Fontainebleau/CGEM

N-698

SPLINES ET KRIGEAGE : LE CAS FINI

G. MATHERON

MAI 1981

SPLINES ET KRIGEAGE : LE CAS FINI

Par

G. MATHERON

Table des Matières

DUALITE AVEC METRIQUE IMPROPRE B^{ij}	1
L'ESPACE $H \subset E$	3
LE PROBLEME DES SPLINES	4
LES OPERATEURS A et A^*	5
LES COVARIANCES GENERALISEES	8
RECIPROQUE	11
UNE IDENTITE POUR LES FORMES QUADRATIQUES	14
LA COVARIANCE DES RESIDUS	15
L'"AUTRE KRIGEAGE"	16
INTERPRETATION DE LA MATRICE $Q^{\alpha\beta}$	17
REMARQUES SUR LES PARAMETRES DE LAGRANGE	20
LE SYSTEME DU KRIGEAGE ET SON DUAL	22

SPLINES ET KRIGEAGE : LE CAS FINI

Par

G. MATHERON

Je poursuis ici l'examen du cas fini, commencé dans : "Remarques sur le krigeage et son dual", en prenant cette fois comme point de départ le problème des splines. Une fois débarrassées des complications techniques liées à l'usage d'espaces fonctionnels de dimension infinie, les structures algébriques en jeu apparaissent comme extrêmement simples : l'espace fonctionnel est muni au départ d'une métrique impropre (définie par une matrice B^{ij} de type positif, mais non strictement positif), et les covariances généralisées K_{ij} induites sur l'espace dual (celui de la fonction aléatoire) constituent la classe des inverses généralisées de cette matrice B non régulière.

DUALITE AVEC METRIQUE IMPROPRE B^{ij} .

Comme précédemment, nous considérons deux espaces vectoriels de dimension finie N , E et F duaux l'un de l'autre. Les éléments $f \in F$ seront conventionnellement appelés fonctions, et les éléments $Y \in E$ variables aléatoires. L'espace F est rapporté à une base F^i ($i = 1, 2, \dots, N$) et l'espace E à la base duale Y_i , de sorte que, par définition de la dualité :

$$F^i(Y_j) = \delta_j^i$$

Pour tout $f = f_i F^i \in F$, les composantes f_i sont données par $f_i = f(Y_i)$, et de même pour $Y = \lambda^i Y_i \in E$, $\lambda^i = F^i(Y)$, d'où aussi :

$$f(Y) = \lambda^i f_i$$

Nous supposons F muni d'une métrique impropre $f_i B^{ij} f_j$,

définie par une matrice B^{ij} de type ≥ 0 mais non strictement positif. Voici pourquoi :

Dans le problème des splines, tel qu'on le formule habituellement, on se donne une application $\alpha : F \rightarrow F'$ de l'espace fonctionnel F sur un espace F' normé, et on cherche la fonction $f \in F$ minimisant $\|\alpha f\|$ sous des conditions données. L'application surjective α n'est toutefois pas supposée injective. Soit $N \subset F$ son noyau ($f \in N \Leftrightarrow \alpha f = 0$). On peut alors munir f de la pseudo-norme $B(f, f) = \|\alpha f\|^2$, et aussi bien du produit scalaire $B(f, f') = \langle \alpha f, \alpha f' \rangle$. Dans le cas fini, cette pseudo-norme est associée à une matrice symétrique B^{ij} de type positif non strict :

$$B(f, f) = f_i B^{ij} f_j$$

et on a les équivalences :

$$(1) \quad f \in N \Leftrightarrow f_i B^{ij} f_j \Leftrightarrow B^{ij} f_j = 0$$

Ceci étant, il est aussi simple d'oublier l'espace F' et l'application α et de travailler directement sur la matrice dégénérée B dont est muni l'espace F . Noter que l'équivalence

$$f_i B^{ij} f_j = 0 \Leftrightarrow B^{ij} f_j = 0$$

est vraie pour toute matrice symétrique B de type positif. On peut donc aussi bien munir d'entrée de jeu l'espace F d'une telle pseudo-norme, et définir le noyau N par la condition (1).

Pour plus de commodité, nous écrirons :

$$\langle f, f' \rangle = f_i B^{ij} f'_j \quad ; \quad \|f\|^2 = f_i B^{ij} f_j$$

étant entendu que $\|f\| = 0$ n'entraîne pas $f = 0$, mais seulement $f \in N$.

L'ESPACE $H \subset E$.

A cette métrique impropre sur F est associée, par dualité, une métrique (propre) sur un sous-espace $H \subset E$ bien défini.

