Fontainebleau/CGMM

N-659

MODELES ISOFACIENNELS
POUR L'EFFET ZERO

G. MATHERON

Juin 1980

MODELES ISOFACTORIELS POUR L'EFFET ZERO

=====

Par

G. MATHERON

- TABLE DES MATIERES -

0 - INTRODUCTION	1
1 - LES FACTEURS BINOMIAUX	4
2 - LOIS DISSYMETRIQUES	11
3 - UN MODELE POUR L'EFFET ZERO	15
4 - MODELES BINOMIAUX PLUS GENERAUX	17
5 - MODELES POISSONIENS	20
6 - MODELES A LOI BINOMIALE NEGATIVE	26

MODELES ISOFACITORIELS POUR L'EFFET ZERO

=====

Par

G. MATHERON

0 - INTRODUCTION

Deux sortes de raisons suggèrent qu'il pourrait y avoir intérêt à remplacer nos modèles gaussiens isofactoriels par des modèles binomiaux possédant des propriétés équivalentes, ce qui conduirait en particulier à substituer à la loi de Gauss continue une loi binomiale (N, p) , avec N de l'ordre de 10 ou 20.

En premier lieu, on éviterait ainsi certaines erreurs numériques désagréables. Dans le cas continu, par exemple, pour évaluer une intégrale $\int f(x) g(x) dx$ on utilise des expressions approchées du type $\sum a_i g(x_i) f(x_i)$. Cette cause d'erreur disparaît dans le cas d'un modèle discret, puisque l'expression $\sum w_i f_i$ est alors l'expression exacte de l'espérance de la fonction f . A dire vrai, les erreurs numériques de ce type sont en général assez faibles. Mais il y a une cause d'erreurs plus graves liées au fait que l'on ne retient qu'un nombre fini ($N_0 = 10$ ou 15 par exemple) de facteurs hermitiens. Sur le Tableau I on peut voir les valeurs des réserves récupérables pour une variable lognormale e^X (X gaussienne normée centrée), coupée à $x = 0$, conditionnée par une gaussienne Y (avec $\rho = 0.8$ ou 0.5). A côté des valeurs exactes figurent les valeurs calculées en utilisant les 20 premiers polynômes d'Hermite ($n = 0$ à 19) : en ce qui concerne le minerai, l'accord est parfait pour $\rho = 0.5$, et très bon encore pour $\rho = 0.8$. Pour le métal, par contre, l'accord est médiocre, même pour une corrélation relativement faible comme $\rho = 0.5$ (pour $y = -2$, par exemple, valeur conditionnante non exceptionnelle, on trouve 0.30 au lieu de 0.21). Dans le cas de lois binomiales, il n'y aura qu'un nombre fini assez petit ($N = 10$ ou 20 par exemple) de facteurs que l'on retiendra tous, et cette cause d'erreurs disparaîtra.

Le deuxième avantage du modèle binomial concerne ce que l'on peut appeler l'effet Zero. Lorsqu'il y a un pourcentage non négligeable de teneurs nulles, l'anamorphose inverse n'est pas possible dans le cas gaussien, puisque l'on ne peut pas reconstituer les gaussiennes associées aux valeurs nulles. Cette circonstance est particulièrement gênante pour la pratique des simulations conditionnelles. Or cet inconvénient disparaît dans le cas binomial : si ω_0 est le % de teneurs nulles, on choisit les paramètres p , $q = 1-p$ et N de la loi binomiale de telle façon que l'on ait $\omega_0 = q^N$, et toutes les teneurs zero sont associées à la même valeur $i = 0$ de la variable binomiale. D'une manière générale, toutes les difficultés liées à l'interpolation et à l'extrapolation de la fonction d'anamorphose φ disparaissent automatiquement dans le cas binomial : les Z_α expérimentaux sont groupés en classes C_i de fréquence aussi proche que possible de la valeur théorique

$$C_N^i p^i q^{N-i}$$

et la valeur φ_i de la fonction d'anamorphose en i est prise égale à la moyenne des Z_α dans C_i .

TABIEAU I $E[e^{\lambda X} | X > 0 | Y = y]$

$\rho = 0.8$	y	Tonnage minéral ($\lambda = 0$)		Tonnage métal ($\lambda = 1$)	
		Val. Approchée	Valeur exacte	Val. Approchée	Valeur exacte
	-2	0.0036351	0.0038304	0.0826201	0.0046851
	-1.5	0.0232017	0.0227501	0.1373547	0.0291205
	-1	0.0908076	0.0912113	0.2534454	0.1246296
	-0.5	0.2527169	0.2524925	0.4961951	0.3799312
	0	0.5	0.5	0.9233872	0.8688768
	0.5	0.7472831	0.7475075	1.5631846	1.6027242
	1	0.9091924	0.9087887	2.4553795	2.5935883
	1.5	0.9767983	0.9772499	3.7153228	3.9563737
	2	0.9963649	0.9961696	5.5577117	5.9266296
	-3	0.0416323	0.0416322	0.1455249	0.0627352
	-2	0.1241065	0.1241066	0.3026453	0.2068331
	-1.5	0.1932381	0.1932381	0.4359536	0.3436446
	-1	0.2818514	0.2818514	0.6205731	0.5414868
	-0.5	0.3664150	0.3664151	0.8686971	0.8137690
	0	0.5	0.5	1.1936301	1.1738317
	0.5	0.6135850	0.6135849	1.6109877	1.6363843
	1	0.7181486	0.7181486	2.1407884	2.2202613
	1.5	0.8067619	0.8067619	2.8101520	2.9519806
	2	0.8758935	0.8758934	3.6562317	3.8694335
	3	0.9583677	0.9583678	6.0952116	6.4902533

I - LES FACTEURS BINOMIAUX.

Pour introduire commodément les facteurs de la loi binomiale à 2 variables, partons du cas le plus simple : celui de deux variables X et Y ne prenant que les deux valeurs 0 et 1 et admettant une loi symétrique. Cette loi est obligatoirement de la forme :

$$\begin{array}{cc} q(q + \rho p) & qp(1-\rho) \\ qp(1-\rho) & p(p + \rho q) \end{array}$$

Elle ne dépend que de 2 paramètres : p (0 ≤ p ≤ 1, q est égal à 1 - p) et ρ compris entre -1 et +1 (c'est le coefficient de corrélation des deux binomiales). La fonction génératrice correspondante est :

$$E[s^X t^Y] = (q + ps)(q + pt) + \rho pq(1-s)(1-t)$$

Supposons maintenant que nous prenions la somme de N couples (X_i, Y_i) indépendants admettant la même loi que ci-dessus. Nous obtenons un couple (X, Y) dont les lois marginales sont binomiales (N, p) :

$$W_i = P(X = i) = P(Y = i) = C_N^i p^i q^{N-i}$$

La loi à 2 variables (X, Y) admet la fonction génératrice :

$$(1-1) \quad G(s, t) = E[s^X t^Y] = [(q + ps)(q + pt) + \rho pq(1-s)(1-t)]^N$$

Loi de X à Y fixé. Ordonnons G(s, t) en t :

$$\begin{aligned} G(s, t) &= [q(q + ps) + \rho pq(1-s) + pt(q + ps - \rho q(1-s))]^N \\ &= \sum_i C_N^i p^i q^{N-i} t^i (q - \rho q + s(p + \rho q))^i (q + \rho p + sp(1-\rho))^{N-i} \end{aligned}$$

Ainsi, à Y = i fixé, la fonction génératrice de X est :

$$E(s^X | Y = i) = (q(1-\rho) + s(p + \rho q))^i (q + \rho p + sp(1-\rho))^{N-i}$$

Conditionnée par Y = i, X apparaît comme la somme de deux

binomiales indépendantes, l'une ($i, p + pq$), l'autre ($N-i, p(1-p)$).

