ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

Fontainebleau/CGMM N-695

REMARQUES SUR LE KRIGEAGE ET SON DUAL

G. MATHERON

Avril 1981

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE : 35, RUE SAINT-HONORÉ — 77305 FONTAINEBLEAU (FRANCE)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

REMARQUES SUR LE KRIGEAGE ET SON DUAL

par

G. MATHERON

Table des Matières

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE : 35, RUE SAINT-HONORÉ — 77305 FONTAINEBLEAU (FRANCE)

REMARQUES SUR LE KRIGEAGE ET SON DUAL

par

G. MATHERON

Dans une note antérieure, pour établir l'équivalence formelle des splines et du krigeage, j'ai montré que le krigeage, considéré comme interpolateur, constituait toujours la solution d'un problème de splines et réciproquement, les opérateurs correspondants pouvant toujours être mis en dualité dans un espace convenable. Dans ce qui suit, j'aborde le même problème par des méthodes tout-à-fait élémentaires, qui ont l'avantage de faire apparaître comme à peu près trivial le résultat de dualité rappelé ci-dessus, et de fournir quelques éléments nouveaux. De fait, ce qui contribuait le plus à masquer l'extrême simplicité de ces résultats sous le voile épais d'un formalisme algébrique un peu ésotérique, c'est essentiellement le fait que l'on cherchait, d'entrée de jeu, à travailler dans des espaces fonctionnels de dimension infinie. Je ferai ici exactement l'inverse : j'établirai toutes les propriétés intéressantes dans le cas fini, ce qui, comme on va le voir, se révèle très facile, et il se trouve que le passage ultérieur au cas infini ne soulève pas non plus de difficultés notables.

NOTATIONS.

Soit Y_i, $i \in I$ une famille (finie) de variables aléatoires, admettant des espérances nulles et la covariance

$$\sigma_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$$

Je suppose essentiellement que la matrice σ_{ij} est régulière, et je désignerai par B^{ij} la matrice inverse :

$$B = \sigma^{-1}$$

Je désignerai par H l'espace vectoriel engendré par les Y_i , c'est-à-dire la famille de toutes les combinaisons linéaires de ces variables. Muni du produit scalaire $\langle Y\ Y' \rangle = E(Y\ Y')$, cet espace H est un espace de Hilbert c'est-à-dire en fait un espace euclidien pyisque H est de dimension finie. Si nous rapportons H à la base Y_i, $i \in I$, tout $Y \in H$ est de la forme

$$Y = \lambda^i\ Y_i$$

et le produit scalaire de $Y = \lambda^i\ Y_i$ avec $Y' = \lambda'^i\ Y_i$ est

$$< Y\ Y' > = \lambda^i\ \sigma_{ij}\ \lambda'_j$$

A la base Y_i, $i \in I$, il est commode d'adjoindre la <u>base duale</u> Y^j, $j \in I$, dont les éléments sont définis par :

$$Y^j = B^{ji}\ Y_i \quad ; \quad Y_i = \sigma_{ij}\ Y^j$$

avec, évidemment,

$$< Y^j\ Y_i > = \delta_i^j$$

Alors, tout $Y \in H$ peut s'écrire :

$$Y = \lambda^i\ Y_i = f_j\ Y^j$$

avec les formules de transformation évidentes :

$$\lambda^i = B^{ij}\ f_j \quad ; \quad f_j = \sigma_{ji}\ \lambda^i$$

(les λ^i sont les composantes contravariantes de Y, et les f_j ses composantes covariantes).

Nous supposerons ensuite que l'ensemble I des indices admet une partition $I = A \cup V$ en deux groupes A et V : je désignerai systématiquement par les lettres grecques α, β, γ... les éléments de A, par u, v, w... ceux de V, et par i, j... ceux de I tout entier. Cette convention permet d'écrire $\lambda^\alpha\ Y_\alpha$ au lieu de $\sum_{\alpha \in A} \lambda^\alpha\ Y_\alpha$, $\lambda^i\ Y_i$ au lieu de $\sum_{i \in I} \lambda^i\ Y_i$ etc..., l'ensemble de sommation résultant sans aucune ambiguité de la nature même des indices.

UNE IDENTITE.

Ceci dit, consodérons la forme quadratique

$$B(z) = B^{ij} z_i z_j$$

où les z_i sont des variables quelconques, et cherchons à la décomposer selon les deux groupes d'indices A et V. Pour cela, considérons une famille de gaussiennes Z_i avec $E\ Z_i = 0$, $E\ Z_i\ Z_j = \sigma_{ij}$. Cette famille admet la loi multivariable de densité :

$$f(z) = \frac{1}{((2\pi)^N \text{ Det } \sigma)^{1/2}} \exp\left\{- \frac{1}{2} B^{ij} z_i z_j\right\}$$

La sous-famille des Z_α , $\alpha \in A$, de son côté, admet la densité :

$$f_A(z_\alpha) = \frac{1}{((2\pi)^{N_A} \text{ Det}(\sigma_{\alpha\beta}))^{1/2}} \exp\left\{- \frac{1}{2} Q^{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta\right\}$$

où $Q^{\alpha\beta}$ est la matrice inverse de $\sigma_{\alpha\beta}$ (il s'agit de matrices $N_A \times N_A$, avec N_A = Card A, de sorte que les $Q^{\alpha\beta}$ ne coïncident absolument pas avec les $B^{\alpha\beta}$).

Enfin, lorsque les $Z_\alpha = z_\alpha$ sont fixées, les variables restantes, c'est-à-dire les Z_u admettant comme loi conditionnelle la loi de Gauss définie par :

$$E(Z_u/z_\alpha) = K_u^\alpha z_\alpha$$

$$\text{Cov } (Z_u.Z_v/z_\alpha) = S_{uv}$$

où la matrice des covariances conditionnelles S_{uv} ne dépend pas des z_α. Désignons par C^{uv} l'inverse de S_{uv}. La loi conditionnelle des Z_u admet donc la densité :

$$f_V(z_u/z_\alpha) = $$

$$\frac{1}{((2\pi)^{N_V} \text{ Det } S_{uv})^{1/2}} \exp\left\{- \frac{1}{2} C^{uv} (z_u - K_u^\alpha z_\alpha)(z_v - K_v^\beta z_\beta)\right\}$$

En écrivant $f(z) = f_A(z_\alpha)\ f_V(z_u/z_\alpha)$, on obtient donc l'identité suivante qui nous sera très utile :

$$B^{ij}\, z_i\, z_j = Q^{\alpha\beta}\, z_\alpha\, z_\beta + C^{uv}\,(z_u - K_u^\alpha\, z_\alpha)(z_v - K_v^\beta\, z_\beta) \tag{1}$$

Dans cette identité, les K_u^α sont les coefficients du krigeage (simple) de Y_u sur les Y_α, i.e. la solution du système

$$K_u^\alpha\, \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta u}$$

$Q^{\alpha\beta}$ est l'inverse de $\sigma_{\alpha\beta}$, et C^{uv}, de son côté, est l'inverse de la matrice S_{uv} des covariances conditionnelles.

Par ailleurs, on a évidemment :

$$B^{ij}\, z_i\, z_j = B^{\alpha\beta}\, z_\alpha\, z_\beta + 2\, B^{u\alpha}\, z_u\, z_\alpha + B^{uv}\, z_u\, z_v$$

En identifiant avec (1), il vient très simplement :

$$\left\{\begin{array}{l} B^{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta} + K_u^\alpha\, C^{uv}\, K_u^\beta \\ B^{uv} = C^{uv} \quad ; \quad B^{u\alpha} = -\, C^{uv}\, K_v^\alpha \end{array}\right. \tag{2}$$

et, en sens inverse :

$$\left\{\begin{array}{l} C^{uv} = B^{uv} \\ Q^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} + K_u^\alpha\, B^{u\beta} = B^{\alpha\beta} + K_u^\beta\, B^{u\alpha} \end{array}\right. \tag{2'}$$

LE KRIGEAGE UNIVERSEL ET SON DUAL.

Pour passer au krigeage universel, donnons-nous une famille f^ℓ de fonctions de base, destinées à jouer le rôle de dérives : les f^ℓ sont, en réalité, des vecteurs f_i^ℓ , $i \in I$. Nous supposons, comme d'habitude, que ces fonctions sont linéairement indépendantes sur A, soit :

$$c_\ell\, f_\alpha^\ell = 0 \Rightarrow c_\ell = 0 \tag{3}$$

Il est très commode, pour chaque ℓ , d'interpréter les f_i^ℓ , $i \in I$ comme les composantes covariantes d'un vecteur $Y^\ell \in H$, ce qui revient à poser :

$$Y^\ell = f_i^\ell Y^i = f_i^\ell B^{ij} Y_j$$

Comme $< Y^i Y_j > = \delta_j^i$, on voit qu'inversement la fonction f^ℓ est donnée par

$$f_j^\ell = < Y^\ell Y_j >$$

Nous désignerons par N le sous-espace de H engendré par ces éléments Y^ℓ . La condition (3) exprime que N ne contient pas d'élément non nul orthogonal aux Y_α : $C_\ell < Y^\ell Y_\alpha > = 0 \Rightarrow C_\ell = 0$.