Pour le voir, notons que, pour un $f \in F$ donné, l'application $f' \rightarrow \langle f, f' \rangle$ de F dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire sur F , donc s'identifie à un élément $Y_f \in E$ bien défini par la condition

$$f'(Y_f) = \langle f, f' \rangle \quad (f' \in F)$$

Nous désignerons par β l'application $f \rightarrow \beta(f) = Y_f$ de F dans E ainsi définie. Si $f = f_i F^i$, on a clairement

$$\beta(f) = f_i B^{ij} Y_j$$

Autrement dit, si les composantes de f dans la base F^i sont f_i , $i \in I$, celles de $\beta(f)$ dans la base duale Y_j sont les

$$\lambda^j = f_i B^{ij}$$

Le noyau de l'application $\beta : F \rightarrow E$ est évidemment $N \subset F$. Nous désignerons par $H \subset E$ l'espace image. En fait, H est l'orthogonal de N dans E (et réciproquement N est l'orthogonal de H dans F) :

$$H = N^* \quad ; \quad N = H^*$$

ou explicitement :

$$\begin{array}{l} Y \in H \text{ si et seulement si } f(Y) = 0 \quad \forall f \in N \\ f \in N \quad " \quad " \quad " \quad f(Y) = 0 \quad \forall Y \in H \end{array}$$

Ceci résulte aussitôt du fait que l'application β est auto-adjointe, soit $\beta^* = \beta$, puisque la matrice B est symétrique (β^* applique $E^* = F$ dans $F^* = E$, et l'élément $\beta^*(f)$ est $Y_i B^{ij} f_j = f_i B^{ij} Y_j = \beta(f)$).

Analytiquement, les choses se présentent de manière très claire : les éléments de H sont les $Y = \lambda^i Y_i$ pour lesquels λ^i est de la forme $\lambda^i = B^{ij} f'_j$, où les f'_j sont quelconques. Ainsi

$$f(Y) = 0 \quad \forall Y \in H$$

équivalent à

$$\lambda^i f_i = f_i B^{ij} f'_j = 0$$

quel que soit le choix des f'_j , donc équivalent à $f_i B^{ij} = 0$, i.e. $f \in N$.

Nous rapporterons l'espace N à une base f^ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, k < N$, de sorte que $f = c_\ell f^\ell$ équivalent à $f_i B^{ij} = 0$. Alors :

$$(2) \quad Y \in H \Leftrightarrow f^\ell(Y) = 0$$

LE PROBLEME DES SPLINES.

Passons maintenant au problème des splines : l'espace I des indices fait l'objet d'une partition $I = A \cup V$ en deux classes d'indices $\alpha \in A$ (les points expérimentaux) et $u \in V$ (les points à informer). Le problème des splines est le suivant : trouver les $f \in F$ minimisant $\|f\|^2 = f_i B^{ij} f_j$ lorsque les f_α , $\alpha \in A$ sont donnés. Ces éléments sont caractérisés par l'équation

$$(3) \quad B^{ui} f_i = 0 \quad (u \in V)$$

qu'il est plus commode d'écrire sous la forme :

$$(3') \quad B^{uv} f_v = - B^{u\alpha} f_\alpha$$

Pour que ce problème admette une solution et une seule, il faut et il suffit que les conditions

$$f_\alpha = 0 \quad \text{et} \quad B^{uv} f_v = 0$$

entraînent $f = 0$. Cela a lieu si et seulement si la matrice B^{uv} est régulière, c'est-à-dire admet une inverse S_{uv} . D'autre part, désignons par $E_A \subset E$ l'espace des $Y \in E$ de la forme $\lambda^\alpha Y_\alpha$, et par $E_A^* \subset F$ son orthogonal dans F . Alors $f_\alpha = 0$ équivaut à $f \in E_A^*$, et, si $f \in E_A^*$, $B^{ui} f_i = 0$ entraîne de plus $f_j B^{ji} f_i = 0$, c'est-à-dire $f \in N$. En sens inverse, $f \in N \cap E_A^*$ implique évidemment $f_\alpha = 0$ et $B^{ui} f_i = 0$. D'où l'équivalence des conditions suivantes :

$$\sim E_A^* \cap N = 0$$

$\sim$ le problème des splines admet une et une seule solution

$\sim$ la matrice B^{uv} admet une inverse S_{uv} .

Dans toute la suite, nous supposerons cette condition vérifiée, soit :

$$(4) \quad E_A^* \cap N = 0$$

La solution unique du problème des splines est alors :

$$f_u = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

avec

$$(5) \quad \Lambda_u^\alpha = - S_{uv} B^{v\alpha}$$

Cette matrice Λ_u^α est l'unique solution de l'équation

$$(5') \quad \Lambda_u^\alpha B^{uv} = - B^{v\alpha}$$

LES OPERATEURS Λ et Λ^* .

Du fait que le problème des splines admet une solution unique, on peut définir un opérateur Λ^* sur F de la manière suivante : pour $f \in F$, $\Lambda^* f$ est l'unique élément $f^* \in F$ coïncidant sur A avec f et réalisant le minimum de $\|f^*\|^2$. Explicitement :

$$f^* = f_\alpha (F^\alpha + \Lambda_u^\alpha F^u)$$

où, si l'on préfère :

$$f_\alpha^* = f_\alpha ; \quad f_u^* = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

L'opérateur Λ^* est idempotent ($\Lambda^* \Lambda^* = \Lambda^*$). En effet, f^* ne dépend que des composantes f_α , et $f_\alpha^* = f_\alpha$. Son noyau est l'espace E_A^* (espace des f telles que $f_\alpha = 0$).

