

Fontainebleau/CGMM

N-690

REMARQUES SUR LE CHANGEMENT
DE SUPPORT

G. MATHERON

Février 1981

REMARQUES SUR LE CHANGEMENT DE SUPPORT
=====

Par

G. MATHERON

TABIE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>I - LOI LOGNORMALE AU NIVEAU PONCTUEL</u>	1
I.1 Cas des lognormales indépendantes - Théorème de Convergence.	2
I.2 Cas d'une F.A. lognormale.	13
<u>II - LOIS EXPONENTIELLES AU NIVEAU PONCTUEL</u>	21
II.1 Le cas fini .	21
II.2 Cas d'une F.A.	23
II.3 Application.	25
II.4 Forme explicite de la loi de Y.	28
<u>III - LOI EN O1 AU NIVEAU PONCTUEL</u>	34

REMARQUES SUR LE CHANGEMENT DE SUPPORT
=====INTRODUCTION

Dans ce qui suit, je me propose de tester, de manière d'ailleurs beaucoup plus empirique que théorique, la validité de nos techniques de changement de support (essentiellement le modèle dit "gaussien discrétisé" et, accessoirement, le modèle plus complexe dit "hermitien").

Ces essais concernent trois types de lois initiales (i.e. lois de la variable ponctuelle $Z(x)$) : lognormale, exponentielle et binomiale. Dans le cas lognormal; où la loi réelle, après changement de support, n'est pas accessible par le calcul, il a fallu procéder par simulation. Dans les deux autres cas, j'utilise des fonctions aléatoires particulières, pour lesquelles le calcul explicite de la loi réelle est possible, de sorte que la comparaison peut porter sur les lois elles-mêmes.

La conclusion générale n'est ni enthousiasmante ni décourageante. Le plus souvent l'accord entre loi réelle et modèle approché est assez mauvais pour les valeurs extrêmes (très petites ou très fortes) mais plutôt bon pour les valeurs intermédiaires. Cela doit suffire pour justifier notre pratique dans la plupart des cas usuels, où les teneurs vraiment très fortes ou très faibles n'ont que peu d'impact pratique. Mais cela doit aussi nous inciter à une grande prudence dans les cas particuliers (je pense au diamant par exemple) où tout se joue, pour l'essentiel, sur les queues de distribution. Nous devons certainement y regarder à deux fois avant d'appliquer tels quels au diamant nos modèles actuels de changement de support.

I - LOI LOGNORMALE AU NIVEAU PONCTUEL

Dans cette première série d'exemples, j'utilise des simulations pour évaluer la loi réelle après changement de support. Par

contre, les lois fournies par les deux modèles (gaussien discrétisé et hermitien) seront calculées explicitement. On sait d'ailleurs que le modèle gaussien discrétisé conduit à une autre loi lognormale (avec conservation de la moyenne m et diminution de la variance). Je commence par le cas simple de V.A. indépendantes, et j'examine ensuite une F.A. admettant une fonction de covariance simple.

I.1 Cas des Lognormales Indépendantes.

Au niveau ponctuel, je prends des V.A. Y_i indépendantes, de la forme :

$$Y_i = m e^{\sigma Z_i - \sigma^2/2}$$

où les Z_i sont des gaussiennes réduites indépendantes. Comme la moyenne m est un simple facteur d'échelle, je me limite au cas $m = 1$. Le changement de support consiste ici simplement à faire la moyenne de N variables Y_i indépendantes, soit :

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

Par construction, la moyenne théorique reste égale à $m = 1$. Pour la variance (arithmétique) S^2 , la valeur théorique est

$$S^2 = \frac{1}{N} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Pour éviter la convergence triviale vers la loi de Gauss, il convient, N augmentant, de faire croître simultanément la variance logarithmique σ^2 de la variable ponctuelle, de manière à conserver (par exemple) une variance théorique S^2 à peu près constante : autrement dit, σ^2 devra, en gros, varier comme $\log N$.

En ce qui concerne la variance du log (népérien) de X, le modèle gaussien (i.e. la permanence de la lognormalité) prévoit

$$\sigma'^2 = \log(1+S^2)$$

Le modèle hermitien, de son côté, dans le cas de variables indépendantes, prévoit une simple correction affine, à savoir l'équivalence en loi

$$X \equiv m + \frac{S_X}{S_Y} (Y-m)$$

où Y est la variable ponctuelle. Comme Y est ≥ 0 , et $S_X = S_Y/\sqrt{N}$, le modèle hermitien prévoit donc :

$$X \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right) m$$

Bien qu'un certain effet de seuil soit perceptible sur les simulations (histogrammes insuffisamment étalés vers la gauche), cette inégalité, beaucoup trop sévère, est très largement violée par les simulations, et le modèle hermitien se révèle inacceptable.

En ce qui concerne la permanence de la lognormalité, les simulations réservent aussi certaines surprises. Pour N assez peu élevé, la distribution empirique se laisse ajuster de manière acceptable au modèle lognormal, mais, de manière assez systématique, les variances (arithmétiques et logarithmiques) de la distribution empirique sont notablement inférieures à la prévision théorique.

Voici un exemple assez typique avec $N = 10$ et $\sigma^2 = 4$. La prévision théorique, pour les deux variances S'^2 (arithmétique) et σ'^2 (logarithmique) est :

$$S'^2 = 5,36 \qquad \sigma'^2 = 1,85$$

Expérimentalement, on trouve respectivement (pour une simulation portant sur 1000 variables) :

1,79 et 0,91

Voici d'ailleurs les histogrammes correspondants :

pour la gaussienne réduite $Z' = \frac{1}{\sqrt{10}} \sum_{i=1}^{10} Z_i$ (associée aux Z_i qui ont servi à construire la simulation), et pour la variable $X_g = \frac{1}{\sigma'} (\beta nX + \sigma'^2/2)$ qui devrait, théoriquement, elle aussi, être une gaussienne réduite. On notera que l'ajustement de la distribution empirique des Z' à la prévision théorique (loi de Gauss réduite) est excellent, de sorte que'on ne saurait invoquer une défaillance de la technique de simulation pour expliquer l'écart énorme entre la distribution empirique de X_g et la prévision (voir Tableau 1).

$$N = 10, \quad \sigma^2 = 4, \quad \sigma'^2 = 1,8500 \quad (1000 \text{ itérations})$$

Limite Inférieure de classe (en gaussienne réduite)	Effectif théorique	Effectif observé Z'	Effectif observé X_g
$-\infty$	22,75	19	0
-2	44,06	48	1
-1,5	91,45	112	14
-1	149,88	133	100
-0,5	191,46	195	232
0	191,46	180	279
0,5	149,88	146	227
1	91,45	92	93
1,5	44,06	46	39
2	22,75	29	15
<u>Moyennes Empiriques</u>		<u>Variances Empiriques</u>	
Z'	0,003375	0,10667	
X	1,113983	1,79457	
$\ln X$	-0,511039	0,91198	

TABLEAU 1

Ces valeurs sont à comparer aux suivantes :

	<u>Moyennes Théoriques</u>	<u>Variances Théoriques</u>
Z'	0	0,1
X	1	5,35981
lnX	-0,92500	1,84000

On note d'ailleurs, en plus de ce défaut de variance, une dissymétrie assez sensible de l'histogramme de X_g , qui semble comme tronqué aux faibles valeurs.

