour K_f.

REMARQUE : Pour terminer ce paragraphe, examinons ce que donnent les relations (2-7) lorsque l'on prend comme FA Y(x) la solution u(x) elle-même de l'écoulement : alors, par définition, on doit avoir $\varphi(y) = 1$. On en déduit que u est une variable aléatoire positive (ou négative) et, si G(du) est sa loi, l'espérance conditionnelle

$$h(u) = E[\,|\text{grad } u|^2 | u]$$

vérifie

$$h(u)\ G(du) = \lambda[1 - G(u)]$$

En intégrant u, il vient

$$E\,|\text{grad } u|^2 = \lambda\ E(u)$$

d'où résulte $\lambda = E(u)/K_f$ et il vient

(2-10)
$$\boxed{h(u) = \frac{E(u)}{K_f}\ \frac{1 - G(u)}{g(u)}} \qquad (u > 0)$$

(à supposer que la loi G admette une densité g pour $u > 0$). On voit que (K_f étant supposé connu) la donnée de la loi G de u détermine l'espérance conditionnelle h(u) du carré du gradient, et réciproquement.

3. PREMIERE TENTATIVE DE FORMALISATION.

Dans ce qui précède, nous nous sommes laissés guider par l'intuition, de manière à obtenir rapidement quelques résultats simples et des ordres de grandeur. En contrepartie, nous avons laissé de côté la rigueur mathématique, et, notamment, nous n'avons pas soulevé la question pourtant cruciale de l'existence (et de l'unicité) de la solution u(x) de notre problème d'extremum. C'est ce que nous allons

faire maintenant. Cela suppose, évidemment, que nous donnions au préalable une définition mathématique de l'ensemble aléatoire (les pores) auquel nous nous intéressons. Dans ce paragraphe, nous adoptons la définition la plus pauvre, celle qui correspond au point de vue de la loi spatiale : nous définissons les pores par leur indicatrice, qui est une FAST en tout ou rien. Mais cette définition trop lâche ne permet pas d'appréhender les propriétés topologiques les plus simples de cet ensemble aléatoire (est-il ouvert ou fermé par exemple) pourtant indispensables à l'interprétation physique des résultats. C'est pourquoi, dans le paragraphe 4, nous adopterons un modèle plus riche qui, pour des raisons physiques que nous devrons expliciter, sera celui d'ensemble ouvert ou fermé aléatoire.

3.1 - Cadre probabiliste, et résultats préliminaires.

Nous adoptons ici le modèle (classique) d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un groupe τ_x , $x \in \mathbb{R}^n$ laissant invariante la probabilité P : $\tau_o = I$ est l'identité sur Ω, $\tau_x \tau_y = \tau_{x+y}$ pour tout x, $y \in R^n$ et

$$P(\tau_x C) = P(C) \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ C \in \mathcal{A})$$

A toute VA Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nous associons la fonction aléatoire stationnaire (au sens strict) ou FAST

$$Y(x) = U_x Y$$

définie explicitement par

$$Y(x;\omega) = Y(\tau_{-x}\ \omega)$$

La restriction à l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ du groupe U_x, $x \in \mathbb{R}^n$ constitue alors un groupe d'opérateurs unitaires (que nous noterons encore U_x), et, pour tout $Y \in L^2$, la FAST $Y(x) = U_x Y$ admet la covariance stationnaire :

$$C(h) = < U_h Y, Y >$$

Nous supposons de plus que ce groupe U_x d'opérateurs unitaires

sur L^2 est continu, peut-être pas sur L^2 tout entier, mais au moins sur un sous-espace fermé $H \subset L^2$ suffisamment riche [1].

Nous désignerons par $A = (A_1, A_2, \ldots A_n)$ le générateur infinitésimal de ce groupe U_x, et par $\mathcal{D}_A$ son domaine de définition, qui est dense dans H. Nous rappelons que A est un opérateur dense et fermé dans H .

Pour $y \in \mathcal{D}_A$, A Y est un vecteur aléatoire, dont les composantes A_i X sont dans H. C'est donc un élément de l'espace H^n, que nous considèrerons toujours comme muni de la structure hilbertienne définie par

$$< X, X' > = \sum_i < X_i X_i' > = < X^i X_i' >$$

pour $X = (X_1, \ldots X_n)$ et $X' = (X_1', \ldots X_n')$ dans H_n. En ce qui concerne la FA U_x Y ($Y \in \mathcal{D}_A$), le vecteur

$$U_x A Y = A U_x Y = \text{grad } (U_x Y)$$

est son gradient (au sens de la différentiabilité en moyenne quadratique).

L'espace image $A \mathcal{D}_A$ est un sous-vectoriel (non fermé) de H^n, que nous appellerons espace des gradients au sens strict. Nous désignerons par H_∂ son adhérence :

$$H_\partial = \overline{A \mathcal{D}_A}$$

et nous dirons que H_∂ est l'espace des gradients (au sens large). Si $G \in H_\partial$, ce vecteur n'est pas nécessairement de la forme G = A Y pour un $Y \in \mathcal{D}_A$, mais limite dans H^n d'éléments de cette forme. Il n'est donc pas nécessairement le gradient d'une FAST. Mais on démontre que tout $G \in H_\partial$ est le gradient d'une fonction aléatoire intrinsèque d'ordre 0 sans dérive, soit (au sens m.q.) :

$$U_x G = \text{grad } Z(x)$$

---

1 - En fait, on peut toujours redéfinir $\mathcal{A}$ comme la σ-algèbre engendrée par les $Y \in H$, de sorte qu'il n'y a aucun inconvénient à supposer $H = L^2$.

où Z(x) est une F.A. vérifiant :

$$Z(x+h) - Z(h) = U_h\, Z(x)$$

$$E_o[Z(x+h) - Z(h)] = 0$$

E_o est le projecteur de l'espace H_o des éléments de H <u>invariants</u> par le groupe U_x. Nous supposons que <u>H_o contient les constantes</u> (donc $E_o\, Y = 0$ implique $E\, Y = 0$). Dans la plupart des applications, on choisit un <u>modèle ergodique</u>, c'est-à-dire tel que H_o soit l'espace à une dimension des VA p.s. constantes, et dans ce cas E_o s'identifie à l'espérance E. Mais cette hypothèse est, pour l'instant, inutilement forte, et nous supposons seulement $1 \in H_o$.

L'orthogonal $H_\partial^\perp$ de H_∂ dans H est l'espace des vecteurs <u>conservatifs</u> (<u>de divergence nulle</u>). L'opérateur A étant considéré comme un <u>gradient</u>, son adjoint A*, dense et fermé dans H, s'identifie, en effet, au signe près à l'opérateur <u>divergence</u>. Si $X = (X_i) \in H$ et si chaque $X_i \in \mathcal{D}_A$, on a en effet :

$$A^*\, X = -\, A_i\, X^i = -\, \mathrm{div}\, X$$

L'espace $H_\partial^\perp$, constitué des X tels que $A^*\, X = 0$, est donc bien l'espace des vecteurs de divergence nulle.

A toute FAI-0 Z(x), on associe son <u>variogramme</u>

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \| Z(h)\|^2$$

A toute FAST U_x Y est associée la FAI-0 $Z(x) = (U_x - I)Y$, mais toute FAI-0 n'est pas nécessairement de cette forme. Plus précisément, pour qu'une FAI-0 Z(x) soit de la forme $(U_x - I)Y$ pour un $Y \in L^2$ (nécessairement unique à un invariant près), il faut et il suffit que son variogramme soit borné.

Si Z(x) est une FAI-0 différentiable au sens m.q. et si G est son gradient, on a :

$$\|Z(x)\| \leq |x|\, \|G\|$$

Plus précisément, pour qu'une FAI-0 $Z(x)$ (éventuellement de la forme $(U_x-I)Y$ pour un $Y \in L^2$) soit différentiable au sens m.q., il faut et il suffit qu'il existe une constante $a < \infty$ telle que

$$\|Z(x)\| \leq a\,|x|$$

(ou encore : il faut et il suffit que le variogramme γ de $Z(x)$ vérifie une majoration du type $\gamma(h) \leq b|h|^2$ pour une constante $b < \infty$).

Voici une application de ce résultat qui nous sera utile dans un instant :

Soit f une fonction lipschitzienne sur R, i.e. :

$$|f(z) - f(z')| \leq a\,|z-z'| \quad \text{pour une constante } a < \infty$$

Alors, pour tout $Y \in \mathcal{D}_A$, on a $f(y) \in \mathcal{D}_A$.

En effet, tout d'abord, quitte à remplacer $f(z)$ par $f(z) - f(o)$, on peut supposer $f(z) = 0$, d'où

$$|f(Y)| \leq a\,|Y|$$

d'après la condition de Lipschitz, et par suite $f(Y) \in L^2$.

D'autre part, d'après la définition $(U_x\,Y)(\omega) = Y(\tau_{-x}\,\omega)$, il est clair que $U_x\,f(Y) = f(U_x\,Y)$. Donc :

$$|(U_x-I)\,f(Y)| = |f(U_x\,Y) - f(Y)| \leq a\,|(U_x-I)Y|$$

Par suite, d'après ce que nous avons vu, $f(Y) \in \mathcal{D}_A$ dès que $Y \in \mathcal{D}_A$.

En particulier, soit φ une fonction bornée, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = \int_0^x \varphi(z)\,dz$$

Alors f est lipschitzienne, donc pour tout $Y \in \mathcal{D}_A$ on a $f(Y) \in \mathcal{D}_A$ et on vérifie sans difficulté :

$$A\,f(Y) = \varphi(Y)\,A\,Y$$

Soit maintenant φ une fonction positive mesurable sur $\mathbb{R}$ et $Y \in \mathcal{D}_A$ telle que $\varphi(Y)$ A Y soit dans L^2. Alors $\varphi(Y)$ A $Y \in H_\partial$ (est un gradient au sens large). En effet, on peut trouver une suite φ_n de fonctions continues par morceaux et bornées (par exemple des fonctions étagées) telle que $\varphi_n \uparrow \varphi$. Alors $\varphi_n(Y)$ A Y est un gradient et (d'après le théorème de convergence dominée) converge vers $\varphi(Y)$ A Y: donc $\varphi(Y)$ A $Y \in H_\partial$. En fait, $\varphi(Y)$ A Y est le gradient de la FAI-0

$$Z(x) = (U_x - I)\, f(Y) \qquad \left(f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, dx\right)$$

En effet, plus généralement, on montre facilement que si X_n est une suite dans $\mathcal{D}_A$ et si A $X_n \to G$, alors G est le gradient d'une FAI-0 $Z(x)$ telle que, pour tout x, on ait $Z(x) = \lim (U_x - I)X_n$. Ici, chaque $\varphi_n(Y)$ A Y est le gradient de $f_n(Y)$, avec

$$f_n(y) = \int_0^y \varphi_n(x)\, dx$$

et par suite

$$Z(x) = \lim (U_x - I)\, f_n(Y)$$

Comme $f_n \uparrow f$, cette limite est p.s. $f(Y)$ et $Z(x) = (U_x - I)\, f(Y)$. On note que ce résultat n'implique pas $f(Y) \in L^2$, mais seulement $(U_x - I)\, f(Y) \in L^2$ pour tout x. Enonçons ces résultats qui nous seront utiles par la suite :

LEMME 3-1 - Soit φ une fonction mesurable et localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et $Y \in \mathcal{D}_A$ telle que $\varphi(Y)$ A $Y \in L^2$. Alors $\varphi(Y)$ A Y est un gradient. Si l'on pose

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, dx\ ,$$

$(U_x - I)\, f(Y)$ est une FAI-0 différentiable dans L^2, dont le gradient est $\varphi(Y)$ A Y. En particulier, si $f(Y) \in L^2$, alors $f(Y) \in \mathcal{D}_A$ et

$$A\, f(Y) = \varphi(Y)\ A\ Y$$

En particulier, Y_+ , Y_- , $|Y|$ sont dans $\mathcal{D}_A$ dès que $Y \in \mathcal{D}_A$, et

$$A\,Y_+ = 1_{Y>0}\,A\,Y = 1_{Y\geq 0}\,A\,Y$$

etc.. (ce qui implique $1_{Y=0}\,A\,Y = 0$).

De même, si X et $Y \in \mathcal{D}_A$, $X \vee Y$ et $X \wedge Y$ sont dans $\mathcal{D}_A$, et

$$A(X \vee Y) = 1_{X \geq Y}\,A\,X + 1_{X<Y}\,A\,Y \quad \text{etc...}$$

Voici encore une remarque qui nous sera utile : soit $Y \in L_1$ (c'est-à-dire $E(|Y|) < \infty$) non nécessairement dans L^2. Supposons que la FAST $U_x\,Y$ soit différentiable au sens de L_1 (mais non de L^2) et que et que son gradient G appartienne à H_0 (donc à L^2). Alors G est le gradient d'une FAI-0 Z(x). Comme grad $Z(x) = U_x\,G$ au sens de L^2, donc aussi au sens de L^1, et grad $U_x\,Y = U_x\,G$ dans L_n, on en déduit $Z(x) = (U_x - I)Y$. Ainsi : $(U_x - I)Y$ est dans L^2 et admet G comme gradient au sens de L^2.

3.2 - Le théorème d'existence et d'unicité.

Dans le cadre ci-dessus, un ensemble aléatoire stationnaire est défini par son indicatrice I(x) qui doit être une FAST en tout ou rien, donc de la forme

$$I(x) = U_x\,1_C$$

pour un $C \in \mathcal{C}$. Notons que C est un sous-ensemble de Ω, et non de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble aléatoire stationnaire associé à C sera noté F_c, F(c) ou simplement F (cela n'implique en rien que cet ensemble soit p.s. fermé : en général, d'ailleurs, l'ensemble des ω tels que $F_c(\omega)$ soit fermé ne sera pas dans $\mathcal{C}$). On note que $x \in F(\omega)$, i.e. $I(x,\omega) = 1$ équivaut à $1_c(\tau_{-x}\,\omega) = 1$, c'est-à-dire à $\omega \in \tau_x\,C$. Ainsi F est défini par :

$$F_c(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega \in \tau_x\,C\}$$

$C \in \mathcal{C}$ étant donné, notre problème est le suivant : parmi les Y vérifiant les conditions

$$Y \in \mathcal{D}_A\,,\ Y = 1_C\,Y\,,\ E\,Y = 1$$

trouver celui (s'il existe) qui minimise $\|A\,Y\|^2$

En fait, il n'est pas vraiment nécessaire de supposer $Y \in L^2$. Il suffit de supposer $Y \in L_1$ (puisque E Y doit exister), U_x Y différentiable au sens de L_1 (soit : Y appartient au domaine de A considéré comme opérateur de L_1) et enfin A Y $\in L^2$ (ce gradient au sens de L_1 est un élément de L^2). Il en résulte, comme on l'a vu, que $(U_x - I)Y$ est une FAI-0 différentiable dans L^2, dont le gradient au sens de L^2 coïncide avec A Y.

Posons donc la définition suivante :

DEFINITION - A tout $C \in \mathcal{C}$, nous associons l'espace $\mathcal{L}(C) \subset L_1$ des éléments Y vérifiant les conditions suivantes :

~ $Y = 1_C Y$, $Y \in L_1$

~ Y appartient au domaine de A (considéré comme opérateur de L_1) et son gradient A Y appartient à L^2 : ceci implique, comme on l'a vu, que U_x Y est différentiable au sens de L_2.

Nous désignerons par $H_\partial(C)$ l'espace image A $\mathcal{L}(C)$ (espace des gradients nuls à l'extérieur de C)

D'après la définition même de $\mathcal{L}(C)$, $H_\partial(C)$ est un sous-espace de l'espace H_∂ des gradients de L^2. Montrons qu'il s'agit bien des gradients nuls en dehors de C, c'est-à-dire

$$A\,Y = 1_C\,A\,Y \qquad (Y \in \mathcal{L}(C))$$

De fait, d'après le lemme 3-1, $1_{Y=0}\,A\,Y = 0$ p.s., donc A Y est nul hors de C.

Sur $H_\partial(C) = A\,\mathcal{L}(C)$, nous utiliserons toujours la norme hilbertienne, induite par H^n. Nous poserons

$$(3\text{-}1) \qquad \gamma^2(C) = \mathrm{Inf}\ \{\|A\,Y\|^2\ ,\ Y \in \mathcal{L}(C),\ E\,Y = 1\}$$

et notre problème consiste à chercher l'élément Y réalisant cet Inf (à supposer qu'il existe). Distinguons plusieurs cas :

Premier Cas - $\mathscr{L}(C)$ peut être vide, ou,plus exactement, réduit au seul élément 0. Dans ce cas, $\gamma^2(C)$ est infini, et, si l'on pose

$$\chi(C) = \frac{1}{\gamma^2(C)}$$

$\chi(C) = 0$. Dans ce cas, notre problème n'admet pas de solution, puisqu'il n'y a pas d'élément $Y \in \mathscr{L}(C)$ tel que $EY = 1$. Toutefois, le cas $\mathscr{L}(C) = 0$ correspondant à des ensembles d'intérieur p.s. vide (comme nous le verrons au paragraphe suivant), il est physiquement correct de leur attribuer une perméabilité de filière nulle.

Deuxième Cas - $\mathscr{L}(C) \neq 0$, mais $E\,Y = 0$ pour tout $Y \in \mathscr{L}(C)$. En fait, ce cas est impossible : en effet, si $Y \in \mathscr{L}(C)$, le lemme 3-1 entraine que l'on a aussi $|Y| \in \mathscr{L}(C)$. Mais $E(|Y|) = 0$ entraine alors $Y = 0$ p.s., et $\mathscr{L}(C)$ ne peut pas contenir d'éléments différents de 0.

Troisième Cas - $\mathscr{L}(C) \neq 0$ et $\gamma^2(C) = 0$. Ici encore, le problème ne peut pas avoir de solution (au sens strict) physiquement intéressante. Car si $\|A\,Y\|^2 = 0$, on a $A\,Y = 0$, donc Y est un invariant, non nul (si $E\,Y = 1$) et vérifie $Y = 1_C\,Y$. Si l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, P, \tau_x)$ est ergodique, on a $Y = 1$ et par suite aussi $1_C = 1$: notre ensemble aléatoire est p.s. égal à $\mathbb{R}^n$. Si l'on n'admet pas l'hypothèse ergodique, Y n'est pas nécessairement une constante. Mais, si l'on pose $C' = \{ Y \neq 0\}$, $1_{C'}$ est un invariant et $1_{C'} = 1_C\,1_{C'}$: notre ensemble aléatoire est alors égal à $\mathbb{R}^n$ avec une probabilité $\geq P(C') > 0$.

Mais il peut se faire que $\gamma^2(C)$ soit nul sans que cet Inf soit atteint. Nous poserons alors $\chi(C) = \infty$, car il est correct, du point de vue physique, d'attribuer à ce milieu une perméabilité de filière infinie (comme exemple simple, citons dans $\mathbb{R}^1$ le cas d'un ensemble dont la granulométrie linéaire (en mesure) n'a pas de moment d'ordre 2, soit $E(L^2) = \infty$: la solution du problème existe, on sait la former, mais elle n'est pas dans L^2).

Quatrième Cas - $0 < \gamma^2(C) < \infty$. C'est le seul cas que nous étudierons ci-dessous. Nous poserons

$$\chi(C) = 1/\gamma^2(C)$$

avec la notation χ (au lieu de K_f), car, comme nous le verrons, $\chi(C)$ ne correspond pas dans tous les cas à la notion physique de perméabilité de filière.

Sous cette hypothèse ($0 < \gamma^2 < \infty$), nous allons voir que la solution existe et qu'elle est unique. Notons d'abord quelques résultats préliminaires. Tout d'abord, d'après la définition (3-1), on a

$$(E\ Y)^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y\|^2$$

pour tout $Y \in \mathscr{L}(C)$, et $\chi(C) < \infty$ par hypothèse. Notons, d'après le lemme (3-1), que si $Y \in \mathscr{L}(C)$, on a aussi $|Y| \in \mathscr{L}(C)$ et $A|Y| = (\mathrm{Sgn}\ Y) A\ Y$, donc $\|A|Y|\|^2 = \|A\ Y\|^2$. Par suite, on a également :

$$(3\text{-}2) \qquad (\|Y\|_1)^2 = (E(|Y|))^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y\|^2$$

Il en résulte un lemme important :

LEMME 3-2 - L'application A de $\mathscr{L}(C)$ sur $H_\partial(C)$ est une bijection, et l'application inverse est continue de $H_\partial(C)$ sur $\mathscr{L}(C) \subset L_1$.

En effet, si $Y \in \mathscr{L}(C)$ et $A\ Y = 0$, l'inégalité (3-2) entraine (puisque $\chi(C) < \infty$) que l'on a $Y = 0$ p.s., donc A est une bijection. D'après (3-2), l'application inverse est continue ($\mathscr{L}(C)$ étant muni de la topologie induite par L_1).

Il en résulte :

THEOREME 3-1 - L'espace $H_\partial(C)$ des gradients nuls hors de C est fermé.

En effet, soit Y_n une suite dans $\mathscr{L}(C)$ telle que $A\ Y_n$ converge vers une limite G au sens de L^2. D'après (3-2), on a :

$$(\|Y_n - Y_m\|_1)^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y_n - A\ Y_m\|^2$$

Donc Y_n est une suite de Cauchy dans L_1, et converge vers une limite Y_o dans L_1. La relation $1_C\ Y_n = Y_m$ p.s. passe donc à la limite, et on a

$$1_C\, Y_o = Y_o$$

De plus, la convergence $A X_n \to G$ a lieu aussi au sens de L_1. Comme A, considéré comme opérateur de L_1, est un opérateur fermé, il en résulte que Y_o appartient au domaine de cet opérateur, et $A Y_o = G$. Cette relation, jointe à $Y_o = 1_C Y_o$, entraine $Y_o \in \mathscr{L}(C)$ par définition, et $G = A Y_o$ appartient donc à $H_\partial(C)$ ■

Revenons à notre problème. D'après le théorème (3-1), la variété linéaire

$$\{A Y : Y \in \mathscr{L}(C),\ E Y = 1\}$$

est une variété <u>fermée</u> dans $H_\partial(C)$: en effet, si $Y_n \in \mathscr{L}(C)$ et $A Y_n \to G$ dans H_∂, on a $G \in H_\partial(C)$, puisque cet espace est fermé, donc $G = A Y_o$ pour un $Y_o \in \mathscr{L}(C)$ unique. De plus, d'après le lemme 3-1, la suite Y_n converge dans L_1 vers la limite Y_o, et cela implique $E Y_n \to E Y_o$, donc $E Y_o = 1$ si $E Y_n = 1$.

