FONTAINEBLEAU/CGMM N-770

CONVECTION ET DISPERSION EN MILIEU STOCHASTIQUE

G. MATHERON

Aout 1982

CONVECTION ET DISPERSION EN MILIEU STOCHASTIQUE

Par

G. MATHERON

Table des Matières

CONVECTION ET DISPERSION EN MILIEU STOCHASTIQUE

Par

G. MATHERON

0 - LE CAS DETERMINISTE (Convection pure).

Si l'on se donne dans $\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs $V(x)$ possédans des propriétés de régularité suffisante (par exemple, existence et continuité des dérivées partielles), on sait que le système d'équations différentielles :

$$\frac{d\,X^i(t)}{dt} = V^i(X(t)) \tag{1}$$

admet une solution $X_t(x)$ et une seule telle que $X_t(x) = x$ en $t = 0$. Cette solution vérifie de plus la relation :

$$X_t(X_{t'}(x)) = X_{t+t'}(x) \tag{2}$$

(pour t et t' quelconques, positifs ou non). Enfin, si l'on pose

$$f_t(x) = f(X_t(x)) \tag{3}$$

pour toute fonction f suffisamment régulière, on sait que f_t est l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = V^i\,\partial_i\,f_t \tag{4}$$

vérifiant la condition initiale $f_o = f$ en $t = 0$.

Il est commode d'interpréter la relation (3) en introduisant <u>l'opérateur</u> T_t défini par :

$$T_t\,f = f_t$$

On a évidemment $T_o = I$ (opérateur identique), et la relation (2) implique :

$$T_{t'} \, T_t = T_t \, T_{t'} = T_{t+t'}$$

de sorte que les opérateurs T_t constituent un <u>groupe</u> commutatif. Enfin, la relation (4) (dite <u>équation d'évolution</u>) exprime que le <u>générateur infinitésimal</u> du groupe T_t est l'opérateur $V^i \, \partial_i$, ce que l'on écrit parfois $T_t = \exp(t \, V^i \, \partial_i)$.

Je voudrais indiquer brièvement dans ce qui suit comment ces résultats classiques peuvent se transposer dans le cas où les $V^i(x)$ sont <u>un champ de vecteurs aléatoires stationnaires</u>.

1. LE CADRE PROBABILISTE

Le cadre probabiliste que nous allons utiliser est fourni par un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un groupe τ_x , $x \in \mathbb{R}^n$ de transformations agissant sur l'espace Ω en conservant la probabilité P, soit :

$$P(\tau_x \, A) = P(A) \qquad (\forall \ A \in \mathcal{A})$$

Nous désignerons par

$$H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

l'espace de Hilbert des Variables Aléatoires (VA) admettant un moment d'ordre 2, et nous le munirons du groupe U_x, $x \in \mathbb{R}^n$ d'opé-<u>rateurs unitaires</u> définis par :

$$(U_x \, Y)(\omega) = Y(\tau_{-x} \, \omega) \qquad (\forall \ Y \in H)$$

A tout $Y \in H$ est ainsi associée la <u>fonction aléatoire stationnaire</u> (FAST)

$$Y(x) = U_x \, Y$$

munie de la covariance

$$C_Y(h) = < U_h\, Y, Y >$$

Nous supposons essentiellement le groupe U_x continu en x, et nous désignerons par $D = (D_1, D_2, \dots D_n)$ son générateur infinitésimal. Ainsi, le vecteur aléatoire stationnaire

$$D\ _x Y = U_x\, DY$$

représente le gradient (au sens m.q.) de la FAST U_x Y (pourvu, évidemment, que Y appartienne au domaine $\mathcal{D}_D$ de l'opérateur D). On sait que l'opérateur D est dense et fermé (mais non continu évidemment).

Il sera commode de désigner par H_D l'espace des gradients généralisés, c'est-à-dire l'adhérence dans H^n de l'espace image D(H). On sait que si $G \in H_D$ est un gradient généralisé, ce n'est pas forcément le gradient DY d'une FAST U_x Y, mais il existe toujours une fonction aléatoire intrinsèque (FAI) Z(x) différentiable au sens m.q. telle que l'on ait $U_x\, G = \text{grad } Z(x)$ (au sens m.q.).

L'orthogonal $H_D^{\perp}$ de H_D est l'espace des vecteurs conservatifs : il est constitué des vecteurs V de divergence nulle. Plus précisément, $H_D^{\perp}$ contient les vecteurs $V = (V^1, V^2, \dots V^n)$ dont les composantes V^i sont dans $\mathcal{D}_D$ et vérifient :

$$D_i\, V^i = 0$$

ainsi que les limites en moyenne quadratique de tels vecteurs. En particulier, un vecteur conservatif n'a donc pas nécessairement ses composantes dans $\mathcal{D}_D$.

De fait, l'opérateur $Y \to D_i\, Y^i$ appliquant $(\mathcal{D}_D)^n$ dans H est dense, mais non fermé dans H^n. Mais il admet une fermeture (prolongement par un opérateur fermé) que nous désignerons par D Div = alors $H_D^{\perp}$ est exactement constitué des vecteurs Y tels que Div Y = 0.

