Fontainebleau/CGMM N-667

# SPLINES ET KRIGEAGE : LEUR EQUIVALENCE FORMELLE

G. MATHERON

Septembre 1980

## SPLINES ET KRIGEAGE : LEUR EQUIVALENCE FORMELLE

Par G. MATHERON

### TABLE DES MATIERES

# SPLINES ET KRIGEAGE : LEUR EQUIVALENCE FORMELLE

Ce qui suit constitue la démonstration de l'équivalence formelle des deux méthodes d'interpolation par splines et par krigeage : tout ajustement de fonctions splines s'identifie à un krigeage considéré comme interpolateur, et réciproquement. Cependant le premier problème (trouver le krigeage équivalent lorsque l'on connait l'opérateur définissant les splines) est relativement facile à résoudre, tandis que le second soulève de plus grosses difficultés. Pour faciliter la compréhension, j'expose d'abord la question avec les les notations indicielles explicites traditionnelles dans les problèmes de krigeage, et je recommence ensuite le même exposé dans le langage algébrique plus abstrait utilisé en théorie des splines.

## 1 - DEFINITION DU PROBLEME DES SPLINES.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "L"'] & \mathfrak{F}' \\ \mathbb{R}^p & \end{tikzcd}$$

On se donne deux espaces de Hilbert $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}'$ (en pratique : ce sont des espaces de fonctions) et une application linéaire A continue et surjective de $\mathfrak{F}$ sur $\mathfrak{F}'$.

On se donne également une application linéaire continue L de $\mathfrak{F}$ dans $\mathbb{R}^p$ : en pratique L est une famille de N formes linéaires continues sur $\mathfrak{F}$, soit $(L_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Le problème classique d'ajustement de fonctions splines est alors le suivant :

~ trouver une fonction $f \in \mathfrak{F}$ minimisant $\|Af\|^2$ sous la condition $L_\alpha(f) = f_\alpha$ donnés -

Si N est le noyau de A et $N_L$ celui de L, et si l'on suppose :

(1-1) $$N \cap N_L = 0$$

on sait que ce problème admet une solution unique. Je me propose de montrer que cette solution est identique à l'interpolateur associé à un krigeage convenablement choisi.

Pour faciliter l'exposé, je vais d'abord munir $\mathfrak{F}$ d'une nouvelle norme équivalente à la norme initiale. Si $N^{\perp}$ est l'orthogonal dans $\mathfrak{F}$ du noyau N de A, la restriction de A à $N^{\perp}$ est une application bijective et continue de $N^{\perp}$ sur $\mathfrak{F}'$. D'après la théorie générale des espaces de Hilbert, l'application inverse (de $\mathfrak{F}'$ sur $N^{\perp}$) est également continue, de sorte qu'il s'agit d'un homéomorphisme.

Par conséquent, si nous munissons $\mathfrak{F}$ de la norme $\| \ \|_1$ définie en posant pour tout $f \in \mathfrak{F}$ :

$$\|f\|_1^2 = \|\Pi_N \, f\|^2 + \|A \, \Pi_{N^{\perp}} \, f\|^2$$

($\Pi_N$ et $\Pi_{N^{\perp}}$ désignant les projecteurs de N et $N^{\perp}$ dans $\mathfrak{F}$ pour la norme initiale), nous ne changeons pas la topologie de $\mathfrak{F}$, et, en particulier, les applications A et L restent continues, les sous-espaces N et $N^{\perp}$ ne sont pas modifiés, ni leurs projecteurs).

Avec cette nouvelle métrique, $\mathfrak{F}'$ s'identifie à $N^{\perp}$, et l'opérateur A avec le projecteur de $N^{\perp}$.

Oubliant la métrique initiale, nous n'utiliserons plus que la métrique $\|f\|_1$ , que nous désignerons simplement par $\|f\|$ (en n'écrivant pas l'indice 1).

De leur côté, les formes linéaires <u>continues</u> $L_\alpha$ s'identifient à des fonctions de $\mathfrak{F}$ que nous désignerons encore par $L_\alpha$ , selon la relation

$$(1\text{-}2) \qquad L_\alpha(f) = \langle L_\alpha , f \rangle \qquad \forall \, f \in \mathfrak{F}$$

Dans ce qui suit, <u>S</u> désignera le sous-espace de $\mathfrak{F}$ de dimension $p < \infty$ engendré par les $L_\alpha$ .

Plus généralement, à tout x appartenant à un espace E nous associerons une forme linéaire continue, c'est-à-dire un élément $L_x \in \mathfrak{F}$ , et nous supposerons que les $L_x$ forment une partie totale dans $\mathfrak{F}$ : en pratique, $\mathfrak{F}$ sera un espace de fonctions sur E, et les $L_x$ , $x \in E$ seront définies par :

$$(1\text{-}3) \qquad f(x) = \langle L_x , f \rangle \qquad (f \in \mathfrak{F})$$

Les $L_\alpha$ sont dans ce cas les formes $L_{x_\alpha}$ associées aux "points expérimentaux" $x_\alpha$ . (Noter que la métrique sur $\mathfrak{F}$ doit être assez forte pour que la convergence $f_n \to f$ dans $\mathfrak{F}$ entraine la convergence ponctuelle $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$, plus forte donc que celle d'un espace $L^2$ sur E).

Avec ces réarrangements, le problème initial prend maintenant la forme suivante :

~ Trouver $f \in \mathfrak{F}$ minimisant $\| \Pi_{N^\perp} f \|$ sous la condition $\Pi_S f = f_S$ donné (ou, ce qui revient au même, $\langle L_\alpha f \rangle = f_\alpha$ donnés).

## 2 - EQUATIONS DU PROBLEME DES SPLINES.

Le noyau $N_L$ de l'application $L = (L_\alpha)$ n'est autre que l'orthogonal $S^\perp$ dans $\mathfrak{F}$ de l'espace S engendré par les $L_\alpha \in \mathfrak{F}$. La condition $N \cap N_L = 0$ s'écrit donc ici :

$$(2\text{-}1) \qquad N \cap S^\perp = 0$$

Ainsi, pour tout $f \in N$, la relation $\Pi_S f = 0$ entraine $f = 0$. Autrement dit, la restriction de $\Pi_S$ à N est une injection de N dans S. Comme S est de dimension finie, il en est donc de même du noyau N, et de plus :

$$\boxed{\text{Dim } N \leq \text{Dim } S}$$

Soit donc $(f^\ell)$ une base du noyau N ( $\ell = 1,2,\dots,k \leq \text{Dim } S$), et $L_\alpha$ la base donnée de S. Pour tout x on a

$$f^\ell(x) = \langle L_x f^\ell \rangle$$

et, en particulier

$$f_\alpha^\ell \equiv f^\ell(x_\alpha) = < L_\alpha f^\ell >$$

Analytiquement, la condition (2-1) s'écrit :

(2-1') $$C_\ell f_\alpha^\ell = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,k) \Rightarrow C_\ell = 0$$

(en effet, $N \cap S^\perp$ est constitué des fonctions de la forme $C_\ell f^\ell$ vérifiant cette condition). On reconnait la condition habituelle en théorie du krigeage (indépendance linéaire des fonctions de base sur l'ensemble des points expérimentaux).

