Fontainebleau/CGMM N-724

SUR LA NEGLIGEABILITE DU SQUELETTE, ET LA CONTINUITE ABSOLUE DES EROSIONS

G. MATHERON DECEMBRE 1981

SUR LA NEGLIGEABILITE DU SQUELETTE,

ET LA CONTINUITE ABSOLUE DES EROSIONS

par

G. MATHERON

Table des Matières

SUR LA NEGLIGEABILITE DU SQUELETTE, ET LA CONTINUITE ABSOLUE DES EROSIONS

par

G. MATHERON

0 - OBJET DE CETTE ETUDE.

Plusieurs définitions sont possibles pour le squelette d'un ensemble A donné dans $\mathbb{R}^m$. Mais, dans tous les cas, en désignant par $G = \mathring{A}$ l'intérieur de A, la fonction ρ_G définie sur $\mathbb{R}^m$ en posant :

$$\rho_G(x) = d(x, G^c)$$

(distance de x G^c, qui est l'adhérence du complémentaire de A) jouera un rôle essentiel dans cette définition. Or, cette fonction ρ_G est <u>lipschitzienne</u> et (du moins si G est bornée) appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R}^m, \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. D'où l'idée d'étudier les propriétés de ρ_G en tant qu'élément de L^2. C'est l'objet de la première partie de cette étude : nous établirons deux théorèmes assez puissants . Le premier de ces théorèmes énonce que toute fonction lipschitzienne dans $\mathbb{R}^m$ est différentiable presque partout ; le second énonce que pour tout ensemble B négligeable dans $\mathbb{R}$, le gradient de f est nul presque partout sur le sous-ensemble $\{f \in B\}$ de $\mathbb{R}^m$.

Du premier théorème découleront d'importants résultats concernant la négligeabilité du squelette. Si l'on <u>définit</u> le squelette comme l'ensemble des points où ρ_G <u>n'est pas</u> différentiable, le théorème implique aussitôt la négligeabilité de ce squelette. Cette définition, toutefois (bien qu'elle ne soit pas sans intérêt) différe trop des définitions les plus usuelles. Nous devrons donc regarder les implications de notre théorème lorsqu'on adopte l'une de ces définitions usuelles. Cela nous conduira à des résultats assez forts, concernant la négligeabilité du squelette, sans pourtant épuiser le problème. Tel sera l'objet de la seconde partie.

Dans un dernier paragraphe, enfin, partant d'un ouvert borné G, nous formerons les érodés

$$F_\rho = G \ominus \rho\mathring{B} \quad ; \quad G_\rho = G \ominus \rho\overline{B}$$

où $\mathring{B}$ et $\overline{B}$ représentent respectivement la boule unité ouverte et fermée, et nous étudierons leurs volumes en fonction de ρ. Notre deuxième théorème nous montrera qu'il existe une densité $\ell(r)$ (représentant l'aire de la surface de niveau $\rho_G = \underline{r}$), telle que l'on ait :

$$V(F_\rho) = V(G_\rho) = \int_\rho^\infty \ell(r)dr \qquad (\rho > 0)$$

pour tout $\rho > 0$: ce qui implique, entre autres, la négligeabilité de la frontière ∂F_ρ (résultat qui subsiste évidemment lorsque G n'est pas borné).

1 - LES LIPSCHITZIENNES DANS UN ESPACE L^2.

Dans tout ce qui suit, nous dirons qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^m$ est lipschitzienne si l'on a, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^m$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$$

et nous désignerons par Λ l'espace des fonctions lipschitziennes de R^m.

1.1 - Remarque préliminaire.

Pour toute propriété à caractère local d'une fonction $f \in \Lambda$, on peut se contenter d'établir cette propriété dans le cas où f est à support borné. Cela résulte des considérations suivantes :

Tout d'abord, si f et g sont dans Λ, on vérifie sans difficulté que Sup(f,g) et Inf(f,g) sont elles-mêmes encore lipschitziennes. De même, si une suite f_n dans Λ converge ponctuellement vers une fonction f, cette limite f est encore lipschitzienne. Par suite, Λ est complètement réticulé. En particulier, toute fonction φ admet une plus petite majorante et une plus grande minorante lipschitziennes.

Soit alors $f \in \Lambda$. Par propriété à caractère local d'une fonction f, nous entendons une propriété dont l'énoncé ne fait intervenir que la restriction de f à des ouverts bornés. Pour vérifier que f possède une telle propriété (la différentiabilité presque partout par exemple), il suffit donc de montrer que la restriction de f à tout ouvert borné satisfait à cette propriété.

Etant lipschitzienne, f est bornée sur chaque ouvert borné V. Quitte à remplacer f par f + Constante (ce qui ne changera rien pour la différentiabilité), nous pourrons même supposer $f \geq 0$ sur V. Posant alors

$$f_V = 1_V\, f$$

nous pouvons introduire la plus petite majorante lipschitzienne de f_V, soit $\hat{f}_V$. Il est facile de voir que $\hat{f}_V = f$ sur V et que $\hat{f}_V$ est nulle en dehors d'un ouvert borné. Explicitement, en effet, on trouve

$$\hat{f}_V(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in V} (f(y) - |y-x|)_+$$

Comme $\hat{f}_V$ est lipschitzienne et coïncide avec f sur V, on voit qu'elle possède sur V les mêmes propriétés de différentiabilité que f, de sorte qu'on peut se contenter d'étudier le cas des lipschitziennes à support borné, qui sont des éléments de l'espace $L^2(\mathbb{R}^m, \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

Dans cet espace $L^2(\mathbb{R}^m, \lambda)$ le groupe des translations U_h, $h \in \mathbb{R}^m$, défini par

$$(U_h\, f)(x) = f(x+h)$$

est un groupe continu d'opérateurs unitaires, de sorte que les résultats classiques de l'analyse harmonique des groupes d'opérateurs unitaires peuvent être utilisés.

1.2 - La différentiabilité des Lipschitziennes.

Plus généralement, désignons par H un espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni d'un groupe continu U_h d'opérateurs unitaires (h parcourant $\mathbb{R}^m$). On dit qu'un élément $f \in H$ est différentiable au sens de L^2, ou différentiable m.q. si l'on peut trouver un vecteur Df, dont les composantes $D_i f$ sont des éléments de H, tel que :

$$\lim_{|h| \to 0} \left\| \frac{(U_h - I)f - h^i\, D_i\, f}{|h|} \right\| = 0$$

et on dit alors que Df est le gradient m.q. de f. Le gradient définit donc un opérateur D appliquant une partie $\mathfrak{D}_D$ de H dans H^m. Cet opérateur n'est pas continu, mais il est dense et fermé (son adjoint D* est, au signe près, l'opérateur divergence sur H^m).

