Fontainebleau/CMM N-599

QUELQUES EXEMPLES SIMPLES D'EMERGENCE D'UN DEMI-GROUPE DE DISPERSION

G. MATHERON

Mai 1979

QUELQUES EXEMPLES SIMPLES D'EMERGENCE

D'UN DEMI-GROUPE DE DISPERSION

Par

G. MATHERON

TABLE DES MATIERES

QUELQUES EXEMPLES SIMPLES D'EMERGENCE D'UN DEMI-GROUPE DE DISPERSION

0 - LE PROBLEME : un groupe de convection pure peut-il émerger, au niveau macroscopique, sous la forme d'un demi-groupe de dispersion ?

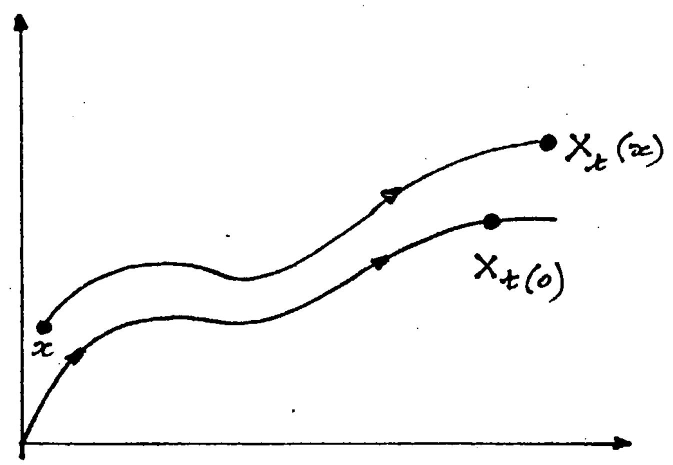
Dans ce qui suit, nous supposons qu'un milieu (par exemple un milieu poreux) supposé infini est le siège d'un écoulement permanent, caractérisé par la donnée, en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, d'un vecteur vitesse $V(x) = (V^1(x), V^2(x), \ldots V^n(x))$. En l'absence de diffusion moléculaire, la position $X_t(x)$ au temps t de la particule qui se trouvait au point x au temps t = 0 est déterminée par le système d'équations différentielles :

$$\text{(0-1)} \qquad \frac{\partial}{\partial t} X_t^i(x) = V^i(X_t(x))$$

et les conditions initiales $X_0(x) = x$. Il est bien connu que les transformations $x \to X_t(x)$ associées aux différentes valeurs (positives ou négatives) du temps t constituent un groupe, que nous appellerons groupe de convection pure :

$$X_t[X_{t'}(x)] = X_{t+t'}(x) \quad ; \quad X_{-t}[X_t(x)] = x$$

Il s'agit donc, à cette échelle que nous appellerons, pour simplifier, échelle microscopique, d'un phénomène parfaitement réversible. Pourtant si nous changeons l'échelle d'observation, en nous plaçant à un point de vue macroscopique, nous voyons apparaître des phénomènes d'apparence irréversible qui évoquent ce qu'il est convenu d'appeler une dispersion. De fait, deux particules placées aux points voisins x et x' à l'instant initial t = 0 vont suivre des trajectoires qui se ressemblent, mais ne sont pas identiques, et les parcourir avec des vitesses différentes : le temps passant, l'écartement des deux trajectoires peut s'accentuer, donnant naissance à une dispersion latérale, et le retard de l'une des particules sur l'autre peut s'accumuler, donnant ainsi naissance à une dispersion longitudinale.



A dire vrai, puisque nous nous plaçons du point de vue macroscopique, nous devons considérer non pas deux particules, mais plutôt toute une population caractérisée par leur distribution initiale dans l'espace, admettant une densité $\rho(x)$. On peut imaginer que l'on a injecté un colorant au temps $t = 0$, et $\rho(x)$ représente l'état initial de la tache colorée. Au cours du temps, cette densité va se transformer, du fait du mouvement des particules colorées, et l'on assistera en général à un entrainement de la tache, selon une vitesse moyenne $\bar{V}$, ainsi qu'à son élargissement. C'est ce dernier phénomène qui constitue la dispersion.

Le milieu (et le champ de vitesses) étant supposés macroscopiquement homogènes, on admet généralement que l'état de la tache colorée - tel que l'on peut l'observer au niveau macroscopique au temps t - est régi par l'équation d'évolution :

$$\text{(0-2)} \qquad \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2} D^{ij} \partial_{ij} \rho_t - \bar{V}^i \partial_i \rho_t$$

caractéristique des phénomènes de diffusion en milieu homogène (la matrice de dispersion D^{ij} et le vecteur de convection $\bar{V}^i$ sont constants) tels que le mouvement brownien ou la diffusion de la chaleur. Cela revient à admettre que, pour t assez grand, les coordonnées $X_t^i(x)$ de la particule partie du point x peuvent être considérées comme des variables aléatoires gaussiennes, admettant l'espérance $E\, X_t^i = x^i + \bar{V}^i t$ et la matrice de covariance $t\, D^{ij}$ proportionnelle au temps.

Naturellement, l'équation (0-2) ne peut avoir qu'une signification macroscopique. De fait, les phénomènes de diffusion sont essentiellement irréversibles, alors que les équations microscopiques (0-1) associées au groupe de convection sont parfaitement reversibles. Si, à un instant $t > 0$, nous pouvions renverser le sens de l'écoulement, c'est-à-dire remplacer en chaque point x le vecteur $V(x)$ par son opposé $-V(x)$, nous verrions la tache de couleur repasser successivement par chacun de ses états précédents, c'est-à-dire rebrousser chemin en rétrécissant. Au contraire, si nous remplaçons $\bar{V}$ par $-\bar{V}$ dans l'équation de diffusion (0-2), nous obtenons encore une équation de diffusion : ce qui laisse prévoir cette fois que la tache reviendra bien sur ses pas, mais en s'élargissant.

Ce paradoxe apparent est bien connu en mécanique statistique. Il signifie que, dans certains cas très particuliers, la description purement macroscopique fournie au temps t par la densité ρ_t peut se révéler insuffisante pour prévoir l'évolution ultérieure, même macroscopique, du phénomène. Compte tenu du contraste des échelles, un très grand nombre de distributions microscopiques possibles sont compatibles avec une même densité macroscopique donnée ρ_t. Pour la plupart d'entre elles, l'évolution ultérieure, après renversement du sens de l'écoulement, correspondrait bien, au niveau macroscopique, à la diffusion

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} D^{ij} \rho + \bar{V}^i \partial_i \rho$$

c'est-à-dire à un élargissement de la tache. Mais, pour certaines distributions microscopiques exceptionnelles correspondant à la même distribution macroscopique ρ_t, on peut avoir une évolution ultérieure très différente. Il se trouve, dans le cas qui nous occupe, que la distribution microscopique, réalisée par le jeu des équations de convection (0-1) immédiatement avant le renversement du sens de l'écoulement, appartient automatiquement à cette classe exceptionnelle - et c'est pourquoi la tache rebrousse chemin en rétrécissant.

Cette réserve faite, il n'en reste pas moins que l'équation (0-2) fournit, dans bien des cas, une bonne description macroscopique de l'évolution de notre tache de colorant. Pour étudier cette émergence d'un demi-groupe de dispersion à partir d'un groupe de pure convection, il convient d'invoquer la théorie ergodique et donc de recourir à un modèle probabiliste. Dans ce modèle, le champ de vitesse $V(x)$ est représenté par une fonction aléatoire (vectorielle) stationnaire et ergodique, et le groupe de transformation $x \to X_t(x)$ devient ainsi lui-même un groupe aléatoire. En fait, il est facile de voir que, pour chaque t fixé, la fonction aléatoire $X_t(x) - x$ est stationnaire en x. Il suffira donc, dans ce qui suit, d'étudier en fonction du temps la variable aléatoire

$$X_t = X_t(o)$$

représentant la position au temps t de la particule placée initialement à l'origine des coordonnées.

Critère d'émergence à l'ordre 2. En dehors du cas de l'espace à une seule dimension, il est très difficile d'obtenir des résultats généraux concernant l'émergence. Dans ce qui suit, je n'examinerai que des cas très particuliers, pour lesquels il est possible de faire des calculs explicites. Mais ces exemples simples auront une valeur heuristique et nous aideront à nous faire une idée de ce qui peut se passer dans des cas plus généraux. De plus, je me contenterai de travailler à l'ordre deux, c'est-à-dire d'examiner si les convergences

$$\text{(0-3)} \quad \lim \frac{1}{t} E\, X_t^i = V^i \quad ; \quad \lim \frac{1}{t} E(X_t^i - t\, V^i)(X_t^j - t\, V^j) = D^{ij}$$

ont lieu. Enfin, pour une raison qui apparaitra vite, je me limiterai au cas des espaces à $n = 1$ ou 2 dimensions seulement.

1 - CAS DE L'ESPACE A UNE SEULE DIMENSION.

Considérons, dans R^1, une fonction aléatoire stationnaire (FAST) et ergodique $Y(x)$ admettant l'espérance m et la covariance centrée $C(h)$. L'intégrale :

$$Z(x) = \int_0^x Y(\xi)\, d\xi$$

est alors une fonction aléatoire intrinsèque, admettant la densité $E[Z(x)] = mx$ et le variogramme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[(Z(h)-m)^2] = \int_0^h (h-x)\, C(x)\, dx$$

Examinons, du point de vue des critères d'émergence d'ordre 2, le comportement asymptotique de $Z(x)$ lorsque x tend vers l'infini. A l'ordre 1, on a évidemment $E\, Z(x) = mx$, et même, d'après le théorème ergodique,

$$\lim \frac{1}{x} Z(x) = m$$

(au sens m.q) pour x tendant vers l'infini. A l'ordre 2, nous trouvons

$$\frac{1}{h} \operatorname{Var} Z(h) = \frac{2\, \gamma(h)}{h} = \frac{2}{h} \int_0^h (h-x)\, C(x)\, dx$$

Si h tend vers l'infini, cette expression n'admet pas forcément de limite. Toutefois, la plupart des variogrammes usuels ont une croissance au plus linéaire à l'infini, et la plupart des covariances usuelles $C(h)$ ont une décroissance assez rapide pour que l'intégrale $\int_0^\infty |C(h)|\, dh$ soit finie. Sous cette hypothèse on trouve (par une application immédiate du théorème de convergence dominée) :

$$\lim \frac{1}{h} E[Z(h)-m^2] = 2 \int_0^\infty C(h)\, dh \tag{1-1}$$

Ce résultat très simple va nous servir de fil directeur.