Cherchons maintenant la solution du problème posé (minimiser $\|\Pi_{N^\perp} f\|$ sous $< L_\alpha f > = f_\alpha$ donnés). On doit écrire que $\Pi_{N^\perp} f$ est orthogonal à tout $g \in \mathfrak{F}$ tel que $< g\ L_\alpha > = 0$. Désignons par $B^{\alpha\beta}$ la matrice inverse de $< L_\alpha\ L_\beta >$. Pour tout $g \in \mathfrak{F}$, l'élément

$$g - < g\ L_\beta > B^{\alpha\beta}\ L_\alpha$$

est orthogonal à S. En écrivant que $\Pi_{N^\perp} f$ est orthogonal à cet élement, on trouve

$$< \Pi_{N^\perp} f, g > = B^{\alpha\beta} < \Pi_{N^\perp} f, L_\alpha > < g\ L_\beta >$$

pour tout $g \in \mathfrak{F}$ , et par suite :

$$\Pi_{N^\perp} f = B^{\alpha\beta} < \Pi_{N^\perp} f, L_\alpha > L_\beta$$

Ainsi, $\Pi_{N^\perp} f$ doit être de la forme $b^\alpha L_\alpha$ , avec des coefficients $b^\alpha$ vérifiant

(2-2) $$b^\alpha < L_\alpha f^\ell > = 0$$

(puisque $\Pi_{N^\perp} f$ est orthogonal à N). La fonction f elle-même, somme de $\Pi_{N^\perp} f$ et d'un élément de N sera de la forme :

$$f = b^\alpha L_\alpha + C_\ell f^\ell$$

Outre la condition (2-2), les coefficients $b^\alpha$ et $C_\ell$ devront vérifier la condition

$$< f, L_\alpha > = f_\alpha$$

D'où le système suivant (où on a posé $f_\alpha^\ell = < L_\alpha f^\ell >$)

$$(2\text{-}3) \qquad \begin{cases} f = b^\alpha L_\alpha + C_\ell f^\ell \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \\ < f, L_\alpha > = f_\alpha \end{cases}$$

La valeur en $x \in E$ de la fonction f est $f(x) = < f\ L_x >$. On a donc

$$(2\text{-}4) \qquad \begin{cases} f(x) = b^\alpha < L_\alpha L_x > + C_\ell f^\ell(x) \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \\ f(x_\alpha) = f_\alpha \end{cases}$$

On reconnait là les relations qui caractérisent <u>le krigeage considéré comme un interpolateur</u>. De fait, posons

$$\sigma(x,y) = < L_x L_y > \qquad (x,y) \in E$$

$\sigma(x,y)$ est une covariance, et il existe une FA $Z(x)$ sur l'espace E vérifiant

$$< Z_x Z_y > = \sigma(x,y)$$

Désignons par $Z^*(x)$ le krigeage (universel) de $Z(x)$ à partir des $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ en présence d'une dérive $m(x) = a_\ell f^\ell(x)$. Considéré en tant qu'interpolateur, c'est-à-dire comme une fonction $z^*(x)$ (lorsque $Z_\alpha = z_\alpha$) le krigeage est caractérisé par les conditions :

$$(2\text{-}4') \qquad \begin{cases} z^*(x) = b^\alpha \sigma_{\alpha x} + C_\ell f^\ell(x) \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \\ z^*(x_\alpha) = z_\alpha \end{cases}$$

Donc, pour $z_\alpha = f_\alpha$ , ce système est identique à (2-4). Comme (2-4') suffit pour déterminer $z^*$, de même (2-4) caractérise f, et on a :

$$z^* = f$$

On a ainsi montré que tout problème de spline se ramène à un krigeage.

## 3 - RECIPROQUE.

Soit maintenant une FA $Z_x$, $x \in E$ engendrant un espace H, et $\sigma(x,y) = < Z_x, Z_y >$ . Posons-nous le problème du krigeage de $Z_x$ à partir des $Z_\alpha = x_\alpha$ en présence de dérives $a_\ell f^\ell(x)$.

Pour ramener ce problème à un problème de spline, il faut trouver des $Y^\ell \in H$ tels que :

$$(3\text{-}1) \qquad f^\ell(x) = < Y^\ell Z_x > \qquad (x \in E)$$

On rencontre ici une légère difficulté, car ces éléments $Y^\ell$ peuvent ne pas exister dans notre espace H initial (par exemple si Z(x) est stationnaire, les fonctions de la forme $x \to < Y Z_x >$ sont bornées, puisque $|< Y Z_x >| \leq \|Y\| \times \|Z_x\| = C^{ste}$).

Etant donnée une fonction f, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un $Y_f \in H$ tel que pour tout $x \in E$ on ait

$$f(x) = < Y_f Z(x) >$$

est que l'on puisse trouver $B < \infty$ tel que :

$$(3\text{-}2) \qquad (\sum \lambda_i f(x_i))^2 \leq B \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \sigma(x_i x_j)$$

pour toute combinaison linéaire finie.

Nous allons donc modifier notre FA $Z_x$ de départ, et donc l'espace H qu'elle engendre, de manière à ce que cette condition soit effectivement remplie. On sait qu'on ne modifie pas un problème de krigeage (c'est-à-dire les poids $\lambda^\alpha$ que le krigeage attribue aux $Z_\alpha$) en remplaçant $Z(x)$ par $\tilde{Z}(x) = Z(x) + B_\ell f^\ell(x)$ où les $B_\ell$ sont des VA quelconques. Prenons, par exemple, des $B_\ell$ linéairement indépendantes et orthogonales à $Z(x)$. Alors, la covariance de la nouvelle FA $\tilde{Z}(x)$ est :

$$\tilde{\sigma}(x,y) = \sigma(x,y) + K_{\ell s} f_x^\ell f_y^s$$

où $K_{\ell s} = < B_\ell , B_s >$ est une matrice définie positive strictement. Comme on a :

$$(\sum_i \lambda^i f^\ell(x_i))^2 \leq \sum_s (\sum_i \lambda^i f^s(x_i))^2 = \sum_{i,j} \lambda^i \lambda^j \delta_{\ell s} f_{x_i}^\ell f_{x_j}^s$$

$$\leq \frac{1}{a} \sum_{i,j} \lambda^i \lambda^j K_{\ell s} f_{x_i}^\ell f_{x_j}^s$$

(où a est la plus petite valeur propre de $K_{\ell s}$) la condition (3-2) est a fortiori remplie pour $\tilde{\sigma}(x,y)$.