2. CAS D'UN CHAMP DE VITESSE ALEATOIRE CONSERVATIF.

Soit alors $V(x) = U_x V$ un champ de vecteurs (aléatoire stationnaire). Plutôt que l'équation différentielle (1), difficile à manipuler en stochastique, nous utiliserons l'équation d'évolution (4). Dans notre cadre probabiliste, la question qui se pose est alors la suivante : existe-t-il un groupe S_t opérant sur H et tel que l'on ait

$$\frac{d}{dt} S_t X = V^i D_i S_t X \qquad (X \in H)$$

(c'est-à-dire un groupe S_t admettant l'opérateur $V^i D_i$ comme générateur infinitésimal) ?

Le cas le plus intéressant sera celui où le groupe S_t est <u>unitaire</u>, et où par suite $S_t X$ sera une FAST (en t) pour tout $X \in H$. Le résultat essentiel est le suivant : pour qu'il existe un tel groupe S_t d'opérateurs unitaires, il faut et il suffit que le vecteur V soit <u>conservatif</u>.

D'une manière générale, on sait qu'un opérateur B sur H est le générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires si et seulement si B est <u>dense</u>, <u>fermé</u> et vérifie

$$B = - B^* \tag{2.1}$$

(B^* est le transposé de B : $\langle B^* X, Y \rangle = \langle X, BY \rangle$ pour tout $Y \in \mathcal{D}_B$), ou, ce qui revient au même :

$$\langle X, BX \rangle = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D}_B \tag{2.1'}$$

L'équivalence de (2.1) et (2.1') est immédiate : $B = -B^*$ signifie

$$\langle X, BY \rangle = - \langle BX, Y \rangle \qquad (X, Y \in \mathcal{D}_B)$$

En faisant $Y = X$, on voit donc que (2.1) entraine (2.1'). Inversement, si (2.1') est vrai, on a

$$0 = \langle X+Y,\ B(X+Y) \rangle = \langle X,\ BX \rangle + \langle Y,\ BY \rangle + \langle X,\ BY \rangle + \langle Y,\ BX \rangle$$

et par suite $\langle X\ BY \rangle = - \langle Y\ BX \rangle$

Si B est le générateur d'un groupe S_t unitaire, on a pour $X \in \mathcal{D}_B$: $\|S_t\ X\|^2 = C^{ste}$, et donc

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\ \|S_t\ X\|^2 = \langle S_t\ X,\ B\ S_t\ X \rangle = 0$$

d'où (2.1') en faisant $t = 0$: il s'agit bien d'une condition nécessaire. La réciproque résulte d'un théorème classique. Examinons donc si l'opérateur $V^i\ D_i$ peut vérifier cette condition (2.1) ou (2.1').

a/ La première question concerne le domaine de définition $\mathcal{D}$ de notre opérateur $V^i\ D_i$: il faut montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans H. Nous désignerons par $H_b \subset H$ l'espace des Y bornés et à gradient borné (c'est-à-dire $Y \in \mathcal{D}_D$, et $|Y|$ et $|DY|$ p.s. bornés). Pour tout $Y \in H_b$, $V^i\ D_i\ Y$ est un élément de H (puisque les $D_i\ Y$ sont bornés et les V^i appartiennent à H). Donc $\mathcal{D} \supset H_b$. Il suffit donc de montrer que H_b est dense dans H.

Or cela est facile à voir : pour tout $Y \in H$, posons :

$$Y_n = Y\ 1_{\{-n \leq y < n\}}$$

$$Z_n = \int g_n(x)\ U_x\ Y_n\ dx$$

Y_n est borné par troncature, Z_n est la régularisée de Y_n par la fonction g_n qui représente la densité de la loi de Gauss de variance $1/n$. Il est facile de voir que l'on a bien $Z_n \in H_b$ et $Z_n \to Y$ dans H pour $n \to \infty$. Donc H_b est dense, et par suite l'opérateur $V^i\ D^i$ est dense dans H.

b/ Montrons maintenant que le vecteur V doit être conservatif. Pour tout $X \in H_b$, on a X et $X^2 \in \mathcal{D}$ d'après ce qui précède, et la condition (2.1') entraine donc :

$$< X, V^i D_i X > = \frac{1}{2} E(V^i D_i X^2) = 0$$

Or, X parcourant H_b, les gradients $D_i X^2$ engendrent un sous-espace dense de H_D : la condition ci-dessus exprime donc que V est dans l'orthogonal de H_D , c'est-à-dire est conservatif.