D'après un théorème général, un élément $f \in H$ est différentiable m.q. si et seulement si on peut trouver une constante $a \geq 0$ telle que

$$\|(U_h - I)f\| \leq a|h| \qquad (h \in \mathbb{R}^m) \tag{1-1}$$

Considérons alors un élément $f \in L^2 \cap \Lambda$ (lipschitzien μ-p.p. sur Ω) c'est-à-dire vérifiant

$$|(U_h - I)f| \leq |h| \qquad \mu\text{-p.p.}$$

et, si μ n'est pas bornée, $\mu(\{f \neq o\}) < \infty$.

A fortiori, la condition (1-1) est satisfaite, de sorte que toute lipschitzienne dans H est différentiable m.q. :

$$H \cap \Lambda \subset \mathcal{D}_D$$

Naturellement, en tant que champ de vecteurs sur Ω, le gradient Df n'est défini que μ presque partout.

L'existence du gradient m.q. entraine évidemment celle de toutes les dérivées partielles m.q. Par suite, pour tout vecteur unitaire $e = (e^i,\ i = 1,2,\dots,m)$ dans $\mathbb{R}^m$, la limite suivante a lieu au sens L^2 :

$$\lim_{t \to 0} \frac{(U_{te} - I)f}{t} = e^i\, D_i\, f$$

On peut donc aussi trouver une suite $t_n \to 0$ pour laquelle la limite

$$\lim_{t_n \to 0} \frac{U_{t_n e} - I}{t_n}\, f = e^i\, D_i\, f \tag{1-2}$$

ait lieu μ-p.p. sur Ω. Par le procédé habituel de diagonalisation, on peut même trouver une suite $t_n \to 0$ telle que la limite (1-2) ait lieu pour tout vecteur unitaire e de $\mathbb{R}^m$ appartenant à une partie dénombrable dense C de la sphère unité et pour tout $\omega \in \Omega$

n'appartenant pas à un ensemble $\mathcal{N}$ μ-négligeable. Noter que cela implique $|Df| \leq 1$ p.p.

Dans le cas où f est lipschitzienne dans $L^2(\mathbb{R}^m,\lambda)$, ce résultat peut être amélioré : la limite (1-2) a lieu, en effet, dans ce cas pour <u>tout</u> vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^m$ et tout $x \in \mathbb{R}^m$ n'appartenant pas à un ensemble $\mathcal{N}$ λ-négligeable.

Pour le montrer, donnons-nous C dénombrable dense sur la sphère unité et $\mathcal{N}$ λ-négligeable tels que la limite (1-2) ait lieu pour tout $e' \in C$ et tout $x \notin \mathcal{N}$, et soit e un vecteur unitaire quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Nous pouvons trouver un $e' \in C$ tel que $|e-e'| \leq \varepsilon$. Posons, pour abréger :

$$< e, Df_x > = \sum_{i=1}^{m} e^i D_i f(x) \qquad (x \in \mathcal{N}^c)$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz et de $|Df| \leq 1$ sur $\mathcal{N}^c$, nous trouvons

$$\left|\frac{f(x+t_n e) - f(x)}{t_n} - < e\ Df_x >\right| \leq \left|\frac{f(x+t_n e') - f(x)}{t_n} - < e'\ Df_x >\right|$$

$$+ \left|\frac{f(x+t_n e) - f(x+t_n e')}{t_n}\right| + |Df_x||e-e'|$$

$$\leq \left|\frac{f(x+t_n e') - f(x)}{t_n} - < e'\ Df_x >\right| + 2\varepsilon \quad (x \notin \mathcal{N}$$

Comme $e' \in C$, il vient, pour $n \to \infty$:

$$\overline{\lim} \left|\frac{f(x+t_n e) - f(x)}{t_n} - < e\ Df_x >\right| \leq 2\varepsilon$$

On a donc bien :

$$\frac{f(x+t_n e) - f(x)}{t_n} \to < e\ \ Df_x >$$

pour tout vecteur unitaire e et tout $x \notin \mathcal{N}$. Ainsi :

<u>LEMME 1</u> - Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$, on peut trouver un ensemble $\mathfrak{X}$ λ-négligeable dans $\mathbb{R}^m$, un champ de vecteurs Df_x défini pour $x \in \mathfrak{X}^c$ et une suite $t_n \downarrow 0$ tels que l'on ait :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+t_n\, e) - f(x)}{t_n} = \langle e\, Df_x \rangle$$

pour <u>tout</u> vecteur unitaire et tout $x \in \mathbb{R}^m$ n'appartenant pas à $\mathfrak{X}$. De plus, on a :

$$|Df_x| \leq 1 \qquad (x \in \mathfrak{X}^c)$$

Enfin, (si de plus $f \in L^2(\mathbb{R}^m,\lambda)$) Df est le gradient m.q. de f.

Nous allons améliorer considérablement ce premier résultat. Examinons d'abord le cas de l'espace à une seule dimension (m = 1). Il est facile de voir que toute fonction f lipschitzienne sur R est à <u>variation bornée</u>. Elle admet donc presque partout une dérivée $df/dx = a(x)$, avec évidemment $|a| \leq 1$ p.p. Montrons que f est l'intégrale de sa dérivée a(x), soit :

$$f(x) = f(o) + \int_o^x a(\xi)d\xi$$

D'après notre remarque préliminaire, nous pouvons supposer $f \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$, de sorte que f admet une dérivée m.q. qui (d'après le lemme 1) coïncide p.p. avec a(x).

Considérons alors les <u>régularisées</u> $f_r = f * g_r$, où g_r est la densité de la loi de Gauss centrée de variance $r > 0$. On a évidemment encore $f_r \in L^2 \cap \Lambda$ et la dérivée m.q. de f_r, soit a_r est la régularisée $a_r = a * g_r$, qui est une fonction continue. Utilisant le lemme 1, nous voyons que $a_r(x)$ coïncide avec la dérivée au sens usuel df_r/dx (en tout $x \in \mathbb{R}^m$, et non plus seulement p.p., puisqu'il s'agit de fonctions continues). S'agissant de fonctions continues, on a ensuite :

$$f_r(x) = f_r(o) + \int_o^x a_r(\xi)d\xi$$

l'intégrale pouvant être prise aussi bien au sens de Riemann que de Lebesgue.