Dans ce qui suit, donc, nous supposerons (3-2) vérifiée, et nous écrirons $Z(x)$, $\sigma(x,y)$ au lieu de $\tilde{Z}(x)$ et $\tilde{\sigma}(x,y)$.

Soit donc $Y^\ell \in H$ les éléments vérifiant (3-1). Nous allons maintenant construire un espace de Hilbert $\mathfrak{F}$ de fonctions, isomorphe à H et contenant les fonctions $f^\ell$.

Pour celà, à tout $Y \in H$ associons la fonction $f_Y$ définie par

$$f_Y(x) = < Y , Z_x >$$

et posons par définition

$$\|f_Y\| = \|Y\| \tag{3-3}$$

Il est clair que l'espace $\mathfrak{F}$ ainsi construit répond à la question. Il suffit alors d'appliquer à cet espace $\mathfrak{F}$ les résultats antérieurs pour constater que le problème des splines dans $\mathfrak{F}$ s'identifie à celui du krigeage dans H : les $L_\alpha \in \mathfrak{F}$ sont les fonctions définies par

$$L_\alpha(x) = < Z_\alpha , Z_x > = \sigma_{\alpha x}$$

et, plus généralement

$$L_x(y) = < Z_x , Z_y > = \sigma_{xy}$$

Remarque - Si $N = 0$ (c'est-à-dire si l'application $A : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ du schéma initial est bijective et continue, donc bicontinue), on retombe évidemment sur le problème du krigeage simple. Ainsi : l'élément $f$ minimisant $\|f\|^2$ sous $< f, L_\alpha > = f_\alpha$ est évidemment l'élément de $S$ vérifiant cette condition, c'est-à-dire

$$f = B^{\alpha\beta} f_\alpha L_\beta$$

En particulier, pour tout $x \in E$ :

$$f(x) = B^{\alpha\beta} f_\alpha < L_\beta L_x >$$

On reconnait immédiatement l'expression du krigeage simple considéré comme interpolateur.

## 4 - POINT DE VUE ALGEBRIQUE.

Les espaces $H$ et $\mathfrak{F}$ étant isomorphes, il est indifférent de travailler sur les fonctions $f$ ou sur les VA de $H$. L'isomorphisme

$$\Phi : H \to \mathfrak{F}$$

est défini comme ci-dessous:

$$(4\text{-}1) \qquad \begin{cases} \Phi_Y(x) = < Y, Z_x > & (Y \in H , x \in E) \\ \|\Phi_Y\| = \|Y\| \end{cases}$$

Travaillons, par exemple, dans $H$ : $N$ est l'espace engendré par les $Y^\ell$, $S$ l'espace engendré par les $Z_\alpha$. Nous poserons

$$(4\text{-}2) \qquad \begin{cases} V_0 = S \cap N^\perp \\ N^* = V_0^\perp \cap S = \Pi_S N \end{cases}$$

$V_o$ est l'espace des combinaisons linéaires $\lambda^\alpha Z_\alpha$ autorisées, i.e. vérifiant $\lambda^\alpha f^\ell_\alpha = 0$ ; N*, projection dans S de l'espace N engendré par les $Y^{\ell\alpha}$, est l'espace engendré par les estimateurs optimaux $A_\ell$ de la dérive. La décomposition de S en somme directe

$$S = V_o \oplus N^* \tag{4-3}$$

exprime simplement que tout $\lambda^\alpha Z_\alpha \in S$ est somme de deux termes orthogonaux : une dérive $\lambda^\alpha A_\ell f^\ell_\alpha$, qui est dans N*, et un résidu $\lambda^\alpha (Z_\alpha - A_\ell f^\ell_\alpha)$, qui est dans $V_o$.

A côté de S, introduisons également l'espace S' défini comme la somme directe des deux sous-espaces orthogonaux N et $V_o$ :

$$S' = V_o \oplus N \tag{4-3'}$$

Comme nous le verrons, <u>la dualité entre krigeage et splines se manifeste simplement par l'échange de N et N*, ainsi que de S et S', $V_o$ restant invariante</u>.

<u>Les Opérateurs Λ et Λ*.</u>

Désignons par R la restriction à $S' = V_o \oplus N$ du projecteur $\Pi_S$ de l'espace S, considéré comme application de S' dans S. Son adjoint R* est évidemment la restriction à $S = V_o \oplus N^*$ du projecteur $\Pi_{S'}$ de S'. Montrons que ces opérateurs admettent des inverses, en raisonnant par exemple dans le cas de R. Tout Y dans S' est somme d'un élément de $V_o$ et d'un élément de N :

$$Y = \Pi_{V_o} Y + \Pi_N Y$$

R laisse invariant le premier de ces éléments ($R\, \Pi_{V_o} Y = \Pi_S\, \Pi_{V_o} Y =$ $= \Pi_{V_o} Y$, puisque cet élément est déjà dans S). En ce qui concerne le second :

$$R\, \Pi_N Y = \Pi_S\, \Pi_N Y$$

il est dans $\Pi_S N = N^*$, donc est orthogonal au premier. Ainsi

$R\,Y = 0$ entraine $\Pi_{V_o} Y = 0$ et $\Pi_S\,\Pi_N\,Y = 0$. La première relation ($\Pi_{V_o} Y = 0$) signifie $Y \in N$ (puisque $Y$ est dans $S' = V_o \oplus N$), et la seconde s'écrit alors $\Pi_S\,Y = 0$. Mais (sous notre hypothèse habituelle $N \cap S^{\perp} = 0$) $Y \in N$ et $\Pi_S\,Y = 0$ entrainent $Y = 0$ : $R$ est donc injectif. De plus, comme on l'a vu, l'espace image est somme directe :

$$R\,S' = \Pi_S\,S' = V_o \oplus \Pi_S\,N = V_o \oplus N^*$$

Donc $R\,S' = S$ : $R$ est surjectif.

Ainsi $R$ est bijectif. Soit donc $\Lambda_o^*$ son inverse : par dualité, $R^*$ est bijectif et admet un inverse, dual de $\Lambda_o^*$ , que nous noterons $\Lambda_o$ .

Nous allons voir que <u>$\Lambda_o$ est l'opérateur associé au krigeage</u>, <u>et $\Lambda_o^*$ l'opérateur associé à l'interpolation</u>.

<u>Caractérisation de $\Lambda$ et $\Lambda^*$</u>.

$\Lambda_o$ applique $S'$ sur $S$, et pour tout $Z' \in S'$, $\Lambda_o\,Z' = Z$ est l'unique élément $Z \in S$ admettant $Z'$ comme projection sur $S'$.
De même, $\Lambda_o^*\,Z$ pour $Z \in S$ est l'unique $Z' \in S'$ tel que $\Pi_S\,Z' = Z$.