De temps à autre (mais rarement), sur certaines simulations ce défaut de variance est remplacé par un très large excès. Par exemple, parmi plusieurs simulations ayant les mêmes paramètres que la précédente, mais un effectif de 100 au lieu de 1000, l'une d'entre elle a donné :

	<u>Moyennes Empiriques</u>	<u>Variances Empiriques</u>
Z'	0,0383	0,0813
X	1,7309	83,3974
lnX	-0,5600	1,0050

A l'examen de l'histogramme, il apparaît que la valeur énorme de la variance arithmétique (83 au lieu de 5,4) est due à une unique valeur très forte ($X = 92,102$), dont l'effet n'est d'ailleurs pas sensible sur la variance logarithmique. (Noter que toutes les autres simulations d'effectif 100 ont donné des résultats compatibles avec ceux du Tableau 1).

Voici maintenant les résultats d'une autre simulation correspondant à $N = 100$ (effectif : 200).

Limite Inférieure de classe (échelle $10^{1/10}$)	Simulation $\sigma^2 = 5,15230$ N = 100, Effectif 200
0,1	0
0,126	0
0,158	0
0,199	0
0,251	6
0,316	12
0,398	24
0,501	35
0,631	34
0,794	30
1	27
1,26	17
1,58	5
1,99	4
2,51	1
3,16	3
3,98	0
5,01	1
6,31	0
7,94	0
10	0
12,6	0
15,8	1

	<u>Moyenne Empirique</u>	<u>Variance Empirique</u>
z'	-0,00123	0,00996
X	0,97230	1,49633
$\ln X$	-0,29778	0,32267

L'effet de tronquage aux faibles valeurs, et la dissymétrie vont en s'accroissant. Il ne s'agit certainement pas d'une distribution lognormale. Le déficit de variance est également très sensible, comme le montre la comparaison avec les valeurs théoriques :

	<u>Moyenne Théorique</u>	<u>Variance Théorique</u>
Z'	0	0,01
X	1	1,7182818
lnX	-0,5	1

D'autres simulations ont confirmé ces indications de tendance : la variance est soumise à un effet de fuite. Les distributions obtenues sont de nature très instable : elles comportent des valeurs très élevées affectées de probabilités suffisamment faibles pour n'exercer aucune influence sensible sur la moyenne, mais pas assez pour que leur effet sur la variance soit négligeable : c'est même l'inverse qui se produit. Lorsque N augmente, ces valeurs très fortes, malgré leurs faibles probabilités, finissent par prendre en charge la quasi-totalité de la variance. Comme elles n'apparaissent pratiquement jamais dans une simulation de taille modérée, on constate expérimentalement une diminution (apparente) de la variance. Ces lois, instables et dangereuses, se révèlent ainsi très suggestives. On est bien loin, en particulier, de la permanence de la lognormalité.

En termes intuitifs, on peut expliquer comme suit ce phénomène : dans la somme

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

le terme $\frac{1}{N} Y_{\text{Max}}$ correspondant au plus grand des Y_i devient susceptible de valeurs énormes. On conçoit (et on peut d'ailleurs

démontrer de manière rigoureuse) que, N et σ^2 augmentant (avec $e^{\sigma^2/N} = C^{ste}$) l'espérance de Y_{Max}/N tende vers 0, tandis que l'espérance de son carré devient équivalente à celle de X^2 : autrement dit, ce terme unique, dont la contribution à la moyenne reste négligeable, devient peu à peu responsable à lui seul de la totalité de la variance. Sur les simulations, il apparaît une corrélation très forte entre X et Y_{Max}/N . On peut voir, par exemple, sur la Figure 1 un nuage de corrélation entre X et Y_{Max}/N (avec $\sigma^2 = 9$ and $N = 200$). Il apparaît très nettement qu'aux grandes valeurs des variables, le rapport $\log X / \log Y_{Max}/N$ tend vers l'unité, alors qu'il est nettement supérieur à 1 pour les faibles valeurs. Bien que l'échelle soit bilogarithmique, la régression ne peut absolument pas être considérée comme linéaire, et le nuage n'est absolument pas bigaussien. Voici d'ailleurs les histogrammes (voir Tableau 3).

Voici les valeurs expérimentales pour les moyennes et les variances :

	Moyenne	Variance
X	0,7935	0,4814
$\frac{1}{N} Y_{Max}$	0,4234	0,3711
$\ln X$	-0,4972	0,4892
$\ln \frac{1}{N} Y_{Max}$	-1,5203	1,2587

et pour les corrélations :

$$\text{entre } X \text{ et } \frac{1}{N} Y_{Max} \quad \rho = 0,9654$$

$$\text{entre } n X \text{ et } n \frac{1}{N} Y_{Max} \quad \rho = 0,9476$$

Corrélation entre X et $(1/N)Y_{\text{Max}} - \sigma^2 = 9$, N = 200 Effectifs 80		
Limite Inférieure de Classe	Effectif $1/N Y_{\text{Max}}$	Effectif X
0,0251	2	0
0,0316	2	0
0,0398	2	0
0,0501	8	0
0,0631	3	0
0,0794	4	0
0,1	11	0
0,126	5	0
0,158	7	2
0,199	4	5
0,251	5	10
0,316	2	6
0,398	4	11
0,501	3	9
0,631	4	10
0,794	5	9
1	3	2
1,26	0	8
1,58	2	5
1,99	0	0
2,51	1	1
3,16	1	1
3,98	0	1

TABLEAU 3

Corrélation entre X (entre ordonnée) et Y_{Max}/N (abscisse)
(échelle logarithmique) $\sigma^2 = 9$, $N = 200$
Corrélation : entre log, $\rho = 0,948$, entre valeurs
arithmétiques , $\rho = 0,965$