Comme Λ est idempotent, l'espace image de Λ^* est identique au noyau de $(I - \Lambda^*)$: c'est l'espace des $f \in F$ tels que $f = \Lambda^* f$. Mais $\Lambda^* f = f$, c'est-à-dire

$$f_u = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

équivalent, d'après (5') à $B^{uv} f_v = - B^{ou} f_\alpha$, c'est-à-dire à

$$B^{ui} f_i = 0$$

Cet espace image est ainsi l'orthogonal H_1^* dans F de l'espace $H_1 \subset E$ engendré par les éléments $Y_u B^{ui}$. Or, notons ceci : le sous-espace $H \subset E$, muni de la métrique euclidienne définie ci-dessus (image par β de la pseudo-métrique B) est somme directe orthogonale de cet espace H_1 et de l'espace

$$H_0 = E_A \cap H$$

soit $H = H_0 \oplus H_1$.

En effet, $f \in H_1^*$ équivaut à $B^{ui} f_i = 0$. Cette condition est remplie si et seulement si l'élément $Y_f = \beta(f) = Y_i B^{ij} f_j$ vérifie $Y_f = Y_\alpha B^{\alpha i} f_i$, c'est-à-dire $Y_f \in E_A$, donc à $Y_f \in H_0 = E_A \cap H$ (puisque Y_f appartient toujours à H). Ainsi :

$$f \in H_1^* \Leftrightarrow Y_f \in H_0$$

Or, par définition, les éléments $Y \in H_1$ sont les éléments de H

qui annulent les formes $f \in H_1^*$. Ainsi :

$$Y \in H_1 \Leftrightarrow Y \in H \text{ et } \langle Y, Y_f \rangle = 0 \quad \forall Y_f \in H_0$$

H_1 est donc bien l'orthogonal de H_0 dans H (H_0 est l'espace des combinaisons linéaires autorisées dans E_A , son orthogonal H_1 est l'espace des résidus).

Nous avons maintenant en main tous les éléments qui permettent d'identifier l'opérateur Λ^* au dual d'un opérateur de krigeage : cet opérateur idempotent Λ^* , en effet, réalise la décomposition unique de tout $f \in F$ en la somme :

$$f = \Lambda^* f + (I - \Lambda^*) f$$

d'un élément $\Lambda^* f \in H_1^*$ (orthogonal dans F de l'espace des résidus $H_1 \subset H$) et d'un élément $(I - \Lambda^*) f \in E_A^*$ (nul sur A).

Par dualité, il lui correspond l'opérateur Λ sur E , réalisant la décomposition unique de tout $Y \in E$ en la somme :

$$Y = \Lambda Y + (I - \Lambda) Y$$

d'un élément $\Lambda Y \in E_A$ (combinaison linéaire des Y_α) et d'un élément $(I - \Lambda) Y \in H_1$ (combinaison linéaire autorisée orthogonale à H_0) : Λ est donc l'opérateur de krigeage sur E_A en présence de l'espace $N = H^*$ de dérivées, H étant muni de la métrique image par β de la métrique B .

Ainsi, la donnée d'une métrique B dégénérée sur F suffit pour définir sur le dual E une F.A.I. (ou, plus exactement, une F.A. sous-normée, c'est-à-dire une F.A. pour laquelle la norme n'est définie que sur une classe de combinaisons linéaires autorisées). Nous allons voir qu'inversement toute F.A. sous-normée peut être obtenue de cette façon, avec une métrique B univoquement définie. Ainsi, on peut identifier les notions de F.A.I. sur E et de métrique B dégénérée sur F (et donc identifier les problèmes de splines et de krigeage).

LES COVARIANCES GÉNÉRALISÉES.

L'espace F étant muni d'une métrique B^{ij} dégénérée, nous dirons qu'une matrice symétrique K_{ij} est une covariance généralisée sur H si l'on a

$$\langle f, f' \rangle = \lambda_f^i K_{ij} \lambda_{f'}^j,$$

pour tous $f, f' \in F$, les λ_f^i et $\lambda_{f'}^i$ désignant les composantes de Y_f et $Y_{f'}$, c'est-à-dire :

$$\lambda_f^i = B^{ij} f_j ; \quad \lambda_{f'}^i = B^{ij} f'_j$$

Comme $\langle f, f' \rangle = f_i B^{ij} f'_j$, cette définition équivaut à la condition :

$$(6) \quad B^{ii'} K_{i',j} B^{jj'} = B^{ij}$$

qui à son tour équivaut à :

$$(6') \quad B^{ii'} K_{i',j} = \delta_j^i - c_\ell^i f_j^\ell$$

et caractérise donc les covariances généralisées K_{ij} comme la classe des inverses généralisés de la matrice dégénérée B^{ij} . (l'équivalence de (6) et de (6') résulte immédiatement du fait que le noyau N de B^{ij} est constitué des combinaisons linéaires $c_\ell f^\ell$).

De (6') résulte que toute covariance généralisée est propre en ce sens que $\lambda^i K_{ij} = 0$ entraîne $\lambda^i = 0$ pour toute combinaison linéaire autorisée :

$$\lambda^i K_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda^i f_i^\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^i = 0$$

(il suffit, pour le voir, de multiplier les deux membres de (6') par λ^j).

Dès lors, pour une covariance généralisée donnée K_{ij} , le système

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_{\ell}^i K_{ij} = H_{\ell s} f_j^s \\ \lambda_{\ell}^i f_i^s = \delta_{\ell}^s \end{cases}$$

admet une solution et une seule (puisque, les $H_{\ell s}$ étant considérées comme des inconnues, le système sans second membre n'admet pas de solution non nulle).