Nous prolongerons $\Lambda_o$ et $\Lambda_o^*$ sur $H$ entier en posant

$$\Lambda = \Lambda_o\,\Pi_{S'} \qquad \Lambda^* = \Lambda_o^*\,\Pi_S$$

Ainsi :

> Pour tout $Z \in H$, $\Lambda\,Z$ est l'unique élément de $S$ admettant même projection que $Z$ sur $S'$.
> De même $\Lambda^*\,Z$ est l'unique élément de $S'$ admettant même projection que $Z$ sur $S$.

(Noter que $\Lambda = \Pi_S\,\Lambda_o\,\Pi_{S'}$ a pour adjoint $\Pi_{S'}\,\Lambda_o^*\,\Pi_S = \Lambda_o^*\,\Pi_S$ , c'est-à-dire justement l'opérateur que nous avons noté $\Lambda^*$).

Dans ces conditions, pour tout $Z \in H$ , <u>$\Lambda\,Z$ est le krigeage de $Z$</u> (par les $Z_\alpha$, en présence d'une dérive appartenant à $\Phi(N)$, où $\Phi$ est l'isomorphisme $H \to \mathfrak{Z}$).

En effet, soit $Z^*$ le krigeage de $Z$, c'est-à-dire l'élément unique dans $S$ minimisant $\|Z-Z^*\|$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} Z^* \in S \\ < Z-Z^* \, , \, Y > = 0 \qquad \forall \, Y \in N \end{cases}$$

Cet élément $Z^*$ est caractérisé par la condition supplémentaire : $Z - Z^*$ doit appartenir à l'orthogonal de $S \cap N^{\perp} = V_o$. Compte tenu de la condition $< Z - Z^*, Y > = 0$ pour $Y \in N$, on voit que $Z^*$ est caractérisé par les deux conditions

$$\begin{cases} Z^* \in S \\ < Z-Z^*, Y > = 0 \qquad \forall \, Y \in N \oplus V_o = S' \end{cases}$$

Or $\Lambda \, Z$ vérifie ces conditions. Tout d'abord, en effet, on a $\Lambda \, Z \in S$ par construction. Si maintenant $Y \in S'$, on trouve

$$< \Pi_{S'}(Z - \Lambda \, Z), \, Y > = < Z - \Lambda \, Z \, , \, Y >$$

Mais, d'après la définition de $\Lambda$, $\Pi_{S'} \, \Lambda \, Z = \Pi_{S'} \, Z$. On a donc bien

$$< Z - \Lambda \, Z, \, Y > = 0$$

Passons au problème dual, et montrons que <u>$\Lambda^*$ est l'opérateur associé à l'interpolation</u>. Pour rester dans $H$, nous utilisons l'isomorphisme $\mathfrak{Z} \to H$, et <u>le problème des splines est le suivant</u> :

~ Trouver $Y \in H$ minimisant $\|\Pi_{N^{\perp}} Y\|$ sous les conditions :

$$< Y \, Z_\alpha > = f_\alpha$$

Désignons par $Y_f$ un élément quelconque vérifiant cette condition : par exemple l'élément de norme minimale

$$Y_f = B^{\alpha\beta} \, f_\alpha \, Z_\alpha$$

($B^{\alpha\beta}$ est la matrice inverse de $\sigma_{\alpha\beta}$).

Notre élément $Y$ inconnu doit avoir même projection sur $S$ que

$Y_f$, et $\Pi_{N^\perp} Y$ doit être orthogonal à $S^\perp$, donc appartenir à $S \cap N^\perp = V_o$. Ainsi $Y \in V_o \oplus N = S'$. C'est donc l'unique élement de $S'$ admettant sur $S$ la même projection que $Y_f$, c'est-à-dire $\Lambda^* Y_f$.

En termes fonctionnels : la fonction $f^* \in \mathfrak{F}$ interpolant les $f_\alpha = < Y_f \; Z_\alpha >$ et de norme minimale est donc l'image de cet élément par l'isomorphisme $\Phi$, soit

$$f^* = \Phi(\Lambda^* Y_f)$$

La valeur en x de $f^*$ est $f^*(x) = < f^* \; \Phi(Z_x) >$, donc, compte tenu de notre isomorphisme

$$f^*(x) = < \Lambda^* Y_f \; , Z_x > \tag{4-4}$$

Mais $\Lambda^*$ est le dual de $\Lambda$ : on a donc aussi bien :

$$f^*(x) = < Y_f \; , \; \Lambda \; Z_x > \tag{4-4'}$$

Noter que $\Lambda \; Z_x$ est un élément de S, de la forme $\lambda^\alpha(x) \; Z_\alpha$. On a donc bien $f^*(x) = \lambda^\alpha(x) < Y_f \; Z_\alpha > = \lambda^\alpha(x) \; f_\alpha$.

## 5 - ESTIMATION DE LA DERIVE.

Pour tout $Z \in H$, $\Pi_N Z$ représente la dérive de cet élément, et $\Lambda \; \Pi_N Z$ l'estimateur optimal de cette dérive. Posons donc

$$\boxed{D^* = \Lambda \; \Pi_N} \tag{5-1}$$

D'après la caractérisation de l'opérateur de krigeage $\Lambda$, $D^* Z \in N^*$ est l'unique élément de S admettant même projection sur S' que l'élément $\Pi_N Z$. Comme $\Pi_N Z$ est déjà dans $N \subset S' = N \oplus V_o$, on voit ainsi que :

$D^* Z$ est l'unique élément de $N^*$ dont la projection sur N soit égale à $\Pi_N Z$.

Quels sont les rapports entre les opérateurs $\Lambda$ et $D^*$ ? Notons d'abord les deux relations suivantes

(5-2) $$\Pi_{V_o} = \Lambda\,\Pi_{V_o} = (1-D^*)\,\Pi_S$$

La première relation exprime que $V_o$ est invariant par $\Lambda$. Plus précisément, on peut écrire :

$$\Lambda = \Lambda\,\Pi_{S'} = \Lambda\,(\Pi_{V_o} + \Pi_N) = \Pi_{V_o} + \Lambda\,\Pi_N$$

puisque S' est somme directe $V_o \oplus N$. Par suite, d'après (5-1) :

(5-3) $$\Lambda = \Pi_{V_o} + D^*$$

D'autre part, sur S, l'opérateur $D^*$ coincide avec $\Pi_{N^*}$ (en effet, si $Z \in S$, $\Pi_N\,Z$ est égal à la projection sur N de l'élément $\Pi_{N^*}\,Z$, d'où résulte $D^*Z = \Pi_{N^*}\,Z$ d'après le critère ci-dessus). On a donc

$$(I-D^*)\Pi_S = (I - \Pi_{N^*})\Pi_S = \Pi_{V_o} \quad .$$

c'est-à-dire la seconde relation (5-2). En portant cette expression de $\Pi_{V_o}$ dans (5-3), il vient :

(5-4) $$\boxed{\Lambda = (I-D^*)\,\Pi_S + D^*}$$

relation où l'on reconnait le classique théorème d'additivité. Que représente l'adjoint de $D^*$, c'est-à-dire l'opérateur

(5-1') $$D = \Pi_N\,\Lambda^*$$

On voit sans peine, par dualité, que D Z est l'unique élément de N dont la projection sur N* soit $\Pi_{N^*}\,Z$.