Dès lors, d'après le théorème de projections, il existe un élément et un seul de cette variété réalisant le minimum $\gamma^2(C) = 1/\chi(C)$ de $\|A Y\|^2$, à savoir : la projection de l'élément 0 sur cette variété. Ainsi :

<u>THEOREME 3-2 - Sous l'hypothèse $0 < \chi(C) < \infty$, il existe un élément Y_o et un seul dans $\mathscr{L}(C)$ tel que $EY_o = 1$ et $\|A Y_o\|^2 = 1/\chi(C)$. Cet élément est caractérisé par la relation :</u>

$$< A Y_o ,\ A Y > = \frac{E(Y)}{\chi(C)} \qquad (Y \in \mathscr{L}(C))$$

3.3 - Propriétés du potentiel Y_C.

L'élément Y_o introduit au théorème 3-2 correspond, dans l'analogie physique, à la solution de l'équation $\Delta u = - 1/\chi(C)$. C'est pourquoi nous utiliserons plutôt l'élément $Y_c = \chi(C)\, Y_o$, qui correspond à l'équation $\Delta u = - 1$ et vérifie :

$$E\, Y_c = \|A\, Y_c\|^2 = \chi(C)$$

Il est caractérisé par la relation :

$$(3\text{-}3) \qquad < A\, Y_c\ ,\ A\, Y > = E\, Y \qquad (Y \in \mathscr{L}(C))$$

Nous dirons que cet élément Y_c est le potentiel attaché à l'ensemble $C \in \mathcal{A}$ et à l'espace $\mathscr{L}(C)$.

Le potentiel Y_c est toujours ≥ 0

En effet, on a vu que $Y \in \mathscr{L}(C)$ entraine $|Y| \in \mathscr{L}_c$. Donc, si Y_c n'était pas ≥ 0, on aurait $\|A\,|Y_c|\|^2/(E|Y_c|)^2 < \gamma^2(C)$ strictement, puisque $\|A\,|Y_c|\|^2 = \|A\, Y_c\|^2$. Nous allons établir un résultat beaucoup plus fort.

Soit Y un élément de $\mathscr{D}_A$ n'appartenant pas nécessairement à $\mathscr{L}(C)$. Nous désignerons par

$$Y' = \Pi_{\mathscr{L}} Y$$

l'unique élément de $\mathscr{L}(C)$ dont le gradient $A\,Y'$ soit la projection de $A\,Y$ sur $H_0(C)$. Cet élément est donc caractérisé par :

$$(3\text{-}4) \qquad < A\, Y,\ A\, Z > = < A\, Y',\ A\, Z > \qquad (Z \in \mathscr{L}(C))$$

On note que $Y - Y'$ constitue, en un certain sens, la solution du problème de Dirichlet relatif àl'ensemble aléatoire associé à C. De fait, on a $Y - Y' = Y$ sur le complémentaire de C, et le gradient de $Y - Y'$ est orthogonal à tous les gradients nuls hors de C, ce qui constitue la transposition sous forme faible de la propriété $\Delta(Y-Y') = 0$ sur C.

THEOREME 3-3 - L'élément $Y' = \Pi_{\mathscr{L}} Y$ défini par (3-4) vérifie la propriété suivante : si $Y \geq 0$ (p.s.), alors $Y \geq Y'$ (p.s.)

En effet, Y étant positif, $(Y-Y')_-$ est dans $\mathscr{L}(C)$. Car cet élément est dans $\mathscr{D}_A$, d'après le lemme 3-1, et n'est > 0 que si $Y' > Y$, ce qui implique $Y' > 0$, et donc (p.s.) $1_C = 1$, puisque Y' est dans $\mathscr{L}(C)$. Donc $(Y-Y')_- = 1_C(Y-Y')_-$ (p.s.), et, cet élément

étant dans $\mathcal{D}_A$, il appartient bien à $\mathcal{L}(C)$.

D'après (3-4), on a donc :

$$< A(Y-Y') \ , \ A(Y-Y')_- > = 0$$

Mais, d'après le lemme 3-1, $A(Y-Y')_- = - 1_{Y-Y'>0} A(Y-Y')$. La relation d'orthogonalité écrite ci-dessus entraine donc

$$\|A(Y-Y')_-\|^2 = 0$$

Donc $A(Y-Y')_- = 0$. D'après le lemme 3-2, cela implique encore $(Y-Y')_- = 0$, c'est-à-dire $Y \geq Y'$ p.s. ■

De ce résultat, découle que l'application $C \to Y_C$, où Y_C est le potentiel de C, défini en (3-3), est une application croissante.

En effet, soient C et C' dans $\mathcal{A}$ tels que $C' \subset C$, c'est-à-dire $1_{C'} \leq 1_C$ p.s., et $\chi(C) < \infty$. Alors $A\, Y_{C'}$ est la projection de $A\, Y_C$ sur $H_\partial(C')$.

Il est clair, en effet, que l'on a $\mathcal{L}(C') \subset \mathcal{L}(C)$ et $H_\partial(C') \subset H_\partial(C)$. Tout $Z \in \mathcal{L}(C')$ vérifie donc, d'après (3-3)

$$E\, Z = < A\, Y_{C'} \ , \ A\, Z > = < A\, Y_C \ A\, Z >$$

puisqu'il est àlla fois dans $\mathcal{L}(C)$ et $\mathcal{L}(C')$: mais cette égalité signifie justement que $A\, Y_{C'}$ est la projection de $A\, Y_C$.

Comme Y_C est p.s. positif, on a donc bien

$$Y_C \geq Y_{C'} \quad \text{p.s.}$$

d'après le théorème 3-3, et donc évidemment aussi

$$\chi(C) \geq \chi(C')$$

Sous les mêmes hypothèses, on a de plus $Y_C = Y_{C'}$ si et seulement

si $\mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C')$ (sans d'ailleurs que ces conditions impliquent nécessairement $C = C'$ p.s.).

En effet, $Y_C = Y_{C'}$ équivaut à $A\,Y_C = A\,Y_{C'}$ (lemme 3-2), donc aussi à $\|A\,Y_C\|^2 = \|A\,Y_{C'}\|^2$, puisque $A\,Y_{C'}$ est la projection de $A\,Y_C$ sur $H_\partial(C')$, et cette égalité équivaut à son tour à $\chi(C) = \chi(C')$, d'après (3-3).

Il est clair que $\mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C')$ entraine $Y_C = Y_{C'}$ et $\chi(C) = \chi(C')$. Inversement, supposons $Y_C = Y_{C'}$. Soit $Z \in \mathscr{L}(C)$, que nous pouvons toujours supposer p.s. positif (puisque $Z \in \mathscr{L}(C)$ entraine Z_+ et $Z_- \in \mathscr{L}(C)$, et soit $Z' \in \mathscr{L}(C')$, tel que $A\,Z'$ soit la projection de $A\,Z$ sur $H_\partial(C')$. On a alors (théorème (3-3) :

$$Z - Z' \geq 0 \quad \text{p.s.}$$

Mais, par construction, $A(Z-Z')$ est orthogonal aux éléments de $H_\partial(C')$ donc, en particulier, à $Y_{C'} = Y_C$. D'après (3-3), il vient donc :

$$E(Z-Z') = \langle A\,Y_C\ ,\ A(Z-Z')\rangle = \langle A\,Y_{C'}\ ,A(Z-Z')\rangle = 0$$

Comme $Z - Z'$ est p.s. positif, il en résulte $Z - Z'$ p.s., donc $Z \in \mathscr{L}(C)$. Par suite, on a bien $\mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C')$.

Ces égalités n'impliquent d'ailleurs nullement $C = C'$. Nous verrons, au paragraphe 4, qu'un fermé aléatoire stationnaire F a la même perméabilité que son intérieur $\overset{\circ}{F}$. Mais la frontière ∂F n'est pas nécessairement p.s. négligeable : les ensembles $\overset{\circ}{C}$ et C de $\mathscr{A}$ associés à F et $\overset{\circ}{F}$ peuvent très bien ne pas être p.s. égaux.

Vis-à-vis de la <u>continuité monotone séquentielle</u>, $C_n \downarrow C$ p.s. dans $\mathscr{A}$, et $\chi(C_{n_o}) < \infty$ pour un n_o au moins, entraine $\chi(C_n) \downarrow \chi(C)$. (Par contre, $C_n \uparrow C$ n'entraine <u>pas</u> $\chi(C_n) \uparrow \chi(C)$).

En effet, si $C_n \downarrow C$, avec $\chi(C_1) < \infty$, les Y_{C_n} constituent une suite décroissante dans L_1, donc $Y_{C_n} \downarrow Y_o \geq 0$, $Y_o \in L_1$, et $\|Y_{C_n} - Y_o\|_1 \to 0$. Posons d'autre part:

$$\tilde{\mathscr{L}} = \cap\, \mathscr{L}(C_n) \; ; \; \tilde{H}_\partial = \cap\, H_\partial(C_n)$$

$\tilde{H}_\partial$ est un sous-espace fermé de $\tilde{H}_\partial$. Comme $A\, Y_{C_n}$ est la projection de $A\, Y_{C_1}$ sur $H_\partial(C_n)$, on sait que la suite $A\, Y_{C_n}$ converge vers une limite G, qui est la projection sur $\tilde{H}_\partial$ de chacin des $A\, Y_{C_n}$. Mais, comme $Y_{C_n} \to Y_o$ dans L_1 et que A, en tant qu'opérateur de L_1, est fermé, on a $G = A\, Y_o$ (au sens de L_1), et $G \in H_\partial$. Enfin, $Y_{C_n} = 1_{C_n} Y_{C_n}$ $Y_{C_n} \downarrow Y_o$ p.s. et $C_n \downarrow C$ p.s. impliquent $Y_o = 1_C\, Y_o$. Donc $Y_o \in \mathscr{L}(C)$, $A\, Y_o \in H_\partial(C)$. Mais alors $Y_o = Y_C$. Car la relation

$$< A\, Y_{C_n} \; , \; A\, Z > = E\, Z$$

valable pour tout $Z \in \mathscr{L}(C)$, puisque $\mathscr{L}(C) \subset \mathscr{L}(C_n)$, passe à la limite, ce qui entraine $Y_o = Y_C$, d'après la caractérisation (3-3) de cet élément.

Enfin, $Y_{C_n} \downarrow Y_C$ p.s. entraine $\chi(C_n) = E\, Y_n \downarrow E\, Y_C = \chi(C)$.

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons utilisé plus haut, on en déduit ensuite

$$\tilde{\mathscr{L}} = \cap\, \mathscr{L}(C_n) \quad ; \quad \tilde{H}_\partial = \cap\, H_\partial(C_n)$$

Résumons ces résultats :

THEOREME 3-4 - Si $C \supset C'$ p.s. dans $\mathscr{A}$, et si $\chi(C) < \infty$, on a :

$$Y_C \geq Y_{C'} \geq 0 \text{ (p.s.)} \quad ; \quad \chi(C) \geq \chi(C') \quad ; \quad \mathscr{L}(C) \supset \mathscr{L}(C')$$

et $A\, Y_{C'}$ est la projection de $A\, Y_C$ sur $H_\partial(C')$.

Dans les mêmes conditions, on a $Y_C = Y_{C'}$ p.s. si et seulement si $\chi(C) = \chi(C')$, ou encore si et seulement si $\mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C')$.

Si $C_n \downarrow C$ p.s. dans $\mathscr{A}$ et si $\chi(C_1) < \infty$, alors $\chi(C_n) \downarrow \chi(C)$, $Y_{C_n} \downarrow Y_C$ p.s., $Y_{C_n} \to Y_C$ au sens de L_1 et $A\, Y_{C_n} \to A\, Y_C$ au sens de L_2. De plus, $A\, Y_C$ est la projection sur $H_\partial(C)$ de chacun des $A\, Y_{C_n}$, et on a :

$$\mathscr{L}(C) = \cap\, \mathscr{L}(C_n) \quad ; \; H_\partial(C) = \cap\, H_\partial(C_n)$$

NOTA BENE : La continuité séquentielle ↑ n'est pas vérifiée en général. Nous verrons bientôt un contre-exemple.

COROLLAIRE - Si C et C' sont p.s. disjoints, et $\chi(C \cup C') < \infty$, on a

$$\chi(C \cup C') \geq \chi(C) + \chi(C') \tag{3-5}$$

mais non, en général, l'égalité.

En effet, si $C \cap C' = \Phi$ p.s., $H_\partial(C)$ et $H_\partial(C')$ sont orthogonaux et contenus dans $H_\partial(C \cup C')$. Posons

$$Y_o = Y_C + Y_{C'}$$

Cet élément de $\mathcal{L}(C \cup C')$ vérifie donc :

$$\|A\, Y_o\|^2 = \|A\, Y_C\|^2 + \|A\, Y_{C'}\|^2 = \chi(C) + \chi(C')$$

$$E\, Y_o = E\, Y_C + E\, Y_{C'} = \chi(C) + \chi(C')$$

On a par suite

$$\chi(C \cup C') \geq \frac{(E\, Y_o)^2}{\|A\, Y_o\|^2} = \chi(C) + \chi(C')$$

Pour que l'égalité ait lieu, il faudrait que $H_\nabla(C \cup C')$ soit égal à la somme directe orthogonale $H_\partial(C) \oplus H_\partial(C')$. Mais il n'en est pas nécessairement ainsi, nous verrons un contre exemple. ■

Les érosions équipotentielles.

Nous allons examiner maintenant une intéressante transformation d'ensembles dans $\mathcal{A}$, à laquelle correspond évidemment une transformation géométrique de l'ensemble aléatoire associé. Cette transformation, ou érosion équipotentielle possède une riche signification énergétique, et pourrait présenter un certain intérêt dans les applications.

Soit $C \in \mathcal{A}$ donné, tel que $\chi(C) < \infty$. A cet ensemble, nous

associerons, pour tout $\varepsilon > 0$, son <u>érodé</u> C_ε^+ et son <u>érodé strict</u> C_ε^- défini par

$$(3\text{-}6) \qquad C_\varepsilon^+ = \{Y_C \geq \varepsilon\} \quad ; \quad C_\varepsilon^- = \{Y_C > \varepsilon\}$$

qui sont évidemment des ensembles de $\mathcal{A}$. Ces deux ensembles ont le même potentiel, à savoir le <u>potentiel tronqué</u> $Y_\varepsilon = (Y_C - \varepsilon)_+$, de sorte que, <u>si l'on connait le potentiel de l'ensemble C, on connait ipso facto celui de tous ses érodés</u>.

Plus précisément, nous allons établir les résultats suivants :

$$(3\text{-}7) \qquad \begin{cases} Y_{C_\varepsilon^+} = Y_{C_\varepsilon^-} = (Y_C - \varepsilon)_+ \\ \chi(C_\varepsilon^+) = \chi(C_\varepsilon^-) \\ \mathcal{L}(C_\varepsilon^+) = \mathcal{L}(C_\varepsilon^-) \end{cases}$$

En effet, posons pour abréger $Y_\varepsilon = (Y_C - \varepsilon)_+$. D'après le lemme (3-1), cet élément est dans $\mathcal{D}_A \cap L_1$ et :

$$A\, Y_\varepsilon = 1_{C_\varepsilon^+}\, A\, Y_C = 1_{C_\varepsilon^-}\, A\, Y_C$$

De plus, Y_ε est p.s. nul hors de C_ε^-, donc appartient à $\mathcal{L}(C_\varepsilon^-)$ et à $\mathcal{L}(C_\varepsilon^+)$. Ecrivons C_ε pour désigner l'un ou l'autre des deux érodés C_ε^+ et C_ε^-. Pour tout $Z \in \mathcal{L}(C_\varepsilon)$, on trouve :

$$< A\, Z\, ,\, A\, Y_\varepsilon > \;=\; < A\, Z\, ,\, 1_{C_\varepsilon}\, A\, Y_C > \;=\; < 1_{C_\varepsilon}\, A\, Z\, ,\, A\, Y_C >$$

Comme $1_{C_\varepsilon}\, A\, Z = A\, Z$, puisque $Z \in \mathcal{L}(C_\varepsilon)$, on trouve donc

$$< A\, Z\, ,\, A\, Y_\varepsilon > \;=\; < A\, Z\, ,\, A\, Y_C > \;=\; E\, Z$$

d'après (3-3). Comme ceci a lieu pour tout $Z \in \mathcal{L}(C_\varepsilon)$, il résulte de cette même caractérisation (3-3) que Y_ε est le potentiel associé à C_ε, c'est-à-dire aussi bien à C_ε^+ qu'à C_ε^-. La première relation (3-7) en découle.

Les deux autres relations (3-7) résultent alors immédiatement du théorème 3-3 : $E\ Y_\varepsilon = \chi(C_\varepsilon^+) = \chi(C_\varepsilon^-)$, et, comme $C_\varepsilon^+ \supset C_\varepsilon^-$ p.s., $\mathcal{L}(C_\varepsilon^+) = \mathcal{L}(C_\varepsilon^-)$.

La loi de distribution $G(dy)$ de la variable potentiel Y_C présente une signification énergétique que nous avons d'ailleurs déjà rencontrée. Nous désignerons par $h(y)$ une fonction telle que $h(Y)$ soit p.s. égale à l'espérance conditionnelle en Y du carré du gradient, soit $|A\ Y|^2$ (terme, qui, du point de vue de l'interprétation physique, représente l'énergie sous forme locale).

Si φ est mesurable et bornée sur R, et si on pose $f(y) = \int_0^y \varphi(x)dx$, le lemme 3-1 nous garantit $f(Y_o) \in \mathcal{L}(C)$ et $A\ f(Y_o) = \varphi(Y_o)AY$ pour tout $Y \in \mathcal{L}(C)$. Appliquons donc (3-3) avec $Y = f(Y_C)$. Il vient :

$$< A\ Y_C\ ,\ \varphi(Y_C)\ A\ Y_C > \ =\ E\ f(Y_C)$$

soit, sous forme explicite :

$$\int_0^\infty h(y)\ \varphi(y)\ G(dy) = \int_0^\infty \varphi(y)\ [1 - G(y)]\ dy$$

Ceci ayant lieu pour toute fonction φ mesurable et bornée, nous obtenons la relation remarquable suivante entre la loi de distribution G du potentiel et l'espérance conditionnelle $h(y)$ de l'énergie locale (c'est-à-dire, physiquement, la valeur moyenne de l'énergie locale entre deux lignes isopotentielles infiniment voisines :

(3-8) $$\boxed{h(y)\ G(dy) = [1 - G(y)]\ dy}$$

avec d'ailleurs (puisque $E\ Y_C = \chi(C)$) :

(3-9) $$\chi(C) = \int_0^\infty [1 - G(y)]\ dy$$

Cette relation (3-8) implique que $h(y)$ est nul sur tout atome de la loi G du potentiel. Comme l'énergie $|A\ Y_C|^2$ est une variable positive,

il en résulte que le gradient $A\,Y_C$ lui-même est p.s. nul sur tout atome du potentiel Y_C .

En particulier, $\{Y_C = 0\}$ est toujours un atome, puisque Y_C est nul hors de C (et $C \neq \Omega$, sinon $\chi(C) = \infty$). Ainsi, $A\,Y_C$ est nul sur le complémentaire de l'ensemble

$$C_- = \{Y_C > 0\}$$

On n'a pas, en général, $C = C_-$ p.s., mais, d'après le théorème (3-3), $Y_{C_-} = Y_C$ entraine

$$\chi(C_-) = \chi(C) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}(C) = \mathscr{L}(C_-)$$

Autrement dit, les espaces C et C_- sont équivalents du point de vue qui nous occupe.

En ce qui concerne maintenant les érodés C_ε^+ et C_ε^- , et leur potentiel commun $Y_\varepsilon = (Y_C - \varepsilon)_+$, on a évidemment $P(Y_\varepsilon > y) = P(Y_C > y+\varepsilon) = 1 - G(y+\varepsilon)$. Par conséquent, la relation (3-9) nous donne très simplement la valeur de $\chi(C_\varepsilon) = \chi(C_\varepsilon^+) = \chi(C_\varepsilon^-)$, soit :

(3-10)
$$\boxed{\chi(C_\varepsilon) = \int_\varepsilon^\infty (1 - G(y))\, dy}$$

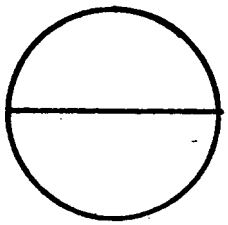
Ainsi, la loi de distribution du potentiel possède une double signification énergétique : la relation (3-8) montre qu'elle est liée à l'aspect local de l'énergie, c'est-à-dire à la fonction h(y). D'après (3-10), elle représente également la distribution globale de l'énergie en fonction de l'érosion ε. En particulier, nous voyons, ce qui n'était nullement évident, que $\chi(C_\varepsilon)$ est une fonction dérivable en ε.

3.4 - Objections.