c/ Supposons donc V conservatif. Cela n'entraine pas $D_i V^i = 0$, puisque les composantes de V^i ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{D}_0$, mais Div V = 0. Alors, pour tout $Z \in H_b$, on a :

$$(2.2) \qquad V^i D_i Z = \mathrm{Div}(ZV)$$

On le voit en remplaçant V par la régularisée

$$V_n = \int g_n(x) U_x V dx$$

où g_n est la densité de la loi de Gauss de variance 1/n. Pour chaque n, V_n est conservatif et ses composantes sont dans $\mathcal{D}_D$. On a donc ici Div $V_n = D_i V_n^i = 0$. Par suite

$$(2.3) \qquad V_n^i D_i Z = D_i(Z V_n^i) = \mathrm{Div}(Z V_n)$$

pour tout $Z \in H_b$. Lorsque $n \to \infty$, on a $V_n \to V$ dans H, et aussi $V_n^i D_i Z \to V^i D_i Z$ dans H (puisque DZ est borné) et, de même, Z étant borné, $V_n Z \to VZ$. Or l'opérateur Div est un opérateur fermé : la relation (2.3) va donc passer à la limite et donner (2.2) pour $n \to \infty$.

d/ En fait, l'opérateur $V^i D_i$ n'est pas fermé (et ne peut donc être un générateur infinitésimal) mais il admet <u>une fermeture</u> (prolongement par un opérateur fermé) que nous désignerons par B.

En effet, soit X_n une suite d'éléments de H appartenant au domaine de définition de $V^i D_i$, et telle que l'on ait :

$$X_n \to 0 \quad ; \quad V^i D_i X_n \to Y \quad \text{dans } H$$

Il faut montrer $Y = 0$. Pour cela, prenons $Z \in H_b$. Il vient :

$$< Z,Y > = \lim < Z, V^i D_i X_n > = \lim < V^i Z, D_i X_n >$$

Mais, d'après c/, le vecteur ZV est dans le domaine de l'opérateur Div, qui est l'adjoint de l'opérateur D, de sorte que :

$$< V^i Z, D_i X_n > = - < \mathrm{Div}(VZ), X_n >$$

et cette expression tend vers 0 (puisque $X_n \to 0$). On trouve donc $< Z,Y > = 0$ pour tout $Z \in H_b$, et donc $Y = 0$ puisque H_b est dense dans H.

e/ L'opérateur B, fermeture de $V^i D_i$, est dense et fermé par construction. Montrons que, V étant conservatif, on a de plus :

$$B = - B^*$$

En effet, si X et Y sont dans le sous-espace H_b dense dans H, on trouve d'après c/ :

$$< X,BY > = < X V^i D_i Y > = - < \mathrm{Div}(XV), Y > = - < V^i D_i X,Y >$$

$$= - < BX, Y >$$

Par suite, <u>B est bien le générateur infinitésimal d'un groupe continu S_t d'opérateurs unitaires sur H</u>.

3. CONSERVATION DE LA PROBABILITE.

La propriété la plus intéressante du groupe unitaire S_t ainsi associé au vecteur conservatif V est la suivante : pour toutes variables aléatoires $Y_1,Y_2...Y_k$ dans H et tout t, les variables $S_t\, Y_i$ ont la même loi (multivariable) que les variables Y_i

elles-mêmes. Autrement dit, <u>le groupe S_t laisse la probabilité invariante</u>.

Montrons d'abord que S_t est un <u>opérateur positif</u>. ($S_t X \geq 0$ p.s si $X \geq 0$ p.s).

En effet, soit $X \in H_b$ (borné, à gradient borné). Alors :

$$B X^2 = 2X BX \tag{3.1}$$

De fait, si $X \in H_b$, on a aussi $X^2 \in H_b$ et $D X^2 = 2 X D X$. Donc :

$$B X^2 = V^i D_i X^2 = 2 V^i(X D_i X) = 2 X B X$$

Désignons alors par B_1 l'opérateur prolongeant B sur l'espace $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $Y \in H = L_2$, on a $Y^2 \in L_1$, et on déduit aussitot de (3.1) (H_b étant dense dans L_1) :

$$B_1 Y^2 = 2 Y B Y$$

Appliquons ce résultat à $Y = S_t X$ pour un $X \in H_b$. Cela donne

$$B_1(S_t X)^2 = 2 S_t X.B S_t X$$

Mais $B S_t X = \frac{d}{dt} S_t X$ au sens m.q., et on a donc au sens cette fois de L_1 :

$$B_1(S_t X)^2 = \frac{d}{dt} (S_t X)^2 \tag{3.2}$$

Or, dans l'espace L_1, l'équation d'évolution $B_1 Z_t = \frac{d}{dt} Z_t$ n'a pas d'autre solution que $Z_t = S_t Z_o$. La relation (3.2) ci-dessus implique donc nécessairement

$$(S_t X)^2 = S_t(X^2) \tag{3.3}$$

au sens de L_1 : mais, $S_t(X^2)$ étant dans $L_2 = H$, il en est de même du premier membre, et la relation (3.3) a lieu dans H . Cette relation (3.3) reste vraie pour tout X p.s. borné.