Ce résultat est d'ailleurs facile à interpréter : sachant que $X = \sum X_n$ et $Y = \sum Y_n$ sont somme de V.A. en tout ou rien identiquement distribuées, on a $Y = i$ si i (quelconques) parmi les Y_n , par exemple $Y_1, Y_2, \dots, Y_i$ prennent la valeur 1, et les autres, $Y_{i+1} \dots Y_N$ la valeur 0 : alors $X_1, \dots, X_i$, d'après le tableau de départ, valent 1 avec la probabilité $p + pq$, tandis que pour $X_{i+1} \dots X_N$ cette probabilité est $p(1-p)$.

Identification des facteurs. Développons la fonction génératrice (1-1) :

$$(1-2) \quad G(s, t) = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n (1-s)^n (q + ps)^{N-n} (1-t)^n (q+pt)^{N-n}$$

Ce développement met en évidence la décomposition factorielle de la loi. Pour le voir, définissons des quantités $H_n(i)$ en posant :

$$(1-3) \quad \sum_{i=0}^N W_i H_n(i) s^i = (1-s)^n (q + ps)^{N-n}$$

(avec, évidemment, $W_i = C_N^i p^i q^{N-i}$). Multiplions par $C_N^n \lambda^n p^n q^n$ et sommons en n . Cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i,n} C_N^n \lambda^n p^n q^n W_i H_n(i) s^i &= [q + ps + \lambda pq(1-s)]^N \\ &= [q(1+\lambda p) + ps(1-\lambda q)]^N \\ &= \sum_i W_i s^i (1-\lambda q)^i (1+\lambda p)^{N-i} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des termes en s^i , nous obtenons donc identiquement en λ :

$$(1-4) \quad \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n \lambda^n H_n(i) = (1-\lambda q)^i (1+\lambda p)^{N-i}$$

Des relations (1-2) et (1-3), nous allons déduire l'orthogonalité des H_n :

$$\langle H_n, H_m \rangle = \sum_i H_n(i) H_m(i) W_i = 0 \quad \text{pour } n \neq m$$

De fait, adjoignons à (1-4) l'expression analogue :

$$(1-4') \quad \sum_{m=0}^N C_N^m p^m q^m \mu^m H_m(i) = (1-\mu q)^i (1+\mu p)^{N-i}$$

Multiplions membre à membre (1-4) et (1-4'), puis sommons en i après multiplication par W_i . Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i,n,m} W_i C_N^n C_N^m (pq)^{n+m} H_n(i) H_m(i) \lambda^n \mu^m &= \\ [p(1-\lambda q)(1-\mu q) + q(1+\lambda p)(1+\mu p)]^N & \\ = [1 + pq \lambda \mu]^N & \\ = \sum C_N^k p^k q^k \lambda^k \mu^k & \end{aligned}$$

Identifiant les termes en $\lambda^n \mu^m$, nous trouvons ainsi :

$$(1-5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i W_i H_n(i) H_m(i) = 0 \quad (n \neq m) \\ \sum_i W_i (H_n(i))^2 = \frac{1}{C_N^n p^n q^n} \end{array} \right.$$

Les $H_n(i)$ sont donc bien orthogonaux. Ils ne sont pas normés à l'unité : les expressions normées correspondantes sont :

$$(1-6) \quad \chi_n(i) = \sqrt{C_N^n p^n q^n} H_n(i)$$

Pour les calculs pratiques, les $H_n(i)$ sont d'emploi plus léger que les expressions normalisées (1-6). Notez que $H_n(i)$ et $\chi_n(i)$ sont des polynomes de degré n en i , comme on peut le voir facilement à partir de (1-4).

Montrons maintenant que les χ_n sont les facteurs de notre loi binomiale à 2 variables : de fait, d'après (1-2) et (1-3), on voit immédiatement que la probabilité P_{ij} d'avoir $X = i$ et $Y = j$ vérifie :

$$(1-7) \quad P_{ij} = W_i W_j \sum_n C_N^n p^n q^n H_n(i) H_n(j)$$

ou encore, en utilisant les polynomes normalisés (1-6) :

$$(1-7') \quad P_{ij} = W_i W_j \sum_n \rho^n \chi_n(i) \chi_n(j)$$

Ainsi, les χ_n sont les facteurs de la loi, et les valeurs propres correspondantes sont les ρ^n :

$$(1-8) \quad E[H_n(X) | Y = J] = \rho^n H_n(J)$$

Développements orthogonaux. Toute fonction (ou vecteur) $f = (f_i)$ admet le développement :

$$f_i = \sum_n \langle f | \chi_n \rangle \chi_n(i)$$

que nous utiliserons plutot sous la forme :

$$(1-9) \quad \begin{cases} f_i = \sum_{n=0}^N C_n H_n(i) \\ C_n = C_N^n p^n q^n \sum_{i=0}^N W_i f_i H_n(i) \end{cases}$$

Par exemple, d'après (1-3), la fonction $f_i = s^i$ admet les coefficients :

$$C_n = C_N^n p^n q^n (1-s)^n (q+ps)^{N-n}$$

et on a donc :

$$(1-10) \quad \frac{s^i}{(q+ps)^N} = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n \left(\frac{1-s}{q+ps} \right)^n H_n(i)$$

Permanence de la loi logbinomiale. Une variable logbinomiale est une V.A. de la forme $a s^i$ où i est binomiale. Comme $E(s^i) = (q+ps)^N$, on voit que toute logbinomiale Z de moyenne m peut s'écrire, d'après (1-10) sous la forme :

$$Z = m \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n \left(\frac{1-s}{q+ps} \right)^n H_n(i)$$

Prenons l'espérance de Z à Y = J fixé : comme les H_n sont des facteurs, il vient d'après (1-8) :

$$E(Z | Y = J) = m \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n \left(\rho \frac{1-s}{q+ps} \right)^n H_n(j)$$

Or ceci peut s'écrire :

$$\begin{aligned} E(Z | Y = J) &= m \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^n \left(\frac{1-s'}{q+ps'} \right)^n H_n(j) \\ &= m \frac{s'^j}{(q+ps')^N} \end{aligned}$$

avec

$$s' = \frac{q(1-p) + s(p+pq)}{q + \rho p + sp(1-p)}$$

Ainsi, la loi logbinomiale va bénéficier dans ce modèle des mêmes propriétés de permanence que la loi lognormale dans le modèle gaussien.

Formules de récurrence. Pour les calculs pratiques, nous disposons de formules de récurrence très commodes :

Récurrence en i (à n fixé) :

$$(1-11) \quad (N-i) p H_n(i+1) - [Np - i(p-q) - n] H_n(i) + iq H_n(i-1) = 0$$

Récurrence en n (à i fixé) :

$$(1-12) \quad (N-n) pq H_{n+1} + [i - Np + n(p-q)] H_n + n H_{n-1} = 0$$

A côté des H_n , il est commode, dans les calculs pratiques, d'introduire les quantités duales :

$$(1-13) \quad W_n(i) = C_N^n p^n q^n W_i H_n(i)$$

de sorte que les formules (1-9) s'écrivent :

$$\begin{cases} f_i = \sum_n C_n H_n(i) \\ C_n = \sum_i f_i W_n(i) \end{cases}$$

Pour ces quantités $W_n(i)$, la formule de récurrence en n est :

$$(1-14) \quad (n+1)W_{n+1} + [i - Np + n(p-q)]W_n + [N-n + 1] pq W_{n-1}$$

Notons que la formule (1-11) est déjà vraie pour $i = 0$, et de même la formule (1-12) pour $n = 0$. Il en est d'ailleurs de même pour (1-14), à condition de prendre $W_{-1} = 0$.