Si $r \downarrow 0$, la convergence $f_r \to f$ a lieu à la fois au sens m.q. et au sens de la convergence uniforme sur les compacts. De plus, $a_r \to a$ au moins au sens de L^2. On peut donc trouver une suite $r_n \downarrow 0$ telle que $a_{r_n} \to a$ p.p. Mais, de plus, on a $|a_{r_n}| \leq 1$ p.p. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et donne :

$$f(x) = f(o) + \int_0^x a(\xi)d\xi \qquad (\forall\ x \in \mathbb{R}) \tag{1-3}$$

Inversement, si $a(x)$ est une fonction mesurable sur R vérifiant $|a| \leq 1$ p.p., il est clair que l'intégrale (1-3) définit une fonction f lipschitzienne. Ainsi :

<u>LEMME 2</u> - Une fonction f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est de la forme :

$$f(x) = f(o) + \int_0^x a(\xi)d\xi$$

pour une fonction mesurable a telle que $|a| \leq 1$ p.p. Cette fonction f admet alors la dérivée (au sens usuel) $a(x)$ en presque tout $x \in \mathbb{R}$. Si, de plus, $f \in L^2$, cette fonction a s'identifie à la dérivée m.q. de f.

Voici maintenant un lemme concernant les <u>dérivées</u> partielles. D'une manière générale, nous dirons qu'une fonction f sur $\mathbb{R}^m$ admet en un point $x \in \mathbb{R}^m$ la dérivée partielle $D_e f(x)$ dans la direction définie par le vecteur unité e si la limite

$$\lim_{|t|\to 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} = D_e f(x)$$

existe lorsque $t \to 0$. Nous dirons aussi que f admet au point x un <u>gradient partiel</u> $Df(x)$ si la dérivée partielle $D_e f(x)$ existe en x pour tout vecteur unité e et vérifie :

$$D_e f(x) = \langle e, Df(x) \rangle$$

Dans ces conditions :

LEMME 3 - Si f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$, elle admet presque partout un gradient partiel Df. Si, de plus, $f \in L^2$, le gradient partiel Df s'identifie au gradient m.q. de f.

Dans le cas m = 1, le résultat découle du lemme 2. Supposons $m > 1$, et soit $f \in L^2(\mathbb{R}^m, \lambda)$ lipschitzienne dans $\mathbb{R}^m$. Sur chaque droite L parallèle à un vecteur unitaire e donné, l'ensemble des points où $D_e f$ n'existe pas est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur L (lemme 2). Le théorème de Fubini montre ensuite que la dérivée partielle $D_e f(x)$ existe en tout $x \in \mathbb{R}^m$ n'appartenant pas à un ensemble $\mathcal{N}_e$ λ-négligeable. Cet ensemble $\mathcal{N}_e$ dépend du vecteur unitaire. Mais nous pouvons choisir une partie C dénombrable dense sur la sphère unité, et poser

$$\mathcal{N} = \bigcup_{e \in C} \mathcal{N}_e$$

de sorte que $\mathcal{N}$ est encore négligeable, et que $D_e f(x)$ existe pour tout $e \in C$ et en tout point $x \notin \mathcal{N}$.

Soit maintenant $x \notin \mathcal{N}$ et e un vecteur unité n'appartenant pas à C. Montrons que $D_e f(x)$ existe. Pour cela, choisissons une suite e_n dans C convergeant vers e. Pour chaque n, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\, e_n) - f(x)}{t} = D_{e_n} f(x)$$

d'où d'ailleurs $|D_{e_n} f(x)| \leq 1$, puisque f est lipschitzienne. Quitte à remplacer e_n par une suite partielle, on peut donc supposer que la suite $D_{e_n} f(x)$ converge vers une limite a lorsque $n \to \infty$.

$$D_{e_n} f(x) \to a$$

Comme f est lipschitzienne, on a d'autre part :

$$\left| \frac{f(x+t\, e_n) - f(x)}{t} - \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \right| \leq |e_n - e|$$

On en déduit, en faisant tendre d'abord t vers 0 :

$$D_{e_n} f(x) - |e_n - e| \leq \underline{\lim} \frac{f(x+te) - f(x)}{t} \leq \overline{\lim} \frac{f(x+te) - f(x)}{t}$$

$$\leq D_{e_n} f(x) + |e_n - e|$$

puis en faisant tendre n vers l'infini :

$$\lim \frac{f(x+te) - f(x)}{t} = a$$

puisque $|e_n - e| \to 0$ et $D_{e_n} f(x) \to a$. Donc la dérivée partielle $D_e f(x)$ existe pour toute direction e.

Il reste à montrer qu'il existe un gradient partiel $Df(x)$ pour tout point $x \notin \mathcal{N}$. Si la fonction f est dans L^2, cela découle aussitôt du lemme 1 : pour tout e unitaire et presque tout x, on trouve en effet :

$$\frac{f(x+t_n e) - f(x)}{t_n} \to \langle e\, Df_x \rangle$$

où Df est le gradient m.q. Mais cette limite coïncide évidemment pour presque tout x avec la dérivée partielle $D_e f(x)$ dont nous avons déjà établi l'existence. Il existe donc bien presque partout un gradient partiel qui s'identifie avec le gradient m.q. Df. Dans le cas général où f est lipschitzienne sans être dans L^2, l'existence p.p. du gradient partiel découle de notre remarque préliminaire.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir notre premier résultat fondamental.

<u>THEOREME 1</u> - Toute fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$ est différentiable presque partout sur $\mathbb{R}^m$. Si, de plus, $f \in L^2$, le gradient de f, défini presque partout, s'identifie à son gradient m.q.

Il suffit, comme d'habitude, de raisonner dans le cas $f \in \Lambda \cap L^2$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble négligeable du lemme 2, hors duquel le gradient partiel existe et coïncide avec le gradient m.q. Df. Il faut montrer que f est différentiable (au sens usuel) en tout $x \notin \mathcal{N}$.