La formulation précédente n'est pas tout-à-fait satisfaisante

du point de vue de l'interprétation physique. Le contre-exemple simple suivant le montre clairement :

Premons, dans l'espace $\mathbb{R}^2$, un ensemble aléatoire stationnaire constitué de la réunion de cercles p.s. disjoints. Il lui correspond, dans un espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qu'il est inutile de spécifier, l'indicatrice 1_C de l'ensemble $C \in \mathcal{A}$ tel que notre ensemble aléatoire stationnaire soit justement



$$F(C) = \{x : x \in \mathbb{R}^n , \tau_{-x}\, \omega \in C\}$$

Si nous retranchons de chacun des cercles dont la réunion constitue p.s. F(C) un diamètre convenablement choisi, par exemple le diamètre parallèle à l'axe des x, nous obtenons un nouvel ensemble aléatoire F(C') associé à un $C' \in \mathcal{A}$. Mais, comme l'ensemble des diamètres que nous avons retranchés est p.s. négligeable, il est facile de voir que les indicatrices 1_C et $1_{C'}$ sont p.s. égales. Par suite :

$$\chi(C) = \chi(C')$$

Or, du point de vue de l'interprétation physique, il est clair que la perméabilité de filière de F(C) doit être strictement supérieure, et même notablement supérieure à celle de F(C').

On comprend ainsi pourquoi la continuité monotone séquentielle ($C_n \uparrow C \Rightarrow \chi(C_n) \uparrow \chi(C)$ n'est pas vérifiée. En effet, les érodés $F(C') \ominus B_\varepsilon$ seront associés à des $C'_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tels que $C'_\varepsilon \uparrow C$ (p.s.). Mais, l'érosion ayant dilaté le diamètre coupant chaque cercle en deux moitiés, on trouvera cette fois :

$$\chi(C'_\varepsilon) < \chi(C_\varepsilon) \quad \text{strictement}$$

et, pour $\varepsilon \downarrow 0$, $\chi(C'_\varepsilon)$ va converger en croissant vers une limite notablement inférieure à $\chi(C') = \chi(C)$, limite correspondant justement à la valeur que le sens physique nous incite à attribuer à la perméabilité de F(C').

On comprend de même pourquoi l'inégalité (3-5) peut être stricte (alors que, du point de vue physique, on s'attend à ce que la perméabilité soit additive). En effet, définissons $F(C_1)$ comme la réunion des demi-cercles supérieurs et $F(C_2)$ comme celle des demi-cercles inférieurs : C_1 et C_2 sont p.s. disjoints, $\chi(C_1 \cup C_2) = \chi(C') = \chi(C)$, mais $\chi(C_1) + \chi(C_2)$ est notablement inférieur à $\chi(C)$, et correspond à nouveau plutôt à la valeur de la perméabilité physique de $F(C')$.

Il apparait ainsi que le point de vue des indicatrices 1_C, considérées comme éléments de L^2, c'est-à-dire le point de vue de la loi spatiale, ne fournit pas une définition de l'ensemble aléatoire suffisamment riche pour les besoins de l'interprétation physique. Notre contre-exemple montre que l'on doit soigneusement distinguer entre un ensemble aléatoire ouvert, comme $F(C')$, et son adhérence ($F(C)$ dans notre exemple). Nous allons donc définir l'ensemble F (les pores) soit comme un ouvert aléatoire, soit comme un fermé aléatoire.

De prime abord, il peut sembler plus "naturel" de considérer les pores comme un ensemble ouvert aléatoire G. Mais, si nous retranchons de G un fermé aléatoire p.s. négligeable (par exemple des hyperplans poissoniens) nous obtenons un nouvel ouvert aléatoire $G' \subset G$ admettant la même loi spatiale que G : le point de vue de la loi spatiale conduirait à la même valeur de χ pour G et C', alors que, physiquement, leurs perméabilités doivent être bien différentes.

Pour un <u>fermé</u> aléatoire F, cette objection disparaît. Si, en effet, nous ajoutons à F un fermé p.s. négligeable (de manière à obtenir un nouveau fermé $F' \supset F$), F et F' ont la même loi spatiale, donc même valeur de χ. Mais cette fois le résultat est bien conforme à l'intuition physique. Car, dans aucun modèle physique raisonnable, un fluide visqueux ne circulera jamais dans un ensemble négligeable, de sorte que les écoulements seront les mêmes dans F et F'.

D'où la première idée : définir la perméabilité d'un fermé aléatoire F, soit K(F), à l'aide de la fonctionnelle χ. Pour un ouvert aléatoire, on posera comme définition $K(G) = \text{Sup } K(F)$ sur l'ensemble des fermés aléatoires F p.s. inclus dans G. Mais, du point de vue

physique, on s'attend à ce que pour tout ensemble aléatoire H (fermé ou non), H ait la même perméabilité que son intérieur $\overset{\circ}{H}$. Nous devons donc démontrer, dans le cas d'un fermé F, que l'on a bien

$$K(F) = K(\overset{\circ}{F})$$

Il reste ensuite à préciser la classe d'ensembles améatoires H sue lesquels on fera porter la définition

$$K(H) = \text{Sup } \{K(F),\ F \text{ fermé},\ F \subset \overset{\circ}{H} \text{ p.s.}\}$$

Comme la notion de perméabilité peut,se définir, en termes physiques, par un principe variationnel, donc comme la recherche d'un gradient de norme minimale dans une variété fermée convenable, nous pourrons, en sens inverse, partir non plus de la notion d'ensemble aléatoire H, mais directement de la notion d'un <u>espace $\mathscr{L}$ de gradients</u> vérifiant <u>certaines conditions aux limites</u>, qui sont celles du problème physique. Ces espaces $\mathscr{L}$, ou <u>espaces de Dirichlet</u>, constituent une généralisation naturelle des espaces $\mathscr{L}(C)$ que nous avons étudiés dans ce paragraphe, et dont les propriétés essentielles, exprimées dans le théorème 3-3 et la relation (3-2), serviront de point de départ axiomatique. La tâche suivante consistera à faire le raccord avec le point de vue ensembliste, c'est-à-dire à identifier chaque espace $\mathscr{L}$ avec un ensemble, ou une classe d'ensembles aléatoires équivalents, en l'occurence une classe <u>d'ouverts aléatoires</u> stationnaires. Ceci conduira à poser comme nouvelle définition, équivalente à la précédente, $K(G) = \chi(\mathscr{L})$, et permettra d'établir le résultat le plus important, qui confère à la notion de perméabilité le caractère d'une <u>capacité</u> définie sur des ensembles aléatoires.

$$G_n \uparrow G \Rightarrow K(G_n) \uparrow K(G) \quad \text{pour des } \underline{\text{ouverts}} \text{ aléatoires}$$

$$F_n \downarrow F \Rightarrow K(F_n) \downarrow K(F) \quad \text{pour des } \underline{\text{fermés}} \text{ aléatoires}$$

4. LES ESPACES DE DIRICHLET.

Prenant maintenant comme <u>axiomes</u> les propriétés que nous avons démontrées pour les espaces $\mathscr{L}(C)$, nous allons maintenant définir

une notion nouvelle, celle d'espace de Dirichlet, et désigner par $\mathcal{D}$ la classe de ces ensembles.

Par définition, un espace de Dirichlet est un couple $(\mathcal{L}, A\mathcal{L})$ vérifiant les trois caractéristiques suivantes :

[a] - $\mathcal{L}$ est un sous-vectoriel (non fermé en général) de L_1, constitué d'éléments $Y \in L_1$ tels que $U_x Y$ soit différentiable en moyenne quadratique, ce que nous écrirons $Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$ (avec un certain abus de notation). $A\mathcal{L}$, image de $\mathcal{L}$ par l'opérateur gradient A, est un sous-espace fermé de l'espace H_∂ des gradients.

[b] - Il existe une constante $\chi < \infty$ telle que

$$\|Y\|_1 \leq \sqrt{\chi} \ \|A\,Y\|_2 \qquad (Y \in \mathcal{L})$$

Nous désignerons par $\chi(\mathcal{L})$ la plus petite des constantes χ telles que cette inégalité ait lieu.

[c] - Si $Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$ et s'il existe $Z \in \mathcal{L}$ tel que $|Y| \leq |Z|$ p.s., alors Y appartient à $\mathcal{L}$.

4.1 - Commentaires de la définition.

1) La relation [b] implique que $Y \to A\,Y$ est une bijection de $\mathcal{L}$ sur $A\mathcal{L}$, et que l'application inverse $A\,Y \to Y$ est continue (de $A\mathcal{L}$ muni de sa norme hilbertienne sur $\mathcal{L}$ muni de la norme induite par L_1).

Il en résulte que la condition [c] ($A\mathcal{L}$ fermé dans l'espace H_∂ des gradients de L_2) est, en un sens, superflue. De fait, supposons que $A\mathcal{L}$ soit simplement un sous-vectoriel non fermé de H_∂, et soit $\overline{A\mathcal{L}}$ son adhérence dans H_∂. Alors, l'image inverse $\overline{\mathcal{L}}$ de $\overline{A\mathcal{L}}$ est dans $L_1 \cap \mathcal{D}_A$, et le couple $(\overline{\mathcal{L}}, \overline{A\mathcal{L}})$ est un espace de Dirichlet.

En effet, soit Y_n une suite dans $\mathcal{L}$, telle que $A\,Y_n \to G \in H_\partial$. Alors, Y_n est une suite de Cauchy dans L_1. D'après [b], en effet, on a

$$\|Y_n - Y_m\|_1 \leq \sqrt{\chi} \ \|A(Y_n - Y_m)\| \to 0$$

Soit donc Y la limite dans L_1 de la suite Y_n. Comme A (considéré comme opérateur de L_1) est un opérateur fermé, Y est différentiable au sens de L_1, et son gradient est G. Mais $G \in H_\partial$, et on a vu au chapitre 2 que cela entraine la différentiabilité de U_x Y au sens de L_2. On a donc bien $Y \in \mathcal{D}_A \cap L_1$. Comme l'inégalité [b] passe à la limite, l'application $Y \to A\,Y$ de $\mathcal{L}$ sur $\overline{A\mathcal{L}}$ est une bijection, et son inverse est continue.

Il reste à vérifier [c]. Soit $Z \in \overline{\mathcal{L}}$ et $Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$ tel que $|Y| \leq |Z|$. Quitte à traiter séparément Y_+ et Y_-, on peut supposer $Y \geq 0$ p.s. Comme Z est dans $\overline{\mathcal{L}}$, il existe une suite Z_n dans $\mathcal{L}$ telle que $A\,Z_n \to A\,Z$. Notons que l'axiome [c] implique que $|Z_n|$ est dans $\mathcal{L}$ dès que $Z_n \in \mathcal{L}$. Comme l'application $A\,X \to A|X|$ est continue, on a aussi $A|Z_n| \to A|Z|$. On peut donc, aussi bien, supposer Z et Z_n positifs p.s. Mais $Z_n \wedge Y$, majoré par Z_n, est dans $\mathcal{L}$, d'après l'axiome [c], et on vérifie facilement que $A(Z_n \wedge Y)$ converge vers $A(Z \wedge Y) = A\,Y$. Donc $Y \in \overline{\mathcal{L}}$ ■

Dans ce qui suit, nous désignerons par $\mathcal{L} \in \mathcal{D}$, plutôt que par $(\mathcal{L}, A\mathcal{L})$, un espace de Dirichlet. Mais la norme utilisée sera, en règle générale, la <u>norme hilbertienne</u> $\|A\,Y\|$ de $A\mathcal{L}$.

2) Comme nous l'avons déjà vu, l'axiome [c] entraine la propriété [c'] suivante :

[c'] - Si $Y \in \mathcal{L}$, alors $|Y| \in \mathcal{L}$ (donc aussi Y_+ et Y_-).

De fait, $|Y|$ est majoré par $|Y|$ lui-même, donc $|Y| \in \mathcal{L}$ d'après [c] ■

Si Y est un élément de $\mathcal{D}_A \cap L_1$, nous <u>désignerons</u> par $\Pi_{\mathcal{L}}\,Y = Y'$ <u>l'unique élément $Y' \in \mathcal{L}$ tel que $A\,Y'$ soit la projection de $A\,Y$ sur $A\mathcal{L}$</u>.

Montrons que les axiomes [a], [b] et [c] entrainent la propriété suivante :

[d] - Si Y est p.s. <u>positif</u> dans $\mathcal{D}_A \cap L_1$, alors :

$$Y \geq \Pi_{\mathcal{L}}\,Y \quad \text{(p.s.)}$$

En effet, posons $Y' = \Pi_{\mathscr{L}} Y$, et montrons d'abord $(Y-Y')_- \in \mathscr{L}$. De fait, Y étant p.s. positif, on a p.s. $(Y-Y')_- \leq Y'_+$. Mais $Y'_+ \in \mathscr{L}$ d'après [c']. Donc $(Y-Y')_- \in \mathscr{L}$, d'après [c].

Mais, par définition, $A(Y-Y')$ est orthogonal aux éléments de A donc, en particulier, à $A(Y-Y')_-$, puisque $(Y-Y')_- \in \mathscr{L}$. Ainsi :

$$< A(Y-Y') , A(Y-Y')_- > = 0$$

Mais, au signe près, ce produit scalaire est égal à $\|A(Y-Y')_-\|^2$. On a donc $A(Y-Y')_- = 0$. Comme $(Y-Y')_- \in \mathscr{L}$, cela entraine $(Y-Y')_- = 0$, c'est-à-dire :

$$Y \geq Y' \quad \text{p.s.}$$

En sens inverse, <u>les axiomes a/, b/, c'/ et d/ entrainent c/.</u>

En effet, d'après [c'], il suffit de raisonner dans les cas d'éléments positifs. Soit donc Y un élément positif de $\mathscr{D}_A \cap L_1$, et $Z \in \mathscr{L}$ tel que

$$0 \leq Y \leq Z \quad \text{p.s.}$$

Appliquant [d] à l'élément positif Y, et en posant $Y' = \Pi_{\mathscr{L}} Y$, il vient $Y-Y' \geq 0$. Appliquons maintenant [d] à $Z-Y \geq 0$. Comme $\Pi_{\mathscr{L}} Z = Z$, puisque $Z \in \mathscr{L}$, il vient cette fois $Y'-Y \geq 0$. Donc $Y = Y'$ p.s., et par suite $Y \in \mathscr{L}$. ■

3) Montrons maintenant que tout espace de Dirichlet $\mathscr{L}$ vérifie la propriété suivante, beaucoup plus forte que [c'] :

[e] - Pour toute fonction φ mesurable et localement intégrable surbR et tout $Y \in \mathscr{L}$ tel que $\| \varphi(Y) \text{ A } Y\| < \infty$, on a $f(Y) \in \mathscr{L}$, avec $f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, dx$, et donc $A\, f(Y) = \varphi(Y)$ A Y.

De fait, si φ est mesurable et borné, soit $|\varphi| \leq a < \infty$, on a $|f(Y)| \leq a|Y|$. Donc $f(Y) \in \mathscr{L}$, d'après [c]. Le cas général s'en déduit par continuité monotone. ■

Notons encore une importante propriété :

[f] - Si X et Y sont dans un espace $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$, alors $X \vee Y$ et $X \wedge Y$ appartiennent à $\mathscr{L}$.

En effet, d'après [c'], $Z \in \mathscr{L}$ entraine Z_+ et $Z_- \in \mathscr{L}$, et on peut se limiter au cas où X et Y sont positifs. Mais alors $0 \leq X \wedge Y \leq X$ entraine, d'après [c], que $X \wedge Y$ est dans $\mathscr{L}$, et par suite aussi $X \vee Y = X + Y - X \wedge Y$. ■

4) On peut donner également une version locale de ces propriétés de positivité. Nous appelons support S ou $S_{\mathscr{L}}$ de l'espace $\mathscr{L}$ le (p.s.) plus petit ensemble de Ω à l'extérieur duquel les $Y \in \mathscr{L}$ sont p.s. nuls.

~ Si deux éléments Y et Z de $\mathscr{D}_A \cap L_1$ coincident p.s. sur le support S de l'espace $\mathscr{L}$, on a $\Pi_{\mathscr{L}} Y = \Pi_{\mathscr{L}} Z$. Autrement dit : $\Pi_{\mathscr{L}} Y$ ne dépend que de $1_S Y$.

En effet, la relation $Y-Z = 1_{S^c}(Y-Z)$ entraine que Y-Z est dans $\mathscr{L}(S^c)$, puisque cet élément est déjà dans $\mathscr{D}_A \cap L_1$, et donc :

$$A(Y-Z) = 1_{S^c} A(Y-Z)$$

Il en résulte $< A(Y-Z), A X > = 0$ pour tout $X \in \mathscr{L}$. Mais cela signifie par définition $\Pi_{\mathscr{L}}(Y-Z) = 0$ ■

~ Si Y est p.s. ≥ 0 sur S, alors $1_S Y \geq \Pi_{\mathscr{L}} Y$ p.s.

En effet, Y et Y_+ coïncident sur S. Donc $Y' = \Pi_{\mathscr{L}} Y = \Pi_{\mathscr{L}} Y_+$, d'après ce qui précède. Mais $Y_+ - Y'$ est p.s. ≥ 0, d'après [d]. On a donc bien $1_S Y \geq Y'$ p.s. ■

~ Si $0 \leq Y \leq Z$ p.s. sur S pour un $Z \in \mathscr{L}$ et $Y \in \mathscr{D}_A \cap L_1$, alors

$$1_S Y \in \mathscr{L}$$

On le voit en appliquant le résultat précédent successivement à Y et à Z-Y, ce qui donne $1_S Y = Y' \in \mathscr{L}$ ■

5) L'énoncé suivant montre que l'appartenance à un espace $\mathscr{L}$ a bien la signification d'une "condition aux limites".

[g] - Pour qu'un élément p.s. positif $Y \in \mathscr{D}_A \cap L_1$ appartienne à $\mathscr{L}$, il faut et il suffit qu'il existe $a > 0$ et $Z \in \mathscr{L}$ tels que :

$$0 \leq Y \wedge a \leq Z \quad \text{p.s.}$$

Cette condition est nécessaire : car, si $0 \leq Y \in \mathscr{L}$, on a $0 \leq Y \wedge a \leq Y$ (et aussi $Y \wedge a \in \mathscr{L}$ d'après les propriétés ci-dessus).

Inversement, supposons $0 \leq Y \wedge a \leq Z$ $(Z \in \mathscr{L},\ a > 0,\ Y \in \mathscr{D}_A \cap L_1)$. Posons :

$$Y_0 = Y \wedge a\ ,\quad Y_1 = (Y-a)_+ \wedge a\ ,\ldots\ Y_n = (Y-n\,a)_+ \wedge a \ldots$$

Pour chaque $n > 1$, Y_n est nul sur $\{Y < a\}$ et majoré par a sur $\{Y \geq 0\}$. Donc $0 \leq Y_n \leq Y_0 \leq Z$ p.s., et tous les Y_n appartiennent à $\mathscr{L}$. Mais les Y_n, donc aussi leurs gradients $A\,Y_n$ (lemme 3-1) ont des supports disjoints. Par suite $A\,Y$ est égal à la somme orthogonale $\sum A\,Y_n$, donc appartient à $A\,\mathscr{L}$ ■

4.2 - Le potentiel $Y_{\mathscr{L}}$ d'un espace de Dirichlet $\mathscr{L}$.

Comme $Y \in \mathscr{L}$ entraine $|Y| \in \mathscr{L}$, $\mathscr{L}$, s'il n'est pas nul, contient des éléments positifs. En particulier, il existe toujours des $Y \in \mathscr{L}$ tels que

$$E\,Y = \chi(\mathscr{L})$$

et les gradients $A\,Y$ de ces éléments constituent une variété linéaire fermée dans $A\,\mathscr{L}$, à cause de la continuité de l'application $A\,Y \to Y$. Nous désignerons alors par $Y_{\mathscr{L}}$ l'unique élément de $\mathscr{L}$ tel que $A\,Y_{\mathscr{L}}$ soit la projection de 0 sur cette variété linéaire fermée, et nous dirons que $Y_{\mathscr{L}}$ est le potentiel de l'espace $\mathscr{L}$. Il est caractérisé par les relations :

$$(4\text{-}1) \qquad < A\,Y_{\mathscr{L}}\ ,\ A\,Z > \ = \ E\,Z \qquad (Z \in \mathscr{L})$$

qui impliquent, en particulier :

$$E\, Y_{\mathscr{L}} = \|A\, Y_{\mathscr{L}}\|^2 = \chi(\mathscr{L})$$

Comme $Y_{\mathscr{L}}$ réalise le minimum de $\|A\, Y\|^2/(E\, Y)^2$, $Y \in \mathscr{L}$, on voit immédiatement qu'il est p.s. positif ou nul.

Nous nous proposons de montrer qu'un espace $\mathscr{L}$ est entièrement défini par la donnée de son potentiel $\mathscr{L}$. Nous allons, pour cela, procéder par étapes. Posons d'abord un lemme utile :

LEMME 4-1 - Soit Y_n une suite dans $\mathscr{L}$ telle que $A\, Y_n$ converge vers $A\, Y$ dans $A\mathscr{L}$. Alors $A|Y_n|$ converge vers $A|Y|$, $A\, Y_n^+$ vers $A\, Y_+$ etc.. dans $A\mathscr{L}$. De plus $|Y_n|$ converge vers $|Y|$ et Y_n^+ vers Y_+ au sens de L_1.

En effet, d'après le lemme 3-1, $A\, Y$ et $A|Y|$ ont même norme, et l'application $A\, Y \to A|Y|$ est continue. Comme on a dans :

$$\| |Y_n| - |Y| \|_1 \leq \sqrt{\chi(\mathscr{L})}\, \|A\, |Y_n| - A\, |Y|\|$$

la seconde partie de l'énoncé en résulte. ■

Nous allons maintenant montrer que, pour tout Y appartenant à un $\mathscr{L}_o \in \mathscr{D}$ donné, il existe un plus petit espace de Dirichlet contenant Y, ou espace de Dirichlet engendré par Y, que nous noterons $\mathscr{L}(Y)$. L'hypothèse $Y \in \mathscr{L}_o$ joue un rôle essentiel dans la construction qui suit, puisqu'elle nous permet de mettre à profit la propriété [b] des espaces de Dirichlet.