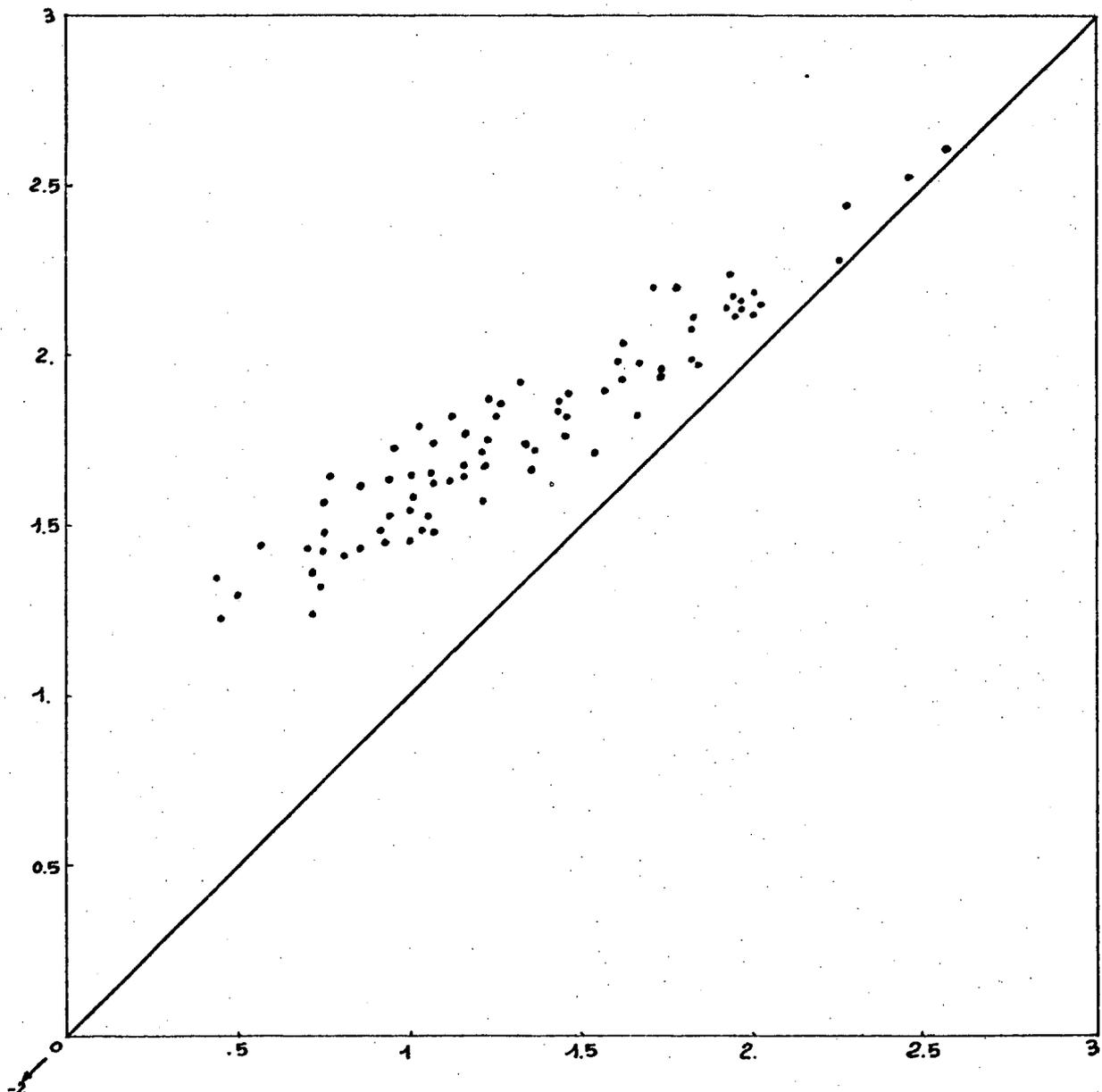


Figure 1

Théorème de Convergence.

Ces diverses particularités de nos distributions empiriques (effet de fuite pour la variance) trouvent leur explication dans le théorème suivant :

Soient Z_i des gaussiennes $(0,1)$ indépendantes et

$$X_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{\sigma_N Z_i - \sigma_N^2/2}$$

Lorsque N et σ_N^2 tendent vers l'infini, de telle manière que $e^{\sigma_N^2}/N \rightarrow C$ (C constante positive finie), la variable X_N converge en loi vers 1 (autrement dit, la loi limite existe, et c'est un Dirac placé en $x = 1$).

On note que $E X_N$ reste égal à 1, et que la variance :

$$S_N^2 = \frac{1}{N} (e^{\sigma_N^2} - 1)$$

tend vers la constante $C > 0$: néanmoins, la loi limite est de variance nulle, et c'est justement cela qui constitue l'effet de fuite pour la variance.

Voici une démonstration rapide. Il est clair que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer :

$$(a) \quad \frac{e^{\sigma_N^2}}{N} = C$$

Pour démontrer la convergence en loi, nous allons montrer que la transformée de Laplace :

$$\Phi_N(\lambda) = \left(E \left[\exp \left(- \frac{\lambda}{N} e^{\sigma_N Z - \sigma_N^2/2} \right) \right] \right)^N$$

converge vers $e^{-\lambda}$. Pour cela, nous utiliserons les inégalités

élémentaires valables pour $x \geq 0$:

$$(b) \quad 1-x \leq e^{-x} \leq \left(1-x + \frac{x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{x \leq 1} + \mathbb{1}_{x > 1}$$

où nous allons remplacer x par $\frac{\lambda}{N} e^{\sigma_N z - \sigma_N^2/2}$

La première inégalité (b) donne :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{N} E \left[e^{\sigma_N z - \sigma_N^2/2} \right]\right)^N = \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \leq \Phi_N(\lambda)$$

Pour $N \rightarrow \infty$, il en résulte :

$$(c) \quad e^{-\lambda} \leq \underline{\lim} \Phi_N(\lambda)$$

En ce qui concerne la seconde inégalité, le traitement est un peu plus délicat. Désignons par z_N la valeur définie par

$$\frac{\lambda}{N} e^{\sigma_N z_N - \sigma_N^2/2} = 1$$

c'est-à-dire $z_N = \frac{1}{\sigma_N} \left(\frac{\sigma_N^2}{2} - \log \lambda + \log N \right)$ et, compte tenu de (a) :

$$z_N = \frac{1}{\sigma_N} \left(\frac{3}{2} \sigma_N^2 - \log \lambda - \log C \right)$$

Pour N grand, z_N est donc équivalent à $\frac{3}{2} \sigma_N$.

La seconde inégalité (b) donne alors :

$$\begin{aligned} (\Phi_N(\lambda))^{1/N} &\leq \int_{-\infty}^{z_N} \left(1 - \frac{\lambda}{N} e^{\sigma_N z - \sigma_N^2/2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{N^2} e^{2 \sigma_N z - \sigma_N^2} \right) g(z) dz \\ &\quad + 1 - G(z_N) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{N} G(z_N - \sigma_N) + \frac{\lambda^2}{2 N^2} G(z_N - 2 \sigma_N) e^{\sigma_N^2} \end{aligned}$$

Il reste à élever à la puissance N . Compte tenu de

l'équivalence $z_N \approx \frac{3}{2} \sigma_N$, on trouve :

$$G(z_N - \sigma_N) \approx G\left(\frac{1}{2} \sigma_N\right) \approx 1 - \frac{e^{-\sigma_N^2/8}}{\sigma_N \sqrt{2\pi}}$$

(ici, on utilise la relation bien connue $\frac{z(1-G(z))}{g(z)} \rightarrow 1$ pour $z \rightarrow \infty$.) De même :

$$G(z_N - 2\sigma_N) \approx G\left(-\frac{1}{2} \sigma_N\right) \approx \frac{e^{-\sigma_N^2/8}}{\sigma_N \sqrt{2\pi}}$$

Au total, il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \Phi_N(\lambda) &\leq \lim \left[1 - \frac{\lambda}{N} G(z_N - \sigma_N) + \frac{\lambda^2}{2N} G(z_N - 2\sigma_N) \right]^N \\ &= \lim \left[1 - \frac{\lambda}{N} \right]^N = e^{-\lambda} \end{aligned}$$

Ce résultat, joint à (c), montre que $\Phi_N(\lambda)$ admet une limite continue en λ , pour $N \rightarrow \infty$, à savoir $e^{-\lambda}$: autrement dit, il y a convergence en loi, et la loi limite est un Dirac placé au point $x = 1$, comme nous l'avions annoncé.

1.2 Cas d'une F.A. Lognormale.

Cette fois, le modèle est le suivant : partant d'une suite de gaussiennes centrées normées ε_n , on forme la suite

$$Z_{n+1} = \rho Z_n + \sqrt{1-\rho^2} \varepsilon_{n+1}$$

de sorte que les Z_n constituent une suite de gaussiennes réduites, admettant la covariance

$$E(Z_n Z_{n+k}) = \rho^k$$

En exponentiant, on obtient une suite stationnaire de lognormales

-14-

$$Y_n = e^{\sigma Z_n - \sigma^2/2}$$

admettant l'espérance; unité et la covariance

$$\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = e^{\rho^k \sigma^2} - 1$$

On définit enfin la variable X comme la moyenne :

$$X = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$$

de N lognormales Y_n consécutives. Il n'y a pas de difficulté à calculer numériquement la variance S^2 de X :

$$S^2 = \frac{1}{N} (e^{\sigma^2} - 1) + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) (e^{\rho^k \sigma^2} - 1)$$

Le modèle gaussien discrétisé prévoit pour X une loi lognormale d'espérance 1 et de variance logarithmique

$$\sigma'^2 = \log(1+S^2)$$

c'est-à-dire une anamorphose de la forme

$$X = e^{\sigma' Z' - \sigma'^2/2}$$

où Z' est une gaussienne réduite.