Pour amorcer ces récurrences, noter que l'on a :

$$H_n(0) = \frac{1}{q^n}; \quad H_0(i) = 1, \quad W_0(i) = W_i = C_N^i p^i q^{N-i}$$

La démonstration de ces formules se fait sans difficulté à partir des relations (1-3) et (1-4). Notons aussi, en passant, que la relation de récurrence (1-3) fait apparaître l'expression du générateur infinitésimal de la chaîne de Markov que l'on peut associer à cette loi (X serait X_0 , Y serait $X(t)$, et $\rho = \rho(t) = \exp(-at)$).

Etablissons seulement, à titre d'exemple, la relation (1-12). Pour cela, dérivons (1-4) en λ et multiplions par

$$(1-\lambda q)(1+\lambda p) = 1 + \lambda(p-a) - \lambda^2 pq$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_n n C_N^n p^n q^n \lambda^{n-1} (1 + \lambda(p-q) - \lambda^2 pq) H_n(i) &= \\ [p(N-i)(1-\lambda q) - q i(1+\lambda p)](1-\lambda q)^i (1+\lambda p)^{N-i} & \\ = \sum_n C_N^n p^n q^n \lambda^n (p N-i-\lambda p q N) H_n(i) & \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'identifier les coefficients des termes en λ^n de ces deux développements pour obtenir (1-12).

Remarques - On est frappé de l'analogie des relations de récurrence en i , (1-11) et en n (1-12). De fait, si nous considérons

les quantités

$$\tilde{H}_n(i) = q^n H_n(i)$$

on voit sans peine qu'elles vérifient une relation de récurrence identique à (1-11), à un échange près des variables n et i .

On en déduit une très curieuse relation de symétrie entre les indices n et i , à savoir :

(1-15) $q^n H_n(i) = q^i H_i(n)$

Autrement dit : les quantités $\tilde{H}_n(i) = q^n H_n(i)$ dépendent symétriquement des deux indices n et i .

De la même manière, changeons i en $N-i$, en posant

$$T_n(i) = H_n(N-i)$$

En substituant dans (1-11), on constate que ces quantités $T_n(i)$ obéissent à la même relation (1-11), à un échange près de p et de q . On a donc une relation de la forme

$$H_n(N-i, p) = A_n H_n(i, q)$$

Pour identifier A_n , remarquons qu'en $i = 0$ on trouve à gauche $H_n(N) = (-1)^n / p^n$ et à droite $A_n H_n(0, q) = A_n / p^n$. On a donc $A_n = (-1)^n$, et par suite :

(1-16) $H_n(N-i, p) = (-1)^n H_n(i, q)$

En particulier, pour $p = q = 1/2$, il vient $H_n(N-i) = (-1)^n H_n(i)$: ces polynômes sont symétriques ou antisymétriques autour de $N/2$ selon la parité de n .

II - LOIS DISSYMETRIQUES.

Les lois ci-dessus sont symétriques en X et Y. Elles conviendront, dans les applications, pour décrire par exemple des teneurs ponctuelles en deux points différents. En l'absence d'effet 0, elles peuvent aussi convenir pour des variables de supports différents. Mais, si l'effet 0 est notable, il n'est pas possible d'attribuer la même probabilité q^N à la teneur 0 pour des supports différents, et q (ou N) doit pouvoir varier.

Pour construire des lois dissymétriques, considérons la forme générale de la loi de deux variables X et Y ne prenant que les valeurs 0 et 1. Elle se met sous la forme :

$$\begin{array}{cc} qq' + \rho\alpha & qp' - \rho\alpha \\ pq' - \rho\alpha & pp' + \rho\alpha \end{array}$$

p et q = 1-p définissent la loi marginale de X, p' et q' = 1-p' celle de Y. On a posé :

$$\alpha = \sqrt{pp' qq'}$$

Enfin, ρ est le coefficient de corrélation (il y a donc 3 paramètres). Noter que ρ est soumis à des limitations plus sévères que dans le cas d'une loi symétrique :

$$\rho \leq \sqrt{\frac{pq'}{p'q}} ; \rho \leq \sqrt{\frac{p'q}{pq'}} ; \rho \geq -\sqrt{\frac{pp'}{qq'}} ; \rho \geq -\sqrt{\frac{qq'}{pp'}}$$

Les cas limites où l'une de ces inégalités devient une égalité se révéleront pleins d'intérêt. En supposant, par exemple, $p' \leq p$ l'égalité

$$\rho = \sqrt{\frac{p'q}{pq'}} , \text{ soit } \rho\alpha = qp'$$

correspond à une loi de la forme

$$\begin{pmatrix} q & 0 \\ p-p' & p' \end{pmatrix}$$

On a $Y \leq X$ p.s. : le seconde variable est dominée par la première. De même, l'égalité

$$\rho = - \sqrt{\frac{pp'}{qq'}} \quad , \quad \text{soit } \rho\alpha = - pp'$$

correspond à une loi de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1-p-p' & p' \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux variables sont incompatibles ($XY = 0$ p.s.).

Revenons au cas général. La fonction génératrice est :

$$E(s^X s'^Y) = (q + ps)(q' + p's') + \rho\alpha(1-s)(1-s')$$

Si maintenant nous additionnons, comme dans le cas symétrique, N couples (X_n, Y_n) indépendants admettant cette même loi, nous obtenons la fonction génératrice

$$(2-1) \quad G(s, s') = [(q+ps)(q'+p's') + \rho \alpha(1-s)(1-s')]^N$$

Les lois conditionnelles s'en déduisent sans difficulté, avec la même interprétation que dans le cas symétrique. On trouve :

$$(2-2) \quad \begin{cases} E[s^X/Y = i'] = [q - \frac{\rho\alpha}{p'} + s(p + \frac{\rho\alpha}{p'})]^{i'} [q + \frac{\rho\alpha}{q'} + s(p - \frac{\rho\alpha}{q'})]^{N-i'} \\ E[s'^Y/X = J] = [q' - \frac{\rho\alpha}{p} + s'(p' + \frac{\rho\alpha}{p})]^J [q' + \frac{\rho\alpha}{q} + s(p' - \frac{\rho\alpha}{q})]^{N-J} \end{cases}$$

Regardons nos deux cas limites :

Si Y est dominé par X , soit $\rho\alpha = qp'$, il reste :

$$(2-3) \quad \begin{cases} E[s^X/Y = i'] = s^{i'} [\frac{q}{q'} + s(1 - \frac{q}{q'})]^{N-i'} \\ E[s'^Y/X = J] = [1 - \frac{p'}{p} + s \frac{p'}{p}]^J \end{cases}$$

L'interprétation de ces relations (2-3) est assez claire : lorsque la variable dominée Y est égale à i' , X est la somme de i' et d'une binomiale $(N-i')$, $1 - q/q'$.

Au contraire, si la variable dominante X est égale à j, Y est une binomiale j, p'/p .

Tout ceci se conçoit très bien, si l'on remarque que l'on peut présenter ces variables sous la forme

$$X = \sum 1_{A_n} \quad Y = \sum 1_{A_n} 1_{B_n}$$

avec des évènements A_n et B_n indépendants, $P(A_n) = p$, $P(B_n) = \frac{p'}{p}$.

Ces lois (2-3) seront très commodes pour représenter un effet zéro.