Nous désignerons par $\mathscr{L}_b(Y)$ la famille des $Z \in \mathscr{D}_A \cap L_1$ admettant une majoration de la forme

$$|Z| \leq a\, |Y| \quad \text{p.s.}$$

pour un nombre $a \geq 0$. D'après les propriétés de positivité, on a $\mathscr{L}_b(Y) \subset \mathscr{L}_o$. Désignons donc par $\overline{\mathscr{L}}_b(Y)$ l'image inverse dans $\mathscr{L}_o$ par la bijection A de l'adhérence $\overline{A\mathscr{L}}_b$ de $A\, \mathscr{L}_b$ dans $A\, \mathscr{L}_o$. Evidemment $A\, \overline{\mathscr{L}}_b = \overline{A\, \mathscr{L}}_b$, et $\overline{\mathscr{L}}_b \subset \mathscr{L}_o$. Plus généralement, tout espace de

Dirichlet contenant Y contiendra $\mathscr{L}_b$. Nous allons montrer que $\mathscr{L}_b$ est en fait un espace de Dirichlet, d'où résultera que c'est le plus petit espace de Dirichlet $\mathscr{L}(Y)$ contenant Y.

Or, cela est immédiat. En effet, $\mathscr{L}_b$ vérifie par construction les propriétés [b] (puisque $\mathscr{L}_b \subset \mathscr{L}_0$) et [c] . Il suffit donc d'appliquer le commentaire 1) du paragraphe 4-1 pour conclure $\mathscr{L}_b \in \mathscr{D}$. ■

Montrons maintenant que <u>tout espace de Dirichlet est engendré par son potentiel</u>, soit $\mathscr{L} = \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}})$.

En effet, il est clair que $Y_{\mathscr{L}} \in \mathscr{L}_b(Y_{\mathscr{L}})$, d'où résulte $\mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}}) \subset \mathscr{L}$ (puisque $Y_{\mathscr{L}} \in \mathscr{L}$), et il faut montrer l'inclusion inverse .

Soit Z un élément positif de $\mathscr{L}$, et $Z' \in \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}})$ tel que A Z' soit la projection de A Z sur $A\,\mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}})$. D'après l'axiome [d] , on a :

$$Z - Z' \geq 0 \qquad \text{(p.s.)}$$

Mais $(Z-Z') \in \mathscr{L}$, et par suite, d'après la caractérisation du potentiel :

$$E(Z-Z') = \langle A\, Y_{\mathscr{L}} , A(Z-Z') \rangle$$

Or, ce produit scalaire est nul, d'après la définition même de Z'. Donc $E(Z-Z') = 0$. Comme Z-Z' est p.s. positif, il en résulte bien $Z = Z' \in \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}})$ ■

Soient maintenant Y et Y' deux éléments de $\mathscr{L}_0$. Tout espace de Dirichlet contenant Y et Y' contiendra $|Y| \vee |Y'|$, donc aussi $\mathscr{L}(|Y| \vee |Y'|)$, qui est ainsi <u>le plus petit majorant dans $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}(Y)$ et $\mathscr{L}(Y')$</u>. Nous écrirons :

$$\mathscr{L}(Y) \vee \mathscr{L}(Y') = \mathscr{L}(|Y| \vee |Y'|)$$

En particulier, <u>deux espaces de Dirichlet $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ contenus dans un même $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$ admettent un Sup</u>, à savoir :

$$\mathscr{L} \vee \mathscr{L}' = \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'})$$

Soient maintenant $Y \in \mathscr{L}_0$, $Y' \in \mathscr{L}'_0$, sans que les espaces de Dirichlet $\mathscr{L}_0$ et $\mathscr{L}'_0$ soient nécessairement égaux. Comme l'élément $|Y| \wedge |Y'|$ appartient, par exemple, à $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}(|Y| \wedge |Y'|)$ existe. On a, manifestement

$$\mathscr{L}_b(|Y| \wedge |Y'|) \subset \mathscr{L}(Y) \cap \mathscr{L}(Y')$$

donc, l'intersection $A\mathscr{L}_Y \cap A\mathscr{L}_{Y'}$, étant fermée dans H_∂ ,

$$\mathscr{L}(|Y| \wedge |Y'|) \subset \mathscr{L}(Y) \cap \mathscr{L}(Y')$$

Inversement, soit $Z \in \mathscr{L}(Y) \cap \mathscr{L}(Y')$. Nous pouvons toujours supposer $Z \geq 0$ p.s. Il existe alors deux suites positives $Z_n \in \mathscr{L}^+_b(Y)$ et $Z'_n \in \mathscr{L}^+_b(Y')$ avec $A\,Z_n \to A\,Z$ et $A\,Z'_n \to A\,Z$. L'élément $Z_n \wedge Z'_n$ est dans $\mathscr{L}(|Y| \wedge |Y'|)$. D'autre part, on vérifie sans peine que $A(Z_n \wedge Z'_n) \to A\,Z$. Par suite $Z \in \mathscr{L}(|Y| \wedge |Y'|)$, et :

$$\mathscr{L}(|Y| \wedge |Y'|) = \mathscr{L}(Y) \cap \mathscr{L}(Y')$$

Ainsi, il existe toujours un plus grand espace de Dirichlet contenu dans $\mathscr{L}(Y)$ et $\mathscr{L}(Y')$, à savoir leur intersection. En particulier, <u>la classe $\mathscr{D}$ des espaces de Dirichlet est stable pour l'intersection</u>.

Résumons ces différents résultats :

<u>THEOREME 4-1</u> - Pour tout Y appartenant à un espace $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$, il existe un plus petit espace de Dirichlet $\mathscr{L}(Y)$ contenant Y, ou <u>espace de Dirichlet engendré par Y</u>. En particulier, tout espace $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$ est engendré par son potentiel $Y_{\mathscr{L}}$.

La classe $\mathscr{D}$ des espaces de Dirichlet est <u>stable pour l'intersection</u>. Si Y et Y' sont dans un même $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$, il existe un plus petit espace de Dirichlet les contenant, à savoir $\mathscr{L}(|Y| \vee |Y'|)$. En particulier, la classe $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ des sous-espaces de Dirichlet d'un $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$ donnée est <u>réticulée</u>, l'Inf et le Sup étant donnés par :

$$\begin{cases} \mathscr{L} \wedge \mathscr{L}' = \mathscr{L} \cap \mathscr{L}' \\ \mathscr{L} \vee \mathscr{L}' = \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'}) \end{cases}$$

Nous verrons plus loin que $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ est même complément réticulé.

COROLLAIRE - Pour tout $Y \in \mathscr{L}$, on a $\{Y \neq 0\} \subset \{Y_{\mathscr{L}} \neq 0\}$ p.s. dans $\mathscr{A}$.

En effet, cette inclusion p.s. est vraie pour tout élément de $\mathscr{L}_b(Y_{\mathscr{L}})$, et passe à la limite. Elle subsiste donc pour tout $Y \in \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}}) = \mathscr{L}$ ■.

Nous poserons $S_{\mathscr{L}} = \{Y_{\mathscr{L}} \neq 0\}$, et nous dirons que cet ensemble est le support de l'espace de Dirichlet $\mathscr{L}$. Evidemment, $S_{\mathscr{L}} \in \mathscr{A}$.

Le théorème 4-1 montre qu'un espace $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$ est complètement déterminé par son potentiel $Y_{\mathscr{L}}$. Mais plusieurs espaces de Dirichlet distincts peuvent admettre le même support. Pour tout $S \in \mathscr{A}$, désignons, comme dans le chapitre 3, par $\mathscr{L}(S)$ l'espace de Dirichlet constitué des $Y \in \mathscr{D}_A \cap L_1$ vérifiant $1_S Y = Y$ p.s. On a, évidemment, pour tout $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{L}(S_{\mathscr{L}})$$

Mais cette inclusion est stricte en général. Par contre, nous allons voir dans le paragraphe suivant, que tout espace $\mathscr{L}$ est limite monotone d'une suite d'espaces $\mathscr{L}(S_n)$, avec $S_n \uparrow S_{\mathscr{L}}$ p.s. dans $\mathscr{A}$.

4.3 - Propriétés de continuité monotone.

Le théorème suivant ne fait que reprendre des résultats établis dans le cas des espaces $\mathscr{L}(S)$, et se démontre de la même manière :

THEOREME 4-2 - Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux espaces de Dirichlet. On a $\mathscr{L} \supset \mathscr{L}'$ si et seulement si $Y_{\mathscr{L}} \geq Y_{\mathscr{L}'}$ p.s., et cela entraine $\chi(\mathscr{L}) \geq \chi(\mathscr{L}')$. Lorsque $\mathscr{L} \supset \mathscr{L}'$, les conditions $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$,

$\chi(\mathscr{L}) = \chi(\mathscr{L}')$ et $Y_{\mathscr{L}} = Y_{\mathscr{L}'}$ p.s. sont équivalentes.

Soit $\mathscr{L}_n$ une suite <u>décroissante</u> dans $\mathscr{D}$, et $\mathscr{L} = \bigcap \mathscr{L}_n$. Alors $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$, $\chi(\mathscr{L}_n) \downarrow \chi(\mathscr{L})$, $Y_{\mathscr{L}_n} \downarrow Y_{\mathscr{L}}$ p.s., $A\, Y_{\mathscr{L}_n} \to A\, Y_{\mathscr{L}}$ dans L_2, $Y_{\mathscr{L}_n} \to Y_{\mathscr{L}}$ dans L_1, et $A\, Y_{\mathscr{L}}$ est la projection sur $A\mathscr{L}$ de chacun des $A\, Y_{\mathscr{L}_n}$.

Soit $\mathscr{L}_n$ une suite <u>croissante</u> dans $\mathscr{D}$ telle que $\sup \chi(\mathscr{L}_n) < \infty$. Posons $A\mathscr{L} = \overline{\bigcup A\mathscr{L}_n}$, et soit $\mathscr{L}$ l'image réciproque de $A\mathscr{L}$ dans $L_1 \cap \mathscr{D}_A$. Alors $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$, $\chi(\mathscr{L}_n) \uparrow \chi(\mathscr{L})$, $Y_{\mathscr{L}_n} \uparrow Y_{\mathscr{L}}$ p.s. $Y_{\mathscr{L}_n} \to Y_{\mathscr{L}}$ dans L_1, $A\, Y_{\mathscr{L}_n} \to A\, Y_{\mathscr{L}}$ dans L_2, et chaque $A\, Y_{\mathscr{L}_n}$ est la projection de $A\, Y_{\mathscr{L}}$ sur $A\mathscr{L}_n$.

Le seul point délicat concerne, dans le cas des suites croissantes, l'affirmation que l'image réciproque de $A\mathscr{L}$ est dans $L_1 \cap \mathscr{D}_A$. On le vérifie en appliquant le commentaire 1) du paragraphe 4.1.

Compte tenu de ces propriétés de continuité monotone, nous écrirons :

$$\mathscr{L}_n \uparrow \mathscr{L}\ ,\quad \mathscr{L}_n \downarrow \mathscr{L}$$

dans le cas des suites respectivement croissantes et décroissantes.

Nous allons maintenant montrer que les espaces du type $\mathscr{L}(S)$, $S \in \mathscr{A}$ sont <u>denses (pour la convergence monotone) dans l'espace $\mathscr{D}$</u>. Pour commencer, nous allons établir, concernant les <u>potentiels tronqués</u> $(Y_{\mathscr{L}} - \varepsilon)_+$ un résultat qui généralise ce que nous avons vu au chapitre précédent.

Soit $\mathscr{L}$ un espace de Dirichlet, et $Y_{\mathscr{L}}$ son potentiel. Posons :

$$Y_\varepsilon = (Y_{\mathscr{L}} - \varepsilon)_+ \ ;\ S_\varepsilon = \{Y_{\mathscr{L}} > \varepsilon\} = \{Y_\varepsilon > 0\} \quad (\varepsilon > 0)$$

Y_ε est évidemment dans $\mathscr{L}$, et $A\, Y_\varepsilon = 1_{S_\varepsilon} A\, Y_{\mathscr{L}}$, autrement dit, $Y_\varepsilon \in \mathscr{L}(S_\varepsilon)$. Nous allons montrer que, pour tout ε positif, <u>Y_ε est le potentiel de $\mathscr{L}(S_\varepsilon)$</u>. Plus précisément, désignons par $\mathscr{L}_\varepsilon$ l'ensemble des $Y \in \mathscr{L}$ tels que $\{Y \neq 0\} \subset S_\varepsilon$ p.s. On vérifie sans peine que $A_{\mathscr{L}_\varepsilon}$

est fermé et que $\mathcal{L}_\varepsilon$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$, à savoir $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}(S_\varepsilon)$. En fait, nous allons montrer que l'on a l'égalité $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(S_\varepsilon)$.

Tout d'abord, $A\,Y_\varepsilon$ est la projection de $A\,Y_{\mathcal{L}}$ sur $A\,\mathcal{L}_\varepsilon$. En effet, si $Z \in \mathcal{L}_\varepsilon \subset \mathcal{L}(S_\varepsilon)$, on a $A\,Z = 1_{S_\varepsilon}\,A\,Z$, et par suite :

$$\langle A\,Y_\varepsilon\,,\,A\,Z\rangle = \langle 1_{S_\varepsilon}\,A\,Y_{\mathcal{L}}\,,\,A\,Z\rangle = \langle A\,Y_{\mathcal{L}}\,,\,A\,Z\rangle = E(Z)$$

Cette relation montre que $A\,Y$ est la projection de $A\,Y_{\mathcal{L}}$ sur $A\,\mathcal{L}_\varepsilon$. De plus, lorsque nous aurons établi que $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(S_\varepsilon)$, elle permettra d'affirmer que le potentiel tronqué Y_ε est bien le potentiel de $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$.

Montrons donc $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}(S_\varepsilon)$. Par définition, $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}(S_\varepsilon) \subset \mathcal{L}(S_\varepsilon)$, et il faut établir l'inclusion inverse.

Soit donc Y un élément de $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$, que l'on peut supposer positif et borné (puisque ces éléments engendrent $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$, soit :

$$0 \le Y \le b < \infty \quad \text{p.s.}$$

et montrons $Y \in \mathcal{L}_\varepsilon$. Pour $a > 0$, posons :

$$Y_a = Y \wedge a\,Y_{\mathcal{L}}$$

Comme $Y \in \mathcal{L}(S_\varepsilon)$, et $Y_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$, cet élément Y_a est dans $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}(S_\varepsilon) = \mathcal{L}_\varepsilon$, d'après les propriétés de positivité. Or, on a :

$$A\,Y_a = 1_{Y \le aY_{\mathcal{L}}}\,A\,Y + a\,1_{Y > aY_{\mathcal{L}}}\,A\,Y_{\mathcal{L}}$$

Comme $Y_{\mathcal{L}} > \varepsilon$ p.s. sur S_ε, par définition, et $Y \le b$ p.s., on voit que $A\,Y_a = A\,Y$ dès que a est supérieur à b/ε. Donc $Y \in \mathcal{L}_\varepsilon$, d'où résulte la propriété.

Plus généralement, on démontre de la même manière le

THEOREME 4-3 - Soit $S \in \mathcal{A}$ tel que l'on ait p.s. $Y_{\mathcal{L}} \geq \varepsilon$ sur S pour un $\varepsilon > 0$. Alors $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S)$. En particulier, en prenant $S_\varepsilon = \{Y_{\mathcal{L}} > \varepsilon\}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}(S_\varepsilon) = \mathcal{L}(S_\varepsilon)$. De plus, $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$ admet comme potentiel le "potentiel tronqué" $Y_\varepsilon = (Y_{\mathcal{L}} - \varepsilon)_+$, et $A\,Y_\varepsilon$ est la projection de $A\,Y_{\mathcal{L}}$ sur $A\,\mathcal{L}(S_\varepsilon)$.

On en déduit le résultat annoncé concernant la densité dans $\mathcal{D}$ des espaces du type $\mathcal{L}(S)$, $S \in \mathcal{A}$:

THEOREME 4-4 - Pour tout espace de Dirichlet $\mathcal{D}$, il existe une suite C_n, p.s. croissante dans $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{L}(C_n) \uparrow \mathcal{L}$.

En effet, prenons par exemple $C_n = \{Y_{\mathcal{L}} > \frac{1}{n}\}$. D'après le théorème 4-3, le potentiel $Y(C_n)$ de $\mathcal{L}(C_n)$ est $(Y_{\mathcal{L}} - \frac{1}{n})_+$. Donc $Y(C_n) \uparrow Y_{\mathcal{L}}$ D'après le théorème 4-2, cela implique $\mathcal{L}(C_n) \uparrow \mathcal{L}$, puisqu'un espace de Dirichlet est déterminé par son potentiel (Théorème 4-1). ■

Notons encore quelques propriétés complémentaires.

THEOREME 4-5 - L'ensemble $\mathcal{D}$ des espaces de Dirichlet est stable pour l'intersection infinie. Pour tout $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{D}$, l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{L}_0)$ des sous-espaces de Dirichlet de $\mathcal{L}_0$ est complètement réticulé.

Pour $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \in \mathcal{D}$, les 3 conditions suivantes sont équivalentes : (i) - $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont une intersection nulle ; (ii) les supports $S_{\mathcal{L}}$ et $S_{\mathcal{L}'}$ sont p.s. disjoints, et (iii) $A\,\mathcal{L}$ et $A\,\mathcal{L}'$ sont orthogonaux. Ces conditions impliquent :

$$\mathcal{L} \vee \mathcal{L}' = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}' \quad ; \quad Y_{\mathcal{L} \vee \mathcal{L}'} = Y_{\mathcal{L}} + Y_{\mathcal{L}'}$$

Inversement, si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont contenus dans un même $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{D}$, la condition $Y_{\mathcal{L} \vee \mathcal{L}'} = Y_{\mathcal{L}} + Y_{\mathcal{L}'}$ entraine $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = 0$.

Nous savons déjà que $\mathcal{D}$ est stable pour l'intersection finie (Th. 4-1), et le théorème 4-2 permet de conclure que $\mathcal{D}$ est stable pour l'intersection dénombrable. Le cas de l'intersection non dénombrable s'en déduit par un argument classique.

Il en résulte que toute famille $D \subset \mathcal{D}(\mathcal{L}_0)$, pour un $\mathcal{L}_0 \in \mathcal{D}$,

admet un plus petit majorant : à savoir l'intersection de la famille (non vide, puisqu'elle contient $\mathscr{L}_0$) des majorants de D . $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ est donc complètement réticulé.

Si $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in \mathscr{D}$ et $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}' = 0$, $Y_{\mathscr{L}} \wedge Y_{\mathscr{L}'} \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$ entraine $Y_{\mathscr{L}} \wedge Y_{\mathscr{L}'} = 0$ p.s., et donc $S_{\mathscr{L}} \cap S_{\mathscr{L}'} = \phi$ p.s. Si $S_{\mathscr{L}} \cap S_{\mathscr{L}'} = \phi$ p.s., les espaces $A\mathscr{L}$ et $A\mathscr{L}'$ sont évidemment orthogonaux. Cette dernière condition, enfin, entraine $A\mathscr{L} \cap A\mathscr{L}' = 0$, et donc aussi $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}' = 0$.

Si $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}' = 0$ on a $\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}' \in \mathscr{D}$, et par suite $\mathscr{L} \vee \mathscr{L}' = \mathscr{L} \oplus \mathscr{L}'$.

En effet, on vérifie sans difficulté les conditions [a], [b] et [c] de la définition des espaces de Dirichlet. De la relation (4-1), on déduit alors immédiatement :

$$Y_{\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}'} = Y_{\mathscr{L}} + Y_{\mathscr{L}'} \quad ; \quad \chi(\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}') = \chi(\mathscr{L}) + \chi(\mathscr{L}')$$

En sens inverse, supposons que pour $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ on ait :

$$(\alpha) \qquad Y_{\mathscr{L} \vee \mathscr{L}'} = Y_{\mathscr{L}} + Y_{\mathscr{L}'}$$

Pour tout $Y \in \mathscr{L}$ (par exemple), on a, puisque $\mathscr{L} \subset \mathscr{L} \vee \mathscr{L}'$:

$$E\,Y = \langle A\,Y_{\mathscr{L}}\,,\, A\,Y \rangle = \langle A\,Y_{\mathscr{L} \vee \mathscr{L}'}\,,\, A\,Y \rangle$$

Compte tenu de la relation (α), ceci implique $\langle A\,Y_{\mathscr{L}'}\,,\, A\,Y \rangle = 0$, c'est-à-dire $E(\Pi_{\mathscr{L}'}, Y) = 0$. Prenons $Y = Y_{\mathscr{L}} \wedge Y_{\mathscr{L}'}$, d'où $\Pi_{\mathscr{L}'}\, Y = Y$, puisque $Y \in \mathscr{L}'$. Dans ce cas, il vient $E\,Y = 0$, c'est-à-dire, puisque Y est un élément positif, $Y = 0$ p.s. Ainsi, on a $Y_{\mathscr{L}} \wedge Y_{\mathscr{L}'} = 0$ p.s., mais cela entraine $S_{\mathscr{L}} \cap S_{\mathscr{L}'} = \phi$, et donc $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}' = 0$. ■

Il est intéressant de noter les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1 - (Continuité de l'intersection). Soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ et deux suites $\mathscr{L}_n$ et $\mathscr{L}'_n$ dans $\mathscr{D}$. Si $\mathscr{L}_n \uparrow \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'_n \uparrow \mathscr{L}'$, alors $\mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n \uparrow \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$. De même, si $\mathscr{L}_n \downarrow \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'_n \downarrow \mathscr{L}'$, alors $\mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n \downarrow \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$.