De son côté, le modèle hermitien prévoit une anamorphose gaussienne de la forme :

$$X = \varphi_H(z) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \sigma^n D_n H_n(z)$$

avec des coefficients D_n dont le carré s'obtient en prenant la moyenne de $\rho^{|i-j|}$ sur les différents couples de points $i, j = 1, 2, \dots, N$, soit

$$D_n^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) \rho^{kn}$$

On trouve facilement

$$D_n = \left[\frac{1}{N} \frac{1 + \rho^n}{1 - \rho^n} - \frac{2}{N^2} \frac{\rho^n (1 - \rho^{nN})}{(1 - \rho^n)^2} \right]^{1/2}$$

de sorte qu'il n'y a pas de difficulté à calculer numériquement les valeurs de l'anamorphose $\varphi_H(z)$.

Les tableaux suivants présentent les résultats de quelques simulations. En ce qui concerne les histogrammes, sur le premier tableau, en face de chaque limite inférieure de classe ℓ , on lit successivement le nombre des valeurs observées dans cette classe, la valeur de la gaussienne réduite $G^{-1}(p)$ associée à la fréquence cumulée des observations (de $-\infty$ à ℓ), puis les valeurs $\varphi_H(z)$ et $\varphi_G(z)$ associées à z par les deux anamorphoses correspondant au modèle hermitien et gaussien respectivement. C'est donc la comparaison de ℓ avec $\varphi_H(z)$ et $\varphi_G(z)$ qui permet de juger de la valeur relative de ces deux modèles. Sur les tableaux suivants, les valeurs de z ont été omises.

TABLEAU 4

$\sigma = 1,5$	$\rho = 0,5$	$N = 10$	Effectif 1000
Prévisions : $S^2 = 1,41926$			$\sigma'^2 = 0,88346$
Réalizations : $\bar{X} = 0,96048$			$\bar{\ell}_n X = -0,41181$
	$S_X^2 = 1,08799$		$\sigma_{\ell_n X}^2 = 0,71356$

HISTOGRAMME

Limite Inférieure de Classe	Nombre d'Observations	$z = G^{-1}(p)$	$\varphi_H(z)$	$\varphi_G(z)$
0,0501	1			
0,0631	4	-3,091	0,256	0,035
0,0794	9	-2,576	0,285	0,057
0,1	9	-2,198	0,312	0,081
0,126	20	-1,996	0,329	0,099
0,158	29	-1,717	0,355	0,128
0,199	49	-1,463	0,383	0,163
0,251	62	-1,170	0,422	0,214
0,316	80	-0,903	0,465	0,275
0,398	113	-0,634	0,519	0,354
0,501	114	-0,316	0,600	0,478
0,631	103	-0,025	0,696	0,628
0,794	110	0,235	0,808	0,802
1	80	0,533	0,980	1,061
1,26	66	0,782	1,171	1,341
1,58	48	1,032	1,426	1,696
1,99	44	1,265	1,740	2,111
2,51	23	1,564	2,300	2,795
3,16	14	1,800	2,917	3,489
3,98	10	2,014	3,671	4,271
5,01	5	2,258	4,826	5,367
6,31	4	2,458	6,108	6,477
7,94	2	2,748	8,722	8,511
10	1	3,091	13,528	11,742

Ajustement lognormal $(1, \sigma')$:

$$\chi^2 = 30,60 \text{ pour } 19 \text{ degrés de liberté}$$

$$P(\chi^2 \geq 30,6) = 4/100$$

TABLEAU 5

$\sigma = 1$ $N = 20$ $\rho = 0,9$ Effectif : 1000
 Prévisions : $S^2 = 0,7931$ $\sigma'^2 = 0,58395$
 Réalisations : $\bar{X} = 1,0189$ $\overline{\ln \bar{X}} = -0,26724$
 $\sigma_X^2 = 0,8013$ $\sigma_{\ln X}^2 = 0,57384$

Nombre d'Observations	Limite Inférieure de Classe ℓ	$\varphi_H(z)$	$\varphi_G(z)$
1	0,0631		
1	0,0794	0,108	0,070
9	0,1	0,121	0,083
11	0,126	0,169	0,130
24	0,158	0,200	0,160
27	0,199	0,244	0,206
53	0,251	0,282	0,246
53	0,316	0,344	0,311
96	0,398	0,398	0,370
133	0,501	0,494	0,473
109	0,631	0,635	0,625
115	0,794	0,771	0,771
112	1	0,953	0,966
88	1,26	1,204	1,232
62	1,58	1,516	1,558
54	1,99	1,887	1,938
24	2,51	2,534	2,587
16	3,16	3,179	3,218
4	3,98	4,203	4,192
4	5,01	4,758	4,707
2	6,31	5,813	5,669
2	7,94	7,016	6,737

Ajustement lognormal $(1, \sigma')$:

$\chi^2 = 17,72$ pour 16 degrés de liberté

$P(\chi^2 \geq 17,72) = 34/100$

TABLEAU 6

$\sigma = 1,6$	$N = 100$	$\rho = 0,9$	Effectif : 200
Prévisions : $S^2 = 1,0479$			$\sigma'^2 = 0,71673$
Réalisations : $\bar{X} = 0,9658$			$\overline{\ln \bar{X}} = -0,3124$
	$S_X^2 = 0,9559$		$\sigma_{\ln X}^2 = 0,5271$

Nombre d'Observations	Limite Inférieure de Classe ℓ	$\varphi_H(z)$	$\varphi_G(z)$
3	0,1		
2	0,126	0,405	0,111
2	0,158	0,420	0,133
8	0,199	0,432	0,151
7	0,251	0,467	0,207
13	0,316	0,491	0,247
24	0,398	0,530	0,317
28	0,501	0,600	0,443
24	0,631	0,692	0,608
22	0,794	0,793	0,785
18	1	0,923	1,002
20	1,26	1,083	1,253
16	1,58	1,400	1,712
5	1,99	2,043	2,519
4	2,51	2,500	3,078
2	3,16	3,468	3,978
0	3,98		
1	5,01	4,670	5,011
0	6,31		
0	7,94		
1	10	6,229	6,189

Ajustement lognormal $(1, \sigma')$:

$$\chi^2 = 16,74 \quad \text{avec } 12 \text{ degrés de liberté}$$

$$P(\chi^2 \geq 16,74) = 16/100$$

TABLEAU 7

$\sigma = 1,5$ $\rho = 0,8$ $N = 20$ Effectif : 200
 Prévisions : $S^2 = 1,7655$ $\sigma'^2 = 1,1794$
 Réalisations : $\bar{X} = 0,9843$ $\overline{\ln X} = 0,4902$
 $S_X^2 = 1,2969$ $\sigma_{\ln X}^2 = 0,9271$

Nombre d'Observations	Limite Inférieure de Classe ℓ	$\varphi_H(z)$	$\varphi_G(z)$
1	0,0398		
0	0,0501		
0	0,0631		
3	0,0794	0,178	0,045
3	0,1	0,216	0,076
7	0,126	0,239	0,097
9	0,158	0,277	0,136
13	0,199	0,317	0,179
22	0,251	0,368	0,239
12	0,316	0,452	0,344
17	0,398	0,503	0,408
21	0,501	0,582	0,510
15	0,631	0,701	0,665
16	0,794	0,810	0,807
14	1	0,963	1,005
12	1,26	1,151	1,246
9	1,58	1,389	1,543
9	1,99	1,659	1,873
7	2,51	2,106	2,400
4	3,16	2,781	3,160
1	3,98	3,577	4,010
3	5,01	3,901	4,343
2	6,31	5,899	6,285

Ajustement lognormal $(1, \sigma')$:

$$\chi^2 = 10,2 \text{ pour } 15 \text{ degrés de liberté}$$

$$P(\chi^2 \geq 10,2) = 82/100$$

Pour la première simulation, les deux modèles, hermitien et gaussien, donnent des résultats assez mauvais, et présentent d'ailleurs, vis-à-vis de la distribution empirique, des écarts de sens contraires : aux faibles valeurs de ℓ , l'anamorphose hermitienne donne des valeurs trop fortes, et φ_G des valeurs trop faibles, tandis que pour les valeurs fortes de ℓ se produit exactement l'inverse. Du fait de l'effectif élevé de la simulation (1000 valeurs), on peut conclure que l'anamorphose de la loi réelle se situe effectivement, dans ce cas, à peu près à mi-chemin entre les deux modèles (on notera aussi que le test χ^2 conclut assez nettement au rejet de la loi lognormale).