Il sera commode de désigner par H_A et H_V les sous-espaces de H engendrés par les Y_α et les Y_u respectivement. D'après la relation de dualité $< Y^i Y_j > = \delta_j^i$, il est clair que l'orthogonal $H_A^\perp$ de H_A est le sous-espace engendré par les Y^u, $u \in V$, et de même $H_V^\perp$ est engendré par les Y^α, $\alpha \in A$. La condition (3) équivaut ainsi à :

(3') $$N \cap H_A^\perp = 0$$

Considérons alors la forme quadratique $F(f, a_\ell)$ définie en posant

(4) $$F(f,a) = B^{ij} (f_i - a_\ell f_i^\ell)(f_j - a_s f_j^s)$$

D'après (1) et (2') nous avons aussi :

(4') $$F(f,a) = Q^{\alpha\beta} (f_\alpha - a_\ell f_\alpha^\ell)(f_\beta - a_s f_\beta^s)$$

$$+ B^{uv}(f_u - a_\ell f_u^\ell - K_u^\alpha(f_\alpha - a_\ell f_\alpha^\ell))(f_v - a_s f_v^s - K_v^\beta(f_\beta - a_s f_\beta^s))$$

Le théorème de dualité est une conséquence élémentaire de ces deux écritures. En effet, pospns-nous le problème suivant : les f_α étant donnés, trouver les f_u et les a_ℓ qui minimisent $F(f,a)$.

Pour résoudre ce problème, nous devons, par exemple, minimiser l'expression (4') d'abord en f_u (les a_ℓ étant fixés), ce qui donne une fonction des a_ℓ seuls qu'il faut ensuite minimiser en a_ℓ. Or la matrice B^{uv} est de type positif strict, en tant qu'inverse de la matrice S_{uv} des covariances conditionnelles. Les a_ℓ étant fixés, le minimum de $F(f,a)$ relativelent aux f_u, est donc réalisé si et seulement si

$$(5) \qquad f_u = a_\ell f_u^\ell + K_u^\alpha (f_\alpha - a_\ell f_\alpha^\ell)$$

Lorsque l'on donne aux f_u les valeurs définies en (5), la seconde forme quadratique de (4') s'annule, et il reste :

$$F(f,a) = Q^{\alpha\beta} (f_\alpha - a_\ell f_\alpha^\ell)(f_\beta - a_\ell f_\beta^\ell)$$

A son tour, comme on sait, cette expression est minimale en a_ℓ si et seulement si :

$$(5') \qquad a_\ell = \lambda_\ell^\alpha f_\alpha$$

où les λ_ℓ^α sont les coefficients de l'estimateur optimal de la dérive. Substituant cette expression (5') dans la relation (5), en nous souvenant que les K_u^α sont les coefficients du krigeage simple de Y_u sur les Y_α, nous voyons apparaître l'expression habituelle de krigeage universel, telle qu'elle résulte du théorème d'additivité :

$$f_u = f_\alpha \lambda_\ell^\alpha f_u^\ell + K_u^\alpha (f_\alpha - \lambda_\ell^\beta f_\beta^\ell f_\alpha^\ell)$$

Autrement dit

$$(6) \qquad f_u = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

où les Λ_u^α sont <u>les coefficients du krigeage universel</u> de Y_u sur les Y_α.

Maintenant, nous pouvons aussi résoudre le même problème de minimum à partir de la première expression (4) de $F(f,a)$, en cherchant cette fois d'abord le minimum de F en a, les f_u étant donnés, puis en minimisant le résultat en f_u.

Or, les f_i étant donnés, minimiser (4) en a_ℓ revient à trouver la projection de la fonction f sur le sous-espace engendré par les fonctions f^ℓ (dans ce langage fonctionnel, on utilise évidemment la norme $\|f\|^2 = B^{ij} f_i f_j$).

Si nous considérons les f_i comme les composantes covariantes de la V.A.

$$Y_f = f_i Y^i \in H$$

on voit que ceci revient exactement à projeter Y_f sur le sous-espace $N \subset H$ engendré par les $Y^\ell = f_i^\ell Y^i$. Cette projection $\Pi_N Y_f$ est de la forme

$$\Pi_N Y_f = a_\ell Y^\ell$$

avec des coefficients a_ℓ réalisant le minimum de (4) (les f_i étant donnés). En adaptant ces valeurs, il reste ensuite :

$$F(f,a) = \|Y_f - \Pi_N Y_f\|^2 = \|\Pi_{N^\perp} Y_f\|^2$$

($N^\perp$ est l'orthogonal de N dans H, et $\Pi_{N^\perp}$ son projecteur). Ainsi, si nous nous posons le problème suivant :

"Trouver $Y_f = f_i Y^i \in H$ minimisant $\|\Pi_{N^\perp} Y_f\|^2$ sous la condition

$$< Y_f Y_\alpha > = f_\alpha \text{ donnés"}$$

nous voyons que la solution est donnée par (6), c'est-à-dire :

$$(6') \qquad Y_f = f_\alpha (Y^\alpha + \Lambda_u^\alpha Y^u)$$

où les Λ_u^α sont les coefficients du K.U. de Y_u sur les Y_α .

OPERATEURS ASSOCIES.

Nous désignerons par Λ l'opérateur du krigeage universel (sur H_A avec l'espace N de dérives) : A tout $Y \in H$, cet opérateur associe l'élément ΛY défini par la relation

$$\Lambda Y = Y_\alpha (\lambda^\alpha + \lambda^u \Lambda_u^\alpha) \tag{7}$$

où les $\lambda^i = < Y\, Y^i >$ sont les composantes contravariantes de Y. Désignons par Λ^* l'adjoint de cet opérateur Λ. Il est défini par

$$< \Lambda^* Y', Y > = < Y', \Lambda Y > \qquad (Y, Y' \in H) \tag{8}$$

Comme ΛY est un élément de H_A, $\Lambda^* Y'$ ne dépend en réalité que de la projection $\Pi_A Y'$ de Y' dans H_A, soit :

$$\Lambda^* = \Lambda \Pi_A$$

Si les f_i sont les composantes covariantes de Y', soit :

$$Y' = f_i Y^i$$

$\Lambda^* Y'$ ne dépend donc que des $f_\alpha = < Y' Y_\alpha >$ et non des f_u. Avec $Y = \lambda^i Y_i$, la relation de définition (8) donne

$$\begin{aligned} f_i \lambda^j < \Lambda^* Y^i, Y_j > &= f_i < Y^i, \Lambda Y > \\ &= f_i < Y^i Y_\alpha > (\lambda^\alpha + \lambda^u \Lambda_u^\alpha) \\ &= f_\alpha (\lambda^\alpha + \lambda^u \Lambda_u^\alpha) \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de $f_i \lambda^j$, on trouve donc

$$\Lambda^* Y^u = 0$$

comme il est naturel (puisque $\Lambda^* = \Lambda \Pi_A$), puis :

$$< \Lambda^* Y^\alpha, Y_\beta > = \delta_\beta^\alpha$$

$$< \Lambda^* Y^\alpha, Y_u > = \Lambda_u^\alpha$$

Autrement dit :

$$\Lambda^* Y^\alpha = Y^\alpha + \Lambda_u^\alpha Y^u$$

et par suite, avec $Y' = f_i Y^i$:

(7') $$\Lambda^* Y' = f_\alpha (Y^\alpha + \Lambda_u^\alpha Y^u)$$

Cet élément coïncide donc avec l'élément Y_f de la formule (6') lequel réalise le minimum de $\|\Pi_{N^\perp} Y_f\|^2$ lorsque les f_α sont donnés : ce problème de minimum et celui du K.U. sont donc bien en dualité.

CARACTERISATION GEOMETRIQUE.

En vue d'aller plus lojn, je rappelle rapidement la caractérisation géométrique de ces opérateurs : l'espace H_A engendré par les Y_α se décompose en somme directe :

$$H_A = H_o \oplus N^*$$

où $H_o = H_A \cap N^\perp$ est l'ensemble des combinaisons linéaires autorisées (i.e. orthogonales à N) d'éléments Y_α, et N^* est l'orthogonal de H_o dans H_A , soit :

$$N^* = H_o^\perp \cap H_A = (H_A^\perp \oplus N) \cap H_A$$

Cet espace N^* coïncide avec la projection de N sur H_A, soit

$$N^* = \Pi_A N$$

En effet, si $Y \in N$, on a $\Pi_A Y \in H_A$ et $\Pi_A Y = Y - \Pi_{A^\perp} Y \in H_A^\perp \oplus N$. Inversement, si $Y' \in H_A$ est de la forme $Y' = Y + Y_N$ avec $Y_N \in N$ et $Y \in H_A^\perp$, on a bien $Y' = \Pi_A Y' = \Pi_A Y_N \in \Pi_A N$.

Dans ce contexte, la condition (3'), soit $N \cap H_A^\perp = 0$ signifie que chaque élément de N^* est la projection sur A d'un et <u>un seul</u> élément de N. Autrement dit Π_A est une bijection de N sur N^* , et, en particulier, N et N^* ont la même dimension.