Cela est immédiat pour la limite $\downarrow$, qui n'est autre qu'une intersection. Dans le cas de la limite $\uparrow$, on trouve immédiatement :

$$\lim \uparrow (\mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n) \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$$

Soit $Y \geq 0$ p.s. un élément de $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$. On peut trouver des éléments positifs $Y_n \in \mathscr{L}_n$ et $Y'_n \in \mathscr{L}'_n$ tels que $A\, Y_n \to A\, Y$ et $A\, Y'_n \to A\, Y$. Posant $Z_n = Y_n \wedge Y'_n \in \mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n$, on vérifie sans peine $A\, Z_n \to A\, Y$ D'où $Y \in \lim \uparrow\ (\mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n)$, et l'égalité $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}' = \lim \uparrow (\mathscr{L}_n \cap \mathscr{L}'_n)$ ■

COROLLAIRE 2 - Soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ et deux suites $\mathscr{L}_n$ et $\mathscr{L}'_n$ contenues dans un même $\mathscr{L}'' \in \mathscr{D}$. Si $\mathscr{L}_n \uparrow \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'_n \uparrow \mathscr{L}'$, alors $(\mathscr{L}_n \vee \mathscr{L}'_n) \uparrow (\mathscr{L} \vee \mathscr{L}$

On remarquera que la continuité monotone $\downarrow$ n'est pas vérifiée, en général.

D'après le théorème 4-1, $\mathscr{L} \vee \mathscr{L}'$ est engendré par $Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'}$. Supposons $\mathscr{L}_n \uparrow \mathscr{L}$, $\mathscr{L}'_n \uparrow \mathscr{L}'$, $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in \mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$, et désignons par $\mathscr{L}_0$ la limite $\uparrow$ de la suite $\mathscr{L}_n \vee \mathscr{L}'_n$ (Th. 4-2). On a manifestement :

$$\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{L} \vee \mathscr{L}'$$

et il faut montrer l'inclusion inverse. Comme $Y_{\mathscr{L}_n} \uparrow Y_{\mathscr{L}}$ et $Y_{\mathscr{L}'_n} \uparrow Y_{\mathscr{L}'}$, on a $Y_{\mathscr{L}_n} \vee Y_{\mathscr{L}'_n} \uparrow Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'}$. D'autre part, en posant $Y_n = Y_{\mathscr{L}_n \vee \mathscr{L}'_n}$ il est clair que $Y_n \geq Y_{\mathscr{L}_n} \vee Y_{\mathscr{L}'_n}$ p.s. Par suite $Y_0 = \lim \uparrow Y_n \supset Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'}$. Mais (Th. 4-2), Y_0 est le potentiel de $\mathscr{L}_0$. Il en résulte $\mathscr{L}_0 \supset \mathscr{L}(Y_{\mathscr{L}} \vee Y_{\mathscr{L}'}) = \mathscr{L} \vee \mathscr{L}'$, et l'égalité. ■

4.4 - Compléments sur l'espace métrique $\mathscr{D}$.

Ces compléments ne seront guère utilisés dans ce qui suit, mais méritent peut-être d'être notés ici. Pour $\mathscr{L}, \mathscr{L}' \in \mathscr{D}$, posons :

$$d(\mathscr{L}, \mathscr{L}') = \| A\, Y_{\mathscr{L}} - A\, Y_{\mathscr{L}'} \|$$

Alors d est une distance sur $\mathscr{D}$.

En effet, le seul point qui mérite vérification est que $d(\mathscr{L},\mathscr{L}') = 0$ entraine $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$. Or, si $d(\mathscr{L}, \mathscr{L}') = 0$, on a $A\, Y_{\mathscr{L}} = A\, Y_{\mathscr{L}'}$, et par suite $\Pi_{\mathscr{L}'}\, Y_{\mathscr{L}} = Y_{\mathscr{L}'}$, et $\Pi_{\mathscr{L}}\, Y_{\mathscr{L}'} = Y_{\mathscr{L}}$. Comme $Y_{\mathscr{L}}$, par exemple, est ≥ 0, il en résulte $Y_{\mathscr{L}} - Y_{\mathscr{L}'} \geq 0$ p.s., et de même $Y_{\mathscr{L}'} - Y_{\mathscr{L}} \geq 0$. Donc $Y_{\mathscr{L}} = Y_{\mathscr{L}'}$ p.s. ■

Il est clair que l'application $\mathscr{L} \to \chi(\mathscr{L}) = \|A\, Y_{\mathscr{L}}\|^2$ est continue sur l'espace métrique $\mathscr{D}$.

Mon objectif, dans ce qui suit, est seulement de montrer que, pour tout $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$, $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ est un sous-espace fermé complet de $\mathscr{D}$. Pour cela, je pose d'abord quelques lemmes (en fait, ceux qui concernent la convergence faible ne seront pas utilisés, mais me semblent mériter d'être cités).

LEMME 4-2 - Si $A\, Y_n$ converge faiblement vers $A\, Y$ dans $A\, \mathscr{L}_0$ pour un $\mathscr{L}_0 \in \mathscr{D}$, alors $Y_n \to Y$ fortement dans L_1.

En effet, la continuité de l'application $A\, Y \to A|Y|$ montre que $A\, |Y_n - Y|$ converge faiblement vers 0. On a donc :

$$E(|Y_n - Y|) = \langle A\, Y_{\mathscr{L}_0}\, ,\, A\, |Y_n - Y| \rangle \to 0 \qquad \blacksquare$$

LEMME 4-3 - Si $A\, Y_n \to A\, Y_0$ fortement (resp. faiblement) dans $A\, \mathscr{L}_0$, alors pour tout $Y \in \mathscr{L}(Y_0)$ on peut trouver une suite $Z_n \in \mathscr{L}(Y_n)$ telle que $A\, Z_n \to A\, Y$ fortement (resp. faiblement) dans L_2 et $Z_n \to Y$ fortement dans L_1.

De plus, dans le cas de la convergence forte $A\, Y_n \to A\, Y_0$, on a

$$\chi(\mathscr{L}(Y_0)) \leq \varliminf \chi(\mathscr{L}(Y_n))$$

On peut se limiter au cas où les éléments Y_n et Y_0 sont p.s. positifs.

(i) - Soit d'abord un $Y \in \mathscr{L}(Y_0)$ tel que

$$0 \leq Y \leq a\, Y_0 \qquad (a > 0)$$

Posons $Z_n = Y \wedge a\, Y_n$. Il est alors immédiat que $Z_n \in \mathscr{L}(Y_n)$ et $A\, Z_n \to A\, Y$ fortement (resp. faiblement) dans L_2, et par suite (Lemme 4-2), $Z_n \to Y$ fortement dans L_1.

(ii) - Le passage au cas général est trivial dans le cas de la convergence forte. Supposons donc $A\, Y_n \to A\, Y_o$ faiblement, Y_n et Y_o étant p.s. positifs, et soit $Y \geq 0$ p.s. dans $\mathscr{L}(Y_o)$. D'après la construction de l'espace $\mathscr{L}(Y_o)$ paragraphe 4-2), nous savons qu'il existe une suite Y_k dans $\mathscr{L}_o$ et des nombres $a_k \geq 0$ tels que :

$$0 \leq Y_k \leq a_k\, Y_o \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad A\, Y_k \to A\, Y \text{ fortement et } Y_k \to Y \text{ dans } L_1$$

D'après la partie (i) de la démonstration, pour chaque k on peut trouver une suite $Y_{n,k}$ dans $\mathscr{L}_o$ telle que :

$$Y_{n,k} \in \mathscr{L}(Y_n) \; ; \; A\, Y_{n,k} \to A\, Y_k \text{ faiblement, } Y_{n,k} \to Y_k \text{ dans } L_1 \text{ pour } n \to$$

Posant $\varepsilon_k = \|Y - Y_k\|_1$, on a $\varepsilon_k \to 0$, et, pour chaque k, on peut trouver N_k tel que $n \geq N_k$ entraine $\|Y_k - Y_{n,k}\|_1 \leq \varepsilon_k$.

Par suite, on peut extraire de la famille des $Y_{n,k}$ une suite Y'_n telle que $Y'_n \in \mathscr{L}_n$ pour chaque n, et $Y'_n \to Y$ dans L_1.

Mais, les $\|A\, Y_{n,k}\|$ étant bornés par un nombre fixe $b < \infty$, on peut trouver une suite partielle Y'_{n_k} telle que $A\, Y'_{n_k}$ converge faiblement vers un élément $A\, Y'$ de $A\, \mathscr{L}_o$. D'après le lemme 4-2, on a alors $Y'_{n_k} \to Y'$ dans L_1, donc $Y' = Y$. Comme cette limite est unique, il en résulte que la suite $A\, Y'_n$ converge elle-même vers $A\, Y$ (faiblement). D'après le lemme 4-1, onna encore $Y'_n \to Y$ dans L_1.

Dans le cas de la convergence <u>forte</u> $A\, Y_n \to A\, Y_o$, désignons par $\text{Pot}\, Y_o$ le potentiel de $\mathscr{L}(Y_o)$. En appliquant à $\text{Pot}\, Y_o$ les résultats précédents, nous voyons qu'il existe une suite $Z_n \in \mathscr{L}(Y_n)$ avec $A\, Z_n \to A\, \text{Pot}\, Y_o$ fortement. Comme $E\, Z_n \to E\, Z_o$ et $\|A\, Z_n\| \to \|A\, \text{Pot}\, Y_o\|$ nous trouvons :

$$\chi(\mathscr{L}(Y_o)) = \frac{(E\, \text{Pot}\, Y_o)^2}{\|A\, \text{Pot}\, Y_o\|^2} = \lim \frac{(E\, Z_n)^2}{\|A\, Z_n\|^2} \leq \underline{\lim}\; \chi(\mathscr{L}(Y_n)) \qquad \blacksquare$$

Désignons par Pot $\mathscr{L}_0$ l'ensemble des éléments $Y \in \mathscr{L}_0$ qui sont des potentiels, c'est-à-dire tels que Y soit le potentiel de l'espace $\mathscr{L}(Y)$ qu'il engendre. Alors A Pot $\mathscr{L}_0$ est fermé dans A $\mathscr{L}_0$. Plus précisément :

THEOREME 4-6 - Soit Y_n une suite de potentiels dans $\mathscr{L}_0$. Si A Y_n converge fortement dans A $\mathscr{L}_0$ vers un élément A Y_0, alors Y_0 est un potentiel et $\chi(\mathscr{L}(Y_0)) = \lim \chi(\mathscr{L}(Y_n))$.

En effet, on trouve cette fois :

$$\chi(\mathscr{L}(Y_n)) = \frac{(E\ Y_n)^2}{\|A\ Y_n\|^2} \rightarrow \frac{(E\ Y_0)^2}{\|A\ Y_0\|^2} \leq \chi(\mathscr{L}(Y_0))$$

En comparant avec l'inégalité inverse obtenue par le lemme 4-3, on conclut $\chi(\mathscr{L}(Y_0)) = \lim \chi(\mathscr{L}(Y_n))$ et par suite

$$\frac{(E\ Y_0)^2}{\|A\ Y_0\|^2} = \chi(\mathscr{L}(Y_0))$$

Donc Y_0 est proportionnel à Pot Yo. Comme, en fait, $E\ Y_0 = \lim E\ Y_n = \lim \chi(\mathscr{L}(Y_n)) = \chi(\mathscr{L}(Y_0))$, on a bien $Y_0 = \text{Pot } Y_0$. ■

COROLLAIRE - L'espace métrique $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$ est fermé et complet.

En effet, d'après le théorème, A Pot $\mathscr{L}_0$ est un sous-ensemble fermé, donc complet, de A $\mathscr{L}_0$. Mais A Pot $\mathscr{L}_0$, muni de la métrique induite par A $\mathscr{L}_0$, est manifestement isomorphe à l'espace métrique $\mathscr{D}(\mathscr{L}_0)$.

5 - LES OUVERTS ALEATOIRES STATIONNAIRES, ET LEURS PERMEABILITES.

Le potentiel, et la fonctionnelle χ, attachés à chaque espace de Dirichlet $\mathscr{L}$ possèdent d'intéressantes propriétés de continuité monotone, qui évoquent celles que nous souhaitons attribuer à la perméa-

bilité. S'il était possible d'associer biunivoquement à chaque $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$ un ensemble, ou une classe d'ensembles aléatoires, par exemple une classe d'ouverts aléatoires stationnaires, on pourrait alors interpréter χ comme la perméabilité des ensembles de cette classe.

Malheureusement, la réalisation de ce programme se heurte à une difficulté technique sérieuse. Dans l'espace à N = 1 dimension, en effet, il résulte d'un théorème classique que, pour toute VA Y différentiable m.q., il existe une FA $\tilde{Y}(x)$ p.s. stationnaire et p.s. à trajectoire continue telle que $\tilde{Y}(x)$ et U_x Y soient équivalentes. Dans ce cas, on associe sans difficulté à cet élément Y des ouverts (fermés) aléatoires p.s. stationnaires de la forme $\{x : \tilde{Y}(x) > a\}$ (resp. $\{x : \tilde{Y}(x) \geq a\}$). Mais ce théorème, vrai pour N = 1, devient faux dès que N est ≥ 2.

Il nous faudra donc faire un détour. Après avoir donné la définition des FAPS et des OAPS (paragraphe 5-1), nous introduirons la notion de VA lipschitzienne et celle d'espace de Dirichlet régulier, c'est-à-dire engendré par des VA lipschitziennes. Le résultat principal sera que tout espace de Dirichlet régulier peut être identifié à un OAPS, et réciproquement (parag. 5-2). Le point suivant consistera à montrer que, pour tout FAPS α et tout OAPS γ tels que $\alpha \subset \gamma$ p.s., l'espace de Dirichlet $\mathscr{L}(S_\alpha)$, associé à $S_\alpha = \{0 \in \alpha\} \in \Omega$ est contenu dans le Dirichlet <u>régulier</u> $\mathscr{L}_\gamma$ associé à l'OAPS γ. Cette démonstration nécessitera un assez long détour, mais servira de justification à la définition de la perméabilité d'un OAPS γ : on la définira indifféremment soit comme la valeur $\chi(\mathscr{L}_\gamma)$ de la fonctionnelle χ pour le Dirichlet régulier $\mathscr{L}_\gamma$ associé à l'OAPS γ, soit comme le Sup des $\chi(S_\alpha)$ pour tous les FAPS α p.s. contenus dans l'OAPS γ.

On peut conjecturer que tout espace de Dirichlet est régulier, et aussi, propriété plus faible, que pour tout FAPS α, $\mathscr{L}(S_\alpha)$ est identique au Dirichlet régulier associé à l'ouverture $\overset{\circ}{\alpha}$ du FAPS α. Je ne suis malheureusement pas à même d'établir ces résultats, qui seraient fort intéressants pour la théorie mathématique, mais ne sont pas strictement indispensables pour la théorie physique.

5.1 - FAPS et OAPS.

Voyons d'abord quelques définitions.

Je désigne par $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{G}$) l'espace des fermés (resp. des ouverts) de $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie (compacte, de type dénombrable) et par σ_f (resp. σ_g) la tribu borélienne associée à cette topologie.

J'appelle fermé aléatoire presque sûrement stationnaire (FAPS) une application φ de $(\Omega, \mathcal{A}, P, \tau_x)$ dans $(\mathcal{F}, \sigma_f)$ définie P-presque partout sur Ω, mesurable pour $\mathcal{A}$ et vérifiant pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ la relation :

$$\varphi(\tau_x \omega) = (\varphi(\omega))_x \quad \text{p.s.} \tag{5-1}$$

de compatibilité (presque sure) avec la translation x.

Du fait que (5-1) n'est vérifiée que presque sûrement, si l'on pose :

$$C_\varphi = \{\omega : 0 \in \varphi(\omega)\} \in \mathcal{A} \tag{5-2}$$

il n'est pas vrai, en général, même au sens p.s., que l'on ait :

$$\varphi(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau_{-x} \omega \in C_\varphi\}$$

et l'ensemble qui figure au second membre n'est pas nécessairement fermé, ni même mesurable, dans $\mathbb{R}^n$. Par contre la restriction de cet ensemble à une partie dénombrable D dense dans $\mathbb{R}^n$ est p.s. égale à $\varphi(\omega) \cap D$. L'ensemble $C_\varphi \in \mathcal{A}$ défini en (5-2) caractérise seulement la loi spatiale du FAPS φ, mais ne suffit pas pour déterminer la probabilité induite par φ sur σ_f .

On définit de la même façon un ouvert aléatoire presque sûrement stationnaire (OAPS) comme une application mesurable

$$\gamma : (\Omega, \mathcal{A}, P, \tau_x) \to (\mathcal{G}, \sigma_g)$$

définie éventuellement presque partout seulement sur Ω, et p.s.

compatible avec chaque translation τ_x .

Séparabilité.

Voici quelques propriétés importantes pour la suite. Je les énonce pour les fermés aléatoires (FA). Elles se transposent évidemment aux ouverts aléatoires (OA).

~ Si α est un FAPS, son indicatrice 1_α est continue en moyenne quadratique.

Soit $p = P(x \in \alpha) = E(1_\alpha)$, probabilité indépendante du point x, et

$$C(h) = E[1_\alpha(x)\ 1_\alpha(x+h)] = P(x \text{ et } x+h \in \alpha)$$

la covariance stationnaire du FAPS α. Il faut montrer $C(h) \to p$ pour $|h| \to 0$. Or :

$$\{x \notin \alpha \text{ et } x+h \in \alpha\} \subset \{x \notin \alpha \text{ et } \alpha \cap B_{|h|}(x) \neq \emptyset\} \downarrow \emptyset \quad \text{p.s.}$$

lorsque $|h| \downarrow 0$. En effet, un fermé ne peut pas rencontrer toutes les boules centrées au point x sans contenir ce point. On en déduit

$$p - C(h) = P(x \notin \alpha \text{ et } x+h \in \alpha) \to 0$$

~ Si α est un FA continu m.q. (non nécessqirement stationnaire) il existe un (p.s.) plus grand FA séparable $\hat{\alpha}$ qui soit p.s. contenu dans α. Cet FA $\hat{\alpha}$ admet la même loi spatiale que α, et pour toute partie dénombrable dense D de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\hat{\alpha} = \overline{\alpha \cap D} \quad \text{p.s.} \tag{5-3}$$

Si α' est un FA séparable, et D' une partie séparante pour α', on a $\alpha' = \overline{\alpha' \cap D'}$ p.s. Donc $\alpha' \subset \alpha$ entraine $\alpha' \subset \overline{\alpha \cap D'}$ p.s. Tout se ramène donc à montrer que le FA séparable défini en (5-3) est indépendant du choix de D, ou, plus précisément, que l'on a

$$\overline{\alpha \cap D} = \overline{\alpha \cap D'} \quad \text{p.s.}$$

pour deux parties dénombrables denses D et D' quelconques.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a évidemment $\{x \in \alpha\} \supset \{x \in \overline{\alpha \cap D}\}$. Montrons que l'inclusion inverse est vraie au sens p.s. Comme l'indicatrice 1_α est continue m.q., $1_\alpha(y) \to 1_\alpha(x)$ au sens m.q. lorsque $y \in D$ tend vers x. On peut donc trouver une suite $x_n \in D$ telle que $x_n \to x$ et $1_\alpha(x_n) \to 1_\alpha(x)$ p.s. Il en résulte bien :

$$1_{\overline{\alpha \cap D}}(x) \geq 1_\alpha(x) \quad \text{p.s.} \quad \text{et donc l'égalité.}$$

Ainsi, on a

$$\overline{\alpha \cap D} = \overline{\alpha \cap (D \cup x)} \qquad \text{(p.s.)}$$

et donc, pour toute autre partie dénombrable dense D' :

$$\overline{\alpha \cap D} = \overline{\alpha \cap (D \cup D')} \qquad \text{(p.s.)}$$

et par conséquent aussi : $\overline{\alpha \cap D} = \overline{\alpha \cap D'}$ (p.s.) ■

~ <u>Si α est un FAPS</u> (donc continu m.q.), <u>ce plus grand minorant séparable $\hat{\alpha} = \overline{\alpha \cap D}$ est lui aussi p.s. stationnaire</u>.

De fait :

$$\overline{\alpha(\tau_{-x}\,\omega) \cap D} = \overline{(\alpha(\omega))_x \cap D} \qquad \text{p.s.}$$

si c'est un FAPS. Mais, $\hat{\alpha}$ étant indépendant du choix de D, on a encore

$$\overline{\alpha_x \cap D} \overset{\text{p.s.}}{=} \overline{\alpha_x \cap D_x} = (\overline{\alpha \cap D})_x$$

Donc $\hat{\alpha}$ est p.s. compatible avec la translation x. ■

~ <u>Soit maintenant C quelconque dans $\mathcal{A}$</u>. Posons :

$$D(C) = \{x : x \in D,\ U_x\, 1_C = 1\}$$

<u>D désignant une partie dénombrable dense</u> de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$\varphi_C = \overline{D(C)}$$

est un FAPS séparable indépendent du choix de D. De même, en posant

$$\gamma_C = \beta\,(\overline{D(C^C)})$$

on définit un OAPS séparable, indépendant de D, p.s. égal à l'intérieur de φ_C :

$$\gamma_C = \overset{\circ}{\varphi}_C \quad \text{p.s.}$$

Si l'on pose :

$$\overset{\circ}{C} = \{\omega : 0 \in \gamma_C\} \quad ; \quad \overline{C} = \{\omega : 0 \in \varphi_C\}$$

on a p.s.

$$\overset{\circ}{C} \subset C \subset \overline{C}$$

et φ_C (resp. γ_C) est le plus petit FAPS (respectivement le plus grand OAPS) séparable vérifiant cette propriété.

La démonstration est tout-à-fait analogue à celle de la propriété précédente.

Ainsi, tout ensemble aléatoire défini par sa seule loi spatiale (i.e. l'ensemble $C \in \mathcal{A}$) se trouve encadré entre un plus grand ouvert séparable et un plus petit fermé séparable. On ne peut rien tirer de mieux de la donnée de C. En particulier, il n'est nullement vrai en général que γ_C et φ_C constituent p.s. l'intérieur G et l'adhérence F de l'ensemble $\{x : U_x\, 1_C = 1\}$: on peut seulement dire que l'on a(p.s.) : $G \subset \gamma_C$ et $F \supset \varphi_C$.