Du fait que H_b est dense dans H, la relation (3.3) entraine, comme corollaire immédiat, que S_t est un <u>opérateur positif</u> : $Y \geq 0$ p.s. entraine $S_t\, Y \geq 0$ p.s. De même aussi, pour X et Y p.s. bornés :

(3.4) $$S_t(X\,Y) = S_t\,X . S_t\,Y$$

En ce qui concerne le Sup et l'Inf, on trouve :

$$\begin{cases} S_t\,(X \vee Y) = S_t\,X \vee S_t\,Y \\ S_t\,(X \wedge Y) = S_t\,X \wedge S_t\,Y \\ S_t\,|X| = |S_t\,X| \end{cases}$$

etc...Ces propriétés sont d'ailleurs vraies pour tout opérateur S <u>unitaire et positif</u> : en effet, les relations

$$S(X_+) \geq (SX)_+ \quad ; \quad S(X_-) \geq (SX)_-$$

sont vraies pour tout opérateur positif, et entrainent

$$S|X| \geq |SX|$$

Si S est de plus unitaire, on a $E|SX|^2 = E(|X|^2) = E(S|X|)^2$, et cette inégalité devient une égalité.

Venons(en à la <u>conservation de la probabilité</u>. Soit $B \in \mathfrak{A}$ un évènement de $\mathfrak{A}$. Son indicatrice 1_B étant bornée vérifie (3.3) :

$$(S_t\,1_B)^2 = S_t\,(1_B)^2 = S_t\,1_B$$

Par conséquent $S_t\,1_B$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 : elle constitue donc elle-même <u>l'indicatrice</u> d'un évènement $B_t \in \mathfrak{A}$

$$S_t\,1_B = 1_{B_t}$$

Mais l'opérateur S_t est unitaire. On a donc :

$$E(S_t\ 1_B)^2 = E(1_B^2)$$

c'est-à-dire $E(1_{B_t}) = E(1_B)$, ou encore :

$$P(B_t) = P(B) \tag{3.5}$$

Ainsi, le groupe S_t laisse bien la probabilité invariante. Posant $B_t = S_t\ B$, on voit que S_t définit une bijection de la σ-algèbre $\mathcal{A}$ sur elle-même, et on vérifie immédiatement que cette bijection respecte la réunion, l'intersection et la complémentation :

$$S_t(\cup\ B_n) = \cup\ (S_t\ B_n) \quad ; \quad S_t(B^c) = (S_t\ B)^c \quad \text{etc...}$$

On en déduit facilement la relation :

$$S_t(f(X)) = f(S_t\ X) \tag{3.6}$$

pour tout $X \in H$ et toute fonction mesurable f telle que $f(X) \in H$. En particulier, si la fonction f est

$$f(x) = 1_{\{x \leq x_0\}}$$

il vient :

$$S_t(\{X \leq x_0\}) = \{S_t\ X \leq x_0\}$$

Plus généralement, si on définit l'évènement B par :

$$B = \{Y_1 \leq y_1\ ,\dots\ Y_k \leq y_k\}$$

pour des V.A. $Y_1,\dots Y_k$ dans H et des nombres réels $y_1\dots y_k$ quelconques, il vient :

$$B_t = S_t\ B = \{S_t\ Y_1 \leq y_1,\dots S_t\ Y_k \leq Y_k\}$$

et la relation (3.5) donne :

$$P(S_t Y_1 \leq y_1, \dots S_t Y_k \leq y_k) = P(Y_1 \leq y_1, \dots Y_k \leq y_k)$$

Autrement dit, les variables $S_t\, Y_i$ ont la même loi de probabilité que les variables Y_i de départ.

4. CAS D'UN CHAMP STOCHASTIQUE QUELCONQUE.

Les résultats précédents ne subsistent malheureusement pas lorsque le champ de vecteur $V(x) = U_x V$ n'est pas conservatif. Mais on obtient des propriétés assez comparables dans le cas particulier (physiquement le plus intéressant) où il existe une porosité $\varpi(x) = U_x \varpi$, c'est-à-dire une FAST p.s. positive ou nulle et bornée telle que le vecteur

$$(4\text{-}1) \qquad\qquad Q = \varpi V$$

soit conservatif (il n'est pas nécessaire que ϖ soit différentiable). L'idée directrice va consister à remplacer l'espace $H = L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par l'espace $H' = L_2(\Omega, \mathcal{A}, P')$ où la probabilité P' est définie par :

$$P'(d\omega) = \frac{\varpi(\omega)\, P(d\omega)}{E(\varpi)}$$

Comme ϖ est p.s. bornée, tout $X \in H$ est un élément de H'. Mais la réciproque n'est pas vraie, et H' contient en général des éléments qui n'appartiennent pas à H ($X \in H'$ équivaut à $\sqrt{\varpi}\, X \in H$). Noter que le groupe U_x se prolonge sur H', mais n'est plus unitaire pour la norme de H'.