Dans ces conditions, le krigeage ΛY d'un $Y \in H$ est caractérisé comme l'unique élément de $H_A = H_0 \oplus N^*$ dont la projection sur $H_0 \oplus N$ coïncide avec celle de Y.

De même $\Lambda^* Y$ est l'unique élément de $H_0 \oplus N$ dont la projection sur $H_A = H_0 \oplus N^*$ coïncide avec celle de Y. En résumé :

$$(9) \quad \begin{cases} Y' = \Lambda Y \Leftrightarrow Y' \in H_0 \oplus N^* = H_A \text{ et } Y - Y' \in (H_0 \oplus N)^{\perp} \\ Y' = \Lambda^* Y \Leftrightarrow Y' \in H_0 \oplus N \text{ et } Y - Y' \in (H_0 \oplus N^*)^{\perp} = H_A^{\perp} \end{cases}$$

De fait, le krigeage ΛY est l'élément Y' qui réalise le minimum de $\|Y - Y'\|^2$ sous les conditions

$$Y' \in H_A \quad \text{et} \quad Y - Y' \in N^{\perp}$$

Ainsi $Y - Y'$ doit être orthogonal à tout $\delta Y'$ appartenant à $H_A \cap N^{\perp} = H_0$, soit $Y - Y' \in H_0^{\perp}$, et donc $Y - Y' \in H_0^{\perp} \cap N^{\perp} = (H_0 \oplus N)^{\perp}$ (puisque $Y - Y'$ doit aussi appartenir à $N^{\perp}$). De la condition (3'), on déduit sans difficulté l'unicité de l'élément Y' vérifiant $Y' \in H_A$ et $Y - Y' \in (H_0 \oplus N)^{\perp}$: par suite il coïncide avec le krigeage, soit $Y' = \Lambda Y$.

De même, $\Lambda^* Y$ est l'élément qui réalise le minimum de $\|\Pi_{N^{\perp}} Y'\|^2$ sous la condition $< Y' Y_\alpha > = < Y Y_\alpha >$. On doit donc avoir $< \delta Y', \Pi_{N^{\perp}} Y' > = 0$ pour tout $\delta Y' \in H_A^{\perp}$. Mais cela signifie $\Pi_{N^{\perp}} Y' \in H_A$, et donc aussi $\Pi_{N^{\perp}} Y' \in H_A \cap N^{\perp} = H_0$. Par suite $Y' \in H_0 \oplus N$. D'autre part $Y - Y' \in H_A^{\perp}$, puisque ces deux éléments ont même projection sur H_A. Ici encore, il résulte de (3') que ces deux conditions caractérisent un élément Y' unique, et par suite $Y' = \Lambda^* Y$.

L'ESTIMATEUR OPTIMAL DE LA DERIVE.

Pour plus de commodité, nous allons associer à la base Y^ℓ de l'espace N la base duale constituée des Y_s tels que $< Y^\ell Y_s > = \delta^\ell_s$. (Cela est possible, car la condition (3) implique que les Y^ℓ sont linéairement indépendants). La matrice $g^{\ell s} = < Y^\ell Y^s >$ admet donc une inverse, que nous désignerons par $g_{\ell s}$, et on trouve :

$$Y_s = g_{\ell s} Y^\ell \quad ; \quad Y^\ell = g^{\ell s} Y_s$$

Alors, l'estimateur optimal A_ℓ du coefficient a_ℓ de la dérive $a_\ell f^\ell$ s'identifie au krigeage (universel) de l'élément Y_ℓ :

(10) $$A_\ell = \Lambda Y_\ell$$

De fait, A_ℓ et Y_ℓ sont orthogonaux aux combinaisons linéaires autorisées dans H_A, c'est-à-dire à H_o, et on a $A_\ell - Y_\ell \in H_o^\perp$.

Maintenant, si $A_\ell = \lambda^\alpha_\ell Y_\alpha$, on trouve :

$$< A_\ell Y^s > = \lambda^\alpha_\ell f^s_\alpha = \delta^s_\ell$$

d'après la condition d'universalité habituelle. Mais cela entraine

$$< A_\ell - Y_\ell , Y^s > = 0 \text{ , soit } A_\ell - Y_\ell \in N^\perp$$

On a donc $A_\ell - Y_\ell \in H_o^\perp \cap N^\perp = (H_o \oplus N)^\perp$. Comme $A_\ell \in H_A$, la caractérisation (9) donne bien $A_\ell = \Lambda Y_\ell$.

Désignons, comme d'habitude, par $\mu_{\ell s}$ la matrice covariance des A_ℓ, soit

$$\mu_{\ell s} = < A_\ell A_s >$$

et par $\mu^{\ell s}$ son inverse. En posant

$$A^s = \mu^{\ell s} A_\ell$$

nous associons à la base A_ℓ de l'espace N^* sa base duale, avec la relation usuelle $< A_\ell A^s > = \delta_\ell^s$.

Alors A^s est la projection de Y^s sur H_A :

$$A^s = \Pi_A Y^s$$

De fait, calculons $\Lambda^* A^s$, en utilisant (10) : il vient :

$$< \Lambda^* A^s, Y_\ell > = < A^s \Lambda Y_\ell > = < A^s A_\ell > = \delta_\ell^s$$

On a donc $< \Lambda^* A^s, Y_\ell > = < Y^s, Y_\ell >$. Mais $\Lambda^* A^s$, unique élément de $H_o \oplus N$ dont A^s soit la projection, est nécessairement dans N (car $A^s \in N^* = \Pi_A N$). Par conséquent, la relation $< \Lambda^* A^s, Y_\ell > = < Y^s Y_\ell >$ entraine $\Lambda^* A^s = Y^s$, c'est-à-dire $A^s = \Pi_A Y^s = \Pi_{N^*} Y^s$.

En résumé, les relations entre les A_ℓ, A^s, Y_ℓ et Y^s sont les suivantes :

$$(10') \quad \begin{cases} A_\ell = \Lambda Y_\ell \quad ; \quad Y_\ell = \Pi_N A_\ell \\ A^s = \Pi_{N^*} Y^s \quad ; \quad Y^s = \Lambda^* A^s \end{cases}$$

AUTRES FORMES DE DUALITE.

La matrice Λ_u^α (ou aussi bien la matrice K_u^α du krigeage simple) constitue un interpolateur qui prolonge sur I toute fonction f : $\alpha \rightarrow f_\alpha$ définie sur A, selon la formule :

$$(11) \qquad f_u = f_\alpha \Lambda_u^\alpha$$

cet interpolateur étant caractérisé par la propriété de minimalité que nous avons vue plus haut.

Mais cette matrice représente aussi les coefficients du krigeage de Y_u, soit $Y_u^* = Y_\alpha \Lambda_u^\alpha$. A tout vecteur $Y = \lambda^u Y_u \in H_V$, elle associe donc le vecteur $Y^* = \lambda^\alpha Y_\alpha \in H_A$ dont les composantes sont :

(11') $$\lambda^\alpha = \Lambda_u^\alpha \lambda^u$$

Cette formule, duale de (11), montre que l'on peut également interpréter la matrice Λ comme un interpolateur prolongeant sur I toute fonction $\lambda : u \to \lambda^u$ définie sur V. On peut se demander si cet interpolateur (de V sur I) se laisse lui aussi caractériser par une propriété de minimalité. Dans l'affirmative, il devrait lui correspondre par dualité un opérateur analogue à un krigeage qui associerait au vecteur Y^α l'élément $\Lambda_u^\alpha Y^u$: les Y^u engendrant l'orthogonal $H_A^\perp$ de H_A, il s'agirait donc de l'opérateur associé à un krigeage sur $H_A^\perp$. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi (au signe près), à condition de choisir comme espace de dérive un espace N' (différent de N) convenable. Commençons par le cas le plus simple, celui où N = 0.

CAS DU KRIGEAGE SIMPLE.

La matrice du krigeage simple est

$$K_u^\alpha = Q^{\alpha\beta} \sigma_{\beta u}$$

et nous devons chercher une interprétation du vecteur $K_u^\alpha Y^u$: nous allons voir qu'il s'agit, au signe près, du krigeage simple de Y^α sur l'espace H_A engendré par les Y^u.