Alors, les coefficients C_{ℓ}^i de l'équation (6') sont identiques aux λ_{ℓ}^i définis par (7) :

$$(8) \quad C_{\ell}^i = \lambda_{\ell}^i$$

En effet, multiplions (6') membre à membre par λ_s^j . Il vient, compte tenu de (7) :

$$B^{ii'} H_{st} f_{i'}^t = \lambda_s^i - C_s^i$$

Mais $B^{ii'} f_{i'}^t = 0$ (puisque les f^t sont dans N), et (8) en résulte. En particulier, on trouve :

$$(9) \quad C_{\ell}^i f_i^s = \delta_{\ell}^s$$

(cette relation (9) peut aussi s'obtenir directement en multipliant (6') par f_i^s : cela donne $f_j^s = (f_i^s C_{\ell}^i) f_j^{\ell}$ pour tout j , et donc $f_i^s C_{\ell}^i = \delta_{\ell}^s$).

Inversement, si les C_{ℓ}^i vérifient la condition (9), le second membre (à j fixé) de l'équation (6') vérifie

$$(\delta_j^i - C_{\ell}^i f_j^{\ell}) f_i^s = 0$$

donc définit une combinaison linéaire autorisée : mais c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (6') ait des solutions : ces solutions constituent une classe de matrices $\tilde{K}_{ij}$ non nécessairement symétriques, mais on peut toujours les symétriser : car si $\tilde{K}_{ij}$ est une solution de (6), $\tilde{K}_{ji}$ en est une autre, et la matrice symétrique $\frac{1}{2}(\tilde{K}_{ij} + \tilde{K}_{ji})$ convient également.

Au total, on voit qu'il existe toujours des solutions (ce qui était du reste évident, du fait que toute F.A. sous-normée admet des covariances généralisées). L'arbitraire qui préside au choix de ces solutions est levé dès que l'on se donne une matrice C_{ℓ}^i (vérifiant (9)) et une matrice symétrique $H_{\ell s}$. La condition supplémentaire

$$(10) \quad C_{\ell}^i K_{ij} = H_{\ell s} f_j^s$$

suffit, en effet, à lever l'indétermination : on peut le vérifier par des calculs algébriques directs, mais il est plus simple de passer par l'intermédiaire de la représentation :

$$Z_i = Y_i - Y_j C_{\ell}^j f_i^{\ell}$$

associée aux C_{ℓ}^j (soumis à la condition (9), qui exprime que l'on a bien $Z_i \in H$). Alors, la covariance

$$\sigma_{ij} = \langle Z_i Z_j \rangle$$

est univoquement définie par la donnée des C_{ℓ}^i , et s'exprime en fonction de toute covariance généralisée selon la formule :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & K_{ij} - f_i^{\ell} C_{\ell}^{i'} K_{i',j} - f_j^s C_s^{j'} K_{j',i} \\ & + f_i C_{\ell}^{i'} K_{i',j} C_s^{j'} f_j^s \end{aligned}$$

Si K_{ij} vérifie de plus la condition (10), ceci se réduit à

$$\sigma_{ij} = K_{ij} - f_i^{\ell} H_{\ell s} f_j^s$$

de sorte que K_{ij} est entièrement déterminée dès que $H_{\ell s}$ est donnée.

RECIPROQUE.

En sens inverse, donnons-nous une structure de F.A. sous-normée sur E, c'est-à-dire une norme euclidienne (non dégénérée) sur un sous-espace $H \subset E$. Soit $N = H^\perp$ l'orthogonal de H dans E. Cette F.A. sous-normée admet, comme on sait, des covariances généralisées, c'est-à-dire des matrices K_{ij} telles que l'on ait

$$\langle Y, Y' \rangle = \lambda^i K_{ij} \lambda'^j$$

dès que $Y = \lambda^i Y_i$ et $Y' = \lambda'^j Y_j$ sont dans H (c'est-à-dire dès que ces coefficients vérifient les conditions d'universalité

$$\lambda^i f_i^\ell = \lambda'^i f_i^\ell = 0$$

pour une base f^ℓ de N). Alors, le système

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda^i K_{ij} = \mu_\ell f_i^\ell \\ \lambda^i f_i^\ell = 0 \end{cases}$$

n'admet pas d'autre solution que $\lambda^i = 0$: en effet, l'élément $Y = \lambda^i Y_i$ est dans H, d'après la seconde équation, et $\|Y\|^2 = 0$, d'après la première, donc $Y = 0$. D'où $\lambda^i = 0$ (puisque les Y_i sont une base de E).

Par suite, le système analogue à (6') :

$$(11) \quad \begin{cases} B^{ii'} K_{ij} = \delta_j^i - C_\ell^i f_j^\ell \\ B^{ii'} f_i^\ell = 0 \end{cases}$$

où, cette fois, c'est la matrice B qui joue le rôle d'inconnue, admet une solution unique. On peut montrer, comme plus haut, que les C_ℓ^i constituent l'unique solution du système (7), soit $C_\ell^i = \lambda_\ell^i$, et donc $C_\ell^i f_i^s = \delta_\ell^s$.

Il reste à montrer que cette matrice B^{ij} est symétrique, et de type positif non strict. Comme la première relation (11) est identique à (6'), il en résultera automatiquement que la F.A.I. définie à partir de B^{ij} coïncide avec la F.A.I. sur H dont on est parti.