Passons maintenant au problème de <u>l'émergence</u> dans $\mathbb{R}^1$. Soit $W(x)$ un champ de vitesses, c'est-à-dire, puisque $n = 1$, une FAST de $\mathbb{R}^1$. Considérons la V.A. X_t définie par la condition initiale $X_o = 0$ en $t = 0$ et l'équation différentielle :

$$\frac{d\,X_t}{dt} = W(X_t) \tag{1-2}$$

Si la vitesse s'annule en un point x, la particule s'immobilisera en ce point. Il ne pourra donc y avoir émergence que si $W(x)$ est, par exemple, strictement positif en tout x (p.s), soit

$$P(\forall\, x,\ W(x) > 0) = 1$$

Dans ces conditions, X_t est défini par la relation intégrale :

$$\int_0^{X_t} \frac{dx}{W(x)} = t \tag{1-3}$$

S'il y a émergence,,la variable X_t sera (asymptotiquement) équivalente à une VA de la forme $t\,v + \sqrt{D_t}\,Z$, où Z est une gaussienne réduite. En particulier, elle sera (asymptotiquement) indépendante de la FA $W(x)$. Ceci suggère que l'on doit pouvoir calculer l'espérance de l'intégrale (1-3), en première approximation, <u>comme si</u> X_t et la FA $W(x)$ étaient indépendantes. Ce calcul (injustifié) conduit au résultat :

$$v\ t\ E(\tfrac{1}{W}) = t$$

Nous nous attendons donc à ce que la <u>vitesse moyenne</u> v de la particule X_t soit égale, non pas à la moyenne arithmétique, mais à la <u>moyenne harmonique</u>

$$v = \overline{W}_h = \frac{1}{E(\frac{1}{W})} \tag{1-4}$$

de la vitesse de convection $W(x)$. Nous verrons que ce résultat est correct. On ne doit pas s'étonner de trouver $v = \overline{W}_h < E\,W$: car v représente une moyenne temporelle $E(X_t/t)$, tandis que $E\,W$ a le sens d'une moyenne spatiale. Or, la particule séjournant par définition moins longtemps dans les zones où la vitesse est élevée, il est normal que la moyenne temporelle soit plus petite que la moyenne spatiale.

Examinons maintenant ce que donne, à l'ordre 2, notre raisonnement approximatif. Désignons par Y(x) la FAI sans dérive définie par

$$Y(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{W(\xi)} - \frac{1}{v}\right) d\xi$$

D'après (1-3), on a donc

$$Y(X_t) = t - \frac{X_t}{v}$$

et par suite

$$E[(X_t - v\ t)^2] = v^2\ E[Y(X_t)^2]$$

Or, si nous remplaçons X_t par la gaussienne $t\ v + \sqrt{D_t}\ Z$ indépendante de W(x) (et donc de Y(x)), il est facile de montrer que l'on a

$$\frac{E[Y(t\ v + \sqrt{D_t}\ Z)^2]}{E[Y^2(t\ v)]} \to 1$$

lorsque $t \to \infty$ (v étant strictement positif). Ce raisonnement rapide suggère donc que l'on doit avoir :

$$\frac{1}{t}\ E(X_t - v\ t)^2 = \frac{2\ v^2}{t}\ \gamma_Y(v\ t)$$

Compte tenu de (1-1), et en désignant par $C_{1/W}(h)$ la covariance centrée de l'inverse de la vitesse, on trouve, asymptotiquement pour h grand

$$\gamma_Y(h) \sim 2\ h \int_0^\infty C_{1/W}(x)\ dx$$

Par conséquent, nous devons nous attendre à ce que le coefficient de dispersion D soit donné par :

$$D = \lim \frac{1}{t} E(X_t - v\,t)^2 = 2\,v^3 \int_0^\infty C_{1/W}(h)\,dh \tag{1-5}$$

$$(v = \overline{W}_h = (E(1/W))^{-1}$$

Est-il possible de donner une justification plus sérieuse de cette formule ? Il en est bien ainsi, nous allons le voir, au moins dans le cas où la FA $W(x)$ est un processus markovien - ou, plus généralement, peut s'exprimer comme une fonction $W(Y(x))$ d'un processus markovien stationnaire $Y(x)$. Comme la plupart des FA stationnaires se laissent approcher par de telles représentations markoviennes, nous pouvons conjecturer que la formule remarquable (1-5) a sans doute une valeur très générale.

2 - INVERSION D'UN PROCESSUS DE MARKOV.

Nous allons établir les formules (1-5) , et même un résultat plus fort, dans le cas d'un processus de Markov. Pour simplifier l'exposé, je me limite au cas d'une chaine stationnaire finie : il s'agit donc d'un processus ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ou d'états numérotés $i = 1,2,\ldots N$. On suppose que ces états sont tous récurrents, autrement dit, pour $x \to \infty$, la probabilité de transition $P_{ij}(x)$ tend vers une limite p_j indépendante de l'état initial i, avec $p_j > 0$, $\sum p_j = 1$ et $\sum_i p_i \; P_{ij}(x) = p_j$. Si la probabilité de l'état initial en $x = 0$ est $p = (p_i,\ i = 1,2,\ldots N)$, le processus est donc stationnaire. On sait que la matrice P_x des probabilités de transition $P_{ij}(x)$ est de la forme

$$P_x = e^{Ax}$$

où la matrice A, ou générateur infinitésimal, est de la forme

$$A_{ij} = -\,a_i\,\delta_{ij} + a_i\,\varpi_{ij}$$

($a_i\,dx$ est la probabilité pour que le système, étant dans l'état i au point x, change d'état entre x et x+dx, et ϖ_{ij} est la probabilité pour que l'état succédant à i soit l'état j).

A toute fonction $f = (f_1, \dots f_N)$ de l'état du processus on associe son espérance $(P_x\ f)_i = f_i(x)$ au point x prise conditionnellement lorsque l'état initial est i. Le processus est alors entièrement caractérisé par l'équation d'évolution :

$$\text{(2-1)} \qquad \frac{d}{dx}(P_x\ f) = A(P_x\ f) = P_x(Af)$$

A cette fonction $f = (f_1, \dots f_N)$ de l'état du processus correspond un nouveau processus que nous noterons $Y_f(x)$ ou simplement $Y(x)$, défini par $Y(x) = f_i$ si le processus est dans l'état i au point x, et la FAI qui s'en déduit par

$$Z(x) = \int_0^x Y(\xi)\ d\xi$$

Nous allons, comme dans le paragraphe précédent, évaluer l'espérance et la variance de cette FAI, mais conditionnellement lorsque l'état initial est i. Pour cela, nous utiliserons l'équation d'évolution (2-1). On sait qu'en général l'équation $A\varphi = f$ n'a pas de solution, la matrice A étant toujours singulière (cas $A1 = 0$), sauf dans le cas où f admet une espérance $\overline{f} = \sum p_i\ f_i$ nulle (pour la probabilité stationnaire p), auquel cas la solution φ est unique à une constante près (que l'on peut déterminer par la condition supplémentaire $\overline{\varphi} = 0$).

Soit donc φ la solution (unique) du système :

$$\text{(2-2)} \qquad \begin{cases} A\ \varphi = f - \overline{f} \\ \overline{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Comme $(P_x\ f)_i$ est l'espérance conditionnelle de $Y(x)$ pour l'état initial i, celle de $Z(x)$, que nous noterons $E_i\ Z(x)$ est :

$$E_i\ Z(x) = \int_0^x (P_\xi\ f)_i\ dx = \overline{f}\ x + \int_0^x (P_\xi(f-\overline{f}))_i\ d\xi$$

D'après (2-2) et (2-1) on a :

$$P_\xi(f-\overline{f}) = P_\xi\ A(\varphi-\overline{\varphi}) = \frac{d}{d\xi}\ P_\xi\ \varphi$$

Par conséquent, il vient :

$$E_i\ Z(x) = \overline{f}\ x + (P_x\ \varphi)_i - \varphi_i$$

De plus, x tendant vers l'infini, $P_{ij}(x)$ tend vers p_j et donc $(P_x\ \varphi)_i$ tend vers $\overline{\varphi} = \sum p_j\ \varphi_j$ indépendamment de l'état initial. Par conséquent, le comportement asymptotique de notre FAI

$$Z(x) = \int_0^x Y_f(\xi)\ d\xi$$

est caractérisé par

$$E_i\ Z(x) \sim \overline{f}\ x - (\varphi_i - \overline{\varphi}) \tag{2-3}$$

Passons maintenant à la variance, ou plutôt à l'espérance conditionnelle de l'expression $(Z(x) - \overline{f}\ x)^2$, soit explicitement :

$$E_i(Z(x) - \overline{f}\ x)^2 = 2 \sum_{j,k} \int_0^x d\xi \int_\xi^x P_{ij}(\xi)(f_j-\overline{f})\ P_{jk}(\xi'-\xi)(f_k-\overline{f})\ d\xi'$$

Mais, d'après (2-2) et (2-1) $P_{\xi'-\xi}(f-\overline{f}) = \frac{d}{d\xi'}\ P_{\xi'-\xi}\ \varphi$, c'est-à-dire :

$$\sum_k P_{jk}(\xi'-\xi)(f_k-\overline{f}) = \frac{d}{d\xi'} \sum_k P_{jk}(\xi'-\xi)\ \varphi_k$$

Il vient donc

$$\sum_k \int_\xi^x P_{jk}(\xi'-\xi)(f_k-\overline{f})\ d\xi' = \sum_k P_{jk}(x-\xi)\ \varphi_k - \varphi_j$$

et par suite

$$E_i[(Z(x) - x\bar{f})^2] = 2 \sum_{jk} \int_0^x P_{ij}(\xi)(f_j-\bar{f})\, P_{jk}(x-\xi)\, \varphi_k \, d\xi$$

$$- 2 \sum_j \int_0^x P_{ij}(\xi)(f_j-\bar{f})\, \varphi_j \, d\xi$$

De ces deux termes, il est facile de voir (en utilisant par exemple une transformation de Laplace) que le premier admet une limite finie lorsque x tend vers l'infini. Il n'en est évidemment pas de même pour le second, mais le théorème ergodique montre qu'en divisant par x on a :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_j \int_0^x P_{ij}(\xi)(f_j-\bar{f})\, \varphi_j \, d\xi = \sum_j p_j\, \varphi_j (f_j-\bar{f})$$

Cette limite est l'espérance $E(\varphi(f-\bar{f}))$, relative à la loi stationnaire p, c'est-à-dire la covariance de f et φ.

Ainsi, nous arrivons à la conclusion suivante :

(2-4) $$\lim \frac{1}{x} E_i \left[\int_0^x (Y_f(\xi)-\bar{f})\, d\xi\right]^2 = - 2\, E[\varphi(f-\bar{f})]$$

cette limite ayant lieu lorsque x tend vers l'infini, et cela quel que soit l'état initial i du processus en x = 0. Si l'état initial est aléatoire, avec une loi p' quelconque (non nécessairement égale à la probabilité stationnaire p) l'espérance correspondante E' vérifie donc aussi cette même limite

$$E'\left[\int_0^x (Y_f(\xi)-\bar{f})\, d\xi\right]^2 = - 2\, E[\varphi(f-\bar{f})]$$

En particulier, avec p' = p, on voit, en comparant avec (1-1) que la covariance centrée $C_f(h)$ du processus stationnaire $Y_f(x)$ (obtenu en adoptant p comme probabilité initiale) et la solution φ du système (2-2) satisfont la relation :

(2-5) $$\int_0^\infty C_f(h)\, dh = - E[\varphi(f-\bar{f})]$$

Après ces préliminaires, nous pouvons maintenant passer à la démonstration des relations (1-5).

Démonstration des relations (1-5).