Dans cet espace H', le produit scalaire sera noté $< X, Y >'$. Explicitement :

$$< X, Y >' = \frac{E(\varpi X Y)}{E(\varpi)}$$

Comme les V^i sont dans H, et que ϖ est bornée, les $Q^i = \varpi V^i$ sont encore dans H et de même $V \in H'$, c'est-à-dire

(4-2) $$E(\varpi|V|^2) < \infty$$

Considérons alors l'opérateur $V^i D_i$ comme un opérateur sur H' (et non plus sur H). Il est <u>dense</u> (car son domaine contient H_b). Il n'est pas fermé, en général, mais admet une <u>fermeture</u> sur H' que nous désignerons par B'.

En effet, soit X_n une suite d'éléments de H' appartenant au domaine de $V^i D_i$ et telle que

$$X_n \to 0 \qquad V^i D_i X_n \to Y' \quad \text{dans } H'$$

Il faut montrer $Y' = 0$.

Or, dire que X_n appartient au domaine de $V^i D_i$ suppose déjà $X_n \in H$ et même $X_n \in \mathcal{D}_D$ (pour que le vecteur $D X_n$ existe). Comme $Q = \varpi V$ est conservatif, les résultats du paragraphe précédent (appliqués à l'opérateur B sur H, fermeture de $Q^i D_i$) s'appliquent. Soit alors Z un élément de H_b. On trouve :

$$< Z, V^i D_i X_n >' = E(\varpi Z V^i D_i X_n) = E(Z Q^i D_i X_n)$$

c'est-à-dire

$$< Z, V^i D_i X_n >' = < Z, Q^i D_i X_n > = - < X_n \operatorname{Div}(ZQ) >$$

Mais $\operatorname{Div}(ZQ) = Q^i D_i Z = \varpi V^i D_i Z$ et (DZ étant borné) $V^i D_i Z$ est dans H'. On peut donc écrire :

$$< X_n \operatorname{Div}(ZQ) > = E(\varpi X_n V^i D_i Z) = < X_n , V^i D_i Z >'$$

Or, X_n tendant vers 0 dans H', ce produit scalaire tend vers 0. Il vient donc :

$$< Z, Y' >' = \lim < Z, V^i D_i X_n >' = - \lim < X_n V^i D_i Z >' = 0$$

Par suite $Y' = 0$.

Soit donc B' la fermeture de $V^i D_i$: B' est dense et fermé. Il est immédiat que l'on a:

$$B'^* = - B'$$

En effet, pour X et Y dans H_b (dense dans H'), il vient :

$$\begin{aligned} < X, B' Y >' &= E(\varpi X V^i D_i Y) = E(X Q^i D_i Y) \\ &= - E(Y Q^i D_i X) = - E(\varpi Y V^i D_i X) \\ &= - < Y, B' X > \end{aligned}$$

Donc, il existe <u>un groupe S'_t d'opérateurs unitaires sur H'</u> admettant B' comme générateur infinitésimal. En reprenant les résultats du paragraphe précédent, on trouve encore :

$$(S'_t X)^2 = S'_t(X^2) \qquad (\forall \text{ X borné})$$

d'où résulte à nouveau que $S'_t 1_B$ est encore une <u>indicatrice</u> pour tout $B \in \mathcal{A}$. Ainsi, le groupe S'_t transforme B en $B_t \in \mathcal{A}$ et, S'_t étant unitaire,

$$P'(B_t) = P'(B)$$

Autrement dit, <u>le groupe S'_t laisse invariante la probabilité $P' = \varpi P/E(\varpi)$</u> (mais non pas la probabilité P elle-même). Il n'y a donc plus conservation de la loi des VA $Y_1, \ldots Y_k$. On trouve seulement ceci : si on désigne par $F(dy_1, \ldots dy_2)$ la loi de ces VA et par F_t celle des VA $S'_t Y_i$, on aura :

$$h(y) F = h_t(y) F_t$$

en désignant par $h(y_1, \ldots y_k)$ l'espérance conditionnelle de ϖ si $Y_1 = y_1, \ldots Y_k = y_k$, et par h_t l'espérance conditionnelle de ϖ si $S'_t Y_1 = y_1, \ldots S'_t Y_k = y_k$.

Si l'on suppose que le groupe S'_t possède de bonnes propriétés ergodiques (mélange fort), on trouvera $h_t(y) \to E \varpi$ pour

$t \to \infty$, et par suite

$$\lim_{t \to \infty} F_t = \frac{h(y)\ F}{E(\varpi)}$$

Mais on prendra garde que, pour un champ V quelconque, le groupe S'_t n'est en général nullement ergodique.

5. LES PHENOMENES DE DISPERSION.

On sait que les phénomènes connus en physique sous le nom de dispersion se laissent décrire comme un cas particulier de processus markoviens dans $\mathbb{R}^n$, à savoir celui des processus dont le générateur infinitésimal A est de la forme :

$$A\, f = \frac{1}{2}\, \nu^{ij}\, \partial_{ij}\, f + \lambda^i\, \partial_i\, f \tag{5.1}$$

où $\nu^{ij} = \nu^{ij}(x)$ est un champ de tenseurs symétriques et positifs, et $\lambda^i(x)$ est un champ de vecteurs. Inversement, moyennant certaines conditions de régularité sur λ et ν (par exemple, les ν^{ij} et les λ^i continus et bornés), tout opérateur du type (5.1) engendre effectivement un demi-groupe markovien.