Ce résultat apparaît immédiatement sur les relations (2) et (2'). Ces relations donnent, en effet

$$K_v^\alpha B^{uv} = - B^{u\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$- K_v^\alpha < Y^u Y^v > = < Y^\alpha Y^u >$$

Mais on reconnait là l'équation du krigeage simple sur les Y^u :

le vecteur $- K_v^\alpha Y^v$ est bien la projection de Y^α sur $H_A^\perp$:

$$\Pi_{A^\perp} Y^\alpha = - K_v^\alpha Y^v .$$

Pour mieux comprendre l'origine de ce résultat, considérons des gaussiennes centrées Z^i admettant la matrice de covariance $< Z^i Z^j > = B^{ij}$. Leur densité de probabilité fait apparaître l'exponentielle de la forme quadratique

$$Q_1 = \sigma_{ij} z^i z^j = \sigma_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta + 2 \sigma_{\alpha u} z^\alpha z^u + \sigma_{uv} z^u z^v$$

Désignons par χ_{uv} l'inverse de la matrice des B^{uv} (restriction de B^{ij} à $V \times V$), de sorte que la densité des Z^u contient la forme

$$Q_2 = \chi_{uv} z^u z^v$$

De même, soit $\Phi_u^\alpha z^u$ l'espérance conditionnelle de Z^α à $Z^u = z^u$ fixés , $R^{\alpha\beta}$ la covariance conditionnelle des Z^α , et $T_{\alpha\beta}$ son inverse. La loi conditionnelle des Z^α fait donc apparaître la forme quadratique :

$$Q_3 = T_{\alpha\beta} (z^\alpha - \Phi_u^\alpha z^u)(z^\beta - \Phi_v^\alpha z^v)$$

L'identité $Q_1 = Q_2 + Q_3$ donne alors les relations suivantes (duales de (2) et (2')) :

$$(12) \qquad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} \quad ; \quad \sigma_{\alpha u} = - T_{\alpha\beta} \Phi_u^\beta \\ \sigma_{uv} = \chi_{uv} + \Phi_u^\alpha \; T_{\alpha\beta} \Phi_v^\beta \end{cases}$$

et, en sens inverse

$$(12') \qquad \begin{cases} T_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \\ \chi_{uv} = \sigma_{uv} - \Phi_u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} \Phi_v^\beta \end{cases}$$

En fait, χ_{uv} est la matrice inverse de $B^{uv} = C^{uv}$ (d'après (2')), et C^{uv} est elle-même l'inverse de la matrice S_{uv} des covariances conditionnelles des Y_u lorsque les Y_α sont fixés. Ainsi, $\chi_{uv} = S_{uv}$. De même, la matrice $R^{\alpha\beta}$ des covariances conditionnelles des Z^α à Z_u fixés est l'inverse de $T_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ (12'). Donc elle coïncide avec $Q^{\alpha\beta}$:

$$\chi_{uv} = S_{uv} \quad ; \quad R^{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta}$$

De même, puisque $T_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$, la seconde relation (12) s'écrit

$$\Phi_u^\beta \, \sigma_{\alpha\beta} = - \sigma_{\alpha u}$$

et par suite :

$$\Phi_u^\beta = - K_u^\beta \tag{13}$$

On retrouve ainsi le résultat précédent : <u>les $- K_u^\beta$, à β donné, représentent les coefficients du krigeage de Y^β sur les Y^u</u>.

En résumé, nous trouvons ceci :

$$\begin{cases} \text{Krigeage de } Y_u \text{ sur les } Y_\alpha : & K_u^\alpha \, Y_\alpha \\ \text{Krigeage de } Y^\alpha \text{ sur les } Y^u : & - K_u^\alpha \, Y^u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Covariance des résidus } Y_u - K_u^\alpha \, Y_\alpha : S_{uv} \text{ , inverse de } B^{uv} \\ \text{Covariance des résidus } Y^\alpha + K_u^\alpha \, Y^u : Q^{\alpha\beta} \text{ , inverse de } \sigma_{\alpha\beta} \end{cases}$$

D'où aussi :

$$\begin{cases} K_u^\alpha = Q^{\alpha\beta} \, \sigma_{\beta u} = - S_{uv} \, B^{\alpha v} \\ K_u^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta u} \; ; \; K_u^\alpha \, B^{uv} = - B^{\alpha v} \end{cases} \tag{14}$$

Il reste à interpréter les quantités

$$K_u^\alpha \, \sigma_{\alpha v} = K_u^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} \, K_v^\beta$$

$$- K_u^\alpha \, B^{u\beta} = K_u^\alpha \, B^{uv} \, K_v^\beta$$

La première de ces quantités est la covariance $< Y_u^* Y_v^* >$ des krigeages des Y_u et Y_v sur les Y_α, et la seconde, de même, représente la covariance des krigeages de Y^α et Y^β sur les Y^u. On en déduit aussitôt les relations suivantes (qui sont en fait des conséquences purement algébriques des précédentes) :

$$(15) \qquad \begin{cases} K_u^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} \, K_v^\beta = \sigma_{uv} - S_{uv} \\ K_u^\alpha \, B^{uv} \, K_v^\beta = B^{\alpha\beta} - Q^{\alpha\beta} \end{cases}$$

CAS DU KRIGEAGE UNIVERSEL.

Examinons maintenant le cas où il y a un espace N de dérives. Est-il encore vrai que $-\Lambda_u^\alpha Y^u$ représente le krigeage universel de Y^α sur les Y^u ? Nous allons voir que la réponse est oui, à condition de remplacer l'espace N par son orthogonal N' dans $N \oplus N^*$, soit

$$N' = N^\perp \cap (N \oplus N^*) = (A \oplus N) \cap N^\perp \cap H_o^\perp$$

Nous verrons dans un instant quelles sont les fonctions de dérive associées à cet espace N'. Pour l'instant, cherchons à caractériser le krigeage universel d'un $Y \in H$ sur l'espace $H_A^\perp$ engendré par les Y^u, en présence des dérives associées à N'.

Nous allons, pour cela, utiliser le critère géométrique (9), en remplaçant N par N', H_o par l'espace H_o' des combinaisons linéaires des Y^u orthogonales à N' :

$$H_o' = H_{A^\perp} \cap N'^\perp$$

et $H_A = H_o \oplus N^*$ par $H_A^\perp = H_o' \oplus \Pi_{A^\perp} N'$.

D'après ce critère, le krigeage $\tilde{Y}$ de Y doit vérifier :

$$\tilde{Y} \in H_A^\perp , \quad Y - \tilde{Y} \in (H_o' \oplus N')^\perp$$

Notons d'abord que l'orthogonal de $H_o' = H_A^{\perp} \cap N'^{\perp}$ est :

$$H_o'^{\perp} = H_A \oplus N' = H_A \oplus N$$

Celui de $H_o' \oplus N$ est donc

$$(H_o' \oplus N')^{\perp} = (H_A \oplus N) \cap N'^{\perp}$$

Mais l'orthogonal de $N' = N^{\perp} \cap (N \oplus N^*)$ dans $H_A \oplus N$ n'est autre que $H_o \oplus N$, puisque $H_A \oplus N$ est la somme directe des trois sous-espaces orthogonaux H_o, N et N'. On a donc :

$$(H_o' \oplus N')^{\perp} = H_o \oplus N$$

Notre krigeage $\check{Y}$ de l'élément $Y \in H$ doit donc vérifier les deux conditions :

(16) $$\check{Y} \in H_A^{\perp} \quad ; \quad Y - \check{Y} \in H_o \oplus N$$

Soient alors f_i les composantes covariantes de $Y \in H$, c'est-à-dire $Y = f_\alpha Y^\alpha + f_u Y^u$. Considérons l'élément :

$$\Lambda^* Y = f_\alpha \Lambda_u^\alpha Y^u + f_\alpha Y^\alpha$$

D'après le second critère (9), cet élément est caractérisé par les deux conditions :

(16') $$Y - \Lambda^* Y \in H_A^{\perp} \quad ; \quad \Lambda^* Y \in H_o \oplus N$$

Comparant (16) et (16'), nous concluons

$$\check{Y} = Y - \Lambda^* Y = (I - \Lambda^*) Y$$

Si donc nous désignons par $\tilde{\Lambda}$ l'opérateur du krigeage universel sur les Y^u (en présence des dérives de N') et par Λ celui du krigeage sur les Y_α (en présence des dérives de N), il vient :

(17) $$\begin{cases} \Lambda^* + \tilde{\Lambda} = I \\ \Lambda + \tilde{\Lambda}^* = I \end{cases}$$

Avec $Y = f_\alpha Y^\alpha + f_u Y^u$, il vient explicitement

$$\tilde{\Lambda} Y = Y - \Lambda^* Y = (f_u - f_\alpha \Lambda_u^\alpha) Y^u$$

En particulier, avec $Y = Y^\alpha$:

(18) $$\tilde{\Lambda} Y^\alpha = - \Lambda_u^\alpha Y^u$$

ce qui constitue le résultat annoncé.

En l'absence de dérive, les relations (17) deviennent triviales : en effet, dans ce cas Λ s'identifie au projecteur Π_A de l'espace H_A et coïncide avec son adjoint, soit $\Lambda = \Lambda^* = \Pi_A$, et de la même façon $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^* = \Pi_A{}^\perp$: les espaces H_A et $H_A^\perp$ étant orthogonaux, leurs projecteurs vérifient bien $\Pi_A + \Pi_{A^\perp} = I$. Mais, en présence de dérives, les relations (17) ne sont nullement triviales.

Il reste cependant un point important à préciser. Au cours du raisonnement précédent, nous avons admis que le critère (9) caractérisait univoquement l'élément $\tilde{\Lambda}$ Y : mais, pour qu'il en soit effectivement ainsi, la condition suivante

(19) $$N' \cap H_A = 0$$

qui constitue la transposition de (3'), doit être satisfaite. Comme H_A est somme directe de H_o et N^*, et que N' est orthogonale à H_o , cette condition se réduit en fait à :

$$N' \cap N^* = 0$$

Ainsi, $N^* = \Pi_A N$ ne doit pas contenir d'éléments non nuls orthogonaux à N : mais cette condition est <u>toujours vérifiée</u>, du fait justement que tout élément de N^* est la projection d'un élément de N.