S oit $W = (W_1, \ldots W_N)$ une fonction de l'état i de notre processus, interprétée comme une vitesse. Désignons par $W(x)$, plutôt que $Y_W(x)$, le processus obtenu en posant $W(x) = W_i$ si le processus markovien est dans l'état i au point x. Nous supposons essentiellement que les W_i sont tous strictement positifs. Alors la position au temps t d'une particule placée au point 0 à l'instant initial $t = 0$ et entrainée par ce champ de vitesse $W(x)$ est définie par la relation :

$$\int_0^{X_t} \frac{dx}{W(x)} = t \tag{2-6}$$

X_t constitue un nouveau processus, lié au processus initial. Désignons par $\tilde{W}_t$ la vitesse de la particule au temps t, évidemment donnée par :

$$\tilde{W}_t = W(X_t) \tag{2-7}$$

et, plus généralement, par $\tilde{i}(t) = i(X_t)$ l'état du processus $i(x)$ au point aléatoire X_t. La remarque essentielle à faire ici est que ce nouveau processus $\tilde{i}(t)$ est lui-même un processus markovien caractérisé par un générateur infinitésimal $\tilde{A}$ défini par

$$(\tilde{A}\, f)_i = W_i (Af)_i$$

pour toute fonction f. La probabilité stationnaire $\tilde{p}$ du processus $\tilde{i}(t)$ existe (à cause de notre hypothèse $W_i > 0$) et se déduit de la probabilité stationnaire p de l'ancien processus $i(x)$ selon la relation

$$\begin{cases} \tilde{p}_i = W_h \dfrac{p_i}{W_i} \\ \left(\dfrac{1}{W_h} = \Sigma \dfrac{p_i}{W_i} \right) \end{cases} \tag{2-8}$$

Or, le processus $\tilde{W}_t$($= W_i$ si $\tilde{i}(t) = i$) représentant la vitesse de la particule au temps t, on a évidemment :

$$X_t = \int_0^t \tilde{W}_\tau \, d\tau$$

de sorte que nous pouvons évaluer espérance et variance de X_t en appliquant (2-3) et (2-5) à ce nouveau processus. La fonction f est ici remplacée par la fonction $W = (W_1, W_2, \ldots W_N)$ de l'état i du nouveau processus. Son espérance pour la nouvelle loi stationnaire est égale à

$$\Sigma \, \tilde{p}_i \, W_i = \overline{W}_h$$

(c'est-à-dire à la moyenne harmonique de W relativement à l'ancienne loi stationnaire p).

Désignons donc par φ la solution (unique à une constante près) du système

$$\tilde{A} \, \varphi = W - \overline{W}_h \tag{2-9}$$

La relation (2-3) nous donne l'espérance conditionnelle de X_t pour l'état initial i (qui est le même pour l'ancien et le nouveau processus) sous la forme asymptotique

$$E_i \, X_t \sim \overline{W}_h \, t - \varphi_i + \Sigma \, \tilde{p}_k \, \varphi_k \tag{2-10}$$

et de même (2-4) nous donne

$$\lim \frac{1}{t} \, E_i(X_t - t \, \overline{W}_h)^2 = - 2 \, \Sigma \, \tilde{p}_k \, (W_k - \overline{W}_h) \, \varphi_k \tag{2-11}$$

Examinons d'abord l'espérance de X_t. La loi de probabilité initiale de l'état i étant p (et non $\tilde{p}$), nous n'avons pas l'égalité rigoureuse $E \, X_t = t \, \overline{W}_h$, mais la relation asymptotique

$$E \, X_t \sim t \, \overline{W}_h + \Sigma \, (\tilde{p}_i - p_i) \, \varphi_i$$

Evaluons le terme correctif :

$$\Sigma\,(\tilde{p}_i - p_i)\,\varphi_i = \overline{W}_h \,\Sigma\, p_i\,\varphi_i \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{\overline{W}_h}\right)$$

Pour cela, réécrivons le système (2-9) à l'aide de l'ancien générateur A, c'est-à-dire, puisque $\tilde{A} = W\,A$:

$$A\,\varphi = -\,\overline{W}_h \left(\frac{1}{W} - \frac{1}{\overline{W}_h}\right)$$

A la fonction $f = -\,\overline{W}_h \left(\frac{1}{W} - \frac{1}{\overline{W}_h}\right)$ est associée la covariance centrée $C_f = \overline{W}_h^2\, C_{1/W}$ (définie pour l'ancien processus), et la relation (2-5) nous donne :

$$\overline{W}_h^2 \int_0^\infty C_{1/W}(x)\,dx = \overline{W}_h \;\Sigma\; p_i\,\varphi_i \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{\overline{W}_h}\right)$$

c'est-à-dire justement notre terme correctif. D'où la conclusion :

$$\boxed{E\,X_t \sim t\,\overline{W}_h + \overline{W}_h^2 \int_0^\infty C_{1/W}(x)\,dx} \qquad (2\text{-}12)$$

La vitesse moyenne, pour t grand, tend vers la moyenne harmonique $\overline{W}_h$, inférieure à la moyenne arithmétique $E\,W$: comme on l'a remarqué, cela provient de ce que la particule séjourne moins longtemps dans les zones où la vitesse est élevée. Mais, la loi de probabilité de l'état initial étant p_i (et non $\tilde{p}_i$), l'espérance de la vitesse au temps $t = 0$ est $E\,W > \overline{W}_k$. Lorsque t augmente, elle tend en décroissant vers la limite $\overline{W}_h$: le deuxième terme de la formule (2-12), obligatoirement positif, rend bien compte de l'effet d'avance du à cette <u>survitesse initiale</u>.

Examinons maintenant la formule (2-11). Cette limite, indépendante de l'état initial, donne directement l'expression asymptotique de la variance de X_t indépendamment de la probabilité initiale (p ou $\tilde{p}$). Calculons donc le terme :

$$\Sigma\,\tilde{p}_k\,(W_k - \overline{W}_k)\,\varphi_k = -\,W_h^2\,\Sigma\, p_i \left(\frac{1}{W_i} - \frac{1}{\overline{W}_h}\right)\varphi_i$$

Nous retrouvons, à un facteur près, l'expression déjà obtenue pour l'intégrale de la covariance $C_{1/W}$. Nous retrouvons donc, sous forme rigoureuse, les relations (1-5) que nous avions obtenues par une voie purement heuristique.

$$\boxed{\lim \frac{1}{t} E(X_t - t\,\overline{W}_h)^2 = 2\,\overline{W}_h^3 \int_0^\infty C_{1/W}(x)\,dx} \tag{2-13}$$

Généralisation. Ces formules (2-12) et (2-13) admettent une généralisation, qui nous sera utile lorsque nous examinerons le cas de l'espace à deux dimensions. Supposons que, X_t restant défini par la relation (2-6), nous nous intéressions à l'intégrale

$$\tilde{Z}_t = \int_0^t \tilde{Y}_f(\tau)\,d\tau$$

où le processus $\tilde{Y}_f(\tau) = Y_f(X_\tau)$ est égal à f_i si le processus markovien est dans l'état i au point aléatoire X_t. En reprenant point par point les raisonnements précédents, nous trouverons cette fois

$$\begin{aligned} &\lim \frac{1}{t}\, E\,\tilde{Z}_t = \overline{W}_h\, E\,\frac{f}{W} \\ &\lim \frac{1}{t} E\left(\int_0^t (\tilde{Y}_f(\tau) - E\,\tilde{Y}_f(\tau)]^2 \right) = 2\,\overline{W}_h \int_0^\infty C_{\frac{f-\tilde{f}}{W}}(x)\,dx \end{aligned} \tag{2-14}$$

où figure cette fois l'intégrale de la covariance (spatiale) du processus stationnaire

$$Y(x) = \frac{Y_f(x) - \overline{W}_h\,E(f/W)}{W(x)} \tag{2-15}$$

3 -*COMPLEMENTS : LES PORTEES PARTIELLES.

Désignant par $P_{ij}(x)$ la probabilité de transition du processus du paragraphe précédent, nous poserons :

$$B_{ij} = \int_0^\infty (P_{ij}(x) - p_j]\,dx \tag{3-1}$$

Comme, pour toute fonction f, le processus stationnaire $Y_f(x)$ admet la covariance centrée

$$C_f(h) = \sum_{ij} p_i(P_{ij} - p_j)\, f_i\, f_j$$

on trouve :

$$\int_0^\infty C_f(x)\, dx = \sum_{i,j} p_i\, B_{ij}\, f_i\, f_j \tag{3-2}$$

de sorte que la connaissance des B_{ij}, que nous appellerons <u>portées partielles</u>, permet le calcul effectif des variances asymptotiques de type (2-13) ou (2-14).

Dans le cas d'une chaîne finie, le calcul des B_{ij} est toujours possible. En effet, soit $\Pi_{ij}(\lambda)$ la transformée de Laplace de la probabilité de transition $P_{ij}(x)$:

$$\Pi_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, P_{ij}(x)\, dx$$

On calcule les $\Pi_{ij}(\lambda)$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\Pi_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{a_i + \lambda} + \frac{a_i}{a_i + \lambda} \sum_k \varpi_{ik}\, \Pi_{kj}(\lambda) \tag{3-3}$$

D'après (3-1), les portées partielles B_{ij} s'en déduisent par les relations :

$$B_{ij} = \lim_{\lambda \to 0} \left(\Pi_{ij}(\lambda) - \frac{p_j}{\lambda}\right)$$

Un calcul algébrique simple effectué sur le système (3-3) montre alors que les B_{ij} vérifient le système :

$$a_i\, B_{ij} - a_i \sum_k \varpi_{ik}\, B_{kj} = \delta_{ij} - p_j \tag{3-4}$$

Plus précisément, ce système ne déterminant B_{ij}, à j fixé, qu'à une constante près C_j, les B_{ij} constituent l'unique solution de (3-4) vérifiant la condition supplémentaire :

(3-5) $$\sum_i p_i B_{ij} = 0$$

qui traduit la relation $\sum_i p_i P_{ij}(x) = p_j$. Notons que l'on a également :

(3-6) $$\sum_j B_{ij} = 0$$

à cause de $\sum_j P_{ij}(x) = 1$.

Dans ces conditions, on voit que, pour toute fonction f d'espérance $\overline{f} = \sum p_i f_i$, l'unique solution φ du système

$$\begin{cases} A \varphi = f - \overline{f} \\ \overline{\varphi} = 0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$\varphi_i = - \sum_j B_{ij} f_j$$

La matrice des B_{ij} constitue ainsi l'inverse (généralisé) de l'opérateur infinitésimal A, vérifiant la condition supplémentaire de laisser invariant l'espace des fonctions f d'espérance nulle.