On peut faire cette vérification par le calcul, ce qui est un peu lourd. Il est plus agréable de procéder comme suit : pour un indice i fixé, désignons par L^i la forme linéaire sur H associant à tout $Y = \lambda^j Y_j \in H$ sa composante λ^j :

$$L^i(Y) = \lambda^i, \quad \forall Y = \lambda^j Y_j \in H$$

Du fait que H est un espace de Hilbert, cette forme linéaire (continue) L^i sur H s'identifie à un élément $A^i \in H$ bien défini par la condition :

$$(a) \quad \langle A^i Y \rangle = L^i(Y) = \lambda^i \quad \forall Y \in H$$

Désignons alors par B^{ij} les composantes de cet élément A^i :

$$A^i = B^{ij} Y_j$$

Comme $A^i \in H$ est une combinaison linéaire autorisée, ces composantes vérifient la condition :

$$B^{ij} f_j^\ell = 0$$

et, d'autre part, d'après la définition même de A^i :

$$\lambda^j f_j^\ell = 0 \Rightarrow B^{ij} K_{jj'}, \lambda^{j'} = \lambda^i$$

Mais cette dernière relation équivaut à :

$$B^{ij} K_{jj'} = \delta_{jj'} - c_{\ell}^i f_{j'}^\ell$$

Ainsi, B^{ij} est la solution du système (11). Calculons maintenant la covariance $\langle A^i A^j \rangle$, qui est bien définie, puisqu'il s'agit d'éléments de H . Pour cela, nous pouvons utiliser la

relation (a), avec $Y = A^j$, c'est-à-dire $\lambda^i = B^{ji}$. Il vient :

$$\langle A^i, A^j \rangle = B^{ji}$$

Ainsi, la matrice B est une covariance : elle est donc symétrique, et de type positif, d'ailleurs non strict. Il est clair d'ailleurs que $A^i = Y_j B^{ji}$ est l'image par l'application β de l'élément F^i (de la base de F), et, pour tout $f \in F$, on a

$$\beta(f) = A^i f_i$$

Par suite :

$$\langle f, f' \rangle = f_i B^{ij} f'_j = \langle \beta(f), \beta(f') \rangle$$

On vérifie ainsi que β est bien une isométrie de F sur H.

Il est intéressant de préciser analytiquement les relations entre les composantes f_i de $f = f_i F^i \in F$ et de son image $\beta(f) = f_i A^i = \lambda^i Y_i$ dans H. Par définition, λ^i est donnée par :

$$(12) \quad \lambda^i = B^{ij} f_j$$

Si nous multiplions par K_{ij} , nous trouvons, d'après (11) :

$$(13) \quad \begin{aligned} \lambda^i K_{ij} &= f_j + \mu_\ell f_j^\ell \\ \lambda^i f_i^\ell &= 0 \end{aligned}$$

et λ^i constitue l'unique solution du système (13). En sens inverse, étant donnés des λ^i vérifiant la condition $\lambda^i f_i^\ell = 0$ (i.e. $\lambda^i Y_i \in H$), les éléments f qui lui sont associés sont donnés par la 1ère relation (13), soit

$$f_j = \lambda^i K_{ij} + C_\ell f_j^\ell$$

(f n'est défini qu'à un élément $C_\ell f^\ell \in N$ arbitraire près).

En résumé, les f^ℓ désignant une base d'un sous-espace $N \subset F$, les équations :

$$(14) \quad \begin{cases} B^{ii'} K_{i,j} = \delta_j^i - C_\ell^i f_j^\ell \\ B^{ii'} f_i^\ell = 0 \end{cases}$$

mettent en correspondance biunivoque les métriques B^{ij} impropres sur F admettant le noyau N , et la classe des covariances généralisées K_{ij} des F.A.I. sur $H = N^* \subset E$, l'application $\beta : F \rightarrow E$ définie par

$$\beta(f) = Y_i B^{ij} f_j$$

constituant alors une isométrie de F muni de la métrique dégénérée B^{ij} sur H muni de la métrique K_{ij} .

UNE IDENTITE POUR LES FORMES QUADRATIQUES.

Revenons maintenant à la partition $I = A \cup V$ en deux classes d'indices, avec toujours la condition

$$E_A^* \cap N = 0$$

Soit $f \in F$ un élément de F et $f^* = \Lambda^* f$ défini par

$$f_\alpha^* = f_\alpha \quad f_u^* = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

Comme $f_\alpha^* = f_\alpha$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B^{ij} f_j &= B^{ij} (f_j - f_j^*) + B^{ij} f_j^* \\ &= B^{iu} (f_u - f_u^*) + B^{ij} f_j^* \end{aligned}$$

Multiplions par f_i , en tenant compte de $f^* \in H_1^*$, i.e. :

$$B^{uj} f_j^* = 0$$

Il vient :

$$f_i B^{ij} f_j = f_i B^{iu} (f_u - f_u^*) + f_\alpha B^{\alpha j} f_j^*$$

Comme $f_i^* B^{iu} = 0$ et $f_\alpha = f_\alpha^*$, on peut réécrire le premier terme en tenant compte de :

$$f_i B^{iu} = (f_i - f_i^*) B^{iu} = (f_v - f_v^*) B^{vu}$$

Notre forme quadratique devient ainsi :

$$f_i B^{ij} f_j = (f_u - f_u^*) B^{uv} (f_v - f_v^*) + f_\alpha B^{\alpha j} f_j^*$$