L'ESPACE N'.

Caractérisons d'abord la dimension n' de cet espace N'. Si n est la dimension de N, les relations (3') garantissent que N^* admet la même dimension n. Ainsi, la dimension de $N \oplus N^*$, qui est n + n' est inférieure ou égale à 2 n, soit $n' \leq n$. L'égalité a lieu si et seulement si $N \cap N^* = 0$, ce qui équivaut à

(19') $$N \cap H_A = 0$$

On ne nuit d'ailleurs pas à la généralité en supposant cette condition satisfaite. En effet, si elle ne l'est pas, les éléments de N qui appartiennent à H_A sont, en un sens, superflus. En effet, on peut remplacer N par $N \cap (N \cap H_A)^{\perp}$ sans modifier le krigeage universel (on peut le vérifier directement. On peut aussi, en sens inverse, remarquer que le krigeage ΛY de tout $Y \in H$ vérifie automatiquement la condition d'universalité

$$< \Lambda Y, Y_o > = < Y, Y_o > \qquad Y_o \in H_o$$

pour tout élément de $H_o = H_A \cap N^{\perp}$, du fait que Y et ΛY ont la même projection sur H_o : autrement dit, on peut remplacer N par $N \oplus H_o$ sans modifier en rien le krigeage universel).

Nous supposerons donc (19') vérifiée, c'est-à-dire :

$$\text{Dim } N = \text{Dim } N'$$

Dans ce cas, le projecteur $\Pi_{N'}$ établit une bijection entre N^* et N'. Si nous rapportons N^* à la base A_ℓ, les vecteurs

(20) $$Y'_\ell = \Pi_{N'} A_\ell$$

constituent une base de N'. On a, évidemment ,

$$A_\ell = \Pi_N A_\ell + \Pi_{N'} A_\ell$$

Or, d'après (10'), $\Pi_N A_\ell = Y_\ell$. Compte tenu de la définition (20), on voit que les bases Y_ℓ de N, A_ℓ de N* et Y'_ℓ de N' se correspondent selon la;relation :

(21) $$A_\ell = Y_\ell + Y'_\ell$$

Comme Y_ℓ et Y'_s sont orthogonaux, les matrices :

$$\mu_{\ell s} = < A_\ell \; A_s > \; , \; g_{\ell s} = < Y_\ell \; Y_s > \; , \quad g'_{\ell s} = < Y'_\ell \; Y'_s >$$

vérifient donc :

(21') $$\mu_{\ell s} = g_{\ell s} + g'_{\ell s}$$

D'après (10'), on a $\Lambda \, Y_\ell = A_\ell$, de sorte que (21) entraine

$$\Lambda \, Y'_\ell = 0$$

Les éléments de N' sont d'ailleurs les seuls, dans l'espace $H_A \oplus N$, qui annulent l'opérateur Λ : cela résulte aussitôt du critère (9), puisque N' est justement l'orthogonal de $H_o \oplus N$ dans l'espace $H_A \oplus N$. Ainsi <u>l'espace N' est la restriction à $H_A \oplus N$ du noyau de l'opérateur de krigeage Λ</u>. Il revient au même de dire que N' est la restriction à $H_A \oplus N$ de l'orthogonal de l'espace image de l'opérateur adjoint Λ^*.

Cherchons maintenant quelles sont les fonctions de dérive Φ_ℓ associées à l'espace N'. En ce qui concerne l'espace N, les fonctions f^ℓ correspondantes sont définies par $f_i^\ell = < Y^\ell \, Y_i >$. Passant de N à N' et de Λ à $\tilde{\Lambda}$, nous avons en fait échangé les rôles des indices co et contravariants. Nos fonctions Φ_ℓ sont donc définies par :

$$\Phi_\ell^i = < Y'_\ell \; Y^i > = < A_\ell \; Y^i > - < Y_\ell \; Y^i >$$

Comme $A_\ell = \Lambda \, Y_\ell$, d'après (10'), il vient

$$\Phi_\ell^i = < Y_\ell ,(\Lambda^* - I) \; Y^i >$$

c'est-à-dire, d'après (17) :

$$\Phi^i = - < Y_\ell, \tilde{\Lambda} Y^i >$$

soit, en distinguant les indices u et α :

$$\begin{cases} \Phi^u_\ell = - < Y_\ell, Y^u > = - g_{\ell s} B^{uj} f^s_j \\ \Phi^\alpha_\ell = \Lambda^\alpha_u < Y_\ell Y^u > = - \Lambda^\alpha_u \Phi^u_\ell \end{cases}$$

(cette dernière relation résulte d'ailleurs aussitôt du fait que le krigeage $\tilde{\Lambda}$ est un interpolateur exact pour les fonctions de base Φ_ℓ).

On peut également mettre Φ^α sous la forme

$$\Phi^\alpha_\ell = < A_\ell Y^\alpha > - < Y_\ell Y^\alpha >$$

Remarquant que $< A_\ell Y^\alpha > = \lambda^\alpha_\ell$ (composantes contravariantes de l'estimateur optimal $A_\ell = \lambda^\alpha_\ell Y_\alpha$), on trouve ainsi

$$\Phi^\alpha_\ell = \lambda^\alpha_\ell - g_{\ell s} B^{\alpha j} f^s_j$$

Les dérives étant de la forme $b^\ell \Phi^\alpha_\ell$, cherchons <u>les estimateurs optimaux</u> B^ℓ des coefficients correspondants. Rn transposant la première relation (10'), on voit que l'on a :

$$B^\ell = \tilde{\Lambda} Y'^\ell = (I - \Lambda^*) Y'^\ell$$

Or $Y'^\ell = g'^{\ell s} (A_s - Y_s)$, et $\Lambda^* Y_s = Y_s$. Ainsi :

$$B^\ell = g'^{\ell s} (I - \Lambda^*) A_s$$

On peut ensuite remarquer, d'après (10') :

$$\Lambda^* A_s = \mu_{st} \Lambda^* A^t = \mu_{st} Y^t$$

et il vient ainsi :

$$B^{\ell} = g'^{\ell s} \mu_{st} (A^t - Y^t)$$

(il était d'ailleurs évident que l'espace $N'^* = \Pi_{A^\perp} N'$ engendré par ces estimateurs optimaux devait coïncider avec l'orthogonal de N^* dans $N \oplus N' = N \oplus N^*$).

A ces éléments B^{ℓ}, on peut encore associer les éléments

$$B_s = \mu'_{\ell s} B^{\ell}$$

où $\mu'_{\ell s}$ est l'inverse de la matrice $\mu'^{\ell s} = < B^{\ell} B^s >$. En transposant la troisième relation (10'), il apparait

$$B_s = \Pi_{A^\perp} Y'_s = - \Pi_{A^\perp} Y_s$$

Comme $\Pi_A Y_s = g_{\ell s} \Pi_A Y^{\ell} = g_{\ell s} A^{\ell}$, on trouve :

$$B_s = - Y_s + g_{\ell s} A^{\ell} = g_{\ell s} (A^{\ell} - Y^{\ell})$$

<u>CONDITION POUR QUE LES KRIGEAGES SIMPLE ET UNIVERSEL COINCIDENT</u>.

Il est commode de considérer les opérateurs Λ et $I - \Lambda$ comme des projecteurs (non orthogonaux). De fait, ces opérateurs sont idempotents, et le noyau de l'un coïncide avec l'espace image de l'autre. Désignons par

$$H_1 = H'_0 \oplus N' = (H_0 \oplus N)^{\perp}$$

l'orthogonal de H_0 dans $N^{\perp}$. H_1 est <u>l'espace des résidus</u> (espace image de $I - \Lambda$). On a :

Noyau de Λ	$= H_1$	Image de Λ	$= H_A$
Noyau de $I - \Lambda$	$= H_A$	Image de $I - \Lambda$	$= H_1$

Comme, d'autre part, $H_1 \cap H_A = 0$, la décomposition :

$$Y = \Lambda Y + (I - \Lambda) Y$$

d'un Y donné en somme d'un élément de H_A et d'un élément de H_1 est unique, et les opérateurs correspondants sont justement Λ et $I - \Lambda$.

Dans ces conditions, le krigeage universel Λ coïncidera avec le krigeage simple Π_A, soit $\Lambda = \Pi_A$ si et seulement si les espaces H_A et H_1 sont orthogonaux. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que N soit contenu dans H_A : analytiquement, on doit avoir :

$$Y^\ell = C^{\ell\alpha} Y_\alpha$$

c'est-à-dire

$$f_i^\ell = C^{\ell\alpha} \sigma_{\alpha i}$$

D'où <u>l'équivalence</u> des énoncés suivants :

~ $\Lambda = \Pi_A$ (coïncidence du krigeage simple et du krigeage universel).

~ H_1 et H_A orthogonaux.

~ $N \subset H_A$.

~ Les fonctions f^ℓ sont de la forme (22) (combinaisons linéaires des fonctions $\sigma_{\alpha i}$).

Ces considérations vont prendre leur intérêt dans le cas des fonctions aléatoires intrinsèques.