Considérons maintenant le processus transformé $\tilde{i}(t)$ associé au générateur $\tilde{A} = W A$. Il lui correspond des probabilités de transition $\tilde{P}_{ij}(t)$ et des portées partielles :

$$\begin{cases} \tilde{B}_{ij} = \int_0^\infty (\tilde{P}_{ij}(t) - \tilde{p}_j)\, dt \\ (\tilde{p}_j = \overline{W}_h \dfrac{p_i}{W_i}) \end{cases}$$

Ces nouvelles portées partielles $\tilde{B}_{ij}$ sont liées aux anciennes B_{ij} par des relations simples. Soit, en effet, f une fonction et

$$\tilde{f} = \sum_i \tilde{p}_i f_i = W_h \sum_i \frac{p_i f_i}{W_i}$$

son espérance pour la nouvelle loi stationnaire. Comme le système

$$\tilde{A}\,\varphi = f - \tilde{f}$$

s'écrit aussi bien

$$A\,\varphi = \frac{f - \tilde{f}}{W}$$

l'une de ses solutions est

$$\varphi_i = - \sum_j B_{ij} \frac{f_j - \tilde{f}}{W_j}$$

Cette solution, toutefois, n'est pas la solution d'espérance nulle pour la nouvelle loi $\tilde{p}$ (on a $\sum p_i \varphi_i = 0$, mais non $\sum \tilde{p}_i \varphi_i = 0$). Par conséquent, les nouvelles portées partielles $\tilde{B}_{ij}$ vérifient :

$$\sum_j \tilde{B}_{ij}(f_j - \tilde{f}) = - \varphi_i + \sum_k \tilde{p}_k \varphi_k$$

En procédant par identification, on en déduit :

$$(3\text{-}7) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{B}_{ij} = {} & B_{ij} \frac{1}{W_j} - \overline{W}_h \sum_{\ell} \frac{p_\ell}{W_\ell} B_{\ell j} \frac{1}{W_j} - \overline{W}_h \Big(\sum_s A_{is} \frac{1}{W_s}\Big) \frac{p_j}{W_j} \\ & + \overline{W}_h^2 \Big(\sum_{\ell s} \frac{p_\ell}{W_\ell} B_{\ell s} \frac{1}{W_s}\Big) \frac{p_j}{W_j} \end{aligned} \right.$$

Cette relation permet de retrouver les formules (2-13) et (2-14) par voie purement algébrique.

<u>REMARQUE</u> - Les portées partielles B_{ij} sont en relation étroite avec ce que l'on peut appeler <u>les temps d'attente</u> μ_{ij} (de l'état j à partir de l'état $i \neq j$), terminologie impliquant que la variable x soit interprétée comme un temps.

De fait, pour $i \neq j$, désignons par $F_{ij}(dx)$ la loi de l'abscisse aléatoire de la première apparition de l'état j lorsque l'état initial est i. Il est clair que cette loi est liée aux probabilités de transition par l'équation

$$P_{ij}(x) = \int_0^x P_{jj}(x-\xi)\ F_{ij}(d\xi)$$

Passant aux transformées de Laplace, et posant $\mu_{ij} = \int_0^\infty x\ F_{ij}(dx)$ nous trouvons

$$\frac{p_j}{\lambda} + B_{ij} = (1 - \lambda\ \mu_{ij} + O(\lambda))(\ \frac{p_j}{\lambda} + B_{jj})$$

Par suite

$$B_{ij} = B_{jj} - p_j\ \mu_{ij} \qquad (i \neq j)$$

Multiplions par p_i et sommons en $i \neq j$. Compte tenu de (3-5) il vient

$$- p_j\ B_{jj} = (1-p_j)\ B_{jj} - p_j \sum_{i\neq j} p_i\ \mu_{ij}$$

Donc

$$B_{jj} = p_j \sum_{i\neq j} p_i\ \mu_{ij}$$

En résumé

$$\begin{cases} B_{jj} = p_j \displaystyle\sum_{i\neq j} p_i\ \mu_{ij} \\ B_{ij} = p_j\ (\displaystyle\sum_{k\neq j} p_k\ \mu_{kj} - \mu_{ij}) \end{cases}$$

et, en sens inverse :

$$\mu_{ij} = \frac{B_{jj} - B_{ij}}{p_j}$$

4 - CAS DE L'ESPACE A $n \geq 2$ DIMENSIONS : POINT DE VUE HEURISTIQUE.

Considérons maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs aléatoires stationnaires $V(x)$, interprétés comme des vitesses, et le système d'équations différentielles

(4-1) $$\frac{d\,X_t}{dt} = V(X_t)$$

Distinguons deux cas, selon que le champ de vitesse est, ou non, conservatif.

4-1 - Cas d'un champ de vitesses conservatif.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où le champ de vecteurs V est conservatif, c'est-à-dire vérifie la relation

$$\operatorname{div} V = \partial_i V^i = 0$$

en tout point x. On sait que, dans ce cas, la transformation $x \to X_t(x)$ conserve le volume. On conçoit que cette conservation du volume entraine celle de la probabilité. Plus précisément, nous montrerons dans un paragraphe ultérieur la propriété suivante :

Si Y(x) est une FAST définie sur le même espace de probabilité que le champ V(x), la fonction aléatoire que l'on en déduit en substituant X_t à x, soit

$$\tilde{Y}_t = Y(X_t)$$

est elle-même stationnaire en t. En particulier, pour un t donné, la variable $\tilde{Y}_t$ a même loi de probabilité (indépendante de x) que Y(x).

En particulier, nous pouvons considérer le processus (vectoriel)

$$\tilde{V}_t = V(X_t)$$

représentant la vitesse de la particule au temps t. De ce qui précède, résulte $E\,\tilde{V}_t = E(V(x)) = \overline{V}$, et, comme on a par construction

(4-2) $$X_t = \int_0^t \tilde{V}_\tau \, d\tau$$

on trouve :

(4-3) $$\boxed{E\,X_t = t\,\overline{V}}$$

Il s'agit bien, cette fois, de la moyenne arithmétique, et non plus, comme dans les exemples précédents, de la moyenne harmonique. Cette circonstance est liée essentiellement au fait que le champ de vitesse est conservatif (Dans un espace à une seule dimension, les seuls champs conservatifs sont les champs $W(x) = C^{ste}$, pour lesquels (4-3) est trivialement vérifiée, puisque $W_h = E\ W$).

4-2 - Cas Général.

La relation (4-3) ne subsiste pas dans le cas général d'un champ non conservatif. Supposons donc que $\operatorname{div} V \neq 0$, mais que nous connaissions une fonction aléatoire $\omega(x)$ stationnaire, non indépendante de V en général, telle que le vecteur $q = \omega V$ soit conservatif :

$$\text{(4-4)} \qquad \operatorname{div} q = \operatorname{div} \omega V = 0$$

Pour abréger, nous appellerons porosité cette FAST $\omega(x)$, qui constitue un invariant intégral pour le système (4-1) (i.e. ce n'est plus le volume, mais l'intégrale de la forme différentielle $\omega(x)\,dx$ qui est conservée dans les transformations $x \to X_t(x)$).

Comme le champ $q = \omega V$ est conservatif, le processus Y_s défini par le système différentiel

$$\frac{d\,Y_s}{ds} = \omega(Y_s)\ V(Y_s)$$

vérifie la propriété (4-3), $E\ Y_s = s\ E(\omega V)$. Or, les trajectoires de Y_s sont les mêmes que celles de X_t , bien qu'elles soient parcourues à des vitesses différentes, la valeur $s(t)$ du paramètre s pour laquelle on a $Y_s = X_t$ étant donnée par l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\omega(Y_s)}$$

Comme on a $X_t = Y_{s(t)}$, et que $1/\omega$ joue ici le rôle qui était dévolu à la vitesse $W(x)$ du cas unidimensionnel, la première formule

(2-14) nous fait ainsi prévoir que l'on doit avoir cette fois :

(4-4) $$\boxed{\lim \frac{1}{t} \; E \; X_t = \frac{E \; \omega V}{E\omega}}$$

4-3 - Expression de D_T lorsque n = 2 et div V = 0.

Cherchons maintenant ce qu'il est possible de prévoir, dans le cas conservatif, au sujet de la matrice de dispersion D^{ij} (si elle existe) définie par

$$D^{ij} = \lim \frac{1}{t} E(X_t^i - t \; \overline{V}^i)(X_t^j - t \; \overline{V}^j)$$

Nous nous limiterons essentiellement au cas de l'espace à deux dimensions. Si n = 2, en effet, une rotation de 90° transforme le champ conservatif V en un champ de gradients. Plus précisément, si nous désignons par x et z les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^2$, et si nous posons :

$$V^1(x,z) = u(x,z) \quad ; \quad V^2(x,z) = v(x,z)$$

il existe une fonction aléatoire $\Phi(x,z)$ telle que l'on ait :

(4-5) $$u = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad ; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Cette fonction aléatoire n'est évidemment pas stationnaire. En particulier, son espérance est (à une constante près)

(4-6) $$E \; \Phi(x,z) = \overline{v} \; x - \overline{u} \; z$$

mais nous savons, d'après la théorie générale des FA, que Φ est une fonction aléatoire intrinsèque, admettant d'ailleurs la dérive (4-6) Désignons par

$$Y(x,z) = \Phi(x,z) - \overline{v} \; x + \overline{u} \; z$$

la FAI sans dérive qui lui est associée, et par γ son <u>variogramme</u> :

(4-7) $$\gamma(\xi,\eta) = \frac{1}{2} E[(Y(x+\xi,\ z+\eta) - Y(x,z))^2]$$

D'après (4-5), le gradient de la FAI $Y(x,z)$ admet les composantes $-(u-\bar{u})$ et $(v-\bar{v})$. Il en résulte que les fonctions de covariance $C_u(h)$ et $C_v(h)$ de u et de v, et la covariance mixte $C_{u,v}(h)$ se déduisent du variogramme (4-7) par les relations :

$$C_u(\xi,\eta) = \frac{\partial^2\ \gamma(\xi,\eta)}{\partial\ \eta^2}$$

$$C_v(\xi,\eta) = \frac{\partial^2\ \gamma(\xi,\eta)}{\partial\ \xi^2}$$

$$C_{uv}(\xi,\eta) = -\frac{\partial^2\ \gamma(\xi,\eta)}{\partial\ \xi\ \partial\ \eta}$$

qui impliquent, en particulier, $\Delta\ \gamma = C_u + C_v$.