Ces divergences se comprennent assez bien : compte tenu de la faible valeur du coefficient ρ (0,5), on est encore relativement proche du cas des lognormales indépendantes. De fait, la distribution empirique présente le même genre de dissymétrie, en échelle logarithmique, ainsi qu'un certain effet de tronquage aux faibles valeurs, assez comparable à ce que l'on a pu observer au paragraphe précédent. Cet effet de tronquage, qui existe réellement, est bien pris en compte par l'anamorphose hermitienne, mais sous une forme tout-à-fait excessive, tout comme dans le cas des V.A. indépendantes, ce qui explique les valeurs trop fortes de $\varphi_H(z)$ pour les faibles valeurs de z - et, par compensation, les valeurs trop faibles de φ_H pour les grandes valeurs de z .

Les trois simulations suivantes penchent, par contre, assez nettement en faveur du modèle gaussien discrétisé. Le test χ^2 conclut d'ailleurs dans les trois cas, assez nettement pour les tableaux 5 et 6, très nettement pour le dernier, à l'acceptation de l'ajustement lognormal. Néanmoins, la distribution empirique, dans les cas 5 et 6, présente encore la dissymétrie déjà observée plus haut, mais sous forme très atténuée.

La simulation 5, malgré son effectif important (1000) ne permet pas de trancher réellement en faveur de l'un ou l'autre des deux modèles, φ_H et φ_G restant ici très proches l'un de l'autre.

En ce qui concerne les simulations 6 et 7, la balance penche très nettement en faveur du modèle gaussien. Bien que l'effectif soit plus faible (200) il semble bien, dans les deux cas, que le modèle hermitien présente un effet de tronquage inadmissible aux faibles valeurs de z (associé à des valeurs nettement trop fortes de φ_H). L'accord du modèle gaussien avec la distribution empirique est presque parfait dans le cas du tableau 7, mais cela peut, évidemment, être dû à un "coup de chance", vu l'effectif relativement faible.

II - LOIS EXPONENTIELLES AU NIVEAU PONCTUEL.

J'en arrive maintenant à une classe très particulière de F.A. pour laquelle le calcul effectif de la loi réelle, après changement de support, peut être réalisé.

II.1 Le Cas Fini.

Pour comprendre l'origine de ce modèle, plaçons-nous d'abord dans le cadre d'un nombre fini de V.A. On sait que le carré d'une gaussienne centrée obéit à une loi gamma (avec $\alpha = \frac{1}{2}$). Plus généralement, soient Z_1, \dots, Z_n n variables gaussiennes centrées, et σ_{ij} leur matrice de covariance. Pour trouver la loi des variables

$$Y_i = Z_i^2$$

le plus simple est d'évaluer leur transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= E \left[e^{-\sum \lambda_i Z_i^2} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi \text{Det } \sigma)^{n/2}} \int e^{-\frac{1}{2} B^{ij} z_i z_j - \sum \lambda_i z_i^2} dz \\ &= \left(\frac{\text{Det } (B^{ij})}{\text{Det } (B^{ij} - \sum \lambda_i \delta^{ij})} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

Si nous nous intéressons simplement à la somme

$$Y = \sum Z_i^2$$

nous obtiendrons $\Phi(\lambda) = E(e^{-\lambda Y})$ en remplaçant les λ_i par λ , soit :

$$\Phi(\lambda) = \left(\frac{\text{Det } B}{\text{Det } (B + 2\lambda I)} \right)^{n/2}$$

I désignant la matrice unité. Si nous désignons par b_1, b_2, \dots, b_n les valeurs propres de la matrice $B = \sigma^{-1}$, nous voyons que cette loi est donnée par

$$\Phi(\lambda) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{b_k}{b_k + 2\lambda} \right)^{1/2}$$

Autrement dit, Y est la somme de n variables gamma admettant le même paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$, mais des paramètres d'échelle différents $b_k/2$. C'est seulement dans le cas où les b_k sont égaux (c'est-à-dire dans le cas où les gaussiennes Z_i sont indépendantes et admettent la même variance) que l'on obtient une loi gamma avec $\alpha = n/2$.

Pour obtenir des variables exponentielles, plus faciles à manipuler que les gamma $1/2$ - il suffit de faire la somme de deux V.A. vectorielles du type précédent : autrement dit, prenant (Z_i') et (Z_i'') indépendantes avec la même matrice de covariance σ_{ij} la V.A.

$$Y = \sum Z_i'^2 + \sum Z_i''^2$$

admet la loi

$$(II-1) \quad \Phi(\lambda) = \prod_{k=1}^n \frac{b_k}{b_k + 2\lambda}$$

donc se met sous la forme d'une somme de n exponentielles indépendantes (admettant des moyennes différentes $2/b_k$).

II.2 Cas d'une F.A.

Moyennant quelques précautions, ces résultats vont subsister dans le cas infini, c'est-à-dire dans le cas d'une F.A. On se donne une F.A. gaussienne $Z(x)$ sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n) avec

$$E Z(x) = 0 \quad \langle Z(x), Z(y) \rangle = C(x,y)$$

ainsi qu'une mesure positive μ sur \mathbb{R} que, pour simplifier, nous supposerons de somme unité

$$\int \mu(dx) = 1$$

Notre objectif est de trouver la loi de probabilité de la V.A. :

$$(II-2) \quad Y = \int \mu(dx) (Z(x))^2$$

Pour cela, on va procéder à la décomposition factorielle de la F.A. $Z(x) = Z(x, \omega)$. Entre les deux espaces de Hilbert

$$H_1 = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad ; \quad H_2 = L^2(\mathbb{R}, \mu)$$

agissent les opérateurs duaux E_1 et E_2 :

$$E_1 : H_1 \rightarrow H_2 \quad E_2 : H_2 \rightarrow H_1$$

définis comme suit : à toute V.A. $X \in H_1$, E_1 associe la fonction $f_X \in H_2$ telle que

$$f_X(x) = \langle X Z(x) \rangle = \int Z(x, \omega) X(\omega) P(d\omega)$$

De même à toute fonction $f \in H_2$, E_2 associe la V.A. $X_f \in H_1$ telle que

$$X_f(\omega) = \int Z(x, \omega) f(x) \mu(dx)$$

Les opérateurs $E_2 E_1$ et $E_1 E_2$ sont des opérateurs auto adjoints et leurs valeurs propres sont ≥ 0 puisque, par exemple, pour $f \in H_2$:

$$\langle E_1 E_2 f, f \rangle = \langle E_2 f, E_2 f \rangle = \|E_2 f\|^2 \geq 0$$