Soit X_t le processus associé au générateur (5.1). On peut interpréter les composantes X_t^i , $i = 1,2,\ldots n$ comme les coordonnées au temps t d'une particule animée d'un mouvement brownien (généralisé) dans $\mathbb{R}^n$. Désignons par $P_t(x_0;dx)$ la loi de probabilité de X_t conditionnellement lorsque l'on sait que la particule était au point x_0 à l'instant $t = 0$. A cette probabilité de transition P_t, les probabilistes associent un opérateur $f \to P_t\, f$, défini sur un espace fonctionnel convenable (par exemple, l'espace des fonctions mesurables bornées) par la formule :

$$(P_t\, f)(x_0) = E[f(X_t)/X_0 = x_0] = \int P_t(x_0;dx)\ f(x)$$

Si nous désignons par $f_t = P_t\, f$ la fonction ainsi définie (qui est une fonction de la <u>position initiale</u> x_0, et représente l'espérance consitionnelle de $f(X_t)$ lorsque $X_o = x_o$), et sous réserve que f vérifie les conditions requises de régularité, cette fonction f_t obéit à l'équation suivante, dite <u>équation d'évolution</u> :

$$\frac{d\, f_t}{d\, t} = A\, f_t = \frac{1}{2}\, \nu^{ij}\, \partial_{ij}\, f_t + \lambda^i\, \partial_i\, f_t \tag{5.2}$$

De leur côté, les physiciens n'utilisent pas cette équation d'évolution en f_t, mais s'intéressent plutôt à l'évolution des lois de probabilité elles-mêmes. Si p(dx) désigne une distribution initiale (loi de probabilité de la position de la particule au temps t = 0, ou, si l'on préfère, distribution initiale dans l'espace d'une population très nombreuse de particules évoluant indépendamment les unes des autres) la distribution au temps t, soit $p_t(dx)$ est évidemment donnée par

$$p_t(B) = \int p(dx)\ P_t(x;B)$$

pour tout borélien B - ou, ce qui revient au même, par

$$\int p_t(dx)\ f(x) = \int p(dx)\ f_t(x) \tag{5.3}$$

pour toute fonction mesurable bornée.

Pour obtenir une équation d'évolution analogue à (5.2), mais portant sur les distributions p_t et non plus sur les espérances conditionnelles f_t, il faut introduire en principe des hypothèses de régularité beaucoup plus fortes qur les fonctions $\nu^{ij}(x)$ et $\lambda^i(x)$. Si l'on suppose que la distribution initiale admet une <u>densité</u> $\rho(x)$, soit

$$p(dx) = \rho(x)\ dx$$

il n'est nullement évident, en effet, que la loi p_t au temps t admettra elle-même une densité ρ_t. Et, à supposer que cette densité ρ_t existe, il se pourrait fort bien qu'elle n'admette pas de dérivées partielles.

Cependant, les physiciens supposent remplies ces conditions de régularité. Dérivant en t l'équation (5.3), et substituant à $\partial f_t/\partial t$ l'expression (5.2), on obtient alors pour la <u>densité</u> ρ_t une équation d'évolution, duale de l'équation (5.2), qui s'écrit

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\, \partial_{ij}(\nu^{ij}\, \rho_t) - \partial_i(\lambda^i\, \rho_t) \tag{5.4}$$

Sous cette forme, on voit clairement que les hypothèses requises sont beaucoup plus fortes, puisqu'il convient au minimum de supposer λ^i et ν^{ij}, respectivement, une fois et deux fois différentiables.

Dans un problème physique, il existe en général une <u>densité invariante</u> $\varpi(x)$, c'est-à-dire une solution de :

$$\frac{1}{2}\, \partial_{ij}(\varpi\, \nu^{ij}) - \partial_i(\varpi\, \lambda^i) = 0 \tag{5.5}$$

Pour être physiquement acceptable, cette solution ϖ doit être <u>positive</u> et <u>bornée</u> : nous dirons alors que ϖ est une <u>porosité</u>.

Si l'intégrale $\int \varpi(x)\, dx$ est <u>finie</u>, on peut évidemment supposer $\int \varpi(x)\, dx = 1$ (puisque ϖ n'est défini qu'à un facteur près). Dans ce cas, $\varpi(x)\, dx$ est une loi de probabilité invariante pour le processus X_t (il existe un régime stationnaire). Du point de vue physique, ce cas n'est pas le plus intéressant, puisqu'il n'y a pas, alors, à proprement parler, de dispersion au sens physique : il y a, en effet, une probabilité nulle pour que la particule s'éloigne indéfiniment. Nous supposons donc dans ce qui suit que l'intégrale n'est pas finie :

$$\int \varpi(x)\, dx = \infty$$

Si l'on connait <u>la porosité</u> $\varpi(x)$, il est possible de réécrire les équations (5.2) et (5.4). En effet, introduisons un vecteur Q, ou <u>flux</u>, défini par :

$$Q^i = \varpi\, \lambda^i - \frac{1}{2}\, \partial_j(\varpi\, \nu^{ij}) \tag{5.6}$$