Il suffit de reprendre la démonstration précédente (en échangeant N et N*, ainsi que S et S') pour obtenir :

(5-4') $$\Lambda^* = \Pi_{V_o} + D = (I-D)\,\Pi_{S'} + D$$

Dans l'expression $\Lambda^* Y_f = Y_{f^*}$ de l'interpolateur, apparaissent donc deux termes : $D\, Y_f$ et $\Pi_{V_o}\, Y_f = (I-D)\, \Pi_{S'}\, Y_f$. Le premier est la composante de $Y_{f^*}$ dans N (i.e. le terme $C_\ell\, f^\ell$ de la formule (2-2)), et le second la composante de $Y_{f^*}$ dans $V_o$ (i.e. le terme $b^\alpha\, L_\alpha$ de la même formule, avec $b^\alpha\, f^\ell_\alpha = 0$).

## 6 - REMARQUES TERMINALES

Du point de vue formel, nous avons ainsi montré l'équivalence des problèmes de spline et de krigeage. En pratique, cependant, une dissymétrie profonde va se manifester. D'un côté, en effet, l'espace H associé à un espace $\mathfrak{F}$ donné muni de sa métrique est toujours un espace de VA engendré par une FA $Z_x$ muni d'une covariance $\sigma(x,y) = {} = \langle L_x\, L_y \rangle$ possédant des propriétés raisonnables. En sens inverse, l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ associé à une FA $Z_x$ donnée est en général, muni d'une métrique peu commode et peu naturelle. Une chose est sûre, en tous cas : si l'on se limite aux fonctions splines associées à des métriques définies par des opérateurs <u>différentiels</u>, il ne leur correspond qu'une classe très restreinte de fonctions aléatoires. Il sera exceptionnel que la métrique sur $\mathfrak{F}$ associée à une FA donnée puisse être définie à partir d'un opérateur différentiel. En pratique, donc, le krigeage fournit une méthode d'interpolation plus générale et plus puissante, dont toutes les splines usuelles ne constituent que des cas particuliers isolés.

A titre d'exemple, considérons un espace $\mathfrak{F}$ de fonctions sur $\mathbb{R}^n$, dans lequel agit un opérateur différentiel A possédant de bonnes propriétés de positivité. Je me limite ici au cas où A est le Laplacien itéré p fois :

$$A\, f = \Delta^p\, f$$

L'espace $\mathfrak{F}$ ne peut pas être l'espace $L^2$ (car A ne serait pas continu) , ni un sous-espace de celui-ci muni d'une norme plus forte du type

$$\|f\|^2 + \|A\, f\|^2$$

Dans ce dernier cas, l'application de $\mathfrak{F}$ dans $L^2$ ne serait pas surjective.

La technique ici consiste à partir du domaine $\mathcal{D}_A$ de l'opérateur A considéré comme opérateur sur $L^2$ (A est fermé, mais non continu). On remarque que le noyau de A dans $L^2$ est nul (l'équation $\Delta^p f = 0$ n'a pas de solution dans $L^2$, on le voit immédiatement par transformation de Fourier), de sorte que $\|A f\|$ est une norme sur $\mathcal{D}_A$ : on prendra pour $\mathfrak{F}$ la complétion hilbertienne de $\mathcal{D}_A$ pour cette norme $\|A f\|$, ce qui rend $\mathfrak{F}$ isomorphe à l'adhérence de $A\,\mathcal{D}_A$ dans $L^2$.

On peut alors identifier les éléments $f \in \mathfrak{F}$ à des (classes d'équivalence de) fonctions, qui ne sont pas, en général, dans $L^2$ : si $A = \Delta$, on prendra les fonctions f dont les accroissements d'ordre 2 sont dans $L^2$, et pour lesquelles $\Delta f$ existe au sens de $L^2$ ($\Delta f$ apparait comme la limite dans $L^2$ de suites $f_n = f * \lambda_n$ où les $\lambda_n$ sont des mesures filtrant les polynomes de degré $\leq 1$). Pour $A = \Delta^p$, $\mathfrak{F}$ sera constitué de fonctions f telles que $f * \lambda \in L^2$ pour tout $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$ (filtrant les polynomes de degré $\leq 2p-1$) et telles que $\Delta^p f$ existe au sens de limite dans $L^2$ de suites $f * \lambda_n$ $\lambda_n \in \Lambda_{2p-1}$ .

Pour la norme $\|A f\|$, ces (classes d'équivalence de) fonctions constituent un espace $\mathfrak{F}$ isomorphe à $L^2$. Comme la donnée de $A f = \Delta^p f$ permet de reconstituer $f * \lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$ , la fonction f se trouve en fait définie à un polynome près $C_\ell f^\ell(x)$ de degré $\leq 2p-1$. Tout comme en théorie des FAI-k, cette indétermination n'aura pas grande importance, pourvu qeulement que nous remplacions les fonctionnelles $L_x$ par des combinaisons $\sum \lambda^i L_{x_i} = L_\lambda$ avec $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$ (c'est-à-dire $L_\lambda(P) = 0$ pour tout polynome p de degré $\leq 2p-1$). On peut alors vérifier (par transformation de Fourier) la continuité de ces fonctionnelles, et leur associer des éléments $L_\lambda \in \mathfrak{F}$ bien définis. La suite se déroule comme ci-dessus : on choisira des $\lambda_\alpha \in \Lambda_{2p-1}$ , et l'élément $f \in \mathfrak{F}$ minimisant $\|A f\|^2$ sous les conditions $f(\lambda_\alpha) = f_\alpha$ donné pourra aussi bien être trouvé par krigeage dans l'espace isomorphe engendré par une FAI-(2p-1) $Z : \Lambda_{2p-1} \to H$ telle que

$$\|Z(\lambda)\| = \|A(L^\lambda)\| \qquad (\lambda \in \Lambda_{2p-1})$$

Par définition, l'élément $L_\lambda \in \mathcal{F}$ doit vérifier

$$< A\ L_\lambda\ ,\ A\ f > = \int \lambda(dx)\ f(x) \qquad f \in \mathcal{F}$$

La transformée de Fourier $\widetilde{AL}_\lambda$ de $AL_\lambda$ se déduit donc de celle de $\lambda$ (notée $\tilde{\lambda}$) par :

$$\widetilde{AL}_\lambda = (-1)^p \ \frac{(\tilde{\lambda})}{(4\ \pi^2 |u|^2)^p}$$