<u>LES F.A. INTRINSEQUES.</u>

Partons d'une famille Y_i, $i \in I$ où l'ensemble (fini) I des indices admet, comme ci-dessus, une partition $I = A \cup V$, $A \cap V = \emptyset$ en points "expérimentaux" $\alpha \in A$ et points "inconnus" $u \in V$. Nous désignerons par E (au lieu de H), l'espace des combinaisons linéaires

$\lambda^i Y^i$ et de même par E_A et E_V les sous-espaces $\{\lambda^\alpha Y_\alpha\}$ et $\{\lambda^u Y_u\}$.

Ces espaces E, E_A et E_V ne sont munis d'aucune norme (contrairement à ce que nous avions supposé précédemment), c'est pourquoi la lettre E remplace la lettre H. Toutefois, nous supposons que E contient un sous-espace H_k (de dimension $N_I - k$) muni d'une structure hilbertienne (= euclidienne) définie par un produit scalaire $< X, Y >$: cet espace H_k est l'espace des "combinaisons linéaires autorisées" pour lesquelles, seules, la covariance existe. Nous poserons :

$$H_o = H_k \cap E_A$$

(combinaisons linéaires autorisées des données expérimentales) et nous désignerons comme ci-dessus par H_1 l'orthogonal de H_o dans H_k (espace des résidus).

Soit aussi F le dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur E (nécessairement continues, puisque nous nous limitons ici au cas où la dimension est finie). A tout sous-espace $M \subset E$ est associé son orthogonal M^* dans F, espace des formes linéaires nulles sur M. Nous poserons :

$$N = H_k^*$$

et, inversement, l'espace H_k des combinaisons linéaires autorisées peut être défini comme l'ensemble des éléments de E qui annulent les formes de N.

Nous désignerons par f^ℓ une base de N, de sorte que :

$$Y \in H_k \Leftrightarrow f^\ell(Y) = 0$$

On notera qu'il ne s'agit pas exactement ici d'une fonction aléatoire intrinsèque. Les Y_i définissent ce que l'on pourrait appeler une F.A. sous-normée (la norme n'est définie que sur un sous-espace $H_k \subset E$). C'est la restriction de E à H_k qui constitue, au sens propre, une F.A.I. - F.A.I. dont la F.A. Y_i est une représentation particulière. Cette notion de F.A. sous-normée correspond d'ailleurs exactement au modèle utilisé réellement dans les applications : le phénomène auquel on s'intéresse est, en effet, interprété comme une réalisation d'une représentation particulière (mais non spécifiée) d'une F.A.I., c'est-à-dire, justement, comme une F.A. sous-normée. Spécifier la représentation d'une F.A.I. équivaut à choisir un prolongement sur $E \times E$ tout entier du produit scalaire défini sur $H_k \times H_k$.

Nous admettons, comme d'habitude, l'indépendance linéaire des formes f^ℓ sur E_A :

$$C_\ell f_\alpha^\ell = 0 \Rightarrow C_\ell = 0$$

Cela revient à supposer :

$$N \cap E_A^* = 0 \tag{22}$$

ou, ce qui revient au même :

$$E = H_k \oplus E_A \tag{23}$$

Sous cette hypothèse, la variété linéaire $Y + H_k$ menée par un $Y \in E$ parallèlement à H_k rencontre toujours E_A, et l'intersection $(Y + H_k) \cap E_A$ est une variété parallèle à H_o (c'est l'ensemble des éléments de la forme $\lambda^\alpha Y_\alpha$ avec $\lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f^\ell(Y)$). Lorsque Y' parcourt cette variété $(Y + H_k) \cap E_A$, $Y - Y'$ reste dans H_k (et décrit dans H_k une variété linéaire parallèle à H_o). C'est pourquoi il est possible de définir la norme $\|Y - Y'\|^2$ et de la minimiser : l'élément $Y' = \Lambda Y$ qui réalise ce minimum est la projection de Y sur $(Y + H_k) \cap E_A$, ou, si l'on préfère, l'unique point d'intersection de E_A avec la variété $Y + H_1$ (H_1 étant l'orthogonal de H_o dans H_k).

La caractérisation du krigeage ΛY est donc exactement la même que dans le cas du K.U. : ΛY est l'unique élément de E A tel que $Y - \Lambda Y$ appartienne à H_1. On a, ici encore :

$$E = E_A \oplus H_1 \quad , \quad E_A \cap H_1 = 0$$

et la décomposition

$$Y = \Lambda\, Y + (I - \Lambda)\, Y$$

de Y en somme d'un élément de E_A et d'un élément de H_1 est unique.

L'espace H_1 est l'espace-image de $I - \Lambda$, c'est-à-dire <u>l'espace des résidus</u>. Notons que la restriction à E_V de $I - \Lambda$ est une <u>bijection</u> de E_V sur H_1

$$I - \Lambda : E_V \longleftrightarrow H_1$$

En effet, le noyau de $I - \Lambda$ est E_A, et $E_A \cap E_V = 0$. En particulier, les images des éléments $Y_u \in E_V$ qui constituent une base de E_V , c'est-à-dire les

$$(I - \Lambda)\, Y_u = Y_u - \Lambda_u^\alpha\, Y_\alpha$$

constituent <u>une base de H_1</u>. Nous désignerons par S_{uv} la covariance correspondante :

$$S_{uv} = \langle (I - \Lambda)\, Y_u,\ (I - \Lambda)\, Y_v \rangle$$

Ainsi, les covariances généralisées K_{ij} de la F.A.I. définie par la métrique de H_k devront vérifier la relation :

$$S_{uv} = K_{uv} - \Lambda_u^\alpha\, K_{\alpha v} - \Lambda_v^\beta\, K_{\alpha u} + \Lambda_u^\alpha\, K_{\alpha\beta}\, \Lambda_v^\beta \tag{24}$$

Sur H_o également la métrique est bien définie. Choisissons dans H_A un sous-espace supplémentaire de H_o , et désignons par

$$A_\ell = \lambda_\ell^\alpha\ Y_\alpha$$

une base de ce sous-espace. On peut d'ailleurs toujours choisir cette base de telle sorte que l'on ait

$$f^s\,(A_\ell) = \delta_\ell^s$$

c'est-à-dire

(25) $$\lambda_\ell^\alpha f_\alpha^s = \delta_\ell^s$$

(avec $f_\alpha^s = f^s(Y_\alpha)$). Alors les éléments

$$Y_\alpha - A_\ell f_\alpha^\ell = Y_\alpha - f_\alpha^\ell \lambda_s^\beta Y_\beta$$

engendrent H_0 (mais ne constituent pas une base de H_0, puisqu'ils ne sont pas linéairement indépendants). Nous désignerons par $\tau_{\alpha\beta}$ la covariance :

$$\tau_{\alpha\beta} = < Y_\alpha - A_\ell f_\alpha^\ell, Y_\beta - A_s f_\beta^s >$$

La matrice de $\tau_{\alpha\beta}$ n'est pas régulière, puisque l'on a :

$$\lambda_\ell^\alpha \tau_{\alpha\beta} = 0$$

Considérons alors la <u>représentation</u> suivante de la F.A.I. associée à H_k :

$$Z_i = Y_i - A_\ell f_i^\ell + B_\ell f_i^\ell$$

où les B_ℓ sont des V.A. quelconques d'ordre 2 <u>orthogonales à H_k</u>. Si les B_ℓ sont nulles, il s'agit de la représentation associée à la matrice λ_ℓ^α, vérifiant les conditions d'universalité (25), c'est-à-dire d'une représentation interne sur E_A : mais dans ce cas la matrice des covariances n'est pas régulière. Nous choisirons, au contraire, des B_ℓ non nuls et tels que la matrice $< B_\ell B_s > = H_{\ell s}$ soit de type positif strict : dans ce cas la matrice $\sigma_{ij} = < Z_i Z_j >$ est régulière.

Pour $i = \alpha \in A$, il vient :

$$Z_\alpha = Y_\alpha - A_\ell f_\alpha^\ell + B_\ell f_\alpha^\ell$$

Comme $A_\ell = \lambda_\ell^\alpha Y_\alpha$ par définition, et d'après (25) $\lambda_\ell^\alpha f_\alpha^s = \delta_\ell^s$, il en résulte :

(26) $$B_\ell = \lambda_\ell^\alpha Z_\alpha$$

D'un autre côté, B_s étant orthogonal à $Y_i - A_\ell f_i^\ell \in H_k$, on trouve :

$$< B_s Z_i > = < B_\ell B_s > f_i^\ell = H_{\ell s} f_i^\ell$$

soit, en désignant par $H^{\ell s}$ la matrice inverse de $H_{\ell s}$, et en tenant compte de (26) :

(27) $$f_i^\ell = H^{\ell s} \lambda_s^\alpha \sigma_{\alpha i}$$

Ainsi, les f_i^ℓ sont (dans cette représentation) des combinaisons linéaires des $\sigma_{\alpha i}$. Mais, d'après ce que nous avons vu plus haut, cela entraine l'identité du krigeage simple et du krigeage universel. On aura donc dans cette représentation :

(28) $$\Lambda_u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta u}$$

Il suffira donc, dans les applications, de résoudre le système (28) du krigeage simple, les conditions d'universalité étant alors automatiquement vérifiées.