Identification des facteurs. Procédons, comme dans le cas symétrique, en développant $G(s, s')$, soit :

$$(2-3') \quad G(s, s') = \sum_{n=0}^N C_N^n \rho^n \alpha^n (1-s)^n (1-s')^n (q+ps)^{N-n} (q'+p's')^{N-n}$$

Utilisons (1-3), en distinguant évidemment les polynomes :

$$H_n(i) = H_n(i, p) \quad \text{et} \quad H'_n(i) = H_n(i, p')$$

qui dépendent explicitement de $p(p')$. Il vient :

$$(2-4) \quad P_{ij} = W_i W'_j \sum_{n=0}^N C_N^n \rho^n \alpha^n H_n(i) H'_n(j)$$

Comme $\alpha = \sqrt{pq p'q'}$, si l'on introduit les polynomes normalisés χ_n et χ'_n , ceci s'écrit encore

$$(2-4') \quad P_{ij} = W_i W'_j \sum_{n=0}^N \rho^n \chi_n(i) \chi'_n(j)$$

Ainsi, les χ_n et les χ'_n sont encore les facteurs, et la valeur propre correspondante est encore ρ^n . On a donc bien :

$$E[\chi_n(X)/Y = j] = \rho^n \chi_n'(j)$$

$$E[\chi_n'(Y)/X = i] = \rho^n \chi_n(i)$$

Mais, si l'on utilise les polynomes non normalisés H_n et H_n' , on prendra bien garde que la formule ci-dessus soit être remplacée par :

$$(2-5) \quad \begin{cases} E[H_n(X)/Y = j] = \rho^n \sqrt{\frac{p'^n q'^n}{p^n q^n}} H_n'(j) \\ E[H_n'(Y)/X = i] = \rho^n \sqrt{\frac{p^n q^n}{p'^n q'^n}} H_n(i) \end{cases}$$

Cas où Y est dominé par X : $p' < p$ et $pa = qp'$, soit $\rho = \sqrt{\frac{qp'}{q'p}}$

Les formules (2-5) s'écrivent alors :

$$(2-6) \quad \begin{cases} E[H_n(X)/Y = j] = \left(\frac{p'}{p}\right)^n H_n'(j) \\ E[H_n'(Y)/X = i] = \left(\frac{q}{q'}\right)^n H_n(i) \end{cases}$$

Ceci nous conduit à des formules de transformation (de p en $p' \leq p$) assez remarquables.

On a vu plus haut (relation 2-3') qu'à $X = i$ fixé Y est une binomiale ($i, p'/p$). On a donc

$$E[H_n'(Y)/X = i] = \sum_{j=0}^N c_i^j \left(\frac{p'}{p}\right)^j \left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{i-j} H_n'(j)$$

En comparant à la seconde relation (2-6), il vient donc la formule de passage de p' en $p \geq p'$:

$$(2-7) \quad H_n(i, p) = \left(\frac{q'}{q}\right)^n \sum_{j=0}^i c_i^j \left(\frac{p'}{p}\right)^j \left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{i-j} H_n(j, p')$$

Cette formule, constituant une identité en p et p' , reste numériquement valable pour $p' > p$, bien qu'elle n'admette plus alors d'interprétation probabiliste évidente. On peut d'ailleurs

la démontrer par voie purement algébrique, en utilisant le développement (1-4).

De la même manière, à $Y = j$ fixé, on a vu que X est égale à la somme de j et d'une binomiale $(N-j, 1 - \frac{q}{q'})$. Par suite

$$E[H_n(X)/Y = j] = \sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j}^i \left(1 - \frac{q}{q'}\right)^i \left(\frac{q}{q'}\right)^{N-i-j} H_n(j+i)$$

En identifiant à la première relation (2-6), nous obtenons la seconde formule de transformation :

$$(2-8) \quad H_n(j, p') = \left(\frac{p}{p'}\right)^n \sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j}^i \left(1 - \frac{q}{q'}\right)^i \left(\frac{q}{q'}\right)^{N-i-j} H_n(i+j, p)$$

III - UN MODELE POUR L'EFFET 0.

Plaçons-nous dans le cas où les données expérimentales (support ponctuel ou quasi-ponctuel) Z_α comportent un pourcentage ω'_0 important de valeurs nulles, par exemple $\omega'_0 = 30\%$. Nous choisissons un modèle binomial (Np) avec, par exemple $N = 9$ (i.e. 10 classes). La classe des teneurs nulles devant s'identifier à la classe $i = 0$, il faut donc prendre p' tel que

$$q'^N = (1 - p')^N = \omega'_0$$

Sur notre exemple numérique, ceci donne $q' = 0.8748$,
 $p' = 0.1252$.

Nous choisissons l'anamorphose φ_i , $i = 0, 1, \dots, q$ avec $\varphi_0 = 0$, de façon à ajuster au mieux l'histogramme expérimental, et nous formons son développement factoriel :

$$\begin{cases} \varphi_i = \sum C_n H_n(i, p') \\ C_n = \sum_i \varphi_i W_n(i, p') \end{cases}$$

Si $X = X_v$ est la binomiale associée à un bloc v , l'anamorphose φ_v associée au support v est défini par :

$$\varphi_v(X) = E[\varphi(Y)/X]$$

soit

$$\varphi_v(X) = \sum_p C_n \rho^n \sqrt{\frac{p^n q^n}{p'^n q'^n}} H_n(X, p)$$

On choisit ρ de manière à retrouver la variance S_v^2 des blocs : ce qui donne ici

$$(3-1) \quad S_v^2 = \sum_{n>0} \frac{C_n^2 \rho^{2n}}{C_N^n p'^n q'^n}$$

(noter que figurent au dénominateur les termes p' et q' et non p et q).

Comme Y , à $X = i$ fixé, est binomiale $(i, p'/p)$, on a aussi l'expression suivante pour l'anamorphose des blocs :

$$\varphi_v(i) = \sum_{j=0}^i C_i^j \left(\frac{p'}{p}\right)^j \left(1 - \frac{p'}{p}\right)^{i-j} \varphi(j)$$

En particulier, pour $i = 0$ on trouvera $\varphi_v(0) = \varphi(0) = 0$.

Comme p' est connu, la relation (3-1) détermine ρ . Dans ce modèle, on a la relation

$$\rho = \sqrt{\frac{q p'}{p q'}}$$

qui détermine à son tour le dernier paramètre, soit p :

$$p = \frac{p'}{p' + \rho^2 q'} \quad , \quad q = \frac{\rho^2 q'}{p' + \rho^2 q'}$$

(Dans notre exemple numérique : avec $\rho = 0.5$, ceci donne $p = 0.3641$ et $q = 0.6359$).

Dès lors, le pourcentage des blocs de teneur nulle se trouve fixé :

$$(3-2) \quad \omega_0 = q^N = \left(\frac{\rho^2 q'}{p' + \rho^2 q'} \right)^N$$

(dans notre exemple $\omega_0 = 0.0170$, soit moins de 2% au niveau des blocs, contre $\omega'_0 = 30\%$ au niveau ponctuel).

C'est donc une caractéristique assez particulière de ce modèle que d'imposer la loi d'évolution des teneurs 0 en fonction de la taille du support.

Le choix de N ne doit pas exercer une grande influence sur cette loi. De fait, q' est voisin de 1 et p' très petit. On a donc sensiblement :

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{p'}{p' + \rho^2 q'} \right) \approx e^{-N \frac{p'}{q' \rho^2}}$$

Comme, de la même manière, on trouve au niveau ponctuel

$$\omega'_0 \approx e^{-N p'/q'}$$

il vient donc simplement

$$\omega_0 \approx (\omega'_0)^{\frac{1}{\rho^2}}$$

(en fait, dans notre exemple, $N = 9$ est relativement petit, et on trouve $(0,3)^4 = 0,008$ au lieu de 0,017).