Soit donc $x \notin \mathcal{N}$, et $a = Df_x$ le gradient partiel ($\equiv$ m.q.) en ce point. Supposons que la limite :

$$\lim_{|h|\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - \langle ah \rangle}{|h|} \right| = 0$$

<u>n'ait pas</u> lieu : on peut alors trouver dans $\mathbb{R}^m \setminus 0$ une suite $h_n \to 0$ avec pour tout n :

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x) - \langle ah_n \rangle}{|h_n|} \right| \geq \varepsilon > 0$$

Posons $|h_n| = r_n > 0$, et soit $e_n = h_n/r_n$ le vecteur unitaire de h_n. Quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer que la suite e_n admet une limite e (compacité de la sphère unité). De plus, f étant lipschitzienne, on peut (quitte à extraire à nouveau une suite partielle) supposer que la suite

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{|h_n|}$$

admet une limite b. On a ainsi :

$$\frac{f(x+r_n e_n) - f(x)}{r_n} \to b \quad ; \quad e_n \to e$$

$$\left| \frac{f(x+r_n e_n) - f(x)}{r_n} - \langle a e_n \rangle \right| \geq \varepsilon > 0$$

donc, en particulier, $|b - \langle ae \rangle| > 0$, soit :

$$b \neq \langle ae \rangle$$

Mais, f étant lipschitzienne :

$$\left| \frac{f(x+r_n e_n) - f(x+r_n e)}{r_n} \right| \leq |e_n - e|$$

On a donc $\dfrac{f(x+r_n e_n) - f(x+r_n e)}{r_n} \to 0$, d'où résulte :

$$b = \lim \frac{f(x+r_n e) - f(x)}{r_n}$$

Mais cette limite vaut $\langle ea \rangle$, puisque a est le gradient partiel en x. On conclut donc $b = \langle ea \rangle$, d'où contradiction. Par suite, f est différentiable en tout $x \notin \mathfrak{X}$.

1.3 - Un théorème de continuité.

Dans les énoncés qui suivent, nous désignerons par H un espace de Hilbert $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ muni d'un groupe continu d'opérateurs unitaires U_h, $h \in \mathbb{R}^m$, supposé vérifier la propriété :

(a) $$U_h\, f(Y) = f(U_h\, Y)$$

pour toute fonction f mesurable sur $\mathbb{R}$ et tout $Y \in H$ tel que $f(Y) \in H$. D désignera l'opérateur gradient sur H.

La première question que nous nous posons est la suivante : étant donné un élément Y différentiable m.q. dans H, soit $Y \in \mathcal{D}_D$, et une fonction f sur $\mathbb{R}$ admettant (en tout point ou p.p.) une dérivée f' et telle que $f(Y) \in H$, a-t-on $f(Y) \in \mathcal{D}_D$ et

$$D\, f(Y) = f'(Y)\, D\, Y \quad ?$$

J'ignore si cette propriété est vraie en toute généralité. Mais elle est vraie au moins pour les lipschitziennes. Posons d'abord un lemme.

<u>LEMME 4</u> - Si une suite X_n dans un espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ converge <u>faiblement</u> vers une limite $X \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et admet μ-p.p. une limite $Y \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, alors $X = Y$ μ-p.p.

Quitte à remplacer X_n par X_n-X et Y par Y-X, on peut supposer X = 0. Soit donc $X_n \to 0$ faiblement dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et, au sens μ-p.p., $X_n \to Y \in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Montrons Y = 0 μ-p.p.

~ Supposons d'abord μ <u>bornée</u>, soit par exemple $\int \mu(d\omega) = 1$. D'après le théorème d'Egoroff, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que

$$P(A_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$$

et que la convergence $X_n \to Y$ soit <u>uniforme</u> sur A_ε. Cela implique $1_{A_\varepsilon} X_n \to 1_{A_\varepsilon} Y$ fortement, et donc faiblement dans L^2. On a donc :

$$\|1_{A_\varepsilon} Y\|^2 = \lim < 1_{A_\varepsilon} X_n \, , \, 1_{A_\varepsilon} Y >$$

Mais $< 1_{A_\varepsilon} X_n \, , \, 1_{A_\varepsilon} Y > = < X_n \, , \, 1_{A_\varepsilon} Y > \to 0$, puisque $X_n \to 0$ faiblement. Donc :

$$1_{A_\varepsilon} Y = 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

Choisissons alors $\varepsilon_n \downarrow 0$ et, comme ci-dessus, pour chaque n $A_n = A_{\varepsilon_n}$, avec $P(A_n) \geq 1-\varepsilon_n$ et $1_{A_n} Y = 0$. Le théorème de convergence dominée donne alors (puisque $Y \in L^2$)

$$\int Y^2 \mu = \lim \int 1_{A_n} Y^2 \mu = 0$$

Donc $Y = 0$ μ-p.p.

~ Soit maintenant μ <u>non borné</u>. Sur $\{Y=0\}$, on a bien $Y = 0$. Posons $P = Y^2 \mu$, de sorte que la mesure P est bornée. Posons de même $X'_n = X_n/|Y|$ et $Y' = Y/|Y|$ sur $\{Y \neq 0\}$. Comme l'application $Z \to Z' = Z/|Y|$ est une isométrie de $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ sur $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, on a $X'_n \to 0$ faiblement dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ et aussi $X'_n \to Y'$ P-p.p. D'après ce qui précède, cela entraine $Y/|Y| = 0$ P-p.p., ce qui équivaut à $Y = 0$ μ-p.p.

Ce lemme posé, passons à la proposition qui nous intéresse.

<u>PROPOSITION 1</u> - Soit φ une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et a sa dérivée (définie p.p.). Pour tout Y différentiable m.q. dans H, $\varphi(Y)$ est différentiable m.q. dans H et admet le gradient :

(b) $$D\,\varphi(Y) = a(Y)\, DY \qquad (\mu\text{-p.p.})$$

On peut, évidemment, supposer $\varphi(0) = 0$. Comme φ est lipschitzienne, on a $|\varphi(Y)| \leq |Y|$, par suite $\varphi(Y) \in H$. Utilisant (a), nous pouvons ensuite écrire :

$$|(U_h - I)\ \varphi(Y)| = |\varphi(U_h\ Y) - \varphi(Y)| \leq |(U_h - I)\ Y|$$

Mais $Y \in \mathcal{D}_D$ par hypothèse, d'où $\|(U_h - I)\ Y\| \leq |h|\ \|DY\|$. Par suite, il existe une majoration de la forme

$$\|(U_h - I)\ \varphi(Y)\| \leq C|h|$$

d'où résulte que $\varphi(Y) \in \mathcal{D}_D$.