Maintenant, en remarquant :

$$f_\alpha B^{\alpha j} f_j^* = f_\alpha B^{\alpha\beta} f_\beta + f_\alpha B^{\alpha u} \Lambda_u^\beta f_\beta$$

et

$$(15) \quad B^{\alpha u} \Lambda_u^\beta = - B^{\alpha u} S_{uv} B^{\beta v} = - \Lambda_u^\alpha B^{uv} \Lambda_v^\beta$$

il vient l'identité :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_i B^{ij} f_j = f_\alpha Q^{\alpha\beta} f_\beta + (f_u - f_u^*) B^{uv} (f_v - f_v^*) \\ Q^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} - \Lambda_u^\alpha B^{uv} \Lambda_v^\beta \end{array} \right.$$

qui met immédiatement en évidence la propriété de minimalité de $f^* = \Lambda^* f$.

LA COVARIANCE DES RESIDUS.

Notons que la matrice S_{uv} , inverse de B^{uv} est la matrice des covariances des résidus :

$$(17) \quad S_{uv} = \langle Y_u - \Lambda Y_u, Y_v - \Lambda Y_v \rangle$$

En effet, le vecteur F^u , qui appartient à la base de F , a pour image par β l'élément $B^{ui} Y_i$. Par suite

$$\begin{aligned}\beta(S_{vu} F^u) &= S_{vu} B^{ui} Y_i \\ &= S_{vu} B^{uw} Y_w + S_{vu} B^{u\alpha} Y_\alpha\end{aligned}$$

Or $S_{vu} B^{uw} = \delta_v^w$ et $S_{vu} B^{u\alpha} = -\Lambda_v^\alpha$. Ainsi

$$\beta(S_{vu} F^u) = Y_v - \Lambda_v^\alpha Y_\alpha = (1-\Lambda) Y_v$$

Comme β est une isométrie, il en résulte :

$$\langle (1-\Lambda) Y_u, (1-\Lambda) Y_v \rangle = S_{uu}, \quad \langle F^{u'}, F^{v'} \rangle = S_{v',v'}$$

Mais $\langle F^{u'}, F^{v'} \rangle = B^{u',v'}$ est l'inverse de S_{uv} , et (17) en résulte.

L'"AUTRE KRIGEAGE".

Nous sommes maintenant en mesure de donner une interprétation plus simple de l'"autre krigeage" rencontré dans la note précédente.

Posons-nous, en effet, le problème du krigeage dans F , muni de sa métrique dégénérée B^{ij} : pour un $f \in F$, trouver l'élément $f' \in E_A^*$ (i.e. tel que $f'_\alpha = 0$) minimisant

$$\|f-f'\|^2 = (f_i - f'_i) B^{ij} (f_j - f'_j)$$

Analytiquement, cela est très facile : f'_j doit vérifier :

$$\begin{cases} f'_\alpha = 0 \\ B^{ui} (f_i - f'_i) = 0 \end{cases}$$

La seconde équation peut être remplacée par

$$B^{uv} (f_v - f'_v) = - B^{u\alpha} f_\alpha$$

La solution est donc unique si et seulement si la matrice B^{uv} est régulière (ce qui équivaut comme on l'a vu, à $E_A^* \cap N = 0$), et, comme

$$\Lambda_u^\alpha = - S_{uv} B^{v\alpha}$$

il vient

$$f'_v = f_v - \Lambda_v^\alpha f_\alpha$$

c'est-à-dire

$$(18) \quad f' = (1 - \Lambda^*) f$$

Ainsi, l'opérateur associé à l'"autre krigeage" est $I - \Lambda^*$. L'opérateur $(1 - \Lambda)$ sur E qui lui est associé par dualité peut être interprété comme l'interpolateur prolongeant sur A une fonction λ^u , définie sur V , selon la formule :

$$\lambda^\alpha = - \Lambda_u^\alpha \lambda^u$$

Ce résultat est apparent sur l'identité (16) : en appliquant cette identité à l'élément $f - f'$, avec $f'_\alpha = 0$ et donc $\Lambda^* f' = 0$, il vient en effet :

$$\begin{aligned} (f_i - f'_i) B^{ij} (f_j - f'_j) &= f_\alpha Q^{\alpha\beta} f_\beta \\ + (f_u - \Lambda_u^\alpha f_\alpha - f'_u) B^{uv} (f_v - \Lambda_v^\beta f_\beta - f'_v) \end{aligned}$$

Cette expression est bien minimale si et seulement si

$$f'_u = f_u - \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

INTERPRETATION DE LA MATRICE $Q^{\alpha\beta}$.