IV - MODELES BINOMIAUX PLUS GENERAUX.

A côté des modèles où $p \neq p'$, on peut également s'intéresser au cas $N \neq N'$. Plus généralement, en écrivant

$$\chi_n(i) = \chi_n(i, p, N) \quad , \quad \chi'_n(i) = \chi_n(i, p', N')$$

cherchons un modèle de loi de la forme :

$$P_{ij} = W_i W'_j \sum_{n=0}^R T_n \chi_n(i) \chi'_n(j)$$

La sommation est étendue jusqu'à un entier R, obligatoirement inférieur ou égal au plus petit des deux entiers N et N'. Les coefficients T_n doivent être choisis (si cela est possible) de manière à ce que les P_{ij} soient ≥ 0.

Passons à la fonction génératrice

$$G(s, s') = \sum_{i, j} P_{ij} s^i s'^j$$

Compte tenu de (1-3), nous trouvons

$$G(s, s') = \sum_{n=0}^R T_n \sqrt{C_N^n C_{N'}^n} p^n p'^n q^n q'^n (1-s)^n (1-s')^n (q+ps)^{N-n} (q'+p's')^{N'-n}$$

Posons, comme ci-dessus, $\alpha = \sqrt{pp' qq'}$. L'expression ci-dessus s'écrit :

$$G(s, s') = (q+ps)^{N-R} (q'+p's')^{N'-R} \sum_{n=0}^R C_R^n \alpha^n T'_n (1-s)^n (1-s')^n \times (q+ps)^{R-n} (q'+p's')^{R-n}$$

avec

$$T'_n = \frac{T_n \sqrt{C_N^n C_{N'}^n}}{C_R^n}$$

En comparant avec (2-3'), il apparaît qu'en prenant $T'_n = \rho^n$, on retombe sur un modèle probabiliste : (X, Y) est la somme de deux couples, l'un (X', Y') obéissant à une loi de type (2-3'), l'autre (X'', Y'') formé de deux binomiales indépendantes et indépendantes de (X, Y). On aurait alors

$$G(s, s') = (q+ps)^{N-R} (q'+p's')^{N'-R} [(q+ps)(q'+p's') + \rho\alpha(1-s)(1-s')]^N$$

Prenons donc $T'_n = \rho^n$, soit

$$T_n = \frac{C_R^n \rho^n}{\sqrt{C_N^n C_{N'}^n}}$$

Les facteurs de cette loi sont donc encore les χ_n et les χ_n' , mais seulement pour $n \leq R \leq \text{Inf}(N, N')$, et les valeurs propres associées sont les T_n .

Le cas $p = 1$ n'est possible que si $p = p'$. Supposons $p = p'$ et $p = 1$. La formule (4-1) se réduit ici à :

$$G = (q+ps)^{N-R} (q+ps)^{N'-R} [q + pss']^R$$

Il lui correspond un modèle du type $X = X' + Z$, $Y = Y' + Z$ où X' , Y' et Z sont trois binomiales indépendantes.

Particularisant plus encore, prenons $N' = R \leq N$. Alors :

$$(4-1) \quad G(s, s') = (q + ps)^{N-R} (q + pss')^R$$

Le modèle est du type $X = Y + Z$, où Y et Z sont deux binomiales indépendantes. Les valeurs propres sont ici :

$$T_n = \sqrt{\frac{C_R^n}{C_N^n}}$$

Cette loi (4-1) possède des propriétés intéressantes :

A $Y = i$ fixé, X est égal à i plus une binomiale $(N-R, p)$. Au contraire, à $X = j$ fixé, on trouve

$$P(Y=i/X=j) = \frac{C_J^i C_{N-J}^{R-i}}{C_N^R} = \frac{C_R^i C_{N-R}^{J-i}}{C_N^J}$$

Il va en résulter des formules de transformation de N en N' analogues aux formules de passage de p en p' établies plus haut. Ici encore, on a, en effet

$$E(\chi_n(X)/Y) = T_n E(\chi_n'(Y))$$

$$E(\chi_n'(Y)/X) = T_n E(\chi_n(X))$$

soit, avec les fonctions H_n :

$$E(H_n(X)/Y) = \frac{C_R^n}{C_N^n} H_n'(Y)$$

$$E(H_n'(Y)/X) = H_n(X)$$

Compte tenu de la loi conditionnelle de Y à X = j fixé, nous trouvons donc, d'après la seconde des relations ci-dessus :

$$(4-2) \quad H_n(j, N) = \sum_i \frac{C_R^i C_{N-R}^{j-i}}{C_N^j} H_n(i, R)$$

(sommation sur l'ensemble des i compris entre R-N+J et J).

De la même façon, puisque à Y = i fixé, X est i + une binomiale (N-R, p).

$$(4-3) \quad H_n(i, R) = \frac{C_N^n}{C_R^n} \sum C_{N-R}^j p^j q^{N-R-j} H_n(i+J, N)$$

Telles sont les formules d'échange de N en N' = R.

V - MODELES POISSONIENS.

Les modèles poissoniens se prêtent particulièrement bien à la représentation de l'effet 0. Ils correspondent au cas où N tend vers l'infini, Np restant constant et égal à θ . On note que ces modèles réintroduisent le risque d'erreur numérique, puisqu'il y a à nouveau une infinité de facteurs, comme dans le cas gaussien, mais ce risque n'est peut-être pas très grave en pratique.

Pour introduire commodément ces modèles, définissons les $H_n(i)$, par analogie avec (1-3), en posant :

$$(5-1) \quad \sum_i W_i H_n(i) s^i = (1-s)^n e^{-\theta(1-s)}$$

avec, évidemment, $W_i = \frac{\theta^i}{i!} e^{-\theta}$. Multiplions par $\lambda^n \theta^n/n!$ et

sommons en n . Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n,i} W_i H_n(i) s^i \frac{\lambda^n \theta^n}{n!} &= e^{-\theta(1-\lambda)(1-s)} \\ &= \sum_i \frac{\theta^i (1-\lambda)^i s^i}{i!} e^{-\theta(1-\lambda)} \end{aligned}$$

D'où, par identification :

$$(5-1') \quad \sum_n \frac{\lambda^n \theta^n}{n!} H_n(i) = (1-\lambda)^i e^{\theta\lambda}$$

L'orthogonalité de ces polynomes $H_n(i)$ se démontre de la même façon que dans le cas binomial. On trouve :

$$(5-2) \quad \langle H_n, H_m \rangle = \delta_{n,m} \frac{n!}{\theta^n}$$

Les polynomes orthonormés seront donc :

$$(5-3) \quad \chi_n(i) = \sqrt{\frac{\theta^n}{n!}} H_n(i)$$

Mais, dans les applications, les H_n seront plus commodes d'emploi que les χ_n . Introduisant les quantités W_n , duales des H_n , définies par

$$(5-4) \quad W_n(i) = \frac{\theta^n}{n!} W_i H_n(i)$$

les développements orthogonaux sont donnés par les formules :

$$(5-5) \quad \begin{cases} f_i = \sum_n C_n H_n(i) \\ C_n = \sum_i f_i W_n(i) \end{cases}$$

En particulier, dans le cas de la fonction puissance, on retrouve la formule (5-1'), avec $\lambda = 1-s$:

$$(5-6) \quad s^i e^{\theta(1-s)} = \sum_n \frac{\theta^n (1-s)^n}{n!} H_n(i)$$

Les relations de récurrence. On peut les obtenir par calcul direct, comme dans le cas binomial. On peut également passer à la limite $N \rightarrow \infty$, $Np = \theta$, $q \rightarrow 1$ dans les formules (1-11) et suivantes. En ce qui concerne la récurrence en i , on trouve :

$$(5-7) \quad \theta H_n(i+1) - (\theta+i-n) H_n(i) + i H_n(i-1) = 0$$

expression liée étroitement au générateur infinitésimal de la chaîne de Markov que l'on peut associer à la loi de Poisson.