L'équation (5.5) exprime exactement que le vecteur flux Q est <u>conservatif</u> :

$$\operatorname{div} Q = \partial_i \, Q^i = 0$$

A l'aide de (5.6), nous pouvons exprimer λ^i en fonction de Q^i :

$$\lambda^i = \frac{Q^i}{\varpi} + \frac{1}{2\varpi} \, \partial_j(\varpi \, \nu^{ij})$$

et substituer dans l'équation d'évolution (5.4), ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \, \partial_i \, [\partial_j \, \nu^{ij} \, \rho_t - \frac{\rho_t}{\varpi} \, \partial_i \, \varpi \, \nu^{ij}] - \partial_i \, (Q^i \, \frac{\rho_t}{\varpi})$$

Compte tenu de $\partial_i \, Q^i = 0$, et en posant

$$\varphi_t = \frac{\rho_t}{\varpi}$$

on obtient la forme usuelle de <u>l'équation de dispersion</u> des physiciens :

(5.7) $$\boxed{\varpi \, \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \, \partial_i \, \varpi \, \nu^{ij} \, \partial_j \, \varphi_t - Q^i \, \partial_i \, \varphi_t}$$

Le terme du second ordre (où figure le tenseur ν^{ij}) est interprété comme une <u>diffusion</u>, et le terme du premier ordre (où figure le flux conservatif Q^i) comme une <u>convection</u>. De fait, l'équation de dispersion (1.7) équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0 \quad ; \quad \rho_t = \varphi_t \, \varpi \\ q^i = Q^i \, \varphi_t - \frac{1}{2} \, \varpi \, \nu^{ij} \, \partial_j \, \varphi_t \end{array} \right.$$

De son côté, <u>l'équation d'évolution</u> (5.2) des probabilités, qui est la forme duale de l'équation (5.7) des physiciens, se met sous la forme

(5.8) $$\boxed{\varpi \frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \partial_i \, (\varpi \, \nu^{ij} \, \partial_j \, f_t) + Q^i \, \partial_i \, f_t}$$

Elle est identique à l'équation (1.7) des physiciens, à ceci près que le terme de convection a changé de signe.

Cette symétrie remarquable suggère d'introduire le produit scalaire

$$< f,\varphi > = \int \varpi(x) \; f(x) \; \varphi(x) \; dx$$

c'est-à-dire de travailler dans <u>l'espace de Hilbert</u> $L^2(\mathbb{R}^n,\varpi)$(où ϖ est la mesure de densité $\varpi(x)$). Considérons, en effet, l'opérateur A défini (sur un sous-espace dense dans L^2) par :

$$Af = \frac{1}{2\varpi} \; \partial_i \; (\varpi \; \nu^{ij} \; \partial_j \; f) + \frac{Q^i}{\varpi} \partial_i \; f$$

Alors, pour f et φ suffisamment régulières dans L^2, il vient :

$$\begin{aligned} < Af, \; \varphi > &= \int [\; \tfrac{1}{2} \, \partial_i \; \varpi \; \nu^{ij} \; \partial_j \; f + Q^i \; \partial_i \; f] \; \varphi(x) \; dx \\ &= \int [\; \tfrac{1}{2} \, \partial_i \; \varpi \; \nu^{ij} \; \partial_j \; \varphi - Q^i \; \partial_i \; \varphi] \; f(x) \; dx \end{aligned}$$

Ainsi, l'adjoint A* de A dans $L^2(\mathbb{R}^n,\varpi)$, qui est défini par $< Af, \varphi > = < f, A^* \varphi >$, est donné par :

$$A^* \varphi = \frac{1}{2\varpi} \; \partial_i \; (\varpi \; \nu^{ij} \; \partial_j \; \varphi) - \frac{Q^i}{\varpi} \; \partial_i \; \varphi$$

Autrement dit, dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, \varpi)$, les deux équations d'évolution (5.7) et (5.8) s'expriment à l'aide de l'opérateur A et de son adjoint A* :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial t} &= A \; f_t \\ \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} &= A^* \; \varphi_t \end{aligned} \right.$$

Considéré comme opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n, \varpi)$, A est le générateur infinitésimal d'un demi-groupe T_t (qui n'est autre que le demi-groupe P_t précédemment défini, mais considéré maintenant comme agissant sur L^2, et non plus sur l'espace des fonctions mesurables et bornées : nous reviendrons dans un instant, avec un peu plus de rigueur, sur ce point). Ce demi-groupe T_t est évidemment défini par $T_t\, f = f_t$. Son adjoint T_t^* vérifie donc $T_t^*\, \varphi = \varphi_t$.