L'existence de $D\ \varphi(Y)$ étant ainsi établie, il reste à montrer qu'il est bien donné par la relation (b). Pour établir ce point, nous allons utiliser le lemme 2. D'après ce lemme, toute fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ nulle en $x = 0$, est de la forme :

$$\text{(c)} \qquad \varphi(x) = \int_0^x a(\xi)d\xi \quad ; \quad |a| \leq 1 \ \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

Désignons par $\mathcal{L}$ la classe des fonctions mesurables a sur $\mathbb{R}$ telles que $|a| \leq 1$ p.p. et telles que la lipschitzienne φ associée à a par la relation (c) vérifie la propriété (b).

La suite de la démonstration va comporter deux points : i/ la classe $\mathcal{L}$ contient les fonctions a <u>continues</u> sur $\mathbb{R}$ telles que $|a| \leq 1$, et ii/ la classe $\mathcal{L}$ est <u>fermée</u> pour <u>la convergence ponctuelle</u>. Il en résultera que $\mathcal{L}$ contient toutes les fonctions de Baire sur $\mathbb{R}$ majorées p.p. par 1 en valeur absolue. Compte tenu de la forme générale (c) des lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, le théorème en résultera.

i/ $\mathcal{L}$ contient toute fonction a <u>continue sur $\mathbb{R}$</u> telle que $|a| \leq 1$.

En effet, soit a continu sur $\mathbb{R}$ avec $|a| \leq 1$, et φ définie par (c). Nous savons déjà que $D\ \varphi(Y)$ existe. Il suffit donc de montrer que, pour toute direction e, la dérivée partielle m.q. de $\varphi(Y)$ dans cette direction est $D_e\ \varphi(Y) = a(Y)\ D_eY$. Autrement dit, on peut raisonner dans le cas $m = 1$ (groupe U_h à un paramètre $h \in \mathbb{R}$: ce qui n'implique en aucune manière $\Omega = \mathbb{R}$).

Choisissons alors une suite $h_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$ ($h_n \neq 0$), et telle que l'on ait μ-p.p. à la fois :

$$\frac{(U_{h_n}-I)\ \varphi(Y)}{h_n} \to D\varphi(Y) \qquad \text{et} \qquad \frac{(U_{h_n}-I)Y}{h_n} \to DY$$

Convenons de poser :

$$\frac{1}{U_h Y-Y} \int_Y^{U_h Y} a(\xi)d\xi = 0 \qquad \text{sur } \{U_h Y - Y = 0\}$$

On peut donc écrire :

$$\text{(d)} \qquad \frac{(U_{h_n}-I)\ \varphi(Y)}{h_n} = \frac{(U_{h_n}-I)Y}{h_n} \quad \frac{1}{U_{h_n} Y - Y} \int_Y^{U_{h_n} Y} a(\xi)d\xi$$

Le premier membre de (d) converge μ-p.p. vers $D\varphi(Y)$, et le premier facteur du second membre vers DY. Ces deux limites sont nulles μ-p.p. sur l'ensemble

$$C_o = \overline{\lim} \ \{U_{h_n} Y - Y = 0\}$$

de sorte que la relation $D\varphi(Y) = a(Y)\ AY\ (=0)$ est vraie μ-p.p. sur C_o.

Hors de C_o, on a $U_{h_n} Y \to Y$ μ-p.p. (puisque DY existe au sens μ-p.p.). Comme $a(\xi)$ est continu sur $\mathbb{R}$, il en résulte :

$$\frac{1}{U_{h_n} Y - Y} \int_Y^{U_{h_n} Y} a(\xi)d\xi \to a(Y)$$

μ-p.p. sur le complémentaire de C_o. Ainsi, la relation (d) passe à la limite, et donne $D\varphi(Y) = a(Y)\ DY$ μ-p.p. hors de C_o , d'où résulte le point i/.

ii/ la classe $\mathscr{L}$ <u>est fermée pour la convergence ponctuelle</u>.

En effet, soit a_n une suite dans $\mathscr{L}$ telle que $a_n(x) \to a(x)$ pour <u>tout</u> $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $|a_n| \leq 1$ p.p. sur $\mathbb{R}$, d'où aussi

$|a| \leq 1$ p.p. sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$\varphi_n(x) = \int_0^x a_n(\xi)d\xi \quad ; \quad \varphi(x) = \int_0^x a(\xi)d\xi$$

Le théorème de convergence dominée donne évidemment $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi_n(Y) \to \varphi(Y)$ μ-p.p. sur Ω. Comme φ_n et φ sont lipschitziennes, on a aussi $|\varphi_n(Y) - \varphi(Y)| \leq 2|Y|$ μ-p.p., de sorte que (par convergence dominée) la limite $\varphi_n(Y) \to \varphi(Y)$ a lieu aussi au sens L^2.

Notons maintenant ceci : φ_n et φ étant lipschitziennes, leurs gradients vérifient

$$|D\varphi_n(Y)| \leq |DY| \quad ; \quad |D\varphi(Y)| \leq |DY| \quad \mu\text{-p.p.}$$

En effet, pour φ par exemple, la relation

$$\left| \frac{(U_h - I)\,\varphi(Y)}{|h|} \right| = \left| \frac{\varphi(U_h Y) - I}{|h|} \right| \leq \frac{|U_h Y - Y|}{|h|}$$

passe à la limite (moyennant le procédé habituel d'extraction de suites h_n) et donne $|D_e\, \varphi(Y)| \leq |D_e Y|$ μ-p.p. pour tout vecteur unitaire e appartenant à une partie dénombrable dense sur la sphère unité, ce qui entraine $|D\varphi(Y)| \leq |DY|$ μ-p.p.