(elle existe, au sens de $L^2$, à cause de la condition $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$). La covariance généralisée K(h) de la FAI-(2p-1) Z(x) vérifie, de son côté, pour tout $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$

$$\int \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy) = \int (A\ L_\lambda)^2\ dx$$

En utilisant la mesure spectrale $\chi(du)/(4\ \pi^2\ |u|^2)^{2p}$ associée à K, ceci s'écrit encore (toujours avec $\lambda \in \Lambda_{2p-1}$) :

$$\int \frac{(\tilde{\lambda})^2}{(4\ \pi^2\ |u|^2)^{2p}}\ \chi(du) = \int \frac{(\tilde{\lambda})^2}{(4\ \pi^2\ |u|^2)^{2p}}\ du$$

La mesure $\chi$ étant sans atome en 0, on doit donc avoir $\chi(du) = du$, c'est-à-dire

$$\Delta^{2p}\ K(h) = \delta$$

Pour n = 2k+1 (espaces de dimension <u>impaire</u>) K(h) est donc (à u facteur près) $|h|^{4p-n}$ .

Pour n = 2k, on voit apparaitre les termes logarithmiques en $|h|^{4p-n} \log |h|$.

Par exemple, pour p = 1 (donc : norme $\int |\Delta\ f\ |^2\ dx$) on trouve

$$\begin{aligned} K(h) &\sim |h|^3 && \text{dans } \mathbb{R}^1 \\ &\sim |h|^2 \log |h| && \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ &\sim |h| && \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent d'ailleurs aussi se déduire directement des travaux de Duchon : le critère qu'il donne, dans le cas des splines minimisant $\int |\Delta\ f|^2\ dx$ dans $\mathbb{R}^1$ ou $\mathbb{R}^2$ s'identifie sans peine avec la caractérisation d'un krigeage intrinsèque effectué avec $K(h) = |h|^3$ ou $|h|^2 \log |h|$ respectivement.

## 7 - COKRIGEAGE ET SPLINES D'AJUSTEMENT.

Nous venons de voir que le calcul des splines d'interpolation équivaut à un krigeage. De la même façon, nous allons maintenant montrer que le problème des splines d'ajustement est équivalent à un cokrigeage d'un type très particulier (filtrage d'une erreur). La réciproque, cette fois, ne sera plus vraie, car en général, un cokrigeage ne se laisse pas ramener à une spline d'ajustement.

Le problème des splines d'ajustement est le suivant : avec les notations précédentes, on se donne un opérateur auto-adjoint $T$ strictement positif sur $S$ (c'est-à-dire : pour tout $f \in H$, la relation $< f, T \Pi_S f > = 0$ entraine $\Pi_S f = 0$). Connaissant $\Pi_S f$, c'est-à-dire les $f_\alpha = < f\ L_\alpha >$ , on cherche la fonction $f^* \in \mathfrak{F}$ réalisant le minimum de :

$$\|\Pi_{N^\perp} f^*\|^2 + < f^* - f, T \Pi_S(f^* - f) > \tag{7-1}$$

Cet élément $f^*$ doit donc vérifier la relation

$$\Pi_{N^\perp} f^* + T \Pi_S f^* = T \Pi_S f \tag{7-2}$$

Mais (7-2) implique $\Pi_{N^\perp} f^* \in S$, donc $\Pi_{N^\perp} f^* \in S \cap N^\perp = V_o$ . Par suite $f^* \in V_o \oplus N = S'$. Pour $f^* \in S'$, on a d'ailleurs $\Pi_{N^\perp} f^* = \Pi_{V_o} f^* = \Pi_{N^\perp} \Pi_S f^*$ . Nos relations (7-2) sont donc équivalentes à :

$$\left\{ \begin{aligned} & f^* \in S' \\ & (\Pi_{V_o} + T)\ \Pi_S f^* = T \Pi_S f \end{aligned} \right. \tag{7-3}$$

La seconde relation détermine univoquement $\Pi_S f^*$ (puisque $T$, et à plus forte raison $\Pi_{V_o} + T$ est strictement positif sur $S$).

D'autre part, tout $f^*$ dans $S'$ est univoquement déterminé si l'on connait sa projection $\Pi_S\, f^*$ dans $S$ : on a, en effet, $f^* = \Lambda^*\, \Pi_S\, f^*$. Donc, les relations (7-3) ou, aussi bien, (7-2) ont une solution unique lorsque $\Pi_S\, f$ est donné.

Pour montrer que le système (7-3) équivaut à un cokrigeage, le plus simple est encore d'utiliser les notations indicielles.

Si $f$ est un élément de $\mathfrak{F}$, $T\, f$ sera de la forme :

$$T\, \Pi_S\, f = T^{\alpha\beta} < f\, L_\alpha > L_\beta$$

avec une matrice $T^{\alpha\beta}$ définie positive strictement. Analytiquement, le système (7-3) se transcrira comme suit :

La première condition : $f^* \in S' = V_o \oplus N$ équivaut à :

$$\begin{cases} f^* = b^\alpha\, L_\alpha + C_\ell\, f^\ell \\ b^\alpha\, f_\alpha^\ell = 0 \end{cases}$$

Comme $\Pi_{N^\perp}$ est identique à $\Pi_{V_o}$ sur $S'$, on aura $\Pi_{N^\perp}\, f^* = b^\alpha\, L_\alpha$ (du fait de la condition $b^\alpha\, f_\alpha^\ell$), et la seconde relation (7-3) s'écrit :

$$\begin{aligned} b^\beta\, L_\beta + L_\beta\, T^{\alpha\beta} < L_\alpha\, ,\, b^\gamma\, L_\gamma + C_\ell\, f^\ell > \\ = L_\beta\, T^{\alpha\beta} < L_\alpha\, f > \end{aligned}$$

Autrement dit, on doit avoir

$$b^\beta + b^\gamma\, T^{\alpha\beta} < L_\alpha\, L_\gamma > + C_\ell\, T^{\alpha\beta}\, f_\alpha^\ell = T^{\alpha\beta}\, f_\alpha$$

Posons $\sigma_{\alpha\gamma} = < L_\alpha\, L_\gamma >$ , et désignons par $S_{\alpha\beta}$ la matrice inverse de $T$ : la condition ci-dessus équivaut à :

$$b^\beta\, (S_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) + C_\ell\, f_\alpha^\ell = f_\alpha$$

Au total, donc, la fonction $f^*$ est déterminée par le système :

$$(7\text{-}4)\quad \begin{cases} f^* = b^\alpha L_\alpha + C_\ell f^\ell \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \\ b^\beta (S_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) + C_\ell f_\alpha^\ell = f_\alpha \end{cases}$$

Or, ce système caractérise un certain cokrigeage, considéré comme interpolateur.