Explicitement, on a $E_1 E_2 f = g$ avec

$$g(x) = \int C(x,y) f(y) \mu(dy)$$

Nous supposons que la covariance $C(x,y)$ est bornée :

$$|C(x,y)| \leq B < \infty$$

(condition automatiquement réalisée dans le cas stationnaire). On sait que, dans ce cas, l'opérateur $E_1 E_2$ est compact, donc admet un spectre dénombrable, et que $C(x,y)$ se met alors sous la forme

$$(II-3) \quad C(x,y) = \sum \lambda_n^2 f_n(x) f_n(y)$$

où les λ_n^2 sont les valeurs propres non nulles de $E_1 E_2$ (positives non nécessairement distinctes) et les f_n une suite orthonormée de fonctions propres associées au λ_n^2 . Pour chaque n , la V.A. $E_2 f_n$ est fonction propre de $E_2 E_1$, associée à la même valeur propre λ_n^2 , puisque

$$(E_2 E_1)(E_2 f_n) = E_2(E_1 E_2 f_n) = \lambda_n^2 E_2 f_n$$

et sa norme est λ_n , puisque

$$\|E_2 f_n\|^2 = \langle f_n, E_1 E_2 f_n \rangle = \lambda_n^2 \|f_n\|^2 = \lambda_n^2$$

Ainsi, les $Y_n = \frac{1}{\lambda_n} E_2 f_n$ forment une suite orthonormée de fonctions propres pour $E_2 E_1$, avec

$$E_1 Y_n = \lambda_n f_n \quad ; \quad E_2 f_n = \lambda_n Y_n$$

et la F.A. $Z(x, \omega)$ admet elle-même la décomposition

$$(II-4) \quad Z(x, \omega) = \sum \lambda_n f_n(x) Y_n$$

Calculons alors la V.A. Y définie en (II-2). D'après (II-4), et l'orthogonalité des f_n , on trouve :

$$\begin{aligned} Y &= \int \mu(dx) Z^2(x) = \int \sum_{n,m} \lambda_n \lambda_m f_n(x) f_m(x) \mu(dx) Y_n Y_m \\ &= \sum_n \lambda_n^2 Y_n^2 \end{aligned}$$

Cette relation :

$$(II-5) \quad Y = \sum_n \lambda_n^2 Y_n^2$$

montre que Y est la somme d'une suite infinie de V.A. indépendantes admettant des lois gamma avec $\alpha = 1/2$ et des paramètres d'échelle différents $b_n = 1/2 \lambda_n^2$ (l'indépendance résulte du fait que les Y_n , étant gaussiennes et orthogonales, sont nécessairement indépendantes).

II.3 Application.

D'après (II-5), on voit que tout se ramènera, dans les applications, à trouver les valeurs propres de l'opérateur $E_1 E_2$. Pour former un exemple simple, nous allons procéder en sens inverse, et construire une covariance à partir de valeurs propres connues. Pour cela, nous partirons du développement de la densité gaussienne à deux variables en polynômes d'Hermite normalisés :

$$\frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}} = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} \sum_{n \geq 0} \rho^n \eta_n(x) \eta_n(y)$$

Multipliant par $\exp\left(\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2)\right)$, nous obtenons

$$e^{-\frac{\rho}{2(1-\rho^2)}(x-y)^2} = \sqrt{1-\rho^2} e^{-\frac{\rho}{2(1+\rho)}(x^2+y^2)} \sum_{n \geq 0} \rho^n \eta_n(x) \eta_n(y)$$

Etant supposé que $0 < \rho < 1$, changeons x et y en ax et ay , avec

$$a = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho}}$$

On voit que la covariance $C(h) = e^{-\frac{h^2}{2}}$ vérifie la relation :

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} = \sqrt{1-\rho^2} e^{-\frac{1-\rho}{2}(x^2+y^2)} \sum_{n \geq 0} \rho^n \eta_n(ax) \eta_n(ay)$$

Les polynomes $\eta_n(ax)$ sont orthogonaux relativement à la fonction $g(ax)$, où g est la densité gaussienne réduite. Ainsi les fonctions :

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{1-\rho}{2}x^2} \eta_n(ax)$$

seront elles-mêmes orthogonales vis-à-vis de la fonction

$$g(ax) e^{(1-\rho)x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-\rho)^2}{2\rho}x^2}$$

Cette expression ne diffère que par un facteur constant de la densité $g_\sigma(x)$ d'une loi de Gauss de variance

$$\sigma^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

On trouve ainsi :

$$(II-6) \quad e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} = (1-\rho) \sum_{n \geq 0} \rho^n f_n(x) f_n(y)$$

où les f_n se déduisent des φ_n ci-dessus par normalisation

$$f_n = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^{1/4} \varphi_n$$

et constituent une suite complète orthonormée dans $L^2(\mathbb{R}, g_\sigma)$.
La variable Y est alors :

$$Y = \int Z^2(x) g_\sigma(x) dx$$

où $Z(x)$ est une F.A. gaussienne centrée admettant la covariance (II-6). Comme $Z(x)$ admet la représentation :

$$Z(x) = \sqrt{1-\rho} \sum \rho^{n/2} Y_n f_n(x)$$

où les Y_n sont des gaussiennes centrées, normées, indépendantes, on trouve en fait :

$$Y = (1-\rho) \sum_{n \geq 0} \rho^n Y_n^2$$

Ainsi Y est somme de variables gamma indépendantes, admettant le même paramètre $\alpha = 1/2$, mais des paramètres d'échelle différents :

$$b_n = \frac{1}{2(1-\rho)\rho^n}$$

Pour obtenir des lois exponentielles plutôt que des lois de paramètre $1/2$, nous prendrons deux F.A. $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$ indépendantes et équivalentes à $Z(x)$ et :

$$Y = \int \frac{Z_1^2(x) + Z_2^2(x)}{2} g_\sigma(x) dx$$

sera de la forme

$$Y = (1-\rho) \sum_{n \geq 0} \rho^n S_n$$

avec des S_n indépendantes, exponentielles et d'espérance unité.

En résumé, notre modèle sera le suivant : au niveau ponctuel, nous considérons une F.A. $Y(x)$ définie par :

$$Y(x) = \frac{Z_1^2(x) + Z_2^2(x)}{2}$$

C'est une F.A. stationnaire, avec :

$$E(Y(x)) = 1 ; \langle Z_x Z_y \rangle = 1 + e^{-(x-y)^2}$$

et, pour chaque x , $Y(x)$ obéit à la loi exponentielle de moyenne 1. Alors, la V.A.

$$(II-7) \quad Y = \int Y(x) g_\sigma(x) dx$$

où g_σ est la densité de la loi de Gauss de variance σ^2 , admet la représentation :

$$(II-80) \quad Y = (1-\rho) \sum_{n \geq 0} \rho^n S_n$$

où les S_n sont des variables exponentielles indépendantes, d'espérance 1, et ρ est lié à σ^2 par la relation

$$\sigma^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

c'est-à-dire (puisque $0 \leq \rho \leq 1$) :

$$(II-9) \quad \rho = \frac{1+2\sigma^2 - \sqrt{1+4\sigma^2}}{2\sigma^2}$$

On a $EY = 1$, et pour la variance de Y :

$$\sigma_Y^2 = (1-\rho)^2 \sum \rho^{2n}$$

donc :

$$(II-10) \quad E(Y) = 1, \quad \sigma_Y^2 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

II.4 Forme Explicite de la Loi de Y.