Mais, en ce qui concerne les a_n, on a par hypothèse $D\,\varphi_n(Y) = a_n(Y)\, DY$ μ-p.p. On en déduit donc :

$$|a_n(Y)|\ |DY| \leq |DY| \quad \mu\text{-p.p.}$$

Comme $a_n(x) \to a(x)$ pour <u>tout</u> $x \in \mathbb{R}$, cette inégalité passe à la limite et donne

(e) $$|a(Y)|\ |DY| \leq |DY| \quad \mu\text{-p.p.}$$

(Cette subtilité est nécessaire ici, car la relation $|a| \leq 1$ p.p. sur R n'entraine <u>pas</u> $|a(Y)| \leq 1$ μ-p.p. sur Ω, puisqu'il peut exister des ensembles $B \subset \mathbb{R}$ négligeables dans $\mathbb{R}$ pour lesquels les $\{Y \in B\}$ ne sont pas μ-négligeables dans Ω). De la même manière, nous avons :

$$\text{(f)} \qquad a_n(Y)\ DY \to a(Y)\ DY \qquad (\mu\text{-p.p.})$$

D'autre part, la suite des gradients $D\ \varphi_n = a_n(Y)\ DY$ est bornée en norme par $\|DY\|$. On peut donc en extraire une suite partielle convergeant faiblement dans L^2. Mais, le gradient étant un opérateur fermé, cette limite faible est $D\ \varphi(Y)$, puisque $\varphi_n \to \varphi \in \mathcal{D}_n$ dans L^2. L'unicité de cette limite entraine alors :

$$\text{(g)} \qquad a_n(Y)\ DY \to D\ \varphi(Y) \qquad \text{faiblement}$$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 4. En effet, $a_n(Y)\ DY \to D\ \varphi(Y)$ faiblement, d'après (g) ; $a_n(Y)\ DY \to a(Y)\ DY$ μ-p.p. d'après (f), et, d'après (e), cette limite $a(Y)\ DY$ est dans L^2. D'après le lemme 4, donc, ces deux limites coïncident, et on a :

$$D\ \varphi(Y) = a(Y)\ DY \qquad (\mu\text{-p.p.})$$

(ce qui achève la démonstration).

A titre de corollaire, déjà implicite du reste dans le dernier point de la démonstration ci-dessus, nous obtenons le résultat suivant, qui constituait en réalité notre objectif principal :

<u>THEOREME 2</u> - Pour tout élément Y différentiable m.q. dans un espace de type H ci-dessus, et pour tout borélien B négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$, on a $DY = 0$ (μ-p.p.) sur l'ensemble $\{Y \in B\}$, soit :

$$1_B(Y)\ DY = 0 \qquad (\mu\text{-p.p.})$$

En effet, soit B négligeable dans $\mathbb{R}$. Appliquons la proposition précédente à la fonction $a(x) = 1_B(x)$. La lipschitzienne associée φ est identiquement nulle, puisque

$$\varphi(x) = \int_0^x 1_B(\xi)d\xi = 0 \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

On a donc $\varphi(Y) = 0$ et $D\,\varphi(Y) = 0$ μ-p.p. La proposition donne ainsi $0 = D\,\varphi(Y) = 1_B(Y)\,DY$ μ-p.p. D'où le théorème.

REMARQUE - Tout l'intérêt du théorème vient, évidemment, de ce que B négligeable dans $\mathbb{R}$ n'entraine nullement $1_B(Y) = 0$ μ-p.p. dans Ω. (Dans le cas d'un espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$, par exemple, la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y \in L^2$ peut évidemment posséder des atomes ou, plus généralement, une composante étrangère à la mesure de Lebesgue)

Ce théorème est d'ailleurs implicite dans l'énoncé de la Proposition précédente : car la dérivée $a(x)$ d'une lipschitzienne φ donnée sur $\mathbb{R}$ n'est en réalité définie que presque partout sur $\mathbb{R}$: pour que la relation $D\,\varphi(Y) = a(Y)\,DY$ reste vraie μ-p.p. si l'on modifie arbitrairement $a(x)$ sur un borélien B négligeable dans $\mathbb{R}$, il est évidemment nécessaire d'avoir $DY = 0$ μ-p.p. sur $\{Y \in B\}$.

A titre d'exemple, prenons $a_1(x) = 1_{x\geq 0}$ ou $a_2(x) = 1_{x>0}$. Dans les deux cas, $\varphi(x) = x_+$. D'après la proposition, donc,

$$Y \in \mathcal{B}_D \Rightarrow Y_+ \in \mathcal{B}_D \quad \text{et} \quad DY_+ = 1_{Y>0}\,DY = 1_{Y\geq 0}\,DY$$

Ce qui implique évidemment

$$DY = 0 \quad \text{sur} \quad \{Y = 0\} \quad (\mu\text{-p.p.})$$

Compte tenu de notre remarque préliminaire, nous pouvons énoncer à titre de corollaire commun au théorème et à la Proposition :

COROLLAIRE - Pour toute fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$ et toute fonction φ lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, la fonction $\varphi \circ f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$ et son gradient, défini p.p. sur $\mathbb{R}^m$, coïncide p.p. avec $(a \circ f)\,Df$, où a est la dérivée de φ (définie p.p. sur $\mathbb{R}$) et Df le gradient de f (défini p.p. sur $\mathbb{R}^m$). En particulier, pour tout borélien B négligeable dans $\mathbb{R}$, on a

$$Df = 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \{f \in B\} \subset \mathbb{R}^m$$

Nous sommes maintenant en mesure d'améliorer notablement la Proposition 1 ci-dessus :

PROPOSITION 2 - Soit Y un élément différentiable dans un espace H, et a une fonction mesurable et localement intégrable sur R. Posons

$$\varphi(x) = \int_0^x a(\xi)d\xi \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Si $\varphi(Y)$ et $a(Y)\ DY$ sont dans L^2, alors $\varphi(Y)$ est différentiable m.q. et :

$$D\,\varphi(Y) = a(Y)\ DY \tag{b}$$

Quitte à traiter séparément a_+ et a_- , nous pouvons supposer $a \geq 0$. D'après la Proposition 1, la propriété (b) est vraie lorsque a est l'indicatrice d'un borélien de $\mathbb{R}$. Elle est donc vraie pour toute combinaison linéaire finie d'indicatrices, donc en particulier pour les fonctions étagées. Comme a est ≥ 0, donnons-nous une suite de fonctions étagées $a_n \geq 0$ telles que $a_n(x) \uparrow a(x)$ en tout $x \in \mathbb{R}$, d'où aussi $\varphi_n(x) \uparrow \varphi(x)$ en tout $x \in \mathbb{R}$ ($\varphi_n(x) = = \int_0^x a_n(\xi)d\xi$). On a donc $a_n(Y) \uparrow a(Y)$ et $\varphi_n(Y) \uparrow \varphi(Y)$ μ-p.p. sur Ω. Par convergence dominée, on voit ensuite $\varphi_n(Y) \to \varphi(Y)$ dans L^2, et de même $a_n(Y)\ DY \to a(Y)\ DY$ dans L^2 (car $\varphi(Y)$ et $a(Y)\ DY$ sont dans L^2 par hypothèse). Comme $D\ \varphi_n(Y) = a_n(Y)\ DY$ et que D est un opérateur fermé, il en résulte $\varphi(Y) \in \mathcal{D}_D$ et $D\ \varphi(Y) = a(Y)\ DY$.