En effet, soit $Y(x)$ une FA et $\sigma_{xy}$ sa covariance. Supposons que l'on ait

$$Z_\alpha = Y_\alpha + \varepsilon_\alpha$$

les "erreurs" $\varepsilon_\alpha$ étant orthogonales à la FA $Y(x)$, et vérifiant :

$$E\,\varepsilon_\alpha = 0 \quad , \quad < \varepsilon_\alpha\, \varepsilon_\beta > = S_{\alpha\beta}$$

Construisons le cokrigeage $Y^*(x) = \lambda^\alpha(x)\, Z_\alpha$ de $Y(x)$ à partir des $Z_\alpha$ : les poids sont solution du système

$$(7\text{-}6)\quad \begin{cases} \lambda^\alpha(x)\, (S_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) = \sigma_{\beta x} + \mu_\ell(x)\, f_\beta^\ell \\ \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f_x^\ell \end{cases}$$

On peut, en résolvant explicitement ce système et en comparant à (7-4), montrer que l'on nécessairement $Y^*(x) = f^*(x)$ (à condition de remplacer $Z_\alpha$ par $f_\alpha$). Il est plus simple de poser $\varepsilon_x = 0$ pour $x \neq x_\alpha$ , et de remarquer que - pour x différent des points expérimentaux $x_\alpha$ - $Y^*(x)$, cokrigeage de $Y(x)$, est identique à $Z^*(x)$, krigeage de $Z(x)$ à partir des $Z_\alpha$ . En utilisant la caractérisation de $Z^*(x)$ en tant qu'interpolateur, on trouve donc le système

$$(7\text{-}7)\quad \begin{cases} Y^*(x) = b^\alpha \sigma_{\alpha x} + C_\ell f^\ell(x) \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \\ b^\beta (S_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}) + C_\ell f_\alpha^\ell = z_\alpha \end{cases}$$

Il est clair qu'avec $z_\alpha = f_\alpha$ , la solution $f^*$ de (7-4) vérifie :

$$f^*(x) = < f^* \; I_x > = y^*(x)$$

ce qui établit l'identité du cokrigeage et de la spline d'ajustement.

On notera, à l'avantage du cokrigeage, que la matrice $S_{\alpha\beta}$ représente la matrice des covariances des erreurs, et n'est nullement arbitraire. Au contraire, dans la formulation en splines d'ajustement, l'arbitraire le plus complet entache le choix de $T^{\alpha\beta}$. Le plus souvent, on prend $T^{\alpha\beta}$ diagonale, et on cherche le minimum de

$$\|A \; f^*\|^2 + \Sigma \, W_\alpha \; (f^*_\alpha - f_\alpha)^2$$

On soupçonne que les $W_\alpha$ doivent être pris inversement proportionnels aux variances des erreurs :

$$W_\alpha = \frac{C}{\|\varepsilon_\alpha\|^2} \quad .$$

Mais C reste irréductiblement arbitraire. En cokrigeage, au contraire, la donnée de la matrice des covariances est univoque : dans le cas iù les $\varepsilon_\alpha$ sont orthogonales, elle est :

$$S_{\alpha\beta} = \|\varepsilon_\alpha\|^2 \; \delta_{\alpha\beta}$$

et tout arbitraire disparait.

# A N N E X E

## LES FAI A COVARIANCE EN $r^2 \log r$

L'intérêt des FAI-1 à covariance généralisée en $r^2 \log r$ est lié aux fonctions splines de Duchon dans l'espace à 2 dimensions : considéré comme un interpolateur $z^*(x)$, le krigeage ponctuel effectué dans le cadre de ce modèle en $r^2 \log r$ se révèle, en effet, identique à la solution du problème des splines correspondant. Dans ce qui suit, je me propose de trouver, dans $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, les expressions explicites des covariances localement stationnaires de ce modèle de FAI-1.

### Covariances localement stationnaires.

Je traiterai ci-dessous le cas plus général des FAI-1 à covariance généralisée en $r^{\alpha+2}$ $(-1 < \alpha < 1)$. Le cas en $r^2 \log r$ s'en déduira en faisant tendre $\alpha$ vers 0.

Comme point de départ, j'utiliserai les formules suivantes, qui proviennent de la théorie classique du potentiel (on peut les trouver dans Landkoff).

Soit, sur l'intervalle $(-R,R)$ de la droite réelle la densité de probabilité :

$$(1-1) \qquad f_\alpha(x) = \frac{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} \; \frac{R^\alpha}{(R^2-x^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}$$

(Il s'agit de la loi Beta symétrique $(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2})$ sur l'intervalle $-R, +R$). Elle admet la variance

$$(1-2) \qquad \int_{-R}^{R} x^2 f_\alpha(x)\,dx = \frac{R^2}{2-\alpha}$$

La formule de Landkoff que nous allons utiliser est la suivante :

$$(1-3) \qquad \int_{-R}^{R} |x-y|^\alpha f_\alpha(x)\,dx = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\,\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}}\; R^\alpha$$

pour tout $y \in (-R,R)$ : autrement dit, la mesure de densité $f_\alpha$

réalise le potentiel d'équilibre sur $(-R,R)$ pour le noyau (= variogramme) $|x-y|^{\alpha}$. Noter que, pour $\alpha \uparrow 1$, la probabilité de densité $f_\alpha$ se concentre aux deux extrémités de l'intervalle. De fait, pour $\alpha = 1$, la mesure $(\delta_R + \delta_{-R})/2$ réalise bien le potentiel d'équilibre.

A cette formule, s'en adjoignent deux autres de même origine. Posant, pour abréger

$$(1\text{-}3') \qquad A_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})\ \Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}}$$

ces formules s'écrivent (toujours pour $|y| \leq R$) :

$$(1\text{-}4) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{A_\alpha R^\alpha}\displaystyle\int_{-R}^{R} x\, f_\alpha(x)\ |x-y|^\alpha dx = -\ \alpha\, y \\ \dfrac{1}{A_\alpha R^\alpha}\displaystyle\int_{-R}^{R} x^2\, f_\alpha(x)\ |x-y|^\alpha dx = \dfrac{1+\alpha}{2} R^2 - \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{2} y^2 \end{cases}$$

<u>Première conséquence</u> : Si $Y(x)$ est une FAI-0 admettant le variogramme $|h|^\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, la représentation :

$$Y_{st}(x) = Y(x) - \int_{-R}^{R} f_\alpha(y)\ Y(y)\ dy$$

est localement stationnaire sur $(-R,+R)$. D'après (1-3), en effet, pour $x,\ y \in (-R,R)$, la covariance de $Y_{st}$ est $C_\alpha(x-y)$ avec :

$$(1\text{-}5) \qquad C_\alpha(h) = A_\alpha\ R^\alpha - |h|^\alpha \qquad (|h| \leq 2R)$$

$A_\alpha$ est la constante (1-3'), avec $0 < \alpha \leq 1$.