Définition de la perméabilité d'un FAPS et d'un OAPS

Soit α un FAPS, $\hat{\alpha} = \overline{\alpha \cap D}$ p.s. son plus grand minorant séparable et $C_\alpha = \{\omega : 0 \in \alpha\} = C_{\hat{\alpha}}$ p.s. l'ensemble de $\mathcal{A}$ définissant la loi spatiale de α. Si deux FAPS α et α' admettent le même plus grand minorant séparable $\hat{\alpha} = \overline{\alpha \cap D} = \overline{\alpha' \cap D}$ p.s., ils ne diffèrent que par un ensemble p.s. négligeable, et doivent, pour des raisons physiques, avoir la même perméabilité. Ainsi, la perméabilité ne

dépend que de $\hat{\alpha}$, c'est-à-dire de $C_\alpha \in \mathcal{C}$, ou, si l'on préfère, de la seule loi spatiale de α. Nous poserons par définition :

$$(5\text{-}4) \qquad K(\alpha) = \chi(C_\alpha) \qquad \text{pour tout FAPS } \alpha$$

χ désignant la fonctionnelle (définie sur $\mathcal{C}$) étudiée au Chapitre 3. Nous désignerons de même par $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}(C_\alpha)$, $Y_\alpha = Y(C_\alpha)$ l'espace de Dirichlet et le potentiel associé à C_α. Ils ne dépendent que de $\hat{\alpha}$.

Pour un OAPS γ, nous ne pouvons pas adopter la même définition, car, comme on l'a vu, un OAPS non séparable peut très bien avoir une perméabilité notablement plus faible que son plus petit majorant séparable, et par conséquent $K(\gamma)$ ne doit pas dépendre de la seule loi spatiale de γ. Nous prendrons par définition :

$$(5\text{-}5) \qquad K(\gamma) = \text{Sup } \{K(\alpha) \ , \ \alpha \subset \gamma \ \text{ p.s.}\}$$

α parcourant la classe de tous les FAPS sur $(\Omega, \mathcal{C}, P)$.

Mais, pour des raisons d'ordre physique, un fermé doit avoir même perméabilité que son intérieur. Je conjecture qu'il en est bien ainsi, mais sans apporter de démonstration.

5.2 - VA Lipschitzienne, et Dirichlets réguliers.

Par définition, nous dirons qu'une VA Y sur $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est Lipschitzienne si l'on a $|U_x Y - Y| \leq b|x|$ p.s. pour un $b \geq 0$ et tout $x \in R^n$. L'intérêt de cette définition est le suivant : si Y est lipschitzienne, la FA $U_x Y$ est p.s. uniformément continue sur toute partie dénombrable dense. Posant alors :

$$Z_D(x) = \lim \{U_y Y, \ y \in D, \ y \to x\}$$

pour toute partie dénombrable dense D, on peut vérifier que la FA $Z_D(x)$ ne dépend pas du choix de la partie dénombrable dense D, qu'elle est p.s. stationnaire et p.s. à trajectoire continue, et équivalente à $U_x Y$ (en ce sens que pour tout x, on a $Z_D(x) = U_x Y$ p.s.).

Comme Z_D ne dépend (essentiellement) pas du choix de D, nous poserons $\tilde{Y}(x) = Z_D(x)$. Dès lors, à toute lipschitzienne Y, nous sommes en mesure d'associer des OAPS de la forme $\{x : \tilde{Y}(x) > a\}$, et de même des FAPS de la forme $\{x : \tilde{Y}(x) \geq a\}$.

D'après un critère déjà mentionné dans le chapitre 3, toute lipschitzienne Y est différentiable m.q. puisqu'à fortiori $\|(U_x - I)\, Y\| \leq b|x|$. Voici une importante caractérisation des lipschitziennes :

LEMME 5-1 - Pour toute VA Y, on a $|(U_x - I)\, Y| \leq b|x|$ p.s. pour tout x si et seulement si $U_x\, Y$ est différentiable m.q. et $|A\, Y| \leq b$ p.s.

Pour tout $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^N$, posons $r = |x|$ et $u = x/r$. On a :

$$(U_x - I)\, Y = \int_0^r u^i\, (U_{tu}\, A_i\, Y)\, dt$$

pour toute VA Y différentiable m.q. Il s'agit ici d'une intégrale m.q., donc limite (p.s. et dans L_2) de combinaisons linéaires finies. Par conséquent la relation $|u^i\, A\, Y_i| \leq b$ p.s. passe à la limite, et entraine $|(U_x - I)\, Y| \leq b\, r$ p.s.

Inversement, supposons $|(U_x - I)\, Y| \leq b|x|$ p.s. pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$. Cela entraine déjà l'existence du gradient $A\, Y \in H_0$. Choisissons alors une partie D dénombrable dense sur la sphère unité, de telle sorte que

$$|A\, Y| = \sup_{u \in D}\ u^i\, A_i\, Y$$

Par le procédé habituel de diagonalisation, on peut trouver une suite $t_n \downarrow 0$ telle que

$$\frac{(U_{t_n u} - I)\, Y}{t_n} \to u^i\, A_i\, Y \quad \text{p.s.}$$

pour tout $u \in D$. Alors, on peut écrire (au sens p.s.) :

$$|A\,Y| = \sup_{u\in D} u^i A_i Y = \sup_{u\in D} \inf_N \sup_{n\geq N} \frac{U_{t_n u} - I}{t_n} Y \leq$$

$$\leq \inf_N \sup_{n\geq N} \sup_{u\in D} \frac{(U_{t_n u} - I)^Y}{t_n} \leq b \quad \text{p.s.} \quad \blacksquare$$

Dans ce qui suit, nous désignerons par Λ_b l'espace des lipschitziennes de module b, i.e. telles que $|A\,Y| \leq b$ p.s.

Notons que, pour chaqye $b > 0$, l'espace Λ_b est convexe et réticulé.

En effet, la convexité se vérifie immédiatement. Si X et Y sont dans Λ_b, on a :

$$A(X \vee Y) = 1_{X\geq Y}\ A\,X + 1_{X<Y}\ A\,Y$$

et par suite aussi $|A(X \vee Y)| \leq |A\,X| \vee |A\,Y|$. Même démonstration pour $X \wedge Y$. $\blacksquare$

LEMME 5-2 - Soit $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$ un espace de Dirichlet, et $b > 0$. Alors $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ est faiblement et fortement fermé dans L_1, et la convergence faible au sens de L_1 dans $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ entraine la convergence forte dans L_1. De plus, $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ est fortement séquentiellement compact dans L_1. De même, $A(\Lambda_b \cap \mathscr{L}) = A\,\Lambda_b \cap A\,\mathscr{L}$ est faiblement et fortement fermé dans H_∂. Enfin, $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ est complètement réticulé.

En effet, soit Y_n une suite dans $\Lambda_b \cap \mathscr{L}$ convergeant faiblement dans L_1 vers une limite $Y \in L_1$. Comme $|A\,Y_n| \leq b$ p.s., on peut extraire une suite partielle Y_{n_k} telle que $|A\,Y_{n_k}|$ converge faiblement dans H_∂ vers une limite G. Mais cela entraine $G = A\,Y_o$ pour un $Y_o \in \mathscr{L}$, et aussi (lemme 4-5) la convergence forte $Y_{n_k} \to Y_o$ dans L_1. D'où en particulier $Y_o = Y$. Cette limite étant unique, on en déduit que la suite $A\,Y_n$ elle-même converge faiblement vers $A\,Y$ dans H_∂, et que par suite $Y_n \to Y$ fortement dans L_1.

Il est facile de voir que la convergence faible $A\,Y_n \to A\,Y$ entraine, pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, la convergence faible $(U_x - I)\,Y_n \to (U_x - I)\,Y$ and L^2. On en déduit que la relation $|(U_x - I)\,Y_n| \le b$ p.s. passe à la limite. D'où la première partie de l'énoncé. La compacité séquentielle forte de $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ dans L_1 se démontre de la même manière.

L'inclusion $A(\Lambda_b \cap \mathscr{L}) \subset A\,\Lambda_b \cap A\,\mathscr{L}$ est immédiate. Inversement, si $Y \in \mathscr{L}$ vérifie $A\,Y \in A\,\Lambda_b$, on a $|A\,Y| \le b$ p.s. et donc $Y \in \Lambda_b$. D'où l'égalité. On vérifie comme ci-dessus que $A(\Lambda_b \cap \mathscr{L})$ est faiblement et fortement fermé dans H_0.

Il reste à montrer que $\Lambda_b \cap \mathscr{L}$ est complètement réticulé. Nous savons déjà que $\mathscr{L}$ et Λ_b sont réticulés, et on en déduit que $X \vee Y$, $X \wedge Y$ sont dans $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$ dès que X et $Y \in \mathscr{L} \cap \Lambda_b$. Soit alors M une partie de $\mathscr{L} \cap \Lambda_b$, et M' la famille filtrante constituée des Sup des parties finies de M, avec par conséquent encore $M' \subset \mathscr{L} \cap \Lambda_b$. On voit sans peine qu'on peut se limiter au cas où les éléments de M (et de M') sont p.s. ≥ 0. Posant alors

$$\gamma = \mathrm{Sup}\,\{E\,Y,\ Y \in M'\} \le \sqrt{\chi(\mathscr{L})}\ b < \infty$$

on peut trouver une suite Y_n croissante dans M' telle que $E\,Y_n \uparrow \gamma$. D'après ce qui précède $Y = \lim \uparrow Y_n \in \mathscr{L} \cap \Lambda_b$, et, comme $E\,Y = \gamma$, on vérifie $E(Y \vee Y') = E\,Y = \gamma$ pour tout $Y' \in M'$, soit $Y' \le Y$ p.s. ■

Convenons de dire qu'un espace de Dirichlet $\mathscr{L}_0$ est <u>régulier</u> s'il est engendré par les éléments lipschitziens qu'il contient. Comme $\mathscr{L}(Y) = \mathscr{L}(a\,Y)$ pour tout $a > 0$, tout Dirichlet régulier $\mathscr{L}_0$ est, en fait, engendré par $\mathscr{L}_0 \cap \Lambda_1$. Mais, d'après le lemme 5-2, $\mathscr{L}_0 \cap \Lambda_1$ contient <u>un plus grand élément</u> Y_0. Par suite, en réalité $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(Y_0)$ est engendré par cet unique élément lipschitzien $Y_0 \in \mathscr{L}_0 \cap \Lambda_1$.

On en déduit un premier résultat intéressant :

THEOREME 5-1 - Pour tout Dirichlet $\mathcal{L} \in \mathcal{D}$, $\mathcal{L} \cap \Lambda_1$ admet un plus grand élément Y_o, et $\mathcal{L}(Y_o)$ est le plus grand Dirichlet régulier contenu dans $\mathcal{L}$.

L'existence de Y_o résulte du lemme 5-2. Si $\mathcal{L}_o$ est un sous-Dirichlet régulier de $\mathcal{L}$, donc engendré par les lipschitziens $Y \in \mathcal{L} \cap \Lambda_1$, on a $|Y| \leq Y_o$ pour chacun de ces Y, et donc $\mathcal{L}_o \subset \mathcal{L}(Y_o)$ ■

Pour tout $Y \in \Lambda_b$, la FA $U_x Y$ étant p.s. uniformément continue sur toute partie dénombrable dense, on peut, comme on l'a vu, trouver une FA $\tilde{Y}(x)$ essentiellement unique, équivalente à $U_x Y$, qui soit p.s. stationnaire et p.s. à trajectoires continues. Nous désignerons alors par γ_Y, l'OAPS défini par :

$$\gamma_Y = \{x : \tilde{Y}(x) > 0\} \qquad (Y \in \Lambda_b)$$

En sens inverse, soit γ un OAPS, et posons :

$$d_\gamma(x) = \text{Sup } \{d(x,y),\ y \notin \gamma\}$$

Cette fonction d_γ est (pour p.s. tout ω) lipschitzienne, au sens où $|d_\gamma(x) - d_\gamma(y)| \leq |x-y|$. Donc <u>la VA $d_\gamma = d_\gamma(o)$ est toujours dans Λ_1</u>. Nous allons voir que cette VA possède d'intéressantes propriétés de maximalité. Posons d'abord un lemme :

LEMME 5-3 - Soit $S \in \mathcal{A}$ telle que $\chi(S) < \infty$, et γ le plus grand ouvert <u>séparable</u> tel que $\{0 \in \gamma\} \subset S$ p.s. Alors d_γ est le plus grand élément de $\mathcal{L}(S) \cap \Lambda_1$.

En effet, comme $|A\, d_\gamma| \leq 1$ (lemme 5-1) et $d_\gamma = 1_S\, d_\gamma$ p.s., on a $d_\gamma \in \mathcal{L}(S) \cap \Lambda_1$. Désignons alors par Y_o le plus grand élément de $\mathcal{L}(S) \cap \Lambda_1$ (lemme 5-2), qui vérifie donc $Y_o \geq d_\gamma$ p.s. Il faut montrer l'inégalité inverse. Soit $\gamma_o = \gamma_{Y_o}$ l'OAPS associé à ce plus grand élément Y_o (voir ci-dessus). Comme $Y_o \geq d_\gamma$ p.s., on a $\gamma_o \supset \gamma$ p.s. Mais l'ensemble $\{0 \in \gamma_o\} \in \mathcal{A}$ est contenu dans S, donc aussi dans

$\{0 \in \gamma\}$, d'après la définition de γ. Mais, γ étant séparable, cela entraine $\gamma_o \subset \gamma$ p.s., et donc l'égalité $\gamma = \gamma_o$ p.s.

Or, en dehors d'un ensemble N négligeable dans Ω, la propriété suivante est réalisée pour tout $\omega \in \Omega$:

Si $0 \in \gamma$, il existe un $y \in \partial\gamma$ frontière de l'OAPS γ tel que $d_\gamma = d_\gamma(o) = |y|$. Si $\tilde{Y}_o(x)$ désigne la FA p.s. stationnaire et p.s. à trajectoire continue équivalente à $U_x\, Y_o$, il résulte de $Y_o \in \Lambda_1$ $\gamma = \gamma_o$ p.s. que l'on a $|Y_o| \overset{p.s.}{=} |\tilde{Y}_o(o) - \tilde{Y}_o(y)| \leq |y| = d_\gamma$. Donc $Y_o = d_\gamma$ p.s. ■

THEOREME 5-2 - Soit $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}(Y_o)$ un Dirichlet régulier, Y_o le plus grand élément de $\mathcal{L}_o \cap \Lambda_1$, et $\gamma_o = \gamma_{Y_o}$ l'OAPS associé à Y_o. Alors :

$$Y_o = d_{\gamma_o} \quad \text{p.s.}$$

En effet, désignant par $\tilde{Y}_o(x)$ la FA p.s. stationnaire et p.s. à trajectoire continue équivalente à $U_x\, Y_o$, posons pour $\varepsilon \geq 0$:

$$\gamma_\varepsilon = \{x : \tilde{Y}_o(x) > \varepsilon\}$$

Ces OAPS γ_ε vérifient évidemment $\gamma_\varepsilon \uparrow \gamma_o$ p.s. pour $\varepsilon \downarrow 0$, et donc aussi $d_{\gamma_\varepsilon} \uparrow d_{\gamma_o}$ p.s.

Posons alors $S_\varepsilon = \{Y_o > \varepsilon\} \in \mathcal{A}$, et soit Y un élément positif quelconque de $\mathcal{L}(S_\varepsilon)$. On a $Y \wedge \varepsilon \leq Y \wedge Y_o$ par construction, et donc $Y \in \mathcal{L}(Y_o) = \mathcal{L}_o$. Par suite $\mathcal{L}(S_\varepsilon) \subset \mathcal{L}_o$. Mais $d_{\gamma_\varepsilon} \in \mathcal{L}(S_\varepsilon)$ et $d_{\gamma_\varepsilon} \uparrow d_{\gamma_o}$, ce qui (lemme 5-2) entraine aussi $A\, d_{\gamma_\varepsilon} \to A\, d_{\gamma_o}$ faiblement au moins. Par suite $d_{\gamma_o} \in \lim \uparrow \mathcal{L}(S_\varepsilon)$ et donc $d_{\gamma_o} \in \mathcal{L}_o$. Il suffit alors de reprendre le raisonnement déjà utilisé dans la démonstration du lemme 5-3 pour obtenir $d_{\gamma_o} \geq Y_o$ p.s., et donc $d_{\gamma_o} = Y_o$. ■

Au stade actuel, nous voyons qu'à tout Dirichlet régulier $\mathcal{L}_o$ est associé un OAPS γ_o tel que l'on ait $\mathcal{L}_o = \mathcal{L}(d_{\gamma_o})$, et γ_o est

d'ailleurs le p.s. plus grand OAPS (mais non le seul) possédant cette propriété. Inversement, on peut, évidemment, associer à tout OAPS γ le Dirichlet régulier $\mathcal{L}(d_\gamma)$. Autrement dit : <u>tout Dirichlet régulier s'identifie à une classe d'équivalance d'OAPS</u>.

Dans la suite, nous écrirons souvent $\mathcal{L}_\gamma$ ou $\mathcal{L}(\gamma)$ au lieu de $\mathcal{L}(d_\gamma)$, et de même $\chi(\gamma)$ ou $\chi(d_\gamma)$ au lieu de $\chi(\mathcal{L}(d_\gamma))$. Notre objectif, dans ce qui suit, va être de montrer que $\chi(\gamma)$, ainsi défini, est égal à la perméabilité $K(\gamma)$ de l'OAPS γ, c'est-à-dire au Sup des $\chi(S_\alpha)$, avec $S_\alpha : \{0 \in \alpha\} \in \mathcal{A}$, ce Sup étant pris sur la classe des FAPS α tels que $\alpha \subset \gamma$ p.s. Avant de démontrer ce point capital pour l'interprétation physique, établissons quelques propriétés intéressantes :

<u>THEOREME 5-3</u> - (<u>Continuité monotone séquentielle</u> $\uparrow$). - Soit γ_n une suite croissante d'OAPS telle que $\gamma_n \uparrow \gamma$ p.s. et Sup $\chi(\gamma_n) < \infty$. Alors $\mathcal{L}(\gamma_n) \uparrow \mathcal{L}(\gamma)$ et $\chi(\gamma_n) \uparrow \chi(\gamma)$.

En effet, la suite $\chi(\gamma_n)$ étant majorée, on a $\mathcal{L}(\gamma_n) \uparrow \mathcal{L}_0 \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{L}(\gamma_n) \subset \mathcal{L}(\gamma)$, on a évidemment $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}(\gamma)$. Mais, inversement, $d_{\gamma_n} \uparrow d_\gamma$, ce qui entraine, comme on l'a vu plusieurs fois, $A\, d_{\gamma_n} \to A\, d_\gamma$ faiblement. Donc $d_\gamma \in \mathcal{L}_0$, et par suite $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\gamma)$ ■

<u>THEOREME 5-4</u> - Soit γ un OAPS tel que $\chi(\gamma) < \infty$, et Y_γ le potentiel de $\mathcal{L}(\gamma)$. Alors la FA $U_x\, Y_\gamma$ est p.s. semi-continue inférieurement (SCI) sur toute partie dénombrable dense D.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'érodé $\gamma \ominus B_\varepsilon$, où B_ε est la boule fermée de rayon ε, est évidemment un OAPS. Posons :

$$S_\varepsilon = \{d_{\gamma \ominus B_\varepsilon} > 0\} \in \mathcal{A}$$

On a vu, à l'occasion de la démonstration du théorème 5-7, que l'on a $\mathcal{L}(S_\varepsilon) \subset \mathcal{L}(d_\gamma)$. Comme $\mathcal{L}(S_\varepsilon) \supset \mathcal{L}(d_{\gamma \ominus B_\varepsilon})$ et $\mathcal{L}(d_{\gamma \ominus B_\varepsilon}) \uparrow \mathcal{L}(\gamma)$ (Th. 5-3), on a également $\mathcal{L}(S_\varepsilon) \uparrow \mathcal{L}(\gamma)$, et de même, pour les potentiels, $Y_{S_\varepsilon} \uparrow Y_\gamma$ (p.s. et dans L_1).

Maintenant, $\mathscr{L}(S_\varepsilon) \subset \mathscr{L}(d_\gamma)$ entraine encore $U_x\ \mathscr{L}(S_\varepsilon) = \mathscr{L}(U_x\ S_\varepsilon) \subset \mathscr{L}(d_\gamma)$ pour $|x| < \varepsilon$. Posons alors $\varepsilon_n = 4^{-n}$, et convenons d'écrire Y_n au lieu de $Y_{S_{\varepsilon_n}}$ (potentiel de $\mathscr{L}(S_{\varepsilon_n})$.

On a alors :

$$U_x\ Y_n \leq U_y\ Y_{n+1} \leq Y_\gamma \quad \text{p.s.}$$

pourvu que $|x| \leq \varepsilon_{n+1}$ et $|y| \leq \varepsilon_{n+2}$.

Introduisons la fonction de Laurent Schwartz $\rho_\varepsilon(x)$ définie par

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq \varepsilon \\ k \exp\left\{ \dfrac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2} \right\} & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

(la constante k étant choisie de manière à ce que $\int \rho_\varepsilon(x)\ dx = 1$). Cette fonction est indéfiniment dérivable et son support est contenu dans la boule B_ε. Pour tout $Y \in L_2$, nous poserons

$$\rho_\varepsilon * Y = \int \rho_\varepsilon(x)\ U_x\ Y\ dx$$

de sorte que $\rho_\varepsilon * Y \in \mathscr{D}_A$, et de plus, si $Y \in L_\infty$, $\rho_\varepsilon * Y$ est lipschitzienne.