Cette propriété est d'ailleurs caractéristique de ce type de représentation. De fait, toute représentation est de la forme :

(29) $$\begin{gathered} Z_i = Y_i - A_\ell f_i^\ell + B_\ell f_i^\ell \\ A_\ell = \lambda_\ell^i Y_i \quad , \quad \lambda_\ell^i f_i^s = \delta_\ell^s \quad , \end{gathered}$$

avec des B_ℓ orthogonales à H_k. Comme on a encore $B_\ell = \lambda_\ell^i Z_i$, on voit que ces éléments appartiennent à l'espace engendré par les Z_α si et seulement si $\lambda_\ell^u = 0$ pour les indices $u \in V$: telle est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait identité entre krigeages simple et universel.

COVARIANCE D'UNE REPRESENTATION.

Partons de la forme générale des représentations, telle qu'elle est donnée en (29), et calculons la matrice $\sigma_{ij} = < Z_i\ Z_j >$. Mettons tout d'abord Z_i sous la forme de la somme :

$$Z_i = \Lambda\ (Y_i - A_\ell f_i^\ell) + (I-\Lambda)(Y_i - A_\ell f_i^\ell) + B_\ell f_i^\ell$$

où le premier terme est dans H_0, le second dans H_1 et le troisième orthogonal à $H_0 \oplus H_1 = H_k$. Notons que $\Lambda\ A_\ell$ est de la forme

$$\tilde{A}_\ell = \Lambda\ A_\ell = \tilde{\lambda}_\ell^\alpha\ Y_\alpha \quad \text{avec} \quad \tilde{\lambda}_\ell^\alpha = \lambda_\ell^\alpha + \lambda_\ell^u\ \Lambda_u^\alpha$$

puisque

$$\Lambda\ A_\ell = \lambda_\ell^\alpha\ Y_\alpha + \lambda_\ell^u\ \Lambda_u^\alpha\ Y_\alpha$$

De plus les $\tilde{\lambda}_\ell^\alpha$ vérifient la condition d'universalité

$$\tilde{\lambda}_\ell^\alpha\ f_\alpha^s = \delta_\ell^s$$

comme on le voit en remarquant que l'on a $\Lambda_u^\alpha\ f_\alpha^s = f_u^s$ et $\lambda_\ell^i\ f_i^s = = \lambda_\ell^\alpha\ f_i^s + \lambda_\ell^u\ f_u^s = \delta_\ell^s$. De même $((I-\Lambda)\ A_\ell$, qui appartient à H_1 , est de la forme

$$(I-\Lambda)\ A_\ell = \lambda_\ell^u\ (I-\Lambda)\ Y_u$$

Ainsi :

$$\begin{cases} Z_\alpha = Y_\alpha - \tilde{A}_\ell\ f_\alpha^\ell - f_\alpha^\ell\ \lambda_\ell^u\ (I-\Lambda)\ Y_u + B_\ell f_\alpha^\ell \\ Z_u = \Lambda_u^\alpha\ (Y_\alpha - \tilde{A}_\ell f_\alpha^\ell) + (I-\Lambda)\ [Y_u - f_u^\ell\ \lambda_\ell^v\ Y_v] + B_\ell f_u^\ell \end{cases}$$

Nous poserons

$$\begin{cases} \tau_{\alpha\beta} = < Y_\alpha - \tilde{A}_\ell f_\alpha^\ell\ ,\ Y_\beta - \tilde{A}_s\ f_\beta^s \\ S_{uv} = < (I-\Lambda)\ Y_u\ ,\ (I-\Lambda)\ Y_v > \\ H_{\ell s} = < B_\ell B_s > \\ M_{\ell s} = \lambda_\ell^u\ S_{uv}\ \lambda_s^v \end{cases}$$

Alors, avec ces notations :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + (H_{\ell s} + M_{\ell s})\, f_\alpha^\ell\, f_\beta^s \\ \sigma_{\alpha u} = \Lambda_u^\beta\, \tau_{\alpha\beta} + (H_{\ell s} + M_{\ell s})\, f_\alpha^\ell\, f_u^s - \lambda_\ell^v\, S_{vu}\, f_\alpha^\ell \end{cases}$$

Comme $f_u^s = \Lambda_u^\beta\, f_\beta^s$, la seconde équation équivaut à :

$$\Lambda_u^\beta\, \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha u} + \lambda_\ell^v\, S_{vu}\, f_\alpha^\ell$$

Ainsi, le paramètre de Lagrange $\mu_{\ell u}$ du krigeage universel de Y_u admet l'expression

(30) $$\mu_{\ell u} = \lambda_\ell^v\, S_{uv}$$

Enfin, pour σ_{uv}, il vient :

$$\sigma_{uv} = \Lambda_u^\alpha\, \tau_{\alpha\beta}\, \Lambda_v^\beta + S_{uv} - \mu_{\ell u}\, f_v^\ell - \mu_{sv}\, f_u^s$$
$$+ f_u^\ell\, (H_{\ell s} + M_{\ell s})\, f_v^s$$

Nous abrègerons les notations en posant :

$$\mu_{\ell s} = H_{\ell s} + M_{\ell s}$$

On remarque aussi que $\tilde{\lambda}_\ell^\alpha\, \tau_{\alpha\beta} = 0$ entraine :

$$\tilde{\lambda}_\ell^\alpha\, \sigma_{\alpha\beta} = \mu_{\ell s}\, f_\beta^s$$

de sorte que les $\tilde{A}_\ell$, dans cette représentation, sont les estimateurs optimaux des coefficients de la dérive, et

$$\mu_{\ell s} = \langle \tilde{A}_\ell\, ,\, \tilde{A}_s \rangle$$

On note aussi (d'après $\Lambda_u^\alpha\, f_\alpha^\ell = f_u^\ell$) :

$$\begin{cases} \Lambda_u^\beta \, \sigma_{\alpha\beta} = \Lambda_u^\beta \, \tau_{\alpha\beta} + \mu_{\ell s} \, f_\alpha^s \\ \Lambda_u^\beta \, \sigma_{\alpha\beta} \, \Lambda_v^\alpha = \Lambda_u^\beta \, \tau_{\alpha\beta} \, \Lambda_v^\beta + \mu_{\ell s} \, f_u^\ell \, f_v^s \end{cases}$$

On peut alors exprimer la matrice σ_{ij} à l'aide de Λ_u^α et des éléments suivants :

$$\tau_{\alpha\beta} = < Y_\alpha - \tilde{\lambda}_\ell^{\alpha'} \, f_\alpha^\ell \, Y_{\alpha'} \, , \, Y_\beta - \tilde{\lambda}_s^{\beta'} \, f_\beta^s \, Y_{\beta'} >$$

$$S_{uv} = < Y_u - \Lambda_u^\alpha \, Y_\alpha \, , \, Y_v - \Lambda_u^\beta \, Y_\beta >$$

et les paramètres de Lagrange $\mu_{\ell s}$ et $\mu_{\ell u}$. On trouve :

$$(31) \qquad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} + f_\alpha^\ell \, \mu_{\ell s} \, f_\beta^s \\ \sigma_{\beta u} = \Lambda_u^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} - \mu_{\ell u} \, f_\beta^\ell \\ \sigma_{uv} = \Lambda_u^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} \, \Lambda_v^\beta + S_{uv} - \mu_{\ell u} \, f_v^\ell - \mu_{sv} \, f_u^s \end{cases}$$

En posant :

$$\Lambda_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\alpha \quad , \quad \mu_{\ell\gamma} = 0 \quad , \quad S_{i\gamma} = S_{\gamma i} = 0$$

ceci se synthétise sous la forme :

$$(32) \qquad \sigma_{ij} = \Lambda_i^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} \, \Lambda_j^\beta + S_{ij} - \mu_{\ell i} \, f_j^\ell - \mu_{sj} \, f_i^s$$

Telle est la forme générale des covariances dont la restriction à H_k coïncide avec la métrique de départ. Evaluons la part d'arbitraire qui préside au choix des différents termes de (32). Pour cela, supposons la métrique sur H_k définie par une covariance généralisée K_{ij}.

~ Choix de $\tau_{\alpha\beta}$: on peut prendre des $\tilde{\lambda}_\ell^\alpha$ arbitraires, soumis seulement à la condition :

$$\tilde{\lambda}_\ell^\alpha \, f_\alpha^s = \delta_\ell^s$$

et on a alors :

$$\tau_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - \tilde{\lambda}_\ell^\gamma K_{\alpha\gamma} f_\beta^\ell - \tilde{\lambda}_s^\gamma K_{\beta\gamma} f_\alpha^s + f_\alpha^\ell \tilde{\lambda}_\ell^\gamma K_{\gamma\gamma'} \tilde{\lambda}_s^{\gamma'} f_\beta^s$$

~ S_{uv} est imposée : c'est la matrice des résidus

$$S_{uv} = K_{uv} - \Lambda_u^\alpha K_{\alpha v} - \Lambda_v^\beta K_{\beta u} + \Lambda_u^\alpha K_{\alpha\beta} \Lambda_v^\beta$$

~ Les paramètres de Lagrange $\mu_{\ell u}$ peuvent être choisis arbitrairement. D'après (30), on aura alors

$$\lambda_\ell^v = \mu_{\ell u} B^{uv}$$

où B^{uv} est la matrice inverse des S_{uv}. On a alors

$$M_{\ell s} = \lambda_\ell^u S_{uv} \lambda_s^v = \mu_{\ell u} B^{uv} \mu_{\ell v}$$

~ Enfin, on peut prendre comme matrice $\mu_{\ell s}$ des paramètres de Lagrange n'importe quelle matrice de la forme :

$$\mu_{\ell s} = M_{\ell s} + H_{\ell s}$$

où $H_{\ell s}$ est de type positif strict : il revient au même de dire que $\mu_{\ell s} - M_{\ell s}$ doit être de type positif strict.