Considérons la restriction à E_A de notre F.A. sous-normée. Dans E_A , l'espace des combinaisons linéaires autorisées est

$H_0 = E_A \cap H$, et, d'autre part, si K_{ij} est une covariance généralisée de la F.A. sous-normée sur H , $K_{\alpha\beta}$ est évidemment une covariance généralisée de la restriction à E_A de cette F.A. sous-normée. D'après ce qui précède, $K_{\alpha\beta}$ doit être l'inverse généralisé d'une matrice $R^{\alpha\beta}$ symétrique de type (non strictement) positif. Le dual de E_A peut évidemment être identifié à l'espace $F_A \subset F$ engendré par les F^α , de sorte que $R^{\alpha\beta}$ définit une métrique dégénérée sur F_A . En fait, cette matrice R est identique à la matrice Q de la relation (16) :

$$R^{\alpha\beta} = Q^{\alpha\beta}$$

Pour montrer cela, il faut vérifier que $Q^{\alpha\beta}$ constitue bien la solution du système suivant, qui est la simple réécriture de (11) lorsque l'ensemble I des indices est remplacé par A :

$$(19) \quad \begin{cases} Q^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha - \lambda_\ell^\alpha f_\gamma^\ell \\ Q^{\alpha\beta} f_\beta^\ell = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de (16) et de (15), la matrice Q peut s'écrire :

$$(20) \quad Q^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} + B^{\alpha u} \Lambda_u^\beta$$

Evaluons le premier membre de la 1ère équation (19) en utilisant (20). Il vient :

$$Q^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} = B^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} + B^{\alpha u} \Lambda_u^\beta K_{\beta\gamma}$$

Mais les coefficients Λ_u^β du krigeage de Y_u vérifient l'équation :

$$\Lambda_u^\beta K_{\beta\gamma} = K_{u\gamma} + \mu_{\ell u} f_\gamma^\ell$$

où les $\mu_{\ell u}$ sont les paramètres de Lagrange. En substituant, on trouve donc :

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} &= B^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} + B^{\alpha u} K_{u\gamma} + B^{\alpha u} \mu_{\ell u} f_\gamma^\ell \\ &= B^{\alpha i} K_{i\gamma} + B^{\alpha u} \mu_{\ell u} f_\gamma^\ell \end{aligned}$$

Mais, d'après (11), écrite avec α au lieu de i et γ au lieu de j ,

$$B^{\alpha i} K_{i\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - C_{\ell}^{\alpha} f_{\gamma}^{\ell}$$

Ainsi, la 1ère relation (19) est vérifiée. Explicitement :

$$(21) \quad Q^{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} - (C_{\ell}^{\alpha} + B^{\alpha u} \mu_{\ell u}) f_{\gamma}^{\ell}$$

Passons à la seconde relation (19). Compte tenu de (20), on trouve

$$Q^{\alpha\beta} f_{\beta}^{\ell} = B^{\alpha\beta} f_{\beta}^{\ell} + B^{\alpha u} \Lambda_{u}^{\beta} f_{\beta}^{\ell}$$

Mais $\Lambda_{u}^{\beta} f_{\beta}^{\ell} = f_{u}^{\ell}$ (condition d'universalité). Donc :

$$Q^{\alpha\beta} f_{\beta}^{\ell} = B^{\alpha\beta} f_{\beta}^{\ell} + B^{\alpha u} f_{u}^{\ell} = B^{\alpha i} f_{i}^{\ell} = 0$$

ce qui achève la démonstration.

Une autre démonstration, plus rapide, est la suivante : partons des éléments

$$A^i = B^{ij} Y_j$$

et prenons leur krigeage :

$$\Lambda A^i = \Lambda_{u}^{\alpha} B^{iu} Y_{\alpha} + B^{i\alpha} Y_{\alpha}$$

Pour $i = v \in V$, il vient identiquement 0. En effet :

$$\Lambda A^v = \Lambda_{u}^{\alpha} B^{vu} Y_{\alpha} + B^{v\alpha} Y_{\alpha} = 0$$

puisque $\Lambda_{u}^{\alpha} B^{vu} = -B^{v\alpha}$. Pour $i = \beta \in A$, par contre :

$$\Lambda A^{\beta} = \Lambda_{u}^{\alpha} B^{\beta u} Y_{\alpha} + B^{\alpha\beta} Y_{\alpha}$$

D'après (20), cela peut s'écrire :

$$\Lambda A^{\beta} = Q^{\alpha\beta} Y_{\alpha}$$

Ainsi, les $Q^{\alpha\beta}$ sont les coefficients du krigeage de A^β : il suffit d'écrire les équations du krigeage de cette combinaison linéaire autorisée pour retrouver le système (19).

En ce qui concerne les A^u , dont le krigeage est identiquement nul, on notera qu'ils constituent une base de l'espace H_1 des résidus, à savoir la base duale de celle qui est formée des $(I-A) Y_v$. En effet, d'après leur définition, les A^u vérifient :

$$\langle A^u Y \rangle = \lambda^u, \quad \forall \lambda^i Y_i \in H$$

Pour l'élément $(I-A) Y_v$, on a $\lambda^u = \delta_v^u$ et $\lambda^\alpha = -\Lambda_v^\alpha$. Par suite :

$$\langle A^u, (I-A) Y_v \rangle = \delta_v^u$$

Ces bases sont bien en dualité : c'est aussi pourquoi la covariance S_{uv} des résidus est l'inverse de la covariance $B^{uv} = \langle A^u, A^v \rangle$.

REMARQUES SUR LES PARAMETRES DE LAGRANGE.