La récurrence en n , de son côté, donne :

$$(5-8) \quad \theta H_{n+1} - (\theta + n-i) H_n + n H_{n-1} = 0$$

et, pour les poids $W_n(i)$ introduits en (5-4) :

$$(5-9) \quad (n+1)W_{n+1} - (\theta + n-i) W_n + \theta W_{n-1} = 0$$

Ces récurrences sont amorcées par les valeurs initiales :

$$H_0(i) = 1, \quad H_n(0) = 1, \quad W_0(i) = W_i = \frac{\theta^i}{i!} e^{-\theta}$$

La formule (1-15) se transpose sans difficulté : du fait que q a disparu, les relations de récurrence (5-8) et (5-9), ainsi que les conditions initiales ci-dessus, montrent que les indices n et i jouent des rôles parfaitement symétriques. On a donc :

$$(5-10) \quad H_n(i) = H_i(n)$$

(cette symétrie est d'ailleurs apparente sur les relations (5-1) et (5-1')).

Passons aux lois à deux variables, en traitant directement le cas dissymétrique. Posons

$$P_{ij} = W_i W_j \sum_n \rho^n \chi_n(i) \chi_n(j)$$

la notation W_J' , χ_n' etc... désignant les quantités relatives à la loi de Poisson de moyenne θ' au lieu de θ . Compte tenu de (5-3), ceci s'écrit à l'aide des H_n sous la forme :

$$(5-11) \quad P_{ij} = W_i W_J' \sum_n \frac{\rho^n}{n!} \sqrt{\theta^n \theta'^n} H_n(i) H_n'(j)$$

Formons l'expression

$$G_i(s') = \frac{1}{W_i} \sum_j P_{ij} s'^j$$

Utilisant la définition (5-1), il vient d'abord

$$G_i(s') = \sum_n \frac{\rho^n \sqrt{\theta^n \theta'^n}}{n!} H_n(i) (1-s')^n e^{-\theta'(1-s')}$$

puis, d'après (5-1') avec $\lambda = \rho \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} (1-s')$:

$$(5-12) \quad G_i(s') = [1 - \rho \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} + s' \rho \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}}]^i e^{-(\theta' - \rho \sqrt{\theta\theta'})(1-s')}$$

On voit qu'il s'agit effectivement d'une loi (les P_{ij} sont ≥ 0) pourvu seulement que ρ (qui est alors le coefficient de corrélation des deux variables) vérifie les inégalités :

$$\rho \geq 0 \quad , \quad \rho \leq \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \quad , \quad \rho \leq \sqrt{\frac{\theta}{\theta'}}$$

A $X = i$ fixé, X' apparaît comme la somme de deux V.A. indépendantes : l'une, binomiale $(i, \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}})$, l'autre poissonienne $(\theta' - \rho \sqrt{\theta\theta'})$.

La fonction génératrice à 2 variables :

$$G(s, s') = \sum P_{ij} s^i s'^j = \sum_i W_i s^i G_i(s')$$

se déduit sans difficulté de (5-12). Il vient :

$$(5-13) \quad G(s, s') = e^{-\theta(1-s) - \theta'(1-s') + \rho \sqrt{\theta\theta'}(1-s)(1-s')}$$

Notons qu'en posant

$$\theta_1 = \theta - \rho \sqrt{\theta\theta'} ; \quad \theta_2 = \theta' - \rho \sqrt{\theta\theta'} ; \quad \theta_3 = \rho \sqrt{\theta\theta'}$$

i.e. $\theta = \theta_1 + \theta_3$, $\theta' = \theta_2 + \theta_3$, on trouve

$$G(s, s') = e^{-\theta_1(1-s) - \theta_2(1-s') - \theta_3(1-ss')}$$

ce qui prouve que le modèle est de la forme :

$$X = X_1 + X_3 \quad , \quad X' = X_2 + X_3$$

où X_1 , X_2 et X_3 sont trois poissoniennes indépendantes, admettant respectivement les espérances θ_1 , θ_2 et θ_3 .

Cas où l'une des variables est dominée par l'autre.

Supposons, par exemple, $\theta' < \theta$, et plaçons-nous dans le cas extrême où l'on a

$$\rho = \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}} \quad , \quad \text{et donc} \quad \theta_2 = \theta' - \rho \sqrt{\theta\theta'} = 0$$

Dans ce cas, $X_2 = 0$ p.s., et le modèle est de la forme

$$X = X' + X_3$$

En particulier, $X' \leq X$ p.s. D'après (5-12), on voit qu'à $X = i$ fixé X' est binomiale $(i, \theta'/\theta)$. Au contraire, à $X' = J$ fixé, X est égale à J plus une poissonienne d'espérance $(\theta - \theta')$.

Ce modèle donne une loi simple pour l'effet 0 : la probabilité de $X' = 0$ est ici

$$\omega'_0 = e^{-\theta'}$$

Pour $\omega_0 = e^{-\theta}$, compte tenu de $\theta = \theta'/\rho^2$, on trouvera donc

$$(5-14) \quad \omega_0 = (\omega'_0)^{1/\rho^2}$$

Cette relation, qui n'était qu'approchée dans le modèle binomial, est ici valable en toute rigueur (ce qui ne veut évidemment pas dire qu'elle sera vérifiée dans la réalité physique : on a le sentiment qu'il manque un paramètre pour représenter l'effet 0, et c'est pourquoi, dans le prochain paragraphe, j'introduirai les modèles à loi binomiale négative, qui comportent effectivement ce paramètre supplémentaire).

D'après l'expression (5-4) de la loi à 2 variables, les χ_n et les χ'_n constituent les facteurs attachés à la valeur propre ρ^n . On a donc

$$E[\chi_n(X)/X' = J] = \rho^n \chi'_n(j)$$

$$E[\chi'_n(X')/X = i] = \rho^n \chi_n(i)$$

Mais on prendra bien garde qu'avec les polynomes non normalisés ces relations doivent s'écrire

$$(5-15) \quad \begin{cases} E[H_n(X)/X' = J] = \rho^n \sqrt{\frac{\theta'^n}{\theta^n}} H'_n(J) \\ E[H'_n(X')/X = i] = \rho^n \sqrt{\frac{\theta^n}{\theta'^n}} H_n(i) \end{cases}$$

Dans le cas où X' est dominée par X , soit $\rho = \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}}$, ces relations prennent la forme

$$\begin{cases} E[H'_n(X')/X = i] = H_n(i) \\ E[H_n(X)/X' = J] = \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^n H'_n(j) \end{cases}$$

Compte tenu des lois très simples trouvées ci-dessus pour X' conditionnée par X et inversement, on obtient les formules suivantes pour le changement de θ en θ' :

$$(5-16) \quad \begin{cases} H_n(i) = \sum_{j=1}^i c_j^i \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^i \left(1 - \frac{\theta'}{\theta}\right)^{i-j} H'_n(i) \\ H'_n(j) = \left(\frac{\theta}{\theta'}\right)^n \sum_{i=0}^{\infty} H_n(i+j) \frac{(\theta - \theta')^i}{n!} e^{-(\theta - \theta')} \end{cases}$$

Notons enfin, pour terminer ce tour d'horizon consacré à la loi de Poisson, que la log-légalité est vérifiée dans ce modèle, tout comme dans le modèle binomial. Cela résulte immédiatement du développement (5-6) de la fonction puissance, ou, plus simplement encore, de l'expression (5-12) de la fonction génératrice conditionnelle de X' à $X = i$ fixé : en changeant les notations, cela donne :

$$\frac{E[a^{X'}/X]}{E(a^{X'})} = \frac{b^X}{E(b^X)}$$

avec $b = 1 - (1-a) \rho \sqrt{\frac{\theta'}{\theta}}$.