N.B. L'hypothèse $\varphi(Y) \in L^2$ n'est pas réellement indispensable. Si l'on a seulement $a(Y)\ DY \in L^2$, $\varphi(Y)$ définit une F.A.I. sur L^2, c'est-à-dire que $\varphi(Y)$ n'appartient peut-être pas à L^2, mais ses accroissements $U_h\ \varphi(Y) - \varphi(Y)$ sont dans L^2 : ce qui suffit pour définir le gradient m.q. de $\varphi(Y)$, qui est encore égal à $a(Y)\ DY$.

2 - CONSEQUENCES POUR LE SQUELETTE.

Il existe plusieurs façons de définir le squelette d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$, mais il s'agit de nuances plutôt que de différences essentielles. Nous adopterons la définition suivante :

Soient $G = \overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A et $F = \overline{A}$ son adhérence, avec évidemment $G \subset F$. D'un point de vue physique, nous ne sommes pas capables de distinguer l'un de l'autre deux ensembles ayant même intérieur G et même adhérence F. C'est pourquoi nous définirons le squelette comme une propriété du couple (G,F) avec évidemment $G \subseteq F$, plutôt que de l'ensemble A lui-même.

Désignons par $\rho = \rho_G$ la fonction habituelle définie sur R^m en posant

$$\rho(x) = d(x, G^c) \qquad (x \in \mathbb{R}^m) .$$

Rappelons que l'aval et l'amont d'un point x sont définis par les relations :

$$Av(x) = \{y : \rho(x) = \rho(y) + |x-y|\}$$

$$Am(x) = \{y : \rho(y) = \rho(x) + |x-y|\}$$

Nous dirons qu'un point est sans amont si $Am(x) = \{x\}$ est réduit au point x lui-même. Nous désignerons par S l'ensemble des points sans amont, et nous poserons par définition du squelette S_A de A :

$$S_A = S \cap \overline{A} = S \cap F$$

On note que l'ensemble S des points sans amont ne dépend que de la fonction ρ_G, c'est-à-dire de $G = \overset{\circ}{A}$ et non de A lui-même. Avec $\overset{\circ}{A}' = G$ et $\overline{A}' = \overline{G}$, le squelette de A' sera donc

$$S_{A'} = S_G = S \cap \overline{G} = S_A \cap \overline{G}$$

C'est du reste ce squelette $S_G = S \cap \overline{G}$ qui présente le plus d'intérêt : de fait, en tout $x \notin \overline{G}$, ρ est identiquement nul au voisinage de x, de sorte que le point x est sans amont. On a donc l'inclusion :

(2-1) $$\overline{A}\setminus\overline{G} \subset S_A$$

Maintenant, comme on sait, ρ est une fonction lipschitzienne sur R^m, de sorte que les deux théorèmes du paragraphe précédent peuvent lui être appliqués.

D'après le Théorème 1, ρ est différentiable p.p. sur $\mathbb{R}^m$. Nous désignerons par $\mathcal{X}$ l'ensemble négligeable dans $\mathbb{R}^m$ sur lequel ρ n'est pas différentiable, et par $D\rho$ le gradient de ρ, défini en tout $x \notin \mathcal{X}$. On rappelle que l'on a l'inégalité :

(2-2) $$|D\rho_x| \leq 1 \qquad \forall\, x \notin \mathcal{X}$$

Voici un premier résultat simple : l'ensemble ponctuel $\{o\}$ étant évidemment négligeable dans $\mathbb{R}$, le corollaire du théorème 1 nous montre que $D\rho = 0$ presque partout sur l'ensemble $G^c = \{\rho = 0\}$. Ainsi, presque tous les points de G^c sont sans amont, soit

(2-3) $$G^c \subset S \quad \text{p.p.}$$

Pour ce qui est de $(\overline{G})^c$, l'inclusion est d'ailleurs partout vraie, et non pas seulement p.p., comme nous l'avons vu. Mais sur la frontière ∂G de G, nous obtenons un résultat nouveau : presque tous les points de ∂G sont dans le squelette. En particulier, pour que le squelette soit négligeable, il est nécessaire que ∂G soit négligeable (mais peut-être pas suffisant).

Nous allons maintenant améliorer la relation (2-2), en montrant

$$|D\rho| = 1_G \quad \text{p.p.}$$

Tout $x \in G$ a un aval contenant des points distincts de x, donc admet une dérivée partielle égale à -1 dans une direction e au moins. Si donc $x \in G \cap \mathcal{X}^c$, on a nécessairement $|D\rho_x| = 1$. Si maintenant $x \notin G$, on a $\rho(x) = 0$: comme ρ ne peut pas prendre de valeurs négatives, le gradient, s'il existe, ne peut être que nul.

Au total donc, nous trouvons :

(2-4) $$|D\rho_x| = 1_G(x) \qquad \forall\, x \notin \mathfrak{X}$$

En particulier, la relation (2-3) peut être précisée comme suit :

(2-3') $$\mathfrak{X}^c \cap G^c \subset S$$

Examinons maintenant la restriction

$$S(G) = S \cap G$$

du squelette à l'ouvert G (N.B. : ne pas confondre cette restriction S(G) et le squelette S_G de l'ouvert G, qui, avec nos définitions, est $S_G = S \cap \overline{G}$).

Nous désignons par $D(G) \subset S(G)$ l'ensemble des points multiples de G (c'est-à-dire ceux dont l'aval contient plusieurs segments de droites distincts). Alors, nécessairement :

(2-5) $$D(G) \subset \mathfrak{X}$$

En effet, si $x \in D(G)$, il existe au moins deux directions e_1 et e_2 distinctes selon lesquelles la dérivée partielle vaut -1. Mais cela est incompatible, d'après (2-2), avec l'existence du gradient. Donc $x \in \mathfrak{X}$.

En ce qui concerne S(G) lui-même, je ne suis pas arrivé à montrer sa negligeabilité - bien qu'elle paraisse très plausible. On sait seulement que D(G) lui-même est dense dans S(G), mais $\overline{D(G)} = \overline{S(G)}$ n'est pas nécessairement négligeable (il y a des contre-exemples). A dire vrai, l'ensemble $S(G)\setminus D(G)$ des points simples du squelette semble beaucoup plus "rare" que D(G). Dans tous les exemples usuels, les points simples apparaissent comme des terminaisons d'arcs de D(G) (dans $\mathbb{R}^2$) ou des points frontières de nappes de D(G) (dans $\mathbb{R}^3$). A titre de conjecture, j'avancerais volontiers l'énoncé suivant :

Conjecture : L'aval de $S(G)\setminus D(G)$ est négligeable dans $\mathbb{R}^m$.