A partir de (II-8), nous voyons que Y admet comme transformée de Laplace la fonction :

$$(II-11) \quad \Phi_Y(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (1-\rho) \rho^n \lambda}$$

Pour trouver l'expression de la densité $f(y)$, nous remarquons que $\Phi(\lambda)$ se met sous la forme :

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{1 + (1-\rho) \rho^n \lambda}$$

avec des coefficients A_n définis comme suit :

$$\begin{cases} A_0 = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\rho^n} \\ A_n = (-1)^n A_0 \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{\rho^{-k} - 1} \right) \end{cases}$$

Ainsi la variable Y admet la densité

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho^n (1-\rho)} e^{-\frac{x}{\rho^n (1-\rho)}}$$

et la fonction de répartition

$$F(y) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{x}{\rho^n (1-\rho)}}$$

Le calcul numérique effectif de ces fonctions ne pose donc aucun problème. Pour comparer la loi réelle de Y avec la prévision du modèle gaussien discrétisé, il faut calculer les coefficients C_n du développement

$$-\log [1 - G(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \eta_n(z)$$

et utiliser l'anamorphose :

$$Y' = \sum C_n r^n \eta_n(Z')$$

où Z' est une gaussienne réduite. Le paramètre r doit être pris de manière à réaliser l'égalité des variances de Y et Y' , soit :

$$\sigma_Y^2 = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \sum C_n^2 r^{2n}$$

Il est d'autre part intéressant de comparer la loi de Y avec la loi gamma de même moyenne et de même variance :

$$\frac{\alpha}{b} = 1 \quad \frac{\alpha}{b^2} = \sigma_Y^2$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_Y^2} \quad b = \sigma_Y^2$$

Les tableaux suivants montrent les valeurs numériques correspondant à $\sigma_Y^2 = 2/3, 1/3$ et $0,1$. Les valeurs choisies pour x sont celles qui réalisent des quantiles simples pour la loi de Y' (modèle gaussien discrétisé). Pour chaque x, les 3 valeurs portées dans les colonnes f(x) et 1-F(x) concernent, dans l'ordre : le modèle gaussien discrétisé, la loi réelle de Y, et enfin la loi gamma de paramètres $\alpha = 1/\sigma_Y^2, b = \sigma_Y^2$.

On note que, dans l'ensemble, les trois lois sont très voisines, avec un accord particulièrement bon entre la loi réelle de Y et celle que fournit le modèle gaussien discrétisé. La loi gamma de même variance, tout en restant assez proche des deux autres, s'en écarte cependant de manière plus significative. Ainsi, dans les trois cas de figure étudiés, le modèle gaussien discrétisé donne une très bonne approximation de la loi réelle.

TABLEAU 8

$$\sigma_Y^2 = 2/3 \quad , \quad \rho = 1/5 \quad , \quad \alpha = 3/2 \quad , \quad r = 0,8401999641$$

x	f(x)	1-F(x)
0,011486	0,14893	0,99900
	0,21837	0,99832
	0,00406	0,99999
0,045411	0,35882	0,99000
	0,41266	0,98716
	0,10963	0,99839
0,203092	0,69366	0,9
	0,68887	0,89431
	0,69867	0,92796
0,470998	0,71580	0,7
	0,69999	0,69821
	0,80135	0,70776
0,785591	0,57223	0,5
	0,56549	0,49827
	0,60064	0,49021
1,214421	0,36847	0,3
	0,36953	0,30265
	0,35924	0,28806
2,078683	0,13024	0,1
	0,13223	0,10067
	0,12230	0,09785
3,805623	0,01354	0,01
	0,01342	0,00967
	0,01412	0,01130
5,492175	0,00137	0,001
	0,00128	0,00091
	0,00171	0,00137

$$\sigma_X^2 = 1/3 \quad , \quad \rho = 1/2 \quad , \quad \alpha = 3 \quad , \quad r = 0,6141888295$$

x	f(x)	1-F(x)
0,078021	0,04286	0,999
	0,06503	0,99821
	0,00550	0,99993
0,160763	0,18677	0,99
	0,21540	0,98692
	0,09235	0,99676
0,376290	0,62681	0,9
	0,61818	0,89453
	0,63688	0,91928
0,638410	0,83241	0,7
	0,81051	0,69961
	0,90989	0,70342
0,886556	0,75124	0,5
	0,74245	0,50356
	0,78428	0,48910
1,197689	0,52868	0,3
	0,53281	0,30398
	0,51677	0,28691
1,771111	0,20391	0,1
	0,20858	0,10062
	0,18889	0,09734
2,829996	0,02275	0,01
	0,02222	0,00936
	0,02395	0,01202
3,817313	0,00238	0,001
	0,00209	0,00083
	0,00334	0,00167

TABIEAU 9

$\sigma_Y^2 = 0,1$, $\rho = 9/11$, $\alpha = 10$, $r = 0,34563986$		
x	f(x)	1-F(x)
0,31093	0,02591	0,999
	0,03306	0,99859
	0,01155	0,99966
0,42296	0,16089	0,99
	0,17378	0,98837
	0,12351	0,99371
0,62532	0,78542	0,9
	0,77524	0,89754
	0,80686	0,90744
0,81243	1,27991	0,7
	1,25884	0,70109
	1,34013	0,69797
0,96432	1,29519	0,5
	1,28896	0,50329
	1,31577	0,49143
1,13588	1,00291	0,3
	1,01196	0,30287
	0,98099	0,29203
1,42067	0,43194	0,1
	0,43932	0,09997
	0,41172	0,09953
1,89096	0,05383	0,01
	0,05224	0,00932
	0,05727	0,01187
2,29545	0,00597	0,001
	0,00524	0,00083
	0,00807	0,00158

TABLEAU 10

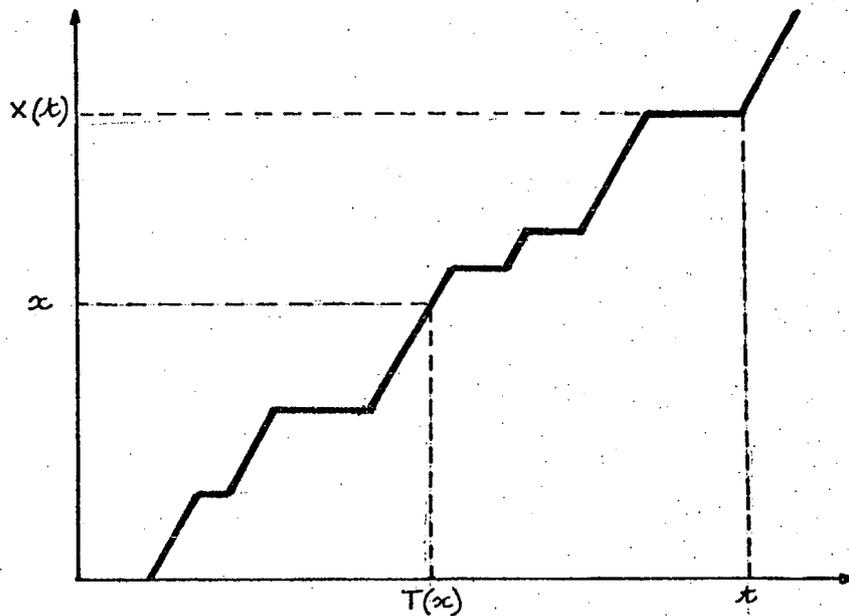
III - LOI EN 0,1 AU NIVEAU PONCTUEL.