VI - MODELES A LOI BINOMIALE NEGATIVE.

La loi binomiale négative à une variable est une loi concentrée sur les entiers ≥ 0 avec

$$(6-1) \quad W_i = q^v \frac{\Gamma(v+i)}{\Gamma(v)} \frac{p^i}{i!} = q^v \frac{(v+i-1)(v+i-2)\dots(v+1)v}{i!} p^i$$

et admet la fonction génératrice

$$(6-1') \quad \sum_{i \geq 0} W_i s^i = \left(\frac{q}{1-ps} \right)^v$$

Elle dépend de deux paramètres : p (compris entre 0 et 1, on a posé comme d'habitude $q = 1-p$) et v qui est un réel > 0 quelconque. Le cas $v=1$ correspond à la loi géométrique $W_i = q p^i$, ou loi de Pascal, qui est la version discrétisée de la loi exponentielle. D'une manière générale, la loi binomiale négative se présente comme une version discrétisée de la loi gamma de paramètre $\alpha = v$. On sait qu'on peut l'obtenir à partir d'une loi de Poisson d'espérance θ , en remplaçant θ par une variable de loi gamma (avec $\alpha = v$ et un paramètre d'échelle b défini par $p = 1/(1+b)$). Si v tend vers l'infini avec $p v = \theta$, on retrouve la loi de Poisson.

Il existe plusieurs manières d'introduire la loi binomiale négative à deux variables et les facteurs que nous avons en vue. Pour aller droit au but, nous poserons par définition, par analogie avec (1-3) et (6-1) :

$$(6-2) \quad \sum_i W_i H_n(i) s^i = \frac{q^\nu (1-s)^n}{(1-ps)^{n+\nu}}$$

les W_i étant évidemment définis par les relations (6-1). En utilisant la même routine de calcul que dans les cas précédents, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} p^n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_i W_i H_n(i) s^i &= \left(\frac{q}{1 - \lambda p - ps(1-\lambda)} \right)^\nu \\ &= \left(\frac{q}{1-\lambda p} \right)^\nu \sum_i \frac{\Gamma(\nu+i)}{\Gamma(\nu)} \frac{p^i s^i}{i!} \frac{(1-\lambda)^i}{(1-\lambda p)^i} \end{aligned}$$

D'où, par identification

$$(6-2') \quad \sum_n \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} \frac{p^n \lambda^n}{n!} H_n(i) = \frac{(1-\lambda)^i}{(1-\lambda p)^{\nu+i}}$$

Il est facile de voir que les H_n sont des polynomes (en i) orthogonaux. Des calculs très analogues à ceux qui ont été détaillés dans les cas binomiaux et poissonniens donnent ici :

$$(6-3) \quad \langle H_n H_m \rangle = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+n)} \frac{n!}{p^n} \delta_{nm}$$

Les polynomes normalisés seront donc les

$$(6-3') \quad \chi_n = \sqrt{\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}} \frac{p^n}{n!} H_n$$

Ici encore, on introduira les quantités $W_n(i)$, duales des H_n , définies par

$$(6-4) \quad W_n(i) = \frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{p^n}{n!} W_i H_n(i)$$

de sorte que les développements orthogonaux seront donnés par les

formules habituelles :

$$\begin{cases} f_i = \sum_n C_n H_n(i) \\ C_n = \sum_i f_i W_n(i) \end{cases}$$

Dans le cas de la fonction s^i , on trouve en particulier :

$$(6-5) \quad \left(\frac{1-ps}{q}\right)^v s^i = \sum_n \frac{\Gamma(n+v)}{\Gamma(v)} \frac{p^n}{n!} \left(\frac{1-s}{1-ps}\right)^n H_n(i)$$

formule qui n'est d'ailleurs qu'une variante de (6-2').

Venons-en maintenant aux relations de récurrence. Les relations en i , liées à l'expression du générateur infinitésimal, s'écrivent :

$$(6-6) \quad (v+i)p H_n(i+1) - [vp + i(1+p) - nq] H_n(i) + i H_n(i-1) = 0$$

Les relations en n se révèlent identiques aux précédentes, sous réserve d'échanger i et n . On trouve, en effet :

$$(6-7) \quad (v+n)p H_{n+1} - [vp + n(1+p) - iq] H_n + n H_{n-1} = 0$$

Pour les W_n , enfin, il vient :

$$(6-8) \quad (n+1)W_{n+1} - (vp + n(1+p) - iq) W_n + (v + n - 1)p W_{n-1} = 0$$

Les valeurs initiales à utiliser pour amorcer ces relations sont :

$$H_0(i) = H_n(0) = 1 \quad ; \quad W_0(i) = W_i$$

Il en résulte la relation de symétrie en n et i :

$$(6-9) \quad H_n(i) = H_i(n)$$

d'ailleurs évidente par simple inspection des deux relations (6-2) et (6-2').

Examinons maintenant les lois à deux variables. Nous souhaitons que les valeurs propres soient ρ^n . Si nous prenons comme lois marginales pour X et X' deux binomiales négatives quelconques, (v, p) et (v', p') respectivement, nous trouvons une expression de la forme

$$P_{iJ} = W_i W_J' \sum_n \rho^n \chi_n(i) \chi_n'(j)$$

ce qui donnera, en fonction des polynomes non normalisés :

$$P_{ij} = W_i W_J' \sum_n \frac{\rho^n}{n!} \sqrt{\frac{\Gamma(v+n) \Gamma(v'+n')}{\Gamma(v) \Gamma(v')}} \frac{p^n p'^n}{n!} H_n(i) H_n'(j)$$

C'est seulement dans le cas $v = v'$ que l'on parvient à des expressions traitables. Limitons-nous donc au cas :

$$v = v' \text{ mais } p \neq p' \text{ en général.}$$

Il vient alors :

$$(6-10) \quad P_{ij} = W_i W_J' \sum_n \rho^n \frac{\Gamma(n+v)}{\Gamma(v)} \frac{\sqrt{p^n p'^n}}{n!} H_n(i) H_n'(j)$$

Formons alors l'expression :

$$G_i(s') = \frac{1}{W_i} \sum_j P_{ij} s'^j$$

En utilisant la relation de définition (6-2), il vient :

$$G_i(s') = \sum_n \rho^n \frac{\Gamma(n+v)}{\Gamma(v)} \frac{\sqrt{p^n p'^n}}{n!} \frac{q'^v (1-s')^n}{(1-p's')^{n+v}} H_n(i)$$

Appliquant ensuite la relation duale (6-2'), avec

$$\lambda = \rho \sqrt{\frac{p'}{p}} \frac{1-s'}{1-p's'}$$

on trouve

$$(6-11) \quad (G_i(s')) = \left(\frac{q'}{1-\rho \sqrt{pp'} - s'(p' - \rho \sqrt{pp'})} \right)^v \left(\frac{1-p's' - \rho \sqrt{\frac{p'}{p}} (1-s')}{1-p's' - \rho \sqrt{pp'} (1-s')} \right)^i$$