En intégrant deux fois en h la covariance (1-5), nous obtenons un variogramme (localement stationnaire), soit (à un facteur près)

$$(1\text{-}6) \qquad \gamma_{\alpha+2}(h) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}\ A_\alpha\ R^\alpha\ h^2 - |h|^{\alpha+2}$$

Ce variogramme est celui d'une représentation localement intrinsèque d'ordre 0 de la FAI-1 admettant la covariance généralisée $|h|^{\alpha+2}$.

A partir de ce variogramme, nous allons former l'expression de la covariance $C_{\alpha+2}(h)$ d'une représentation localement stationnaire. Cela va être possible du fait que la mesure $f_\alpha(x)$ qui réalisait le potentiel d'équilibre de $|h|^\alpha$ réalise également celui du $\gamma_{\alpha+2}$ de la formule (1-6) : cette circonstance inattendue va résulter des deux autres formules de Landkoff rappelées ci-dessus en (1-4).

Il faut montrer que l'on a :

$$\int_{-R}^{R} \gamma_{\alpha+2}(x-y)\ f_\alpha(x)\ dx = C^{ste}$$

et calculer cette constante, le reste suivant aussitôt : (on aura $C_{\alpha+2}(h) = C - \gamma_{\alpha+2}(h)$).

Pour cela, mettons $\gamma_{\alpha+2}$ sous la forme suivante :

$$\gamma_{\alpha+2}(x-y) = (x-y)^2 \left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} A_\alpha\ R^\alpha - |x-y|^\alpha\right]$$

D'après (1-2) et la symétrie de la loi $f_\alpha$, on trouve d'abord

$$(1\text{-}7) \qquad \int_{-R}^{R} (x^2 - 2xy + y^2)\ f_\alpha(x)\ dx = y^2 + \frac{R^2}{2-\alpha}$$

Utilisant ensuite les formules (1-4), nous trouvons

$$(1\text{-}8) \qquad \frac{1}{A_\alpha\ R^\alpha} \int_{-R}^{R} (x^2 - 2xy + y^2)\ |x-y|^\alpha\ f_\alpha(x)\ dx = $$

$$= \frac{1+\alpha}{2}\ R^2 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2}\ y^2$$

En reportant ces deux résultats (1-7) et (1-8) dans l'expression de l'intégrale que nous cherchons à calculer, nous constatons que le terme en $y^2$ s'élimine, et il reste la relation remarquable :

$$(1\text{-}9) \qquad \int_{-R}^{R} \gamma_{\alpha+2}(x-y)\ f_\alpha(x)\ dx = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2-\alpha}\ A_\alpha\ R^2$$

Il en résulte, en particulier, l'expression suivante pour la covariance localement stationnaire équivalente à la CG $|h|^{\alpha+2}$ sur $(-R,R)$ :

$$(1\text{-}10) \qquad C_{\alpha+2}(h) = A_\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)}{2-\alpha} R^{2+\alpha} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} A_\alpha R^\alpha h^2 + |h|^{\alpha+2}$$

Cas de $r^2 \log r$.

Pour $\alpha = 0$, d'après (1-3'), on a $A_o = 1$ et l'expression (1-10) est identiquement nulle. Pour obtenir l'expression de la covariance localement stationnaire, il faut calculer la limite

$$C(h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{C_{\alpha+2}(h)}{\alpha}$$

De fait, cette limite sera encore une covariance (en tant que limite de covariance) et un simple examen de son expression montrera qu'elle est bien équivalente à la CG $r^2 \log r$.

Cette limite est :

$$C(h) = \frac{R^2}{2} + h^2 \log \frac{h}{R} - h^2\left( \frac{3}{2} + A_o'\right)$$

et tout revient à calculer la valeur $A_o'$ en $\alpha = 0$ de la dérivée $\frac{d}{d\alpha} A_\alpha$. D'après (1-3'), on trouve :

$$A_o' = \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \right)$$

Or, d'après des résultats connus :

$$(1\text{-}11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} &= - C = - 0{,}577216\ldots \\ \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} &= - C - 2 \log 2 \end{aligned} \right.$$

On constate d'ailleurs que la constante d'Euler C s'élimine, et il reste

$$A_o' = - \log 2$$

(logarithme népérien évidemment). D'où, finalement, l'expression cherchée :

(1-12) $$\boxed{C(h) = \frac{R^2}{2} - \left(\frac{3}{2} - \log 2\right) h^2 + h^2 \log \frac{h}{R}}$$

Passage à $\mathbb{R}^2$ et à $\mathbb{R}^3$.

La covariance (1-12) résout le problème dans $\mathbb{R}^1$. Le passage à $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ se fait selon la méthode habituelle des bandes tournantes. Si $C_1(h)$ est une covariance dans $\mathbb{R}^1$, on lui fait correspondre les covariances isotropes $C_2$ et $C_3$ définies respectivement dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ par les relations

$$C_2(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} C_1(r \cos \alpha)\, d\alpha$$

$$C_3(r) = \int_0^1 C_1(rx)\, dx$$

Ainsi, un terme en $|h|^\alpha$ devient :

(1-13) $$\begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}\, r^\alpha & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\[2ex] \dfrac{1}{\alpha+1}\, r^\alpha & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

On en déduit sans peine les expressions associées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à la covariance $C_{\alpha+2}$ de la formule (1-10). Il n'est pas utile de les écrire explicitement ici.

En ce qui concerne le passage dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ du terme $r^2 \log r$, le plus simple, pour obtenir l'expression correspondante, est de dériver en $\alpha = 2$ les expressions (1-13). On trouve ainsi dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\frac{r^2}{3} \log r - \frac{r^2}{9}$$

et dans $\mathbb{R}^2$ l'expression légèrement plus compliquée :

$$\frac{1}{2} r^2 \log r + \frac{1}{4} \left( \frac{\Gamma'(3/2)}{\Gamma(3/2)} - \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} \right) r^2$$

Compte tenu de (1-11) et de la relation classique

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x}$$

on trouve donc dans $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{1}{2} r^2 \log r + \frac{1}{4} (1 - 2 \log 2) r^2$$

En récapitulant ces résultats, on obtient donc dans $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, et toujours pour :

$$\boxed{\begin{array}{l} \qquad\qquad (r \leq 2 R) \\ C_1(r) = \frac{R^2}{2} - (\frac{3}{2} - \log 2) \; r^2 + r^2 \log \frac{r}{R} \\ C_2(r) = R^2 - r^2 + r^2 \log \frac{r}{R} \\ C_3(r) = \frac{3}{2} R^2 - (\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log 2) \; r^2 + r^2 \log \frac{r}{R} \end{array}}$$