Avec les notations précédentes, il vient :

$$\rho_{\varepsilon_{n+1}} * Y_n \leq \rho_{\varepsilon_{n+2}} * Y_{n+1} \leq Y_\gamma \quad \text{p.s.}$$

A fortiori, si nous choisissons une suite $a_n \uparrow \infty$:

$$\rho_{\varepsilon_{n+1}} * (Y_n \wedge a_n) \leq \rho_{\varepsilon_{n+2}} * (Y_{n+1} \wedge a_{n+1}) \leq Y_\gamma \quad \text{p.s.}$$

Or ces éléments sont lipschitziens. Comme ils convergent vers Y_γ à la fois dans L_1 et pour la convergence monotone $\uparrow$, le théorème en résulte. ■

Posant alors :

$$\underset{\sim}{Y}_\gamma(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{y\in B_\varepsilon(x)\cap D} U_x\, Y_\gamma$$

nous obtenons alors, d'après le théorème, une FA p.s. stationnaire, p.s. à trajectoire sci équivalente à $U_x\, Y_\gamma$. En particulier l'ensemble :

$$\gamma_\varepsilon = \{x : \underset{\sim}{Y}_\gamma(x) > \varepsilon\} \qquad (\varepsilon \geq 0)$$

est un OAPS. Alors :

COROLLAIRE - $\gamma_\varepsilon \uparrow \gamma$ p.s. et $\mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) \uparrow \mathcal{L}(\gamma)$ pour $\varepsilon \downarrow 0$. En particuon a $\gamma = \gamma_0 = \{x : \underset{\sim}{Y}_\gamma(x) > 0\}$.

En effet, d'après le lemme 5-4 ci-dessous, on a $\underset{\sim}{Y}_\gamma(x) \geq \alpha^2/2N$ sur l'érodé $\gamma \ominus B_\alpha$. On en déduit $\gamma \ominus B_\alpha \subset \gamma_\varepsilon$ dès que $\varepsilon < \alpha^2/2N$. Comme $\gamma \ominus B_\alpha \uparrow \gamma$ p.s. et $\mathcal{L}(\gamma \ominus B_\alpha) \uparrow \mathcal{L}(\gamma)$, le corollaire en résulte. ■

N.B. Le même raisonnement montre que $(Y_\gamma - \varepsilon)_+$ est le potentiel du Dirichlet régulier $\mathcal{L}(d_{\gamma_\varepsilon})$. Ainsi, en posant $S_\varepsilon = \{Y_\gamma > \varepsilon\} \in \mathcal{A}$, on a en particulier $\mathcal{L}(S_\varepsilon) = \mathcal{L}(d_{\gamma_\varepsilon})$ pour $\varepsilon > 0$.

LEMME 5-4 - Soit γ un OAPS de $\mathbb{R}^n$, tel que $\chi(\gamma) < \infty$, et Y_γ le potentiel de $\mathcal{L}(\gamma)$. Alors $Y_\gamma \geq \alpha^2/2N$ p.s. sur $\{0 \in \gamma \ominus B_\alpha\}$ $(\alpha > 0)$.

En effet, quitte à enrichir l'espace Ω (ce qui ne modifie pas Y_γ, comme nous le verrons bientôt) nous pouvons supposer qu'il existe sur Ω autant de processus ponctuels périodiques, indépendants les uns des autres et de γ, que nous en aurons besoin.

Soit F un tel processus ponctuel de périodes $> \alpha$. Soit γ_F l'OAPS défini par

$$\gamma_F = (F \cap \gamma) \oplus \mathring{B}_\alpha$$

Il est p.s. constitué de boules ouvertes disjointes de rayon α.

Son potentiel est

$$Y_{\gamma_F} = \frac{(\alpha^2 - r^2)_+}{2N}$$

r désignant la distance à 0 du point le plus proche appartenant à $F \cap \gamma$. Cela implique $Y_\gamma \geq (\alpha^2 - r^2)_+/2N$. Prenant ensuite une famille infinie de tels OAPS γ_{F_n} associés à des processus F_n indépendants, nous trouvons alors (p.s.) $Y_\gamma \geq \text{Sup } (\alpha^2 - r_n^2)_+/2N = \alpha^2/2N$. ■

5.3 - Y_γ ne dépend que de l'OAPS γ.

Il convient maintenant de vérifier que le potentiel Y_γ d'un OAPS γ n'est pas modifié lorsque l'on enrichit, comme nous l'avons fait, l'espace Ω initial.

Plus précisément, soit γ un OAPS, c'est-à-dire une application mesurable d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P, \tau_x)$ dans $(\mathcal{G}, \sigma_g)$ vérifiant les propriétés habituelles, et soit $\mathcal{A}_\gamma$ la sous-σ-algèbre de $\mathcal{A}$ engendrée par γ. Nous nous proposons de montrer la proposition suivante :

~ *Le potentiel Y_γ est $\mathcal{A}_\gamma$-mesurable.*

Il en résultera bien que Y_γ ne dépend que de γ, ou, si l'on préfère, ne dépend que de la probabilité P_γ induite par γ sur $(\mathcal{G}, \sigma_g)$. En particulier, ce résultat nous garantira que le potentiel Y_γ d'un OAPS γ primitivement défini sur un espace Ω n'est pas altéré si l'on enrichit cet espace (comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 5-4).

Examinons d'abord le cas d'un espace de Dirichlet $\mathcal{E}(C)$, où C est une partie de $\mathcal{A}$ telle que $\chi(C) < \infty$.

a/ - Désignons par $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ la σ-algèbre engendrée par les $U_x 1_C$, x parcourant $\mathbb{R}^N$, et montrons que le potentiel Y_C est $\mathcal{B}$-mesurable.

En effet, soit $E_{\mathcal{B}}$ l'espérance conditionnelle associée à la σ-algèbre $\mathcal{B}$. Du fait que $\mathcal{B}$ est invariante par le groupe U_x, on

vérifie sans peine $U_x E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{B}} U_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Ainsi, pour tout $Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$, on a aussi $E_{\mathcal{B}} Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$ et

$$A E_{\mathcal{B}} Y = E_{\mathcal{B}} A Y$$

D'autre part, par construction, $E_{\mathcal{B}} 1_c = 1_c$, et donc $E_{\mathcal{B}} 1_c Y = 1_c E_{\mathcal{B}} Y$ pour toute VA Y. Donc, si $Y = 1_c Y$, on a aussi $E_{\mathcal{B}} Y = 1_c E_{\mathcal{B}} Y$. Il résulte de ceci que $Y \in \mathcal{L}(C)$ entraine $E_{\mathcal{B}} Y \in \mathcal{L}(C)$.

Or $E E_{\mathcal{B}} Y = E Y$, et $\|E_{\mathcal{B}} A Y\|^2 \leq \|A Y\|^2$, avec égalité si et seulement si $A Y$ est $\mathcal{B}$-mesurable. D'après la propriété d'extremalité du potentiel Y_c, il en résulte que $A Y_c$ est nécessairement $\mathcal{B}$-mesurable.

Mais alors Y_c est lui-même $\mathcal{B}$-mesurable. De fait, parmi les solutions de l'équation $A X = A Y_c$, une seule appartient à $\mathcal{L}(C)$, à savoir celle qui vérifie $X = 1_c X$. Or, si X vérifie cette relation, $E_{\mathcal{B}} X$ la vérifie aussi, comme on l'a vu, et $A E_{\mathcal{B}} X = E_{\mathcal{B}} A X = A Y_c$ (puisque ce gradient est $\mathcal{B}$-mesurable). Par suite cette solution, étant unique, est bien $\mathcal{B}$-mesurable.

b/ - Soit, maintenant, γ un OAPS. Comme on l'a vu ci-dessus, le potentiel Y_γ est la lim $\uparrow$ des potentiels Y_{S_ε}, avec $S_\varepsilon = \{0 \in \gamma \ominus B_\varepsilon\}$. Chacun de ces Y_{S_ε} est mesurable pour la σ-algèbre $\mathcal{B}_\varepsilon$ engendrée par les $U_x 1_{S_\varepsilon}$. Mais $\mathcal{B}_\varepsilon$ est elle-même une sous-algèbre de $\mathcal{A}_\gamma$ (σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$). Par suite Y_γ est bien $\mathcal{A}_\gamma$-mesurable. ■

Nous allons maintenant montrer que si un OAPS γ et un FAPS α vérifient $\alpha \subset \gamma$ p.s., alors, en posant $S_\alpha = \{0 \in \alpha\} \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathcal{L}(S_\alpha) \subset \mathcal{L}(\gamma)$$

d'où résultera, en particulier, que $\chi(\gamma)$ est le sup des $\chi(\alpha)$ sur l'ensemble des FAPS $\alpha \subset \gamma$ p.s. Autrement dit, il en résultera, d'après la définition (5-5) de la perméabilité $K(\gamma)$, que l'on a bien

$$K(\gamma) = \chi(\gamma)$$

mais la démonstration de ce résultat va nécessiter un assez long détour.

5.4 - OAPS périodiques, OAPS grillagés.

La démarche va consister à établir, en premier lieu, le théorème dans le cas d'un OAPS périodique grillagé. Dans un deuxième temps, nous enrichirons l'espace Ω initial (sans que cela modifie les potentiels, comme on vient de le voir) de manière à ce qu'il contienne autant d'OAPS périodiques que nous en aurons besoin, et nous établirons le théorème sur l'espace Ω ainsi enrichi.

a/ - Désignons par Q_o le cercle unité ouvert centré au point O, et par Q_x son translaté par $x \in \mathbb{R}^n$. Prenant $\underline{x}$ aléatoire uniformément distribué sur le cube fermé $\overline{Q}_o$, nous désignerons par $Q = Q_{\underline{x}}$ l'ouvert aléatoire déduit de Q_o par la translation aléatoire $\underline{x}$. Enfin, prenant la réunion :

$$G = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}^n} Q_{\underline{x}+h}$$

où h parcourt l'ensemble des vecteurs de coordonnées entières, nous obtenons un ouvert aléatoire G, stationnaire et périodique, que nous appellerons grillage.

Soit, maintenant, $(\Omega, \mathcal{A}, P, \tau_x)$ un espace suffisamment riche pour que le grillage G ci-dessus puisse être considéré comme défini sur Ω, et soient α et γ un FAPS et un OAPS périodiques (de périodes unité) et grillagés, c'est-à-dire p.s. contenus dans le grillage G ci-dessus.

Considérons l'évènement

$$V = V(\alpha, \gamma) = \{\alpha \subset \gamma\}$$

Je laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on a bien $V \in \mathcal{A}$. Cet évènement V est invariant par translation : $V = \tau_x V$ p.s. pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$. Son indicatrice 1_V appartient donc toujours à $\mathcal{D}_A$,

avec $A\ 1_V = 0$, et, pour tout $Y \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$, $1_V\ Y$ et $1_{V^c}\ Y$ sont dans $\mathcal{D}_A \cap L_1$, et

$$Y = 1_V\ Y + 1_{V^c}\ Y \quad ; \quad A\ Y = 1_V\ A\ Y + 1_{V^c}\ A\ Y$$

Ainsi, tout espace de Dirichlet $\mathcal{L} \in \mathcal{D}$ est décomposable en deux sous-espaces $1_V\,\mathcal{L}$ et $1_{V^c}\,\mathcal{L}$ orthogonaux dans $\mathcal{D}$. Le potentiel de $\mathcal{L}$ est alors lui-même la somme des potentiels de $1_V\,\mathcal{L}$ et $1_{V^c}\,\mathcal{L}$ (Théorème 4-5). Autrement dit $1_V\ Y_{\mathcal{L}}$ est le potentiel de $1_V\,\mathcal{L}$, et $1_{V^c}\ Y_{\mathcal{L}}$ celui de $1_{V^c}\,\mathcal{L}$.

Appliquons cette décomposition aux espaces $\mathcal{L}(S_\alpha)$ et $\mathcal{L}(S_\gamma)$ avec $S_\alpha = \{0 \in \alpha\}$ et $S_\gamma = \{0 \in \gamma\}$ dans $\mathcal{A}$. Comme, par définition, $\alpha \subset \gamma$ p.s. sur V, on trouve ainsi :

$$1_V\ Y(S_\alpha) \leq 1_V\ Y(S_\gamma) \quad \text{p.s.} \tag{5-6}$$

Considérons maintenant le cas qui nous intéresse, à savoir le cas où l'on a :

$$\alpha \subset \gamma \quad \text{p.s.}$$

et soit γ_n une suite croissante d'OAPS périodiques et grillagés telle que $\gamma_n \uparrow \gamma$ p.s. et $\mathcal{L}(S_{\gamma_n}) \uparrow \mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(d_\gamma)$ (par exemple, comme on l'a vu, on peut prendre pour γ_n l'érodé $\gamma \ominus B_{1/n}$).

On a ici $V(\alpha,\gamma) = \Omega$ p.s., et les $V_n = V(\alpha,\gamma_n) = \{\alpha \subset \gamma_n\}$ vérifient $V_n \uparrow V$ p.s. En effet, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega)$ tel que le <u>compact</u> $\alpha \cap Q_{\underline{x}}$ soit contenu dans γ_n pour $n \geq N(\omega)$, donc aussi $\alpha \subset \gamma_n$, puisque le FAPS α est périodique et grillagé. Par suite, on a bien $V = \bigcup V_n$ p.s. dans Ω.

D'après la relation (5-6), on a pour chaque n :

$$1_{V_n}\ Y(S_\alpha) \leq 1_{V_n}\ Y(S_{\gamma_n}) \leq Y_\gamma \quad \text{p.s.}$$

Passant a la limite $n \uparrow \infty$, on obtient donc :

$$Y(S_\alpha) \leq Y_\gamma$$

c'est-à-dire $\mathscr{L}(S_\alpha) \subset \mathscr{L}(d_\gamma)$. Ainsi se trouve démontré, dans le cas d'ensembles grillagés périodiques, le résultat que nous avons en vue.

b/ - Cas d'un FAPS et d'un OAPS γ grillagés, non périodiques. Nous dirons que α, γ, sans être nécessairement périodiques, sont grillagés s'ils sont p.s. contenus dans le grillage ouvert G.

Concernant, par exemple, un OAPS grillagé $\gamma \subset G$, on peut lui associer l'OAPS grillagé périodique γ' obtenu en périodisant l'intersection de γ avec la maille de grillage G, soit :

$$\gamma' = \bigcup_{h \in \mathbb{Z}^n} (\gamma \cap Q_{\underline{x}})_h$$

En ce qui concerne les potentiels, je laisse à la sagacité du lecteur le soin de montrer que l'on a alors :

$$Y_\gamma = Y_{\gamma'} \quad \text{p.s.}$$

(mais non, bien entendu, $U_x\, Y_\gamma = U_x\, Y_{\gamma'}$, pour $x \neq 0$). La même remarque s'appliquant au FAPS grillagé (non périodique) $\alpha \subset \gamma$, on voit que le résultat précédent s'étend aux grillagés non périodiques : on a encore $Y(S_\alpha) \leq Y_\gamma$ et $\mathscr{L}(S_\alpha) \subset \mathscr{L}(d_\gamma)$.

c/ - Pour établir le résultat dans le cas général, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5-5 - Soient $\mathscr{L}_1, \ldots \mathscr{L}_k$, k espaces de Dirichlet dont les potentiels $Y_{\mathscr{L}_i}$ vérifient $\operatorname{Sup} Y_{\mathscr{L}_i} \geq a$ p.s. pour un nombre $a > 0$. Alors, pour tout $\mathscr{L} \in \mathscr{D}$, on a :

$$\mathscr{L} = \operatorname{Sup} (\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L})$$

Autrement dit : $\mathscr{L}$ est le plus petit Dirichlet contenant les intersections $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}_i$.

De fait, il est clair que $\mathscr{L} \supset \mathrm{Sup}\,(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L})$, et il faut montrer l'inclusion inverse. Il suffit pour cela (paragraphe 4-1, in fine), de vérifier $Y_{\mathscr{L}} \wedge a \in \mathrm{Sup}\,(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L})$. Or cela est évident, du fait que l'on a $a \leq \mathrm{Sup}\, Y_{\mathscr{L}_i}$ p.s., ce qui entraine aussitôt

$$Y_{\mathscr{L}} \wedge a \leq \mathrm{Sup}\,(Y_{\mathscr{L}_i} \wedge Y_{\mathscr{L}})$$

Comme ce dernier élément est dans $\mathrm{Sup}\,(\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L})$, les propriétés habituelles de positivité permettent de conclure. ■

Revenons à notre construction. Il résulte du lemme 5-4 que le potentiel Y_G du grillage G est supérieur à une constante $a > 0$ en presque tout ω tel que $0 \in G \ominus B_\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$. De même, sur le même ensemble, le potentiel Y_F du fermé $F = G \ominus \overset{\circ}{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}$, est p.s. supérieur à une constante $a' > 0$.

D'autre part, le cube fermé $\overline{Q}_o$ étant compact, est couvert par un nombre fini de translatés $(Q_o \ominus B_\varepsilon)_{h_i}$, $i = 1,2,\ldots k$. Par conséquent, la réunion des translatés $(G \ominus B_\varepsilon)_{h_i}$ recouvre p.s. l'espace $\mathbb{R}^N$ entier. Si nous posons $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}(G_{h_i})$, on a donc, d'après le lemme :

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathrm{Sup}_i\,(\mathscr{L}(\gamma) \cap \mathscr{L}_i) \tag{5-7}$$

pour tout OAPS γ. Or il est immédiat que

$$\mathscr{L}(\gamma) \cap \mathscr{L}_i$$

est le Dirichlet associé à l'OAPS grillagé $\gamma \cap G_{h_i}$. De la même façon, pour tout FAPS α, on trouve

$$\mathscr{L}(S_\alpha) = \mathrm{Sup}_i\,(\mathscr{L}(S_\alpha) \cap \mathscr{L}(S_{F_{h_i}})) \tag{5-8}$$

et, de même, l'intersection $\mathscr{L}(S_\alpha) \cap \mathscr{L}(S_{F_{h_i}})$ n'est autre que le Dirichlet $\mathscr{L}(S_{\alpha_i})$ avec $\alpha_i = \alpha \cap F_{h_i} = \alpha \cap (G \ominus \overset{\circ}{B}_{\frac{\varepsilon}{2}})_{h_i}$. Or, si $\alpha \subset \gamma$

p.s., on a évidemment aussi $\alpha \cap (G \ominus \mathring{B}_{\frac{\varepsilon}{2}})_{h_i} \subset \ldots \subset \gamma \cap G_{h_i}$ p.s.

En appliquant à ces ensembles grillagés le résultat établi plus haut, il vient donc

$$\mathscr{L}(S_\alpha) \cap \mathscr{L}(S_{F_{h_i}}) \subset \mathscr{L}(\gamma) \cap \mathscr{L}_i$$

Les relations (5-7) et (5-8) permettent alors de conclure :

$$\mathscr{L}(S_\alpha) \subset \mathscr{L}(\gamma)$$

Nous avons donc établi le résultat que nous avions en vue. Enonçons :

THEOREME 5-5 - Soient α un FAPS et γ un OAPS tels que $\alpha \subset \gamma$ p.s.

Alors $\mathscr{L}(S_\alpha) \subset \mathscr{L}(d_\gamma)$ (avec $S_\alpha = \{0 \in \alpha\} \in \mathcal{A}$). En particulier, $\chi(\mathscr{L}_\gamma)$ est le Sup des $\chi(\mathscr{L}_\alpha)$ pour l'ensemble des FAPS $\alpha \subset \gamma$ p.s., c'est-à-dire :

$$K(\gamma) = \chi(\mathscr{L}_\gamma)$$

COROLLAIRE - Si une suite décroissante d'OAPS γ_n et un FAPS α vérifient $\gamma_n \downarrow \alpha$ p.s., on a $K(\gamma_n) \downarrow K(\alpha)$ et $\mathscr{L}(\gamma_n) \downarrow \mathscr{L}(\alpha)$.

En effet, $\mathscr{L}(\gamma_n) \supset \mathscr{L}(\alpha)$, d'après le théorème. Mais, en posant $S_n = \{0 \in \gamma_n\} \in \mathcal{A}$, on sait que l'on a $\mathscr{L}(S_n) \supset \mathscr{L}(\gamma_n)$ et $\mathscr{L}(S_n) \downarrow \mathscr{L}(\alpha)$. D'où le corollaire. ■

Il résulte, en particulier, de ce corollaire que le potentiel Y_α de l'espace $\mathscr{L}(S_\alpha) = \mathscr{L}(\alpha)$ associé à un FAPS α vérifie la propriété suivante : la FA $U_x\ Y_\alpha$ est p.s. scs sur toute partie dénombrable dense. La démonstration est analogue à celle du théorème 5-4.

REMARQUE : Si, au contraire, on a $\alpha_n \uparrow \gamma$ pour une suite croissante de FAPS α_n et un OAPS γ, on n'a pas nécessairement $K(\alpha_n) \uparrow K(\gamma)$.

6. LA PERMEABILITE DE DARCY.

Toute la théorie qui précède ne concerne que les perméabilités de filière, et devrait être étendue au cas le plus général, celui des perméabilités de Darcy. Malheureusement, cette généralisation rencontre des difficultés très réelles. C'est pourquoi, dans ce qui suit, je me contente de circonscrire le problème à l'existence et à l'unicité de la solution, et dans le cadre défini au paragraphe 3 ci-dessus, c'est-à-dire en me limitant exclusivement au point de vue de la loi spatiale (ou encore, si l'on préfère, les considérations qui suivent concernent seulement la perméabilité de Darcy des FAPS et des OAPS séparables).

La première tâche consiste à transposer dans un cadre probabiliste le principe variationnel introduit dans le premier paragraphe. Sur l'espace habituel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du groupe τ_x , $x \in \mathbb{R}^n$, nous définissons notre ensemble aléatoire ("les pores") du point de vue de la loi spatiale, en nous donnant, comme au paragraphe 3, un ensemble $C \in \mathcal{A}$.