Le premier facteur du second membre est facile à interpréter : pourvu que ρ (supposé ≥ 0) soit inférieur à $\sqrt{\frac{p'}{p}}$, il représente une loi binomiale négative. Il est moins facile de voir que le second facteur est lui aussi une fonction génératrice. On le voit pourtant en écrivant :

$$\frac{1-p's' - \rho \sqrt{\frac{p'}{p}}(1-s')}{1-p's' - \rho \sqrt{pp'}(1-s')} = \frac{1-\rho \sqrt{\frac{p'}{p}}}{1-\rho \sqrt{pp'}} + \frac{\rho qq' \sqrt{\frac{p'}{p}} s'}{(1-\rho \sqrt{pp'})[1-\rho \sqrt{pp'}-s'(p'-\rho \sqrt{pp'})]}$$

Cette expression est bien une fonction génératrice, et le reste lorsqu'on l'élève à la puissance i . Au total, donc, sous les conditions :

$$\rho \geq 0 \quad , \quad \rho \leq \sqrt{\frac{p'}{p}} \quad , \quad \rho \leq \sqrt{\frac{p}{p'}}$$

(6-10) est effectivement une loi de probabilité.

Le cas limite $\rho = \sqrt{\frac{p'}{p}}$ (avec $p' \leq p$) se révèle plein d'intérêt : ici encore, il correspond au cas où l'une des variables est dominée par l'autre, soit $X' \leq X$ p.s. De fait, la composante hypergéométrique disparaît dans (6-11), et il reste :

$$G_i(s') = \left(\frac{p-p'}{q'p} + \frac{p'q}{pq'} s' \right)^i$$

Ainsi, dans le cas où $X' \leq X$ p.s., à $X = i$ fixé, X' est binomiale $(i, \frac{p'q}{p})$. Toujours dans le cas $\rho = \sqrt{\frac{p'}{p}}$, cherchons, inversement, la loi de X à $X' = j$ fixé. Il suffit d'échanger les rôles de p et p' dans (6-2) avant de faire $\rho = \sqrt{\frac{p'}{p}}$ pour obtenir la fonction génératrice conditionnelle de X à $X' = J$ fixé. On trouve

$$G_J(s) = \left(\frac{q/q'}{1-s (\frac{p-p'}{q'})} \right)^{v+j} s^j$$

Ainsi, dans le cas dominé, X à $X' = J$ fixé est égale à j plus une binomiale négative $(v + j, \frac{p-p'}{q})$.

Conséquence pour l'effet Zéro. Dans le cas dominé ($X' \leq X$ p.s.), les probabilités d'avoir $X' = 0$ ou $X = 0$ sont respectivement :

$$\omega'_0 = q'^{\nu}, \quad \omega_0 = q^{\nu}$$

Par ailleurs, on a $\rho = \sqrt{\frac{p'}{p}}$, donc $q = 1 - \frac{p'}{\rho^2}$. Ainsi, la relation entre ω_0 et ω'_0 est :

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{1 - \omega'_0{}^{1/\nu}}{\rho^2} \right)^{\nu}$$

Lorsque ν est grand, on retrouve évidemment la loi $\omega_0 = \omega'_0{}^{1/\rho^2}$. Mais, si ν est relativement petit, cette loi prend un aspect assez différent. Par exemple, pour $\nu = 1$ (cas de la loi géométrique, ou loi de Pascal), on trouve

$$\omega_0 = \frac{\omega'_0 - (1 - \rho^2)}{\rho^2}$$

ce qui impose la condition $\rho^2 \geq 1 - \omega'_0$. D'une manière générale, on trouve, pour ν quelconque :

$$\rho^2 \geq 1 - \omega'_0{}^{1/\nu}$$

C'est donc seulement dans le cas $\nu = \infty$, i.e. dans le cas poissonien, que toutes les valeurs de $\rho \geq 0$ sont autorisées. En pratique, cela entraîne d'assez sérieuses limitations dans la mise en oeuvre de ce modèle.

Revenons maintenant au cas général. A partir de (6-11), on forme sans difficulté l'expression de la fonction génératrice des deux variables X et X' :

$$G(s, s') = \sum P_{iJ} s^i s'^J = \sum W_i G_i(s') s^i$$

et il vient :

$$G(s, s') = \left(\frac{qq'}{(1-ps)(1-p's') - \rho \sqrt{pp'} (1-s)(1-s')} \right)^{\nu}$$

les facteurs normalisés χ_n et χ'_n vérifient ici encore les relations :

$$\begin{cases} E(\chi_n(X)/X' = J) = \rho^n \chi_n'(J) \\ E(\chi_n'(X')/X = i) = \rho^n \chi_n(i) \end{cases}$$

Avec les polynomes non normalisés H_n, H_n' , ces relations doivent être remplacées par :

$$(6-12) \quad \begin{cases} E[H_n(X)/X' = J] = \rho^n \sqrt{\frac{p'^n}{p^n}} H_n'(J) \\ E[H_n'(X')/X = i] = \rho^n \sqrt{\frac{p^n}{p'^n}} H_n(i) \end{cases}$$

En particulier, dans le cas où X' est dominée par X , soit $\rho = \sqrt{\frac{p'}{p}}$, ces relations deviennent :

$$\begin{cases} E[H_n(X)/X' = J] = \frac{p'^n}{p^n} H_n'(j) \\ E[H_n'(X')/X = i] = H_n(i) \end{cases}$$

Si, maintenant, nous tenons compte de la forme trouvée pour la loi de X à X' fixé, et inversement, nous obtenons les formules de transformation de p en p' et réciproquement (v reste fixe)

$$\begin{cases} H_n(i) = \sum_{j=0}^i c_i^j \left(\frac{p'q}{q'p}\right)^j \left(1 - \frac{p'q}{q'p}\right)^{i-j} H_n'(j) \\ H_n'(j) = \frac{p^n}{p'^n} \left(1 - \frac{p-p'}{q}\right)^v \sum_i \frac{\Gamma(n+v+j)}{\Gamma(v)} \left(\frac{p-p'}{q}\right)^i \frac{1}{i!} H_n(i+J) \end{cases}$$

Dernière remarque : D'après l'expression (6-11) de la fonction génératrice conditionnelle, on voit que le modèle à loi binomiale négative, tout comme les deux précédents, garantit la permanence de la log-légalité. Outre les trois modèles précédents, à lois discrètes (binomiale, Poisson et binomiale négative), nous connaissons deux modèles à lois continues (loi de Gauss et loi gamma) qui possèdent cette propriété. La question reste ouverte de savoir s'il en existe d'autres.

Conclusion provisoire. De ces différents modèles, les plus immédiatement utilisables sont les modèles binomiaux. Pour $p = 1/2$ et $N = 20$, ils ne doivent guère différer des modèles hermitiens, tout en éliminant certaines causes d'erreurs numériques. Pour p très petit (Np de l'ordre de quelques unités au plus), ils doivent être sensiblement équivalents au modèle poissonien, et donc permettre le traitement de l'effet 0, tout en conservant l'avantage numérique rappelé à l'instant. Des essais préliminaires tendent d'ailleurs à montrer que, sauf pour θ petit devant l'unité, les développements en polynômes poissoniens ne convergent pas très vite, de sorte que cet avantage numérique serait assez décisif. Il resterait à investiguer les possibilités du modèle binomial négatif auquel aucun analogue ne correspond dans notre pratique actuelle.