Ce demi-groupe T_t est une <u>contraction</u>, en ce sens que la norme hilbertienne $\|T_t\, f\|^2 = \|f_t\|^2$ est une fonction <u>décroissante</u> du temps t.

En effet, pour f suffisamment régulière dans L^2, on trouve

$$\frac{d}{dt} \|f_t\|^2 = 2 < f_t\, A\, f_t >$$

Mais, par définition de A et du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n, \varpi)$:

$$< f_t\, A\, f_t > = \int [\, \tfrac{1}{2}\, \partial_i\, \varpi\, \nu^{ij}\, \partial_j\, f_t + Q^i\, \partial_i\, f_t]\, f_t(x)\, dx$$

Or, Q^i étant conservatif :

$$\int f_t\, Q^i\, \partial_i\, f_t\, dx = \frac{1}{2} \int Q^i\, \partial_i\, f_t^2\, dx = 0$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{2} \int [\, \partial_i\, \varpi\, \nu^{ij}\, \partial_j\, f_t]\, f_t\, dx = -\, \frac{1}{2} \int \varpi\, \nu^{ij}\, \partial_i\, f_t\, \partial_j\, f_t\, dx$$

Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \|f_t\|^2 = -\int \varpi\, \nu^{ij}\, \partial_i\, f_t\, \partial_j\, f_t\, dx \leq 0$$

puisque ϖ est positif ainsi que le tenseur ν^{ij}.

6. TRANSPOSITION PROBABILISTE.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsque $\nu^{ij}(x)$ et $\lambda^i(x)$ sont remplacées par des FAST. Partant d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un groupe τ_x, $x \in \mathbb{R}^n$ agissant sur Ω en conservant la probabilité P, on définit comme précédemment un groupe U_x d'opérateurs unitaires agissant sur $H = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On prendra donc

$$\nu^{ij}(x) = U_x \, \nu^{ij} \quad ; \quad \lambda^i(x) = U_x \, \lambda^i$$

les ν^{ij} et λ^i désignant maintenant des V.A. de H (la matrice de ν^{ij} étant supposée p.s. ≥ 0). Considérons l'opérateur A sur H défini par :

$$A\,Y = \frac{1}{2}\,\nu^{ij}\, D_{ij}\, X + \lambda^i\, D_i\, X$$

Sous cette forme générale, on ne peut pas affirmer l'existence d'un demi-groupe associé à A. Mais, transposant la relation (5.5), nous allons supposer qu'il existe une porosité ϖ.

Plus précisément (pour éviter d'introduire des hypothèses trop fortes de différentiabilité), nous supposons deux choses :

1°/ Il existe un vecteur Q conservatif dans H, c'est-à-dire vérifiant :

$$< Q^i \, , \, D_i \, Y > = 0 \qquad \forall\, Y \in \mathcal{D}_D$$

On a donc Div Q = 0, mais les composantes Q^i ne sont pas nécessairement différentiables.

2°/ Il existe une V.A. ϖ, que nous appellerons porosité, p.s. ≥ 0, et p.s. bornée telle que :

$$Q^i = \varpi\,\lambda^i - \frac{1}{2}\, D_j\, (\varpi\, \nu^{ij}) \tag{6.1}$$

Nous supposons donc que les $\varpi\,\nu^{ij}$ sont différentiables m.q. (cette condition pourrait être encore légèrement affaiblie). Il est alors légitime d'écrire pour tout X deux fois différentiable :

$$\varpi \, \nu^{ij} \, D_{ij} \, X = D_i \, (\varpi \, \nu^{ij} \, D_j \, X) - D_j \, X \, . \, D_i \, \varpi \, \nu^{ij}$$

Compte tenu de (6.1), notre opérateur A peut donc s'écrire :

(6.2) $$A \, X = \frac{1}{\varpi} \left(\frac{1}{2} \, D_i \, \varpi \, \nu^{ij} \, D_j \, X + Q^i \, D_i \, X \right)$$

La présence du facteur $\frac{1}{\varpi}$ dans l'expression (6.2) suggère de travailler non pas dans l'espace $H = L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, mais dans l'espace (déjà utilisé au paragraphe 4) :

$$H' = L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P')$$

où P' est la probabilité définie par :

$$P'(d\varpi) = \frac{\varpi(\omega) \; P(d\omega)}{E(\varpi)}$$

Nous allons montrer que l'opérateur A défini en (6.2), ou, plus précisément, sa fermeture, est <u>le générateur infinitésimal</u> d'un <u>demi-groupe de contractions</u> opérant sur l'espace de Hilbert H'.

D'après le <u>théorème de Hill-Yosida</u>, on sait qu'un opérateur B sur un espace de Banach (ici, un espace de Hilbert) H' est le générateur infinitésimal d'un demi-groupe de contraction si et seulement si :

a/ B est dense

b/ B est fermé

c/ Pour tout $\lambda > 0$ et tout $Y \in H'$, l'équation :

$$\lambda \, X - B \, X = Y$$

a une solution et une seule $X \in H'$ vérifiant :

$