Le choix le plus simple consiste évidemment à prendre $\mu_{\ell u} = 0$. On tombe alors dans le cas examiné plus haut où krigeage simple et universel coïncident, et où les conditions d'universalité sont automatiquement vérifiées et deviennent superflues : explicitement :

~ On choisit des λ_ℓ^α vérifiant $\lambda_\ell^\alpha f_\alpha^s = \delta_\ell^s$ comme ci-dessus, et on adopte une représentation de la forme :

$$Z_i = Y_i - \lambda_\ell^\alpha f_i^\ell Y_\alpha + B_\ell f_i^\ell$$

La matrice des covariances est alors :

$$\sigma_{ij} = K_{ij} - \lambda_\ell^\alpha f_i^\ell K_{\alpha j} - \lambda_s^\beta f_j^s K_{\beta i} + \lambda_\ell^\alpha f_i^\ell K_{\alpha\beta} \lambda_s^\beta f_j^s + H_{\ell s} f_i^\ell f_j^s \tag{33}$$

Avec cette représentation, la matrice $\sigma_{\alpha\beta}$ est régulière (pourvu que $H_{\ell s}$ soit prise de type positif strict), et on obtient les Λ_u^α en résolvant le système du krigeage simple :

$$\Lambda_u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta u}$$

Vérification. D'une manière générale, les Λ_u^α sont solution du système :

$$\begin{cases} \Lambda_u^\alpha K_{\alpha\beta} = K_{\beta u} + \mu_{\ell u} f_\beta^\ell \\ \Lambda_u^\alpha f_\alpha^\ell = f_u^\ell \end{cases} \tag{34}$$

D'après (33), il vient, compte tenu de (34) :

$$\begin{aligned} \Lambda_u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} &= \Lambda_u^\alpha K_{\alpha\beta} - \Lambda_u^\alpha \lambda_\ell^\gamma f_\alpha^\ell K_{\gamma\beta} - \Lambda_u^\alpha \lambda_s^\gamma f_\beta^s K_{\gamma\alpha} \\ &\quad + \Lambda_u^\alpha f_\alpha^\ell f_\beta^s (H_{\ell s} + \lambda_\ell^{\alpha'} K_{\alpha'\beta'} \lambda_s^{\beta'}) \\ &= K_{\beta u} + \mu_{\ell u} f_\beta^\ell - f_u^\ell \lambda_\ell^\gamma K_{\gamma\beta} - \lambda_s^\gamma f_\beta^s (K_{\gamma u} + \mu_{\ell u} f_\gamma^\ell) \\ &\quad + f_u^\ell f_\beta^s (H_{\ell s} + \lambda_\ell^{\alpha'} K_{\alpha'\beta'} \lambda_s^{\beta'}) \end{aligned}$$

On constate bien que les $\mu_{\ell u}$ s'éliminent (compte tenu de $\lambda_s^\gamma f_\gamma^\ell = \delta_s^\ell$) et il reste

$$\Lambda_u^\alpha \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta u}$$

comme prévu.

L'OPERATEUR DUAL Λ^* .

Le dual de l'opérateur Λ sur E est l'opérateur Λ^* sur l'espace F des formes linéaires sur E défini par :

$$(\Lambda^* f)(Y) = f(\Lambda Y) \qquad (f \in F,\ Y \in E)$$

Son noyau est E_A^* (orthogonal de E_A dans F), et l'espace image est H_1^* (orthogonal de H_1 dans F). Pour $I - \Lambda^*$, les rôles de ces deux espaces sont échangés :

$$\text{Noyau de } \Lambda^* = E_A^* \qquad \text{Image de } \Lambda^* = H_1^*$$

$$\text{Noyau de } I - \Lambda^* = H_1^* \qquad \text{Image de } I - \Lambda^* = E_A^*$$

Comme $E_A^* \oplus H_1^* = F$, $E_A^* \cap H_1^* = 0$, les opérateurs Λ^* et $I - \Lambda^*$ réalisent la décomposition unique

$$f = \Lambda^* f + (I - \Lambda^*) f$$

d'un $f \in F$ en somme d'un élément de H_1^* et d'un élément de E_A^* . Si l'on rapporte l'espace F à la base L^i duale de Y_j , i.e. $L^i(Y_j) = \delta_j^i$, on trouve explicitement pour une forme

$$\begin{cases} L = f_i\ L^i \\ \Lambda^*\ L = f_\alpha\ (L^\alpha + \Lambda_u^\alpha\ L^u) \\ (I-\Lambda^*)\ L = (f_u - f_\alpha\ \Lambda_u^\alpha)\ L^u \end{cases}$$

L'interpolateur $f_\alpha \to f_u^* = f_\alpha\ \Lambda_u^\alpha$ se laisse caractériser par des propriétés de minimalité, mais pour des normes qui ne sont plus définies de manière univoque (il y en a autant que de covariances pour les Y_i).

On peut pourtant noter ceci : Comme H_k est muni d'une norme euclidienne, la restriction à H_k d'une forme $L \in F$ s'identifie à l'élément $Y_L \in H_k$ défini par

$$L(Y) = \langle Y_L , Y \rangle \qquad Y \in H_k$$

En particulier, on aura $Y_L \in H_1$ si et seulement si $L \in H_o^*$ et de même $Y_L \in H_o$ si et seulement si $L \in H_1^*$. Mais le noyau de cette application $L \to Y_L$ est l'espace N, orthogonal de H_k : en sens inverse, pour un $Y \in H_k$ donné, la classe des $L \in F$ pour lesquelles $Y_L = Y$ est définie à un élément près de N (i.e. une forme du type $C_\ell f^\ell$).

Mais, pour $Y \in H_1$, l'image inverse de Y est dans $H_o^* = E_A^* \oplus N$. Comme $E_A^* \cap N = 0$ (indépendance linéaire des f^ℓ sur E_A), il existe une et une seule forme $L \in E_A^*$ telle que l'on ait $Y = Y_L$. Désignons par

$$\phi : H_1 \longleftrightarrow E_A^*$$

cette bijection de l'espace des résidus sur l'espace des formes linéaires nulles sur E_A. Pour un $Y \in H_1$ de la forme

$$Y = \lambda^u (I - \Lambda) Y_u$$

$\phi(Y)$ est une forme $L = f_u L^u \in E_A^*$ telle que $L(Y') = \langle Y Y' \rangle$ pour tout $Y' \in H_1$. Avec $Y' = \lambda'^v (I-\Lambda) Y_v$, ceci donne

$$\lambda^u S_{uv} \lambda'^v = f_u \lambda'^u$$

et par suite

$$f_v = \lambda^u S_{uv} \quad ; \quad \lambda^u = B^{uv} f_v \tag{35}$$

On voit ainsi qu'identifier les $Y \in H_1$ avec leurs images $\phi(Y) = E_A^*$ revient à munir E_A^* de la métrique définie par la matrice B^{uv} inverse de la matrice $S_{uv} = \langle (I-\Lambda) Y_u , (I-\Lambda) Y_v \rangle$. Autrement dit, pour

$$L = f_u L^u \quad ; \quad L' = f'_v L^v$$

on pose

$$< L\ L' > = f_u\ B^{uv}\ f_v$$

Naturellement, cette identification de E_A^* avec H_1 n'est pas compatible avec n'importe quelle métrique σ_{ij} prolongeant sur $E \times E$ la métrique de H_k : lorsque σ_{ij} est donné, tout élément $Y = \lambda^i\ Y_i \in E$ est identifié canoniquement à la forme $L = f_i\ L^i$ avec

$$f_i = \sigma_{ij}\ \lambda^j$$

relation non compatible avec (35) en général. Pour qu'il y ait compatibilité, il est nécessaire que H_1 et E_A soient orthogonaux pour la métrique σ_{ij} : mais cela signifie justement que, pour cette métrique, les krigeages simple et universel doivent coïncider. Autrement dit, d'après (32), on doit avoir :

$$\sigma_{ij} = \Lambda_i^\alpha\ \sigma_{\alpha\beta}\ \Lambda_j^\beta + S_{ij}$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante : comme $E = H_1 \oplus E_A$, si E_A et H_1 sont orthogonaux pour la métrique σ_{ij}, cela signifie bien que l'on a $H_1 = E_A^\perp$ pour cette métrique, de sorte que les éléments de H_1 s'identifient à ceux de E_A^* .