Comme on l'a déjà vu, les λ_ℓ^α du système (19) constituent la solution unique du système

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda_\ell^\alpha K_{\alpha\beta} = \mu_{\ell s} f_\beta^s \\ \lambda_\ell^\alpha f_\alpha^s = \delta_\ell^s \end{cases}$$

Le rapport entre les coefficients λ_ℓ^α du système (19) et ceux du système (11), i.e. les C_ℓ^i est précisé par la relation (21), ce qui donne :

$$(23) \quad \lambda_\ell^\alpha = C_\ell^\alpha + B^{\alpha u} \mu_{\ell u}$$

Ce résultat peut être amélioré. En effet, désignons par $\tilde{\lambda}_\ell^\alpha$ les coefficients du krigeage de l'élément $C_\ell^i Y_i$:

$$\tilde{\lambda}_\ell^\alpha Y_\alpha = \Lambda C_\ell^i Y_i$$

Ils constituent la solution de l'équation :

$$(24) \quad \begin{cases} \tilde{\lambda}_\ell^\alpha K_{\alpha\beta} = C_\ell^i K_{i\beta} + D_{\ell s} f_\beta^s \\ \tilde{\lambda}_\ell^\alpha f_\alpha^s = C_\ell^i f_i^s \end{cases}$$

Mais on a :

$$\begin{cases} C_\ell^i K_{i\beta} = H_{\ell s} f_\beta^s \\ C_\ell^i f_i^s = \delta_\ell^s \end{cases}$$

de sorte que (24) s'identifie à (22), et par suite :

$$\tilde{\lambda}_\ell^\alpha = \lambda_\ell^\alpha$$

Le krigeage de $C_\ell^i Y_i$ est donc $\lambda_\ell^\alpha Y_\alpha$:

$$\lambda_\ell^\alpha Y_\alpha = C_\ell^i \Lambda Y_i = C_\ell^\alpha Y_\alpha + C_\ell^u \Lambda_u^\alpha Y_\alpha$$

Il en résulte :

$$(25) \quad \lambda_\ell^\alpha = C_\ell^\alpha + C_\ell^u \Lambda_u^\alpha$$

Comparons à (23), en tenant compte de

$$B^{\alpha v} = - \Lambda_u^\alpha B^{uv}$$

Il vient :

$$\Lambda_u^\alpha C_\ell^u = \Lambda_u^\alpha B^{uv} \mu_{\ell v}$$

Multipliant par f_α^s nous obtenons :

$$f_u^s C_\ell^u = f_u^s B^{uv} \mu_{\ell v}$$

Ceci étant vrai quel que soit u , il en résulte :

$$(26) \quad C_\ell^u = B^{uv} \mu_{\ell v}$$

ou, si l'on préfère :

$$(26') \quad \mu_{\ell v} = S_{uv} c_{\ell}^u$$

LE SYSTEME DU KRIGEAGE ET SON DUAL.

Cherchons maintenant à exprimer la matrice du krigeage, Λ_u^α , en fonction de $Q^{\alpha\beta}$.

Pour cela, nous partons du krigeage de l'élément $Y_u - f_u^\ell \lambda_\ell^\alpha Y_\alpha$, qui est :

$$\Lambda (Y_u - f_u^\ell \lambda_\ell^\alpha Y_\alpha) = (\Lambda_u^\beta - f_u^\ell \lambda_\ell^\beta) Y_\beta$$

Les coefficients de ce krigeage sont la solution du système :

$$(\Lambda_u^\beta - f_u^\ell \lambda_\ell^\beta) K_{\beta\gamma} = K_{u\gamma} - f_u^\ell \mu_{\ell s} f_\gamma^s + \mu_{\ell u} f_\gamma^\ell$$

$$(\Lambda_u^\beta - f_u^\ell \lambda_\ell^\beta) f_\beta^s = 0$$

Or en multipliant (19) par $K_{u\alpha}$ nous obtenons un système identique. Ainsi :

$$(27) \quad \Lambda_u^\beta = Q^{\alpha\beta} K_{u\alpha} + f_u^\ell \lambda_\ell^\beta$$

Cette relation permet de mettre en évidence le système dual d'équations du krigeage (i.e. du krigeage considéré comme interpolateur). Les f_α étant donnés, en effet, l'interpolateur

$$f_u^* = \Lambda_u^\alpha f_\alpha$$

s'écrit, d'après (27)

$$f_u^* = b^\alpha K_{\alpha u} + c_\ell f_u^\ell$$

avec

$$\begin{cases} b^\alpha = Q^{\alpha\beta} f_\beta \\ c_\ell = \lambda_\ell^\beta f_\beta \end{cases}$$

Compte tenu du système (19) qui détermine la matrice $Q^{\alpha\beta}$, ces coefficients vérifient les relations :

$$b^\alpha K_{\alpha\gamma} = f_\gamma - f_\beta \lambda_\ell^\beta f_\gamma^\ell = f_\gamma - c_\ell f_\gamma^\ell$$

$$b^\alpha f_\alpha^\ell = 0$$

Ceci se réécrit sous la forme suivante, où l'on reconnaît le système dual habituel :

$$\begin{cases} b^\alpha K_{\alpha\gamma} + c_\ell f_\gamma^\ell = f_\gamma \\ b^\alpha f_\alpha^\ell = 0 \end{cases}$$