Considérons ensuite la classe des vecteurs - courant parmi lesquels nous devrons chercher notre extremum. Ce sont des vecteurs $Y = (Y_i)$, $i = 1,2...n$ dont les composantes Y_i doivent vérifier les conditions suivantes :

$$Y_i \in L_1 \cap \mathcal{D}_A \quad ; \quad 1_C Y_i = Y_i \quad ; \quad A_i Y^i = 0$$

Ces composantes doivent donc être dans $\mathcal{L}(C)$, ou, si l'on préfère, le vecteur Y doit appartenir à $(\mathcal{L}_C)^n$, et doit de plus être conservatif. (à strictement parler, les Y_i n'appartiennent pas forcément au domaine $\mathcal{D}_A$ de l'opérateur A de L_2. Mais, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, la condition : Y_i appartient au domaine de l'opérateur A de L_1 et A $Y_i \in L^2$ entraine que la FAI-O $(U_x - I)$ Y_i est dans L_2 et admet A Y_i comme gradient au sens de L^2. C'est ce que nous évoquons par la notation abusive $Y_i \in L_1 \cap \mathcal{D}_A$). L'espace qui nous intéresse est donc en somme :

$$Q(C) = (\mathcal{L}_C)^n \cap H_0^1$$

(avec le même abus de notation).

L'espace image A Q(C) est donc l'espace des tenseurs $A_i\ Y^j$, $Y \in Q(C)$. Nous le munirons toujours de sa norme hilbertienne, que l'on écrira selon l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$\|A\ Y\|^2 = \sum_j \|A\ Y^j\|^2 = \sum_{i,j} \|A_i\ Y^j\|^2$$

Nous désignons ensuite par Q(C,q) la variété linéaire contenue dans Q(C), définie par la condition supplémentaire E Y = q, vecteur constant donné :

$$Q(C,q) = \{Y\ ,\ Y \in Q(C)\ \ ;\ \ E\ Y = q\}$$

Le problème consiste donc à trouver l'élément $Y \in Q(C,q)$ (s'il existe) réalisant l'inf de $\|A\ Y\|^2$ dans cette classe Q(C,q). Nous poserons

$$W(q) = \text{Inf}\ \{\|A\ Y\|^2\ ,\ Y \in Q(C,q)\} \tag{6-1}$$

Quel rapport y a-t-il entre cette énergie de Darcy W(Q) et la perméabilité de filière $\chi(C)$ du même ensemble aléatoire ? Pour chaque indice i, nous avons pour $Y \in Q(C)$

$$(\|Y_i\|_1)^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y_i\|^2 \tag{6-2}$$

d'où l'on déduit évidemment :

$$(E\ Y_i)^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y_i\|^2$$

En sommant sur i, nous trouvons pour tout $Y \in Q(C,q)$

$$|E\ q|^2 \leq \chi(C)\ \|A\ Y\|^2$$

et par suite

$$\chi(C)\ W(q) \geq |E\ q|^2 \tag{6-3}$$

Cette inégalité exprime simplement que la perméabilité de Darcy

est toujours plus faible que la perméabilité de filière.

En particulier, si $\chi(C) = 0$, on a nécessairement $W(q) = \infty$ (puisque $q \neq 0$) : autrement dit, la variété $Q(C,q)$ est vide , et il n'y a évidemment aucune solution. En termes physiques, le fluide ne passe tout simplement pas dans la direction q, et la perméabilité est nulle.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons donc essentiellement

$$\boxed{\chi(C) > 0}$$

Analysons les diverses éventualités possibles.

1er Cas - $Q(C) = 0$: Alors $W(q) = \infty$, à plus forte raison, la perméabilité est nulle. Le fluide ne passe pas, et il n' y a pas de solution.

2ème Cas - $Q(C) \neq 0$, mais ne contient pas d'éléments d'espérance non nulle. Autrement dit, $Q(C,q) = \emptyset$, et $W(q) = \infty$, avec la même conclusion que ci-dessus. Contrairement au cas des filières, cette éventualité est ici parfaitement possible, du fait que $Y \in Q(C)$ n'implique pas que le vecteur des composantes $|Y_i|$ est lui-même dans $Q(C)$: car le vecteur $|Y_i|$ n'a pas de raison de vérifier encore la condition $A_i\ |Y_i| = 0$.

A titre d'exemple, considérons dans $\mathbb{R}^2$ un FAPS p.s. constitué de cercles fermés disjoints, et d'intérieur non vide. On a $\chi(C) > 0$, mais aucun écoulement macroscopique n'est possible : $Q(C,q)$ est vide pour $q \neq 0$, et $W(q) = \infty$. Mais $Q(C)$ n'est pas nul : des tourbillons peuvent s'établir dans les cercles disjoints. Les vecteurs correspondants ne sont pas différentiables. Mais nous pouvons remplacer nos cercles par des cercles de rayons plus petits, définir un tourbillon dans ces cercles amoindris, et régulariser : nous obtiendrons un tourbillon différentiable, et $Q(C)$ ne sera pas vide.

3ème Cas - $Q(C,q) \neq 0$, et donc $W(q) < \infty$, mais $W(q) = 0$. D'après (6-3), cela entraine également $\chi(C) = \infty$: la perméabilité de filière étant infinie, celle de Darcy l'est également pour toutes les

les directions q. Nous laisserons de côté ce cas physiquement peu intéressant (mais mathématiquement possible).

4ème Cas - $0 < W(q) < \infty$, donc $Q(C,q) \neq 0$, mais $\chi(C) = \infty$. Ce cas, qui peut se présenter, semble très difficile à traiter. Du fait que la perméabilité de filière est infinie, l'inégalité (6-2) est inopérante, et l'application $Y \to A\,Y$ de $Q(C)$ sur son image $A\,Q$ n'est plus nécessairement bijective. En particulier, la variété $A\,Q(C,q)$ n'est plus nécessairement fermée, et nous ne pouvons plus invoquer le théorème des projections pour établir l'existence et l'unicité de la solution.

5ème Cas - C'est le cas le plus favorable, celui où l'on a à la fois

$$(6\text{-}4) \qquad 0 < \chi(C) < \infty \quad ; \quad 0 < W(q) < \infty$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons toujours que les inégalités (6-4) sont vérifiées.

Sous les hypothèses (6-4), en effet, l'espace $A\,Q(C)$ et la variété $A\,Q(C,q)$ sont fermés dans l'espace de Hilbert $H^{n\times n}$.

Supposons, en effet, $A\,V_n \to A\,V$ avec $V_n \in Q(C)$ ou à $Q(C,q)$. Pour chaque i, $A\,V_n^i \to A\,V^i$ entraine $V^i \in \mathscr{L}_c$, $E\,V^i = \lim E\,V_n^i$ d'après les propriétés des espaces $\mathscr{L}_c$. De plus, comme $V_n^i \to V^i$ au sens de L_1, et que l'opérateur A est fermé, on a encore $V^1 \in \mathscr{D}_A \cap L_1$ et, en particulier, la relation $A_i\,V_n^i = 0$ passe à la limite.

Dans ces conditions, le théorème des projections nous garantit l'existence et l'unicité de la solution, à savoir l'élément de $Q(C,q)$ dont le gradient est la projection de l'élément 0 sur la variété fermée $A\,Q(C,q)$. Enonçons :

THEOREME 6-1 - Sous les hypothèses (6-4), l'espace $A\,Q(C)$ et la variété linéaire $A\,Q(C,q)$ sont fermés, et il existe un et un seul élément dans $Q(C,q)$ réalisant le minimum $W(q)$ de l'énergie.

6.1 - Caractérisation de la solution.

Toujours sous les hypothèses (6-4), comment caractériser l'unique élément $V = (V^i) \in Q(C,q)$ réalisant le minimum $W(q)$? Nous devons projeter 0 sur la variété fermée :

$$A\,Q(C,q) = [A\,(\mathscr{L}^n \cap H_\delta^\perp)] \cap A\,(\mathscr{L}^n \cap H_q)$$

où H_q représente la variété des vecteurs Y admettant une espérance égale à q. Autrement dit : V est l'unique élément de $Q(C,q)$ orthogonal à l'espace

$$(6\text{-}5) \qquad A\,Q(C,o) = A\,(\mathscr{L}^n \cap H_\delta^\perp) \cap A\,(\mathscr{L}^n \cap H_o)$$

où H_o est cette fois l'espace des vecteurs d'espérance nulle. Pour caractériser l'orthogonal dans $A\,\mathscr{L}^n$ de cet espace $A\,Q(C,o)$, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 6-1 - Soient H et H_1 deux sous-espaces fermés d'un même espace de Hilbert, Π_H le projecteur de H et $H_1^\perp$ l'orthogonal de H_1. Alors, l'orthogonal dans H de l'intersection $H \cap H_1$ est l'adhérence de $\Pi_H\, H_1^\perp$, soit :

$$H \cap (H \cap H_1)^\perp = \overline{\Pi_H\, H_1^\perp}$$

Explicitement : un élément $Y \in H$ est orthogonal à $H \cap H_1$ si et seulement si il existe une suite Y_n dans $H_1^\perp$ telle que :

$$Y = \lim \Pi_H\, Y_n$$

En effet, les $Y \in (H \cap H_1)^\perp$ sont de la forme

$$Y = \lim (X_n + Y_n) \quad ; \quad X_n \in H^\perp \quad , \quad Y_n \in H_1^\perp$$

Si, de plus, $Y \in H$, on a $Y = \Pi_H\, Y = \lim \Pi_H\, Y_n$ (puisque $\Pi_H\, X_n = 0$ par hypothèse).

Inversement, supposons $Y = \lim \Pi_H Y_n$ avec $Y_n \in H_1^\perp$, et soit Z un élément de $H \cap H_1$. Comme $Z \in H$, on trouve d'abord $< Y\ Z > = \lim < Y_n\ Z >$. Mais $< Y_n,\ Z > = 0$, puisque $Z \in H_1$ et $Y_n \in H_1^\perp$. Donc Y est dans $H \cap (H \cap H_1)^\perp$ ■

Pour caractériser l'orthogonal de $A\ Q(C,o)$ dans $\underline{A\ \mathscr{E}^n}$, compte tenu de la relation (6-5), nous allons d'abord construire l'orthogonal de $A\ (\mathscr{L}^n \cap H_\partial^\perp)$ dans $A\ \mathscr{E}^n$. Notons que l'on a

$$A\ (\mathscr{L}^n \cap H_\partial^\perp) = A\ \mathscr{E}^n \cap A\ H_\partial^\perp$$

En effet, si $Z \in A\ H_\partial^\perp$, l'équation $A\ V = Z$ détermine V à un invariant près, et toutes les solutions V sont dans $H_\partial^\perp$. Au contraire, Z étant dans $A\ \mathscr{E}^n$, une et une seulement de ces solutions est dans $\mathscr{E}^n$. Il y a donc un et un seul $V \in A\ (\mathscr{L}^n \cap H_\partial^\perp)$ tel que $A\ V = Z$ pour un $Z \in A\ \mathscr{E}^n \cap A\ H_\partial^\perp$. D'où l'égalité ci-dessus.

En appliquant le lemme 6-1 à $A\ \mathscr{E}^n \cap A\ H_\partial^\perp$, nous caractérisons l'orthogonal de cet espace dans $A\ \mathscr{E}^n$ de la manière suivante : un élément de $A\ \mathscr{E}^n$, c'est-à-dire un tenseur $A^i\ Y_j$ où $Y \in \mathscr{E}^n$, est orthogonal à $A\ \mathscr{L}^n \cap A\ H_\partial^\perp$ si et seulement si :

$$A^i\ Y_j = \lim \Pi_{A\mathscr{L}^n}\ X_j^i(n)$$

avec

$$(6\text{-}6) \qquad < X_j^i(n)\ ,\ A_i\ Z^j > = 0 \qquad (Z \in H_\partial^\perp)$$

Tout tenseur $X(n)$ vérifiant cette relation (6-6) étant lui-même limite de tenseurs différentiables, qui s'en déduisent par régularisation et vérifient la même relation (l'espace $H_\partial^\perp$ étant invariant par U_x), on peut sans inconvénient supposer $X(n) \in \mathscr{D}_A$ et remplacer (6-6) par la relation, dans ce cas équivalente :

$$(6\text{-}7) \qquad A_i\ X_j^i(n) = G_j(n) \in H_\partial$$

La projection $\Pi_{A\mathscr{L}^n} X(n)$, de son côté, est un tenseur de la forme $A^i Y_n(n)$, pour un vecteur $Y_n \in \mathscr{L}^n$ tel que :

$$< X^i_j(n) , A_i Z^j > = < A^i Y_j(n) , A_i Z^j > \qquad (Z \in \mathscr{L}^n)$$

Compte tenu de (6-7), ceci équivaut encore à :

$$< A^i Y_j(n) , A_i Z^j > = - E[G_j(n) Z^j] \qquad (Z \in \mathscr{L}^n)$$

Autrement dit, les éléments de $A \mathscr{L}^n$ orthogonaux à $A \mathscr{L}^n \cap A H_\partial^\perp = A (\mathscr{L}^n \cap H_\partial^\perp)$ sont les éléments $A Y$, $Y \in \mathscr{L}^n$ tels quel'on ait :

$$(6\text{-}8) \qquad < A^i Y_j , A_i Z^j > = - \lim E [G_j(n) Z^j] \qquad (Z \in \mathscr{L}^n)$$

pour une suite de gradients $G(n) \in H_\partial$.

Cherchons maintenant l'orthogonal dans $A \mathscr{L}^n$ du second facteur de (6-5), qui est $A (\mathscr{L}^n \cap H_o)$. Il n'est pas vrai, cette fois, que l'on ait $A (\mathscr{L}^n \cap H_o) = A \mathscr{L}^n \cap A H_o$, et nous devons trouver une caractérisation directe. Soit $X \in \mathscr{L}^n$ tel que $A X$ soit orthogonal aux $A Y$, $Y \in \mathscr{L}^n$, $E Y = 0$. Désignons par $Y_{\mathscr{L}}$ le potentiel de l'espace de Dirichlet $\mathscr{L} = \mathscr{L}_c$, caractérisé par

$$(6\text{-}9) \qquad < A Y_{\mathscr{L}} , A Z > = E Z \qquad (Z \in \mathscr{L})$$

Si le vecteur $Y \in \mathscr{L}^n$ n'est pas dans H_o, nous pouvons lui associer le vecteur Y' de composantes

$$Y'^i = Y^i - \frac{E Y^i}{\chi(C)} Y'_{\mathscr{L}}$$

(on rappelle que $\chi(C) = E Y_{\mathscr{L}}$), qui est évidemment d'espérance nulle. Compte tenu de (6-9) nous concluons que $A X$, $X \in \mathscr{L}^n$, est orthogonal à $A (\mathscr{L}^n \cap H_o)$ s'il vérifie :

$$(6\text{-}10) \qquad < A^i X_j , A_i Z^j > = \frac{E(X_j) E(Z^j)}{\chi(C)} \qquad (Z \in \mathscr{L}^n)$$

Enfin, pour qu'un élément A Y, $Y \in \mathscr{E}^n$ soit orthogonal à A Q(C,o) c'est-à-dire à l'intersection des deux espaces $A\,\mathscr{E}^n \cap A\,H_\partial^\perp$ et $A\,(\mathscr{E}^n \cap H_o)$ dont nous avons caractérisé les orthogonaux, il faut et il suffit qu'il soit limite d'une suite $A\,(X_m + Y_m)$, où les X_m vérifient la condition (6-10) et les Y_m la condition (6-11). Nous obtenons ainsi la caractérisation cherchée :

LEMME 6-2 - Soit $V \in \mathscr{E}^n$. Pour que A V soit orthogonal à la variété A Q(C,o), il faut et il suffit que l'on puisse trouver une suite ω_n de vecteurs constants et une suite $G_n \in H_\partial$ de vecteurs gradients tels que l'on ait pour tout vecteur $Z \in \mathscr{E}^n$

$$(6\text{-}11) \qquad < A^i V_j , A_i Z^j > = - \lim E\,[\omega_i(n) + G_i(n))Z^i]$$

On en déduit aussitôt :

THEOREME 6-2 - Sous les hypothèses (6-4), l'unique élément $V \in Q(C,q)$ réalisant le minimum de l'énergie est caractérisé par le critère (6-11) du lemme 6-2.

On reconnait dans ce critère (6-11) une forme affaiblie de l'équation de Navier (qui s'écrirait sous forme forte $\Delta V_j = \omega_j + G_j$).

En ce qui concerne l'énergie, on a par définition

$$W(q) = < A^i V_j, A_i V^j >$$

Par suite, en prenant Z = V dans le critère (6-11), et en tenant compte de $E\,[G_j(n)\,V^j] = 0$, puisque V est conservatif, nous trouvons :

$$(6\text{-}12) \qquad W(q) = - \lim (\omega_i(n)\,q^i)$$

Concernant la suite des vecteurs constants $\omega_n = \omega_n(q)$, nous ne savons pas, a priori, si elle est elle-même convergente. D'après (6-12), on peut seulement affirmer que la suite scalaire $q^i\,\omega_i(n)$ est convergente.

Notons pourtant que la suite $q'^i\ \varpi_i(n)$ est convergente pour tout vecteur q' tel que $Q(C,q')$ ne soit pas vide : en effet, si $V' \in Q(C,q')$ on a $E\ (G_i(n)\ V'^i) = 0$, puisque V' est conservatif, et le critère (6-11) appliqué avec $Z = V'$, garantit la convergence de la suite $q'^i\ \varpi_i(n)$.

Donc, moyennant l'hypothèse supplémentaire :

$$0 < W(q) < \infty \qquad \text{pour tout } q \neq 0 \tag{6-13}$$

(hypothèse qui nous garantit l'existence d'une perméabilité K de type positif strict), nous savons que $Q(C,q) \neq \emptyset$ quel que soit le vecteur q, et par suite la suite ϖ_n est convergente. Soit ϖ sa limite (qui est le gradient macroscopique de pression). Notre critère (6-11) est alors remplacé par le suivant :

Pour tout vecteur $q \neq 0$, l'élément unique $V(q)$ réalisant le minimum de l'énergie est caractérisé par :

$$\begin{cases} V(q) \in Q(C,q)\ , \text{ et, pour tout } Z \in \mathscr{E}^n : \\ \\ < A\ V\ ,\ A\ Z > = -\ \varpi_i(q)\ E\ Z^i - \lim < G_i(n,q),\ Z^i > \end{cases} \tag{6-14}$$

et l'énergie est alors donnée par :

$$W(q) = -\ q^i\ \varpi_i(q) \tag{6-15}$$

6.2 - Le tenseur des perméabilités.

Il est clair que, sous les hypothèses (6-13), qui nous garantissent l'existence et l'unicité de la solution $V(q)$ pour tout écoulement macroscopique représenté par un vecteur constant q donné, cette unicité de la solution et la linéarité du système (6-14) entrainent que $\varpi(q)$ est une fonction linéaire de q, donc de la forme :

$$\varpi_i(q) = -\ W_{ij}\ q^j \tag{6-16}$$

Montrons, pour achever ce tour d'horizon, que cette matrice W_{ij}

est <u>symétrique</u> et strictement <u>positive</u>.

De fait, appliquons le critère (6-14) avec V = V(q) et Z = V(q'). Comme V(q') est conservatif, les produits scalaires $< G(n), V(q') >$ sont nuls, et il vient, le premier membre étant symétrique en q et q' :

$$< A\, V_q \,,\, A\, V_{q'} > = - q'^{,i}\, \varpi_i(q) = - q^{i}\, \varpi_i(q')$$

On a donc

$$q'^{,i}\, W_{ij}\, q^{j} = q^{i}\, W_{ij}\, q'^{,i}$$

pour q, q' quelconques, et par suite

$$\boxed{W_{ij} = W_{ji}}$$

D'autre part, d'après l'hypothèse (6-13), W(q) est strictement positif pour tout $q \neq 0$. Donc, d'après (6-15), nous trouvons aussi :

$$\boxed{W(q) = W_{ij}\, q^{i}\, q^{j} > 0}$$

La matrice W est donc régulière. Soit K son inverse, qui est la matrice des <u>perméabilités</u>.: elle est <u>symétrique</u> et <u>strictement positive</u>, comme W. La relation (6-16), enfin, est alors équivalente à :

$$\boxed{q^{i} = - K^{ij}\, \varpi_j}$$

c'est-à-dire à <u>la loi de Darcy.</u>

Dernière remarque : bien que le gradient macroscopique $\varpi(q)$ existe pour chaque écoulement macroscopique q, il ne lui correspond pas nécessairement de gradient "microscopique" de la forme $\varpi + G$ pour un $G \in H_\partial$: il faudrait pour cela que la suite des gradients G_n du critère (6-14) soit convergente, au moins au sens faible, dans L^2. Mais le critère nous garantit seulement la convergence de

$< G_n, Z >$ pour tous les vecteurs Z de $\mathscr{L}^n$, et nullement pour tous les vecteurs de L^2.

Physiquement, cette circonstance signifie qu'il n'est pas toujours possible de représenter la pression par une FAI-0 (munie de la dérive ϖ) définie dans l'espace tout entier, grains compris.

Il est facile de vérifier que les éléments $Y \in \mathscr{L}_c \cap L^2$ sont denses (pour la topologie de L^2) dans le sous-espace de L^2 défini par l'équation $Z = 1_c Z$ (éléments nuls hors de C). Le critère (6-14) nous fait donc espérer (sans nous le garantir) que la suite $1_C G_n$ converge faiblement vers un élément $G = 1_C G$, nul en dehors des pores. Mais $1_C G$ n'est pas un gradient, et rien ne nous garantit qu'il existe un gradient $G' \in H_\partial$ tel que G soit la restriction de G' à C, soit $G = 1_C G'$. Même si G existe sur C, l'interpolation des isobares dans les grains n'est pas nécessairement possible.