Mais je n'ai pas de démonstration.

On sait, aussi, que ρ est différentiable sur l'ouvert $G \cap \overline{S(G)}^c$, qui est l'intérieur de $G \setminus S(G)$, appelé aussi domaine de régularité de ρ. On en déduit donc

(2-6) $$G \cap \mathfrak{X} \subset \overline{S(G)}$$

Mais cette inclusion peut être stricte, puisque $\overline{S(G)}$ n'est pas toujours négligeable. Il y a là du reste un paradoxe apparent, car le cas où $\overline{S(G)}$ n'est pas négligeable correspond à des ouverts G plutôt "pathologiques" : néanmoins, ρ doit rester différentiable presque partout sur $\overline{S(G)}$.

Il est commode de résumer les résultats précédents :

THEOREME 3 - Avec les notations précédentes, ρ est différentiable en dehors de l'ensemble négligeable $\mathfrak{X}$. Son gradient vérifie

$$|D\rho| = 1_G$$

sur le complémentaire de $\mathfrak{X}$. Le complémentaire de $\overline{G}$ est contenu dans S, et

$$\overline{A} \setminus \overline{G} \subset S_A$$

Sur la frontière ∂G de G, les points qui n'appartiennent pas au squelette sont dans $\mathfrak{X}$, soit

$$\partial G \cap S^c \subset \mathfrak{X} \quad \text{ou} \quad \partial G \cap \mathfrak{X}^c \subset S$$

Sur G, enfin, on a les inclusions

$$D(G) \subset \mathfrak{X} \cap G \subset \overline{S(G)}$$

(et l'égalité $\overline{D(G)} = \overline{S(G)} = \overline{\mathfrak{X} \cap G}$)

Notons encore, pour être complet, le résultat suivant, dû à F. Maisonneuve :

$$\partial G \cap S \subset \overline{D(G)}$$

Comme $\partial G \cap \mathfrak{X}^c$ est contenu dans S, il en résulte aussi

$$\partial G \cap \mathfrak{X}^c \subset \overline{D(G)} \cap S$$

Ainsi :

COROLLAIRE - Tout point de la frontière ∂G où le gradient existe (et vaut alors 0), c'est-à-dire presque tout point de ∂G, est limite de points multiples du squelette, et appartient lui-même au squelette.

3 - LA CONTINUITE ABSOLUE DES EROSIONS.

Avec les mêmes notations que ci-dessus, introduisons maintenant les érodés par les boules ouvertes et fermées de rayon $r > 0$. Soit :

$$G_r = G \ominus r\overline{B} \quad ; \quad F_r = G \ominus r\overset{\circ}{B}$$

avec

$$\overset{\circ}{F}_r = G_r \quad ; \quad \overline{G}_r \subset F_r$$

On a aussi bien :

$$G_r = \{\rho > r\} \quad ; \quad F_r = \{\rho \geq r\}$$

Limitons-nous au cas où G est borné. Nous désignerons par $\lambda_{\overline{G}}$ ou, simplement, par λ la mesure de Lebesgue sur $\overline{G}$. A une constante près de normalisation, on peut interpréter λ comme une probabilité sur $\overline{G}$ et ρ (ou plutôt sa restriction à $\overline{G}$) comme une variable aléatoire. Désignons par $V(dr)$ la loi de la variable ρ sur $(\overline{G}, \mathcal{B}_{\overline{G}}, \lambda_{\overline{G}})$, de sorte que les volumes de nos érodés sont :

$$V(G_r) = \int_{r+0}^{\infty} V(dx) \quad ; \quad V(F_r) = \int_{r-0}^{\infty} V(dx)$$

Nous allons montrer que l'on a en fait $V(G_r) = V(F_r)$ pour $r > 0$ (ce qui revient à dire que la frontière ∂F_r est négligeable) et même plus :

THEOREME 4 - La mesure $V(dr)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{o\}$. Autrement dit, il existe une densité $\ell(x)$ telle que

$$V(G_r) = V(F_r) = \int_r^\infty \ell(x)\, dx \qquad (\forall\, r > 0)$$

La restriction $r > 0$ est essentielle, car $V(\overline{G})$ peut très bien être strictement supérieur à $V(G)$, la frontière ∂G pouvant ne pas être négligeable.

Pour démontrer cela, nous allons utiliser le corollaire du théorème 2, puisque ρ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$.

Soit C un borélien négligeable dans $\mathbb{R}_+ \setminus \{o\}$ (on suppose donc $x > 0$ strictement sur C). D'après le corollaire rappelé ci-dessus, on a

$$D\rho = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^m \text{ sur } \{\rho \in C\}$$

Mais d'autre part $|D\rho| = 1_G$ p.p. d'après le théorème ~~1~~. 3
Comme ρ est > 0 sur C, soit $\{\rho \in C\} \subset G$, cela implique $|D\rho| = 1$ p.p. sur $\{\rho \in C\}$ et donc que l'ensemble $\{\rho \in C\}$ est lui-même négligeable. Ainsi $\lambda(C) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue, entraine $V(C) = 0$ dès que $0 \notin C$. Mais cela entraine que la restriction de la mesure V à $\mathbb{R}_+ \setminus \{o\}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

N.B. Dans le cas à 2 dimensions, la densité $\ell(x)$ donne un sens à la notion de longueur de la courbe de niveau $\{\rho = x\}$ pour $x > 0$ (dans $\mathbb{R}^3$, il s'agira de l'aire de la surface de niveau correspondante).

Compte tenu de notre remarque préliminaire, on peut encore énoncer :

COROLLAIRE - Pour G ouvert quelconque dans $\mathbb{R}^m$, les frontières des érodés $G \ominus r\overline{B}$ et $G \ominus r\mathring{B}$ sont négligeables pour tout $r > 0$. Même énoncé pour les dilatés $F \oplus r\overline{B}$ et $F \oplus r\mathring{B}$ d'un fermé F.

On déduit, évidemment, aussi, par dualité, du théorème 4 la continuité absolue (pour $r > 0$) de la mesure associée aux <u>dilatés d'un compact</u>.