Or la fonction aléatoire intrinsèque Φ constitue une <u>intégrale première</u> pour le système (4-1) :

(4-9) $$\Phi(X_t,\ Z_t) = C^{ste}$$

En effet, d'après (4-5), le vecteur grad Φ est orthogonal en tout point au vecteur vitesse. La constante de la relation (4-9) peut être prise égale à 0, puisque, Φ n'étant défini qu'à une constante près, nous pouvons choisir d'avoir $\Phi = 0$ en $x = z = 0$. Si nous introduisons la FAI sans dérive $Y(x,z)$, au lieu de Φ, nous trouvons pour tout t :

(4-10) $$\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t = Y(X_t\ ,\ Z_t)$$

D'après (4-3), l'espérance du premier membre est nulle, et par suite $E\ Y(X_t\ ,\ Z_t) = 0$. A l'ordre 2, nous trouvons une relation beaucoup plus intéressante :

$$E[(\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t)^2] = \bar{E}\ [Y(X_t\ ,Z_t)^2]$$

S'il y a émergence, c'est-à-dire si la matrice de dispersion existe, le premier membre de cette relation est lié à la dispersion transversale D_T selon la formule :

$$\lim \frac{1}{t} E[(\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t)^2] = D_T(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)$$

D'un autre côté, s'il y a émergence (cette réserve est essentielle), le fait que la transformation $x \to X_t(x)$ laisse invariante la probabilité nous fait prévoir que $E[Y(X_t,\ Z_t)^2]$ doit être, asymptotiquement, équivalent à $E[Y^2(\bar{u}\ t,\ \bar{v}\ t)] = 2\ \gamma(\bar{u}\ t,\ \bar{v}\ t)$. Autrement dit, nous prévoyons que dans ce cas la dispersion transversale D_T sera donnée par la formule :

(4-11) $$(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\ D_T = \lim \frac{2}{t}\ \gamma\ (\bar{u}\ t,\ \bar{v}\ t)$$

Compte tenu de (4-8), nous voyons que D_T peut s'exprimer aussi à l'aide des covariances de u et v. Pour plus de commodité, nous pouvons choisir des axes de coordonnées (x,z) tels que $\bar{v} = 0$, autrement dit l'axe des x est orienté dans la direction du mouvement moyen. Comme v est la vitesse transversale, désignons par $C_T(\xi,\eta)$, au lieu de C_v la covariance centrée de cette composante. D'après (4-8), on a

$$C_T(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \xi^2}$$

et par suite :

$$\gamma(\bar{u}\ t,\ 0) = \int_0^{\bar{u}\ t} (\bar{u}\ t - \xi)\ C_T(\xi,0)\ d\xi$$

Lorsque t tend vers l'infini, nous trouvons ainsi :

$$\lim \frac{1}{t}\ \gamma(\bar{u}\ t,\ 0) = \bar{u} \int_0^{\infty} C_T(\xi,0)\ d\xi$$

et finalement, la dispersion transversale, si elle existe, doit être donnée par la formule :

(4-12) $$\boxed{D_T = \frac{2}{\bar{u}} \int_0^{\infty} C_T(\xi,0)\ d\xi}$$

$\bar{u}$ est la vitesse longitudinale moyenne, C_T la covariance de la vitesse transversale v et doit être intégrée dans la direction longitudinale, c'est-à-dire la direction du mouvement moyen, prise comme axe des ξ.

Ce résultat, étonamment simple, est lié à l'existence de l'intégrale première Φ et n'est donc valable que dans le cas bidimensionnel. En ce qui concerne la dispersion longitudinale D_L , nous verrons sur des cas particuliers qu'elle ne peut pas être donnée par une formule aussi simple.

<u>RESERVE</u> - La formule (4-12) n'a de sens que s'il y a émergence, c'est-à-dire si D_T existe. Il pourrait très bien arriver que l'intégrale de la covariance C_T existe et ait une valeur finie sans qu'il y ait, pour autant, émergence, et dans ce cas évidemment D_T n'existerait pas. Sans hypothèse spéciale sur le champ de vecteurs conservatifs V, en effet, on doit s'attendre à ce que, parmi les trajectoires $X_t(x)$, en fonction de la position initiale x, les unes aillent à l'infini, et les autres se referment sur elles-mêmes, <u>piégeant</u> ainsi la particule qui restera toujours à distance finie. Ces trajectoires fermées existent certainement si la FAI $\Phi(x,z)$ présente des maxima ou des minima locaux, puisque les trajectoires possibles correspondent aux lignes isopotentielles $\Phi = C^{ste}$. Il est clair qu'en pareil cas il ne peut absolument pas y avoir émergence. L'absence de ces trajectoires fermées (et donc la possibilité de l'émergence) est assurée lorsque le groupe probabiliste associé à la transformation $x \rightarrow X_t$ possède la propriété ergodique. Cette propriété ergodique ne sera pas vérifiée, en général, pour un champ conservatif quelconque, mais on peut s'attendre à ce qu'elle le soit dans le cas d'un problème physique bien posé. Dans le cas d'un milieu poreux, par exemple, en l'absence de sources d'énergie d'origine interne, ces trajectoires fermées correspondraient à des dépenses locales d'énergie que ne viendrait compenser aucun apport, et ne pourraient se maintenir. Mais le problème de la recherche des conditions que doit vérifier un champ conservatif pour assurer cette propriété ergodique s'annonce comme singulièrement ardu.

4-4 - Suggestion pour D_T pour n = 2 dans le cas non conservatif.

Supposons, comme en 4-2 , div V $\neq$ 0, mais div (ωV) = 0 pour une FAST $\omega(x)$ appelée porosité, et désignons encore par Y_s la position de la particule au temps s lorsque le champ de vitesse est $q = \omega V$. Comme on passe de Y_s à X_t par $X_t = Y_{s(t)}$ avec $ds/dt = 1/\omega(Y_s)$, on peut supposer que la seconde formule (2-14) doit pouvoir s'appliquer : en désignant par $\tilde{C}_T$ la covariance centrée, non plus de la vitesse transversale v elle-même, mais celle de la FA

$$\bar{\bar{v}}(x) = \frac{\omega(x)\ v(x) - E\ \omega v}{E(\omega)} = \frac{q_T - E\ q_T}{E\ \omega}$$

on devrait donc s'attendre à trouver

$$(4\text{-}13) \qquad D_T = 2\ E\ \omega \int_0^\infty \tilde{C}_T(\xi,0)\ d\xi = \frac{2}{E\ \omega} \int_0^\infty C_{q_T}(\xi,0)\ d\xi$$

5 - UN EXEMPLE SIMPLE.

Faute de pouvoir démontrer en toute généralité la formule (4-12), nous allons la vérifier dans le cas d'un exemple simple, qui nous fournira également quelques indications sur la dispersion longitudinale D_L.

Cet exemple est le suivant : nous supposons que les deux composantes de la vitesse sont de la forme

$$u(z) \quad \text{et} \quad v(x)$$

c'est-à-dire dépendent, la première de la seule coordonnée z, et la seconde de la seule coordonnée x. Un tel champ de vitesses est obligatoirement conservatif. De plus, nous supposons que u(z) et v(x) sont deux processus stationnaires (évidemment indépendants) du type étudié au paragraphe 2.

Autrement dit, nous avons $u(z) = u_i$ si la chaine de Markov en z (définie par son générateur A et sa probabilité stationnaire p) est dans l'état i au point z ; de même, on a $v(x) = v_j$ si la seconde chaine, celle qui se déroule sur l'axe des x, définie par son générateur A' et sa probabilité p', est dans l'état j au point x.

De plus nous supposons essentiellement que les u_i et les v_j sont strictement positifs. Cette condition exclut l'existence de trajectoires fermées, et, comme on va le voir, garantit de bonnes propriétés ergodiques. Et surtout, elle nous garantit que le processus à deux indices $\tilde{i}(t)$, $\tilde{j}(t)$ obtenu en posant $\tilde{i}(t) = i(X_t)$ et $\tilde{j}(t) = j(Z_t)$ est encore lui-même un processus markovien caractérisé par son générateur infinitésimal $\tilde{A}$ défini par :

$$\tilde{A} = v\,A + u\,A'$$

Sous forme explicite, $\tilde{A}$ agit sur une fonction $f = f_{ij}$ à deux indices, selon la relation :

$$(5\text{-}1)\qquad (\tilde{A}\,f)_{ij} = -\,(a_i\,v_j + a'_j\,u_i)\,f_{ij} + a_i\,v_j \sum_{i'} \varpi_{ii'}\,f_{i'j} + {}$$

$$+\,a'_j\,u_i \sum_{j'} \varpi'_{jj'}\,f_{ij'}$$

On déduit sans peine de (5-1) que la loi stationnaire $\tilde{p}_{ij}$ associée à ce processus est égale à la loi des deux variables i(z) j(x), soit

$$\tilde{p}_{ij} = p_i\,p'_j$$

comme on pouvait s'y attendre, puisqu'il s'agit d'un champ conservatif.

Soient alors $\varphi = (\varphi_i)$ et $\psi = (\psi_j)$ les fonctions (à un seul indice) qui constituent les solutions uniques du système :

$$\begin{cases} A\,\varphi = u - \bar{u} \\ \bar{\varphi} = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} A'\psi = v - \bar{v} \\ \bar{\psi} = 0 \end{cases}$$

et considérons la fonction (à deux indices) $\varphi - \psi$. Comme on a

$\tilde{A} = v\ A + u\ A'$, on trouve

$$\tilde{A}'\varphi-\psi) = v(u-\bar{u}) - u(v-\bar{v}) = u\ \bar{v} - v\ \bar{u}$$

On reconnait, à un facteur près, au second membre de (5-2), l'expression de la vitesse transversale. On en déduit l'espérance conditionnelle de :

$$\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t = \int_0^t (\bar{v}\ \tilde{u}_\tau - \bar{u}\ v_\tau)\ d\tau$$

lorsque l'état initial est ij, soit :

$$(5\text{-}2) \qquad E_{ij}\ (\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t) = \int_0^t \tilde{P}_\tau(\tilde{A}(\varphi-\psi))\ d\tau$$

$$= (P_t(\varphi-\psi))_{ij} - (\varphi_i - \psi_j)$$

et surtout, d'après (2-4), l'expression asymptotique de la variance :

$$(5\text{-}3) \qquad \lim \frac{1}{t}\ E(\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t)^2 = -\ 2\ E[(\varphi-\psi)(u\ \bar{v} - v\ \bar{u})]$$

La limite qui figure au premier membre est $(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)D_T$ (ce qui établit <u>l'existence de la dispersion transversale</u> D_T).

Au second membre, figure l'expression

$$E[(\varphi-\psi)(u\ \bar{v} - v\ \bar{u})] = \bar{v}\ E(\varphi(u-\bar{u})) + \bar{u}\ E(\psi(v-\bar{v}))$$

Or, d'après (2-5), nous avons justement

$$\int_0^\infty C_u(z)\ dz = -\ E[\varphi(u-\bar{u})]$$

$$\int_0^\infty C_v(x)\ dx = -\ E[\psi(v-\bar{v})]$$

En reportant dans (5-3), nous obtenons l'expression explicite de D_T :

$$(5\text{-}4) \qquad \boxed{D_T = \frac{2\ \bar{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \int_0^\infty C_u(z)\ dz + \frac{2\ \bar{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \int_0^\infty C_v(x)\ dx}$$

dont il est facile de voir, aux notations près, qu'elle coïncide avec la formule (4-12) obtenue par voie purement heuristique : cette formule est donc établie de manière rigoureuse dans le cas particulier qui nous occupe ici.

Essayons d'aller plus loin.

Calcul explicite de la matrice de dispersion.

Comme u ne dépend que de z et v que de x, l'intégrale première $\Phi(x,z)$ définie par les relations (4-5) est évidemment de la forme :

$$\Phi(x,z) = \int_0^x v(\xi)\, d\xi - \int_0^z u(\eta)\, d\eta$$

Ainsi, les deux intégrales qui figurent au second membre restent égales au cours du mouvement lorsque l'on substitue X_t à x et Z_t à z. Désignons par H_t cette valeur commune :

$$(5\text{-}5) \qquad H_t = \int_0^{X_t} v(x)\, dx = \int_0^{Z_t} u(z)\, dz$$

En fonction du processus temporel $(\tilde{i}(t), \tilde{j}(t))$, on trouve évidemment aussi

$$(5\text{-}6) \qquad H_t = \int_0^t \tilde{u}(\tau)\, \tilde{v}(\tau)\, d\tau$$

Nous nous trouvons devant une situation analogue à celle qui nous a permis d'établir les relations (2-13) ou (2-14).