Comme dernier exemple, nous avons choisi le processus de Markov à deux états sur la droite réelle : lorsque $Z_0 = 1$, la transition à l'état 0 se produit au bout d'un temps T , de loi exponentielle et d'espérance $1/a$. De même, pour $Z_0 = 0$, la date T de la transition en 1 est exponentielle et d'espérance $1/b$. On a :

$$p = \frac{b}{a+b} \qquad q = \frac{a}{a+b}$$

comme probabilité stationnaire de l'état 1 et de l'état 0. L'état initial étant régi par cette probabilité stationnaire, on pose :

$$X(t) = \int_0^t Z(\tau) d\tau$$



S'agissant d'un processus monotone (non décroissant) en t , on peut considérer le processus inverse $T(x)$, plus facile à traiter.

Pour avoir la loi de $X(t)$, on utilisera la relation assez évidente :

$$P(X(t) < x) = P(T(x) > t)$$

Quelques instants de réflexion sur la figure ci-jointe montrent :

$$P(T(x) > t) = q e^{-ax} \int_{t-x}^{\infty} b e^{-b\tau} d\tau + \sum_{n \geq 1} \frac{a^n x^n}{n!} e^{-ax} \left[q b^{n+1} \int_{t-x}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} e^{-b\tau} d\tau + p b^n \int_{t-x}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-b\tau} d\tau \right]$$

D'où la loi de $X(t)$, que nous mettrons sous la forme plus maniable :

$$(III-1) \left\{ \begin{array}{l} P(X_t < x) = \\ e^{-(a-b)x-bt} \left[q + \sum_{n \geq 1} \frac{a^n x^n}{n!} \left(q \frac{b^n (t-x)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b^k (t-x)^k}{k!} \right) \right] \end{array} \right.$$

La loi de X_t comporte un atome en $x = 0$, égal à $q e^{-bt}$, et de même un atome en $x = t$, égal à $p e^{-at}$.

La covariance de Z_t est :

$$C(h) = p q e^{-c(h)} \quad (c = a + b)$$

et la variance de X_t est donc

$$\sigma_{X_t}^2 = \frac{2 pq}{c^2} (e^{-ct} - 1 + ct)$$

Fixons la valeur $t = 1$, et faisons varier a et b en vue de comparer la loi réelle (III-1) avec les prévisions du modèle gaussien discrétisé, qui donne ici :

$$Y = 1 - G \left(\frac{z_0 - rZ}{\sqrt{1-r^2}} \right)$$

(Z , gaussienne réduite). On doit avoir :

$$E(Y) = 1 - G(z_0) = p$$

et de même, pour la variance, à partir du développement

$$Y = 1 - G(z_0) - g(z_0) \sum_{n \geq 1} \frac{r^n}{n!} H_{n-1}(z_0) H_n(Z)$$

on voit qu'il faut choisir r de façon à avoir :

$$\frac{2}{c^2} pq (e^{-c} - 1 + c) = (g(z_0))^2 \sum_{n \geq 1} \frac{r^{2n}}{n!} (H_{n-1}(z_0))^2$$

Les résultats de la comparaison des deux lois ne sont pas excellents, nettement moins bons en tout cas que dans l'exemple du paragraphe précédent. Ceci est lié à la présence d'atomes en 0 et 1, c'est-à-dire à l'existence d'un effet 0 assez prononcé, dont le modèle gaussien discrétisé ne peut en aucune façon rendre compte.

Dans les tableaux qui suivent, sous les rubriques f et $1-F$, on a porté dans l'ordre d'abord le résultat du modèle gaussien discrétisé, ensuite celui de la loi réelle. En ce qui concerne les deux premiers tableaux, on a $p = 0,5$ et les lois sont symétriques, c'est pourquoi on s'est arrêté à $x = 1/2$. Le premier tableau ($r = 1/\sqrt{2}$, $z_0 = 0$) correspond au cas où le modèle discrétisé fournit la loi uniforme sur $(0,1)$. La loi réelle s'en écarte notablement, du fait des deux atomes qui bloquent 5/100 environ de la masse en 0, et autant en 1. Sur le tableau suivant (12), la loi est encore symétrique, mais avec des atomes à peu près négligeables. L'accord est bien meilleur, sauf pour les très petites valeurs.

L'exemple suivant (tableau 13) correspond à une moyenne très faible (32 ppm) avec une forte variance relative. Le modèle gaussien discrétisé diffère peu d'une loi lognormale, et se trouve en désaccord très violent avec la loi réelle, surtout aux faibles valeurs (à cause d'un effet 0 très intense), et aussi aux très

fortes valeurs. Le dernier exemple (Tableau 14) où l'effet 0 est négligeable montre, au contraire, un accord acceptable, sauf peut-être aux très faibles et très fortes valeurs. La conclusion générale s'impose : le modèle discrétisé est franchement mauvais s'il y a un effet zéro important, à peu près acceptable au contraire si l'effet 0 est négligeable.

$S^2 = 1/12$, $r = 1/2$, $p = 0,5$, $z_0 = 0$ Atome en 0 = Atome en 1 = 0,0465767		
x	f(x)	1-F(x)
0,0001	1 0,4197	0,999900 0,953375
0,001	1 0,4215	0,999 0,95294
0,01	1 0,4394	0,99 0,94849
0,05	1 0,5195	0,95 0,92675
0,1	1 0,6190	0,9 0,89509
0,2	1 0,8059	0,8 0,81724
0,3	1 0,9584	0,7 0,72226
0,4	1 1,0582	0,6 0,61453
0,5	1 1,0929	0,5 0,5

TABLEAU 11

$s^2 = 0,02574712$, $p = 0,5$, $z_0 = 0$, $r = 0,4$ Atome en 0 = Atome en 1 = $4,82 \cdot 10^{-5}$		
x	f(x)	1-F(x)
0,05	0,0073	0,999918
	0,0305	0,999180
0,10	0,0698	0,99834
	0,0993	0,99615
0,20	0,5086	0,97310
	0,4695	0,97074
0,30	1,2773	0,88523
	1,2039	0,88956
0,40	1,9991	0,71921
	2,0244	0,72664
0,50	2,2913	0,5
	2,3923	0,5

TABLEAU 12

$S^2 = 1,877965 \times 10^{-9}$ $S^2/m^2 = 1,870748$		
$z_0 = 4$, $m = p = 3,1686 \cdot 10^{-5}$, $r = 0,25$		
Atome en 0 : 0,3432732 ; Atome en 1 : ~ 0		
$x \times 10^6$	$f(x)$	$1-F(x)$
0,85899	14758	0,994289
	12210	0,646154
2,39858	31094	0,95671
	11923	0,62757
6,69763	34893	0,80562
	11122	0,57804
18,7021	19024	0,48749
	9078	0,45709
52,222	4487	0,16436
	4867	0,22932
144,823	394	0,02245
	657	0,02787
407,186	10,56	0,00121
	1,02	0,00004
1137,000	0,06555	$1,46 \cdot 10^{-5}$
	0,00001	$2 \cdot 10^{-10}$

TABLEAU 13

$S^2 = 0,0027706$		$S^2/m^2 = 0,27706$	
$m = p = 0,1$		$r = 0,29$	
x	f(x)	1-F(x)	
0,01	0,24477	0,99944	
	0,13420	0,99524	
0,05	7,67262	0,84352	
	6,40960	0,82671	
0,07	8,85678	0,67404	
	7,68518	0,68362	
0,1	7,36770	0,42469	
	7,32821	0,45243	
0,15	3,42886	0,15894	
	3,88246	0,16774	
0,20	1,22200	0,05032	
	0,91424	0,05246	
0,25	0,37389	0,01414	
	0,31376	0,00918	
0,30	0,10200	0,00359	
	0,05737	0,00149	
0,40	0,00555	$1,698 \cdot 10^{-4}$	
	0,00098	$2,12 \cdot 10^{-5}$	

TABLEAU 14