De fait, introduisons un nouveau processus, que nous appellerons processus en h pour le distinguer des deux processus précédents (le processus spatial i(z), j(x), et le processus temporel $\tilde{i}(t)$, $\tilde{j}(t)$). En fonction de h, définissons les variables X_h et Z_h en posant :

$$(5\text{-}7) \qquad \int_0^{X_h} v(x)\, dx = \int_0^{Z_h} u(z)\, dz = h$$

D'après (5-5), la trajectoire (X_h, Z_h) coïncide avec la trajectoire $(X_t\ Z_t)$ de la particule partant de 0 à l'instant initial, mais cette trajectoire est décrite, en fonction du pseudo-temps h, avec une vitesse différente :

$$\frac{d\ X_h}{dh} = \frac{1}{v(X_h)} \quad ; \quad \frac{d\ Z_h}{dh} = \frac{1}{u(Z_h)}$$

Le processus (I(h), J(h)) défini en posant I(h) = i, J(h) = j si $u = u_i$ et $v = v_j$ au point (aléatoire) de coordonnées (X_h, Z_h) est évidemment encore un processus de Markov à deux indices. Mais, chose plus remarquable, les deux processus en h, I(h) et J(h) sont indépendants l'un de l'autre et tous deux Markoviens. De fait, d'après (5-7), X_h ne dépend que du processus v(x), et de même Z_h ne dépend que du processus u(z). Désignons par A_h et A_h' les générateurs des processus I(h) et J(h), et par p_h et p_h' leurs lois stationnaires. Ils se déduisent des générateurs A, A' et des lois p, p' des processus spatiaux i(z) et j(x) par les relations :

$$A_h = \frac{1}{u}\ A \qquad A_h' = \frac{1}{v}\ A'$$

$$p_h = \frac{u}{\overline{u}}\ p \qquad p_h' = \frac{v}{\overline{v}}\ p'$$

La relation $A = u\ A_h$ (au lieu de $\tilde{A} = W\ A$) nous indique que la relation entre le processus spatial i(z) et le processus (pseudo-temporel) en h, I(h) est ici exactement l'inverse de celle qui, au paragraphe 2, nous a conduit à la relation (2-13). Nous pouvons donc appliquer cette relation, en remplaçant la limite qui figure au premier membre par :

$$\lim \frac{1}{z} E[\int_0^z (u(\eta) - \overline{u})\ d\eta]^2 = 2 \int_0^\infty C_u(z)\ dz \ .$$

$C_u(z)$ désignant la covariance centrée du processus (spatial) u(z). Au second membre, W_h doit être remplacée par la moyenne harmonique de u calculée avec la loi stationnaire $p_h = (u/\overline{u})\ p$ du processus en h, c'est-à-dire par la moyenne arithmétique $\overline{u}$ du processus spatial, puisque

$$\Sigma\ p_{h,i} \frac{1}{u_i} = \frac{1}{\overline{u}_i}\ \Sigma\ p_i = \frac{1}{\overline{u}}$$

Ce deuxième membre devient donc :

$$2\,\overline{u}^3 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}}(h)\,dh$$

$\tilde{C}_{\frac{1}{u}}(h)$ désignant cette fois la covariance centrée de $1/u$ pour le processus en h, c'est-à-dire, en posant $U(h) = u(Z_h)$, la covariance centrée de la FAST $1/u(h)$. (Cette référence à la stationnarité, qui semble impliquer que le processus en h est muni de la loi initiale $p_h = (u/\overline{u})p$, alors que la loi initiale réelle est p et non p_h, ne constitue pas une limitation réelle, puisque, comme on l'a vu au paragraphe 2, la limite (2-13) est en fait indépendante de la loi initiale).

Au total, donc, en ce qui concerne les deux processus en h, considérés séparément, nous aboutissons aux relations suivantes, qui nous seront utiles dans un instant :

$$(5\text{-}8)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty C_u(z)\,dz = \overline{u}^3 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}}(h)\,dh \\ \displaystyle\int_0^\infty C_v(x)\,dx = \overline{v}^3 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{v}}(h)\,dh \end{cases}$$

Considérons maintenant le processus à 2 indices, $(I(h), J(h))$, produit des deux processus indépendents précédents. Son générateur $\tilde{A}_h$ infinitésimal est évidemment la somme des générateurs des deux processus partiels, soit

$$\tilde{A}_h = A_h + A'_h = \frac{1}{u} A + \frac{1}{v} A'$$

Or le processus temporel à deux indices $\tilde{I}(t)$, $\tilde{J}(t)$ admet, comme on l'a vu, le générateur $\tilde{A} = v\,A + u\,A'$. Il vient donc

$$\tilde{A} = u\,v\,\tilde{A}_h$$

La relation entre le processus temporel et le processus en h est donc identique à celle que nous avons observée au paragraphe 2 entre le processus temporel et le processus spatial ($\tilde{A} = W\ A$), à ceci près que la fonction W doit être remplacée par la fonction u v.

Si donc $f = f_{ij}$ est une fonction quelconque à deux indices, et si l'on désigne par $\tilde{Y}_f(t)$ le processus qui vaut f_{ij} si $\tilde{i}(t) = i$ et $\tilde{j}(t) = j$, nous sommes en droit d'utiliser la relation (2-14) pour évaluer la variance de l'intégrale

$$\int_0^t \tilde{Y}_f(\tau)\ d\tau$$

Le terme $\overline{W}_h$ du second membre de (2-4) doit évidemment être remplacé par la moyenne harmonique de u v prise sur le processus en h, c'est-à-dire par le produit $\bar{u}\ \bar{v}$ des moyennes arithmétiques (temporelles, ou, aussi bien, spatiales, puisque ce sont les mêmes). De même, $\tilde{f}$, moyenne de f pour le processus temporel, coïncide avec la moyenne $\bar{f}$ du processus spatial. Au total, donc, la formule (2-14) nous donne :

$$(5\text{-}9) \qquad \lim \frac{1}{t}\ E\Big[\int_0^t (\tilde{Y}_f(\tau) - E\ \tilde{Y}_f)\ d\tau\Big]^2 = 2\ \bar{u}\ \bar{v} \int_0^\infty \mathcal{C}_{\frac{f-\bar{f}}{u\ v}}(h)\ dh$$

Appliquons cette relation (5-9) à une fonction f de la forme

$$f = \lambda\ u + \mu\ v$$

On a, dans ce cas, $\tilde{Y}_f(t) = \lambda\ \tilde{u}(t) + \mu\ \tilde{v}(t)$, et donc :

$$\int_0^t \tilde{Y}_f(\tau)\ d\tau = \lambda\ X_t + \mu\ Z_t$$

La limite qui figure au premier membre de (5-9) est donc

$$\lambda^2\ D_{11} + 2\ \lambda\ \mu\ D_{12} + \mu^2\ D_{22}$$

Au second membre, figure la covariance centrée (pour le processus en h) de la fonction

$$\frac{f-\bar{f}}{u\ v} = \frac{\lambda(u-\bar{u})}{u\ v} + \frac{\mu(v-\bar{v})}{u\ v} = \frac{\lambda}{v} + \frac{u}{v} - \frac{\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}}{u\ v}$$

Pour le processus en h, les fonction $1/v$, $1/u$ admettant les moyennes $1/\bar{u}$, $1/\bar{v}$, nous écrirons plutôt :

$$\frac{f-\bar{f}}{u\ v} = \mu \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\bar{v}} \right) + \lambda \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right) - (\lambda\bar{u} + \mu\bar{v}) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\bar{v}} \right)$$

Sous cette forme, on voit, compte tenu de l'indépendance de u et v pour le processus en h, que la covariance centrée correspondante est :

$$\tilde{C}_{\frac{f-\bar{f}}{u\ v}} = \mu^2 \left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^2 \tilde{C}_{\frac{1}{v}} + \lambda^2 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{v}}\right)^2 \tilde{C}_{\frac{1}{u}} + (\lambda\bar{u} + \mu\bar{v})^2 \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}$$

Le deuxième membre de la relation (5-9) est donc :

$$2\mu^2 \frac{\bar{v}^3}{\bar{u}} \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh + 2\lambda^2 \frac{\bar{u}^3}{\bar{v}} \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}}\, dh + 2\,\bar{u}\,\bar{v}\,(\lambda\bar{u} + \mu\bar{v})^2 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh$$

En identifiant au premier membre $(\lambda^2 D_{11} + 2\lambda\mu D_{12} + \mu^2 D_{22})$ nous trouvons les expressions suivantes pour les différents termes de la matrice de dispersion :

$$\left[\begin{array}{l} D_{11} = 2\dfrac{\bar{v}^3}{\bar{v}} \displaystyle\int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}}\, dh + 2\,\bar{u}^3\,\bar{v} \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh \\ D_{22} = 2\dfrac{\bar{v}^3}{\bar{u}} \displaystyle\int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh + 2\,\bar{u}\,\bar{v}^3 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh \\ D_{12} = 2(\bar{u}\,\bar{v})^2 \displaystyle\int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}\, dh \end{array}\right.$$

D'après les relations (5-8), les intégrales $\int \tilde{C}_{\frac{1}{u}}$ et $\int \tilde{C}_{\frac{1}{v}}$ s'expriment de manière simple à l'aide des covariances C_u et C_v des processus spatiaux (et sont donc facilement accessibles en pratique). Par contre, le terme $\int \tilde{C}_{\frac{1}{u}} \tilde{C}_{\frac{1}{v}}$ nécessite le calcul explicite des covariances du processus en h. Notons toutefois que, du fait de l'indépendance des deux processus I(h) et J(h), les deux covariances $\tilde{C}_{\frac{1}{u}}$ et $\tilde{C}_{\frac{1}{v}}$ peuvent être calculées séparément, ce qui nécessite seulement la résolution effective de deux processus à un seul indice. La méthode directe, qui aurait consisté à travailler directement sur l'expression (5-1) du générateur infinitésimal du processus temporel à deux indices, n'aurait pas bénéficié de cette séparation des variables, et aurait donc conduit à des calculs plus compliqués.

Compte tenu de (5-8), les expressions que nous avons obtenues pour les termes de la matrice de dispersion se mettent sous la forme :

$$(5\text{-}10) \qquad \boxed{\begin{aligned} \bar{v}\, D_{11} - \bar{u}\, D_{12} &= 2\int_0^\infty C_u(z)\, dz \\ \bar{u}\, D_{22} - \bar{v}\, D_{12} &= 2\int_0^\infty C_v(x)\, dx \\ D_{12} &= 2\, \bar{u}^2\, \bar{v}^2 \int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{u}}(h)\, \tilde{C}_{\frac{1}{v}}(h)\, dh \end{aligned}}$$

Les deux premières relations (5-10), où ne figurent que les covariances spatiales C_u et C_v, permettent de retrouver immédiatement l'expression (5-4) de la dispersion transversale D_T. Par contre, le calcul de la dispersion longitudinale

$$(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)D_L = \bar{u}^2\, D_{11} + \bar{v}^2\, D_{22} + 2\, D_{12}\, \bar{u}\, \bar{v}$$

fait obligatoirement intervenir le terme $\int \tilde{C}_{\frac{1}{u}}\, \tilde{C}_{\frac{1}{v}}$ où figurent les covariances du processus en h. (Notons d'ailleurs qu'il n'y a aucune raison, en général, pour que la direction "longitudinale" c'est-à-dire celle de la vitesse moyenne $(\bar{u},\bar{v})$, constitue une direction principale pour la matrice de dispersion. Il est facile de donner des contre-exemples. Le seul cas où l'on soit sûr, pour des raisons de symétrie, que la direction longitudinale est bien une direction principale, est celui où les deux processus u(z) et v(x) sont équivalents, c'est-à-dire ont le même générateur infinitésimal).

Un cas particulier simple.

Pour comparer les valeurs de D_T et D_L, nous allons examiner un cas particulier simple, où le calcul du terme D_{12} peut être effectué à l'aide des seules covariances spatiales. Ce cas particulier est celui où les fonctions $\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}}$ et $\frac{1}{v} - \frac{1}{\bar{v}}$ sont des fonctions propres pour les générateurs infinitésimaux A_h et A'_h des deux processus en h, soit :

$$A_h \frac{1}{u} = - \alpha \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \quad ; \quad A'_h \frac{1}{v} = - \beta \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\bar{v}} \right)$$

ou, ce qui revient au même :

$$A \frac{1}{u} = \frac{\alpha}{\bar{u}} (u - \bar{u}) \quad ; \quad A' \frac{1}{v} = \frac{\beta}{\bar{v}} (v - \bar{v})$$

(par exemple : si u et v sont des processus de Markov à 2 états seulement, ces relations sont automatiquement réalisées. En effet, l'espace des fonctions d'espérance nulle est de dimension 1 pour un processus à 2 états, de sorte que toute fonction d'espérance nulle est une fonction propre du générateur. Mais on peut donner beaucoup d'autres exemples).

Dans ce cas, en effet, les covariances des processus en h sont :

$$\tilde{C}_{\frac{1}{u}}(h) = \tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{u}} \; e^{-\alpha h} \quad ; \quad \tilde{C}_{\frac{1}{v}}(h) = \tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{v}} \; e^{-\beta h}$$

La notation $\tilde{\sigma}^2_{1/u}$ désigne évidemment la variance de 1/u pour la loi stationnaire du processus en h. Explicitement, on trouve :

$$\Sigma \, p_{h,i} \frac{1}{u_i^{\,2}} = \frac{1}{\bar{u}} \, \Sigma \, \frac{p_i}{u_i} = \frac{1}{\bar{u} \, \bar{u}_h}$$

(en désignant par $\bar{u}_h$ la <u>moyenne harmonique</u> de u pour le processus spatial), et donc

$$\tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{u}} = \frac{1}{\bar{u}} \left(\frac{1}{\bar{u}_h} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \quad ; \quad \tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{v}} = \frac{1}{\bar{v}} \left(\frac{1}{\bar{v}_h} - \frac{1}{\bar{v}} \right)$$

Pour interpréter les valeurs propres α et β, utilisons les relations (5-8). En ce qui concerne u, par exemple, on trouve :

$$\int_0^\infty C_u(z)\, dz = \frac{\bar{u}^3}{\alpha}\ \tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{u}} = \frac{\bar{u}}{\alpha}\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_h} - 1\right)$$

Dans ce qui suit, il sera commode d'introduire des <u>longueurs</u> L_u et L_v, appelées <u>portées intégrales</u> de u et de v, et définies par les relations :

$$\begin{cases} L_u = \dfrac{2}{\sigma_u^2} \displaystyle\int_0^\infty C_u(z)\, dz \\[2ex] L_v = \dfrac{2}{\sigma_v^2} \displaystyle\int_0^\infty C_v(x)\, dx \end{cases}$$

(σ_u^2 et σ_v^2 représentent, évidemment, les variances relatives aux processus spatiaux). Avec ces notations, nous trouvons :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2\,\bar{u}}{L_u}\left(\dfrac{\bar{u}}{\bar{u}_h} - 1\right) \dfrac{1}{\sigma_u^2} \\[2ex] \beta = \dfrac{2\,\bar{v}}{L_v}\left(\dfrac{\bar{v}}{\bar{v}_h} - 1\right) \dfrac{1}{\sigma_v^2} \end{cases}$$

Calculons maintenant l'intégrale du produit $\tilde{C}_{\frac{1}{u}}\ \tilde{C}_{\frac{1}{v}}$. Il vient :

$$\int_0^\infty \tilde{C}_{\frac{1}{v}}(h)\ \tilde{C}_{\frac{1}{v}}(h)\, dh = \frac{\tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{u}}\ \tilde{\sigma}^2_{\frac{1}{v}}}{\alpha+\beta} = \frac{\left(\frac{1}{\bar{u}_h} - \frac{1}{\bar{u}}\right)\left(\frac{1}{\bar{v}_h} - \frac{1}{\bar{v}}\right)}{\bar{u}\,\bar{v}\,(\alpha+\beta)}$$

et donc, d'après (5-10)

$$\left[\begin{array}{l} D_{12} = \dfrac{2}{(\alpha+\beta)}\left(\dfrac{\bar{u}}{\bar{u}_h} - 1\right)\left(\dfrac{\bar{v}}{\bar{v}_h} - 1\right) \\[2ex] D_{11} = \dfrac{\bar{u}}{\bar{v}}\ D_{12} + \dfrac{\sigma_u^2}{\bar{v}}\ L_u \\[2ex] D_{22} = \dfrac{\bar{v}}{\bar{u}}\ D_{12} + \dfrac{\sigma_v^2}{\bar{u}}\ L_v \end{array}\right.$$

Pour dégager des ordres de grandeurs, plaçons-nous dans le cas où les deux processus u et v sont équivalents, soit

$$\bar{u} = \bar{v},\ \bar{u}_h = \bar{v}_h\ ,\quad I_u = I_v\quad ,\ \alpha = \beta\quad ,\ \sigma_u^2 = \sigma_v^2 \text{ etc...}$$

En désignant par $L = I_u = I_v$ la portée commune de u et de v, on trouve

$$\begin{cases} D_{12} = \dfrac{L}{2}\ \dfrac{\sigma_u^2}{u}\left(\dfrac{\bar{u}}{\bar{u}_h} - 1\right) \\[2ex] D_{11} = D_{22} = \dfrac{L}{2}\ \dfrac{\sigma_u^2}{u}\left(\dfrac{\bar{u}}{\bar{u}_h} + 1\right) \end{cases}$$

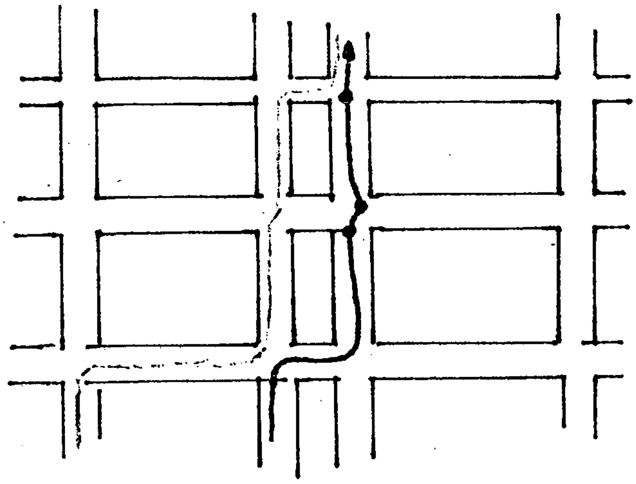
On en déduit les expressions suivantes, très parlantes, pour la dispersion longitudinale $D_L = D_{11} + D_{12}$ et la dispersion transversale $D_T = D_{11} - D_{12}$, à savoir :

$$(5\text{-}11)\qquad \boxed{\begin{aligned} D_L &= \frac{L\,\sigma_u^2}{\bar{u}_h} \\ D_T &= \frac{L\,\sigma_u^2}{\bar{u}} \end{aligned}}$$

En particulier, on a toujours $D_L > D_T$. Dans ce cas particulier très simple, la dispersion longitudinale D_L et la dispersion transversale D_T sont dans le même rapport que la moyenne arithmétique $\bar{u}$ et la moyenne harmonique $\bar{u}_h$. Mais il n'y a évidemment aucune chance pour que cette circonstance subsiste dans des cas plus généraux.

Un cas de décomposition ergodique.

La technique que nous venons d'exposer (passage par les processus en h) n'est utilisable que si les u_i et les v_j sont strictement positifs, puisque l'on passe par l'intermédiaire des



covariances $\tilde{C}_{1/u}$ et $\tilde{C}_{1/v}$ du processus en h. Plaçons-nous maintenant dans le cas où chacun des deux processus u et v comporte un état zéro pour lequel on a

$$u_o = v_o = 0$$

Concrètement, on peut se représenter le milieu physique correspondant comme une matrice solide (dans laquelle le fluide ne circule pas) munie de deux réseaux orthogonaux de canalicules où se localise la circulation du fluide. Dans une portion de canal horizontal, par exemple, on a $v = 0$ (état zéro du processus en v) mais $u = u_i > 0$ (état i du processus u), l'épaisseur du canal correspondant étant alors une variable aléatoire exponentielle d'espérance $1/a_i$. Dans une zone d'intersection, on a $u = u_i > 0$, $v = v_j > 0$ et le fluide circule obliquement.

L'existence de ces états 0 n'empêche pas le second membre de la formule (5-4) de rester fini. Nous verrons que l'expression correspondante présente toujours un sens physique, mais n'est plus égale à la vraie dispersion transversale D_T qu'à un facteur simple près. Par contre, les expressions obtenues pour D_L conduisent à des valeurs infinies, comme cela apparait clairement sur les formules très simples (5-11) : de fait, la moyenne $\bar{v}_h$ est nulle, et cette formule conduirait à une dispersion longitudinale infinie.

Cette situation provient du fait que le <u>processus temporel</u> $\tilde{i}(t)$, $\tilde{j}(t)$ <u>n'est plus ergodique</u> (même si les deux processus spatiaux le sont). Il y a, en effet, une probabilité non nulle pour que la particule se trouve, à l'instant initial, en un point où l'on a à la fois $u = u_o = 0$ et $v = v_o = 0$. Dans ce cas, elle reste indéfiniment immobile. Au contraire, si la particule part d'un point où l'on a $u > 0$ ou $v > 0$ (l'un des deux pouvant être nul) c'est-à-dire d'un point appartenant au réseau de canalicules, la particule circulera et ne s'immobilisera jamais. Il n'y a donc pas ergodicité du processus temporel, tel que nous l'avons défini, mais ce processus se laisse décomposer en deux processus ergodiques que l'on peut disjoindre : le premier, sans intérêt physique, est le processus nul ($u = v = 0$ indéfiniment) ; le second, auquel nous allons restreindre notre attention, correspond au cas où la particule circule indéfiniment dans le réseau de canalicules, à partir d'une situation initiale où l'on avait soit u soit v, soit les deux, différent de 0.

Convenons de réserver les notations i, j aux indices différents de 0, et désignons par e(t) le processus temporel (ergodique) obtenu sous l'hypothèse que l'état initial <u>n'est pas</u> (0,0), i.e. que la particule part d'un point des canalicules. Au temps t, l'état e(t) du processus pourra être (i,o), (o,j) ou (i,j), mais jamais (o,o). De même, une fonction f(e) prend les valeurs f_{io}, f_{oj} ou f_{ij}, mais jamais f_{oo}. Sur ce nouvel espace d'états, l'expression du générateur $\tilde{A}$ reste donnée par (5-1), à condition de faire $u_o = v_o = 0$ et d'exclure l'état (o,o). Par exemple, l'équation $\tilde{A}\,\varphi = f$ s'écrit explicitement :

$$(5\text{-}12)\quad \left[\begin{aligned}
(\tilde{A}\,\varphi)_{ij} &= -\,(a_i\, v_j + a'_j\, u_i)\, f_{ij} + a_i\, v_j \sum_{i'} \varpi_{ii'}\, f_{i'j} \\
&\qquad + a'_j\, u_i \sum_{j'} \varpi'_{jj'}\, f_{ij'} \\
(\tilde{A}\,\varphi)_{io} &= -\,a'_o\, u_i\, f_{io} + a'_o\, u_i \sum_{j'} \varpi'_{oj'}\, f_{ij'} \\
(\tilde{A}\,\varphi)_{oj} &= -\,a_o\, v_j\, f_{oj} + a_o\, v_j \sum_{i'} \varpi_{oi'}\, f_{i'j}
\end{aligned}\right.$$

A partir de ces expressions, le calcul des D_{ij} est parfaitement possible, et ne présente que des difficultés algébriques. Nous le ferons dans un instant dans un cas particulier simple. Avant de particulariser, montrons que la relation (5-4) reste valable moyennant une correction simple.

Pour clarifier les notations, posons

$$q = p_o \qquad q' = p'_o$$

(probabilités respectives de $u = u_o = 0$ et $v = v_o = 0$ pour les lois stationnaires des processus spatiaux u et v). Ainsi qq' est la probabilité pour qu'un point donné, par exemple l'origine O, tombe dans la matrice imperméable, et $1 - qq'$ est la probabilité pour que O tombe dans le réseau de canalicules. On peut, en terme physique, considérer $1 - qq'$ comme <u>une porosité</u>. Le processus e(t) auquel nous nous intéressons est conditionnel à l'hypothèse que le point O est dans les canalicules. La loi stationnaire correspondante n'est dont plus la loi produit pp', mais, sous forme explicite :

$$\tilde{p}_{io} = \frac{p_i\, q'}{1-qq'} \quad ; \quad \tilde{p}_{oj} = \frac{q\, p'_j}{1-qq'} \quad ; \quad \tilde{p}_{ij} = \frac{p_i\, p'_j}{1-qq'}$$

Les <u>lois marginales</u> (de i seul et de j seul) deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{p}_i = \dfrac{p_i}{1-qq'} \\[2ex] \tilde{p}_o = \dfrac{q(1-q')}{1-qq'} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{p}'_j = \dfrac{p'_j}{1-qq'} \\[2ex] \tilde{p}'_o = \dfrac{q'(1-q)}{1-qq'} \end{cases}$$

de sorte que la vitesse moyenne $(\tilde{u},\tilde{v})$ du processus temporel (ou <u>vitesse effective</u>) ne coïncide plus avec la vitesse moyenne $(\bar{u}\ \bar{v})$ du processus spatial. Elle est <u>plus rapide</u>. On trouve, en effet :

$$\tilde{u} = \frac{\bar{u}}{1-qq'} \quad ; \quad \tilde{v} = \frac{\bar{v}}{1-qq'}$$

Il est facile de prévoir que la même correction doit être appliquée à la formule (5-4), ce qui revient à remplacer au dénominateur $\bar{u}$ et $\bar{v}$ par les vitesses moyennes effectives $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, soit :

$$D_T = \frac{2\,\tilde{v}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \int_0^\infty C_u(z)\, dz + \frac{2\,\tilde{u}}{\bar{u}^2 + \bar{v}^2} \int_0^\infty C_v(x)\, dx \tag{5-13}$$

De fait, la composante transversale $(\bar{v}\ X_t - \bar{u}\ Z_t)/\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}$ ayant une espérance nulle, la variance fournie par la formule (5-4), relative au processus non ergodique, est la moyenne pondérée $qq' \times$ variance de la particule piégée + $(1-qq') \times$ variance de la particule circulante. La première variance conditionnelle étant nulle, on doit s'attendre à ce que la formule (5-4) fournisse non pas D_T mais $(1-qq')D_T$ - d'où la relation (5-13).

Ce raisonnement peut être repris, sous forme plus rigoureuse, de la manière suivante. Soient φ et ψ les solutions (définies à une constante près) des équations

$$A\,\varphi = u - \bar{u} \quad ; \quad A'\,\psi = v - \bar{v}$$

Appliquons à la fonction (à 2 indices) $\varphi - \psi$ l'opérateur $\tilde{A}$ du processus e(t), tel qu'il est défini en (5-12). On trouve :

$$(\tilde{A}(\varphi-\psi))_{ij} = v_j(u_i-\bar{u}) - u_i(v_j-\bar{v}) = u_i\,\bar{v} - v_j\,\bar{u}$$

$$(\tilde{A}(\varphi-\psi))_{io} = u_i\,\bar{v}$$

$$(\tilde{A}(\varphi-\psi))_{oj} = -\,v_j\,\bar{u}$$

La relation :

$$\tilde{A}(\varphi-\psi) = u\,\bar{v} - v\,\bar{u}$$

reste donc valable dans tous les cas. Nous pouvons donc appliquer la relation (2-4) avec la fonction f (à deux indices) définie par

$$f = u\,\bar{v} - v\,\bar{u}$$

dont l'espérance est nulle (pour le processus temporel e(t) aussi bien que pour le processus spatial). Au premier membre, nous obtenons $(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)D_T$. Mais, au second membre, doit figurer l'espérance $\tilde{E}[(\varphi-\psi)(f-\bar{f})]$ calculée avec la loi $\tilde{p}_{ij}$ stationnaire pour le processus temporel, soit :

$$\tilde{E}[(\varphi-\psi)(u\,\bar{v} - v\,\bar{u})] = \frac{1}{1-qq'}\Big[\sum_i p_i\,q'(\varphi_i-\psi_o)\,u_i\,\bar{v} -$$

$$-\sum_j p'_j\,q(\varphi_o-\psi_j)\,v_j\,\bar{u} + \sum_{ij} p_i\,p'_j(\varphi_i-\psi_j)(u_i\,\bar{v} - v_j\,\bar{u})\Big]$$

Comme φ et ψ sont définies à une constante près (qui s'élimine de l'expression ci-dessus), on peut prendre $\varphi_o = \psi_o = 0$, et il vient :

$$\tilde{E}[(\varphi-\psi)(u\,\overline{v} - v\,\overline{u})] = \frac{1}{1-qq'}\ [q'\overline{v}\sum_i\ p_i\ \varphi_i\ u_i + q\ \overline{u}\sum_j p'_j\ \psi_j\ v_j$$

$$+\ \overline{v}(1-q')\sum p_i\ \varphi_i\ u_i + \overline{u}(1-q)\sum_j p'_j\ \psi_j\ v_j - \overline{u}\,\overline{v}\sum_j p'_j\ \psi_j - \overline{u}\,\overline{v}\sum_i p_i\varphi_i]$$

$$= \frac{1}{1-qq'}\ [\overline{v}\sum_i p_i\ \varphi_i(u_i - \overline{u}) + \overline{u}\sum_j \psi_j(v_j - \overline{v})]$$

$$= \frac{1}{1-qq'}\ E[(\varphi-\psi)(u\,\overline{v} - v\,\overline{u})]$$

Tout se passe donc bien comme si le deuxième membre de (5-4) était simplement divisé par (1-qq').

EXEMPLE.

Pour calculer, au moins dans un cas particulier, la valeur de la dispersion longitudinale D_L et la comparer à celle de la dispersion transversale D_T que fournit (5-13), plaçons-nous dans le cas simple suivant :

~ les processus spatiaux u(z) et v(x) sont équivalents ($A = A'$ et $u_i = v_i$)

~ $a_o = a'_o = a$; pour $i \neq o$, $a_i = a'_i = \alpha\, u_i$

~ $\varpi_{ij} = \varpi'_{ij} = 0$; $\varpi_{io} = \varpi'_{io} = 1$; $\varpi_{oi} = \varpi'_{oi} = \varpi_i$

La première hypothèse est une condition de symétrie ; la troisième signifie que dans le processus spatial à un seul indice (i ou j), un état $i \neq 0$ est toujours suivi d'un état 0, tandis qu'un état 0 est suivi d'un état i tiré au sort selon une loi ϖ_i : ce schéma correspond bien au cas d'une matrice solide divisée par deux réseaux orthogonaux de canalicules. La seconde hypothèse est plus particulière, et a surtout pour but de nous permettre d'effectuer les calculs jusqu'au bout. Elle exprime que l'épaisseur moyenne d'un canalicule où la vitesse est u_i est $1/\alpha u_i$, c'est-à-dire inversement proportionnelle à la vitesse u_i.

Après des calculs intermédiaires, que je ne reproduis pas, en désignant par :

~ q la probabilité de $i = 0$ pour le processus spatial ($1 - q^2$ represente donc la porosité, et on a $q/(1-q^2) = \alpha\, \tilde{u}/a_o$)

~ W la moyenne harmonique de u pour le processus spatial conditionnellement si $i \neq 0$, soit $1/W = (1-q) \sum (p_i/u_i)$

~ $\tilde{u} = (\sum p_i\, u_i)/(1-q^2)$ la vitesse effective,

~ a_o l'inverse de la longueur moyenne des états 0, on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} D_L = \dfrac{\tilde{u}}{a_o\, q}\left[2\, q(1+q)\, \dfrac{\tilde{u}}{W} - q(1+q) - (1-q)(1-2\, q-q^2)\, \dfrac{\tilde{u}}{W} + (1-q)^2\, \dfrac{\tilde{u}^2}{W^2} - \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - q(1-q^2)\right] \\ \\ D_T = \dfrac{\tilde{u}}{a_o\, q}\left[q^2 + (1-q)^3 \left(\dfrac{\tilde{u}}{W} - 1\right)\right] \end{array}\right.$$

En particulier, pour $q = 1$, c'est-à-dire dans le cas d'une porosité $1-q^2$ infiniment petite (canalicules infiniment minces séparant des massifs rectangulaires imperméables dont le côté a pour longueur moyenne $1/a_o$), il reste

$$\left[\begin{array}{l} D_L = 2\, \dfrac{\tilde{u}}{a_o} \left(2\, \dfrac{\tilde{u}}{W} - 1\right) \\ \\ D_T = \dfrac{\tilde{u}}{a_o} \end{array}\right.$$

Comme $2\, \tilde{u}$ représente l'espérance de u pour le processus spatial conditionnelle en $i \neq 0$, on a toujours $2\, \tilde{u}/W \geq 1$. Mais l'égalité $2\, \tilde{u} = W$ peut être réalisée (s'il y a un seul état $i \neq 0$, la vitesse longitudinale est constante, et $D_L = 0$). Par suite, on n'a plus nécéssairement $D_L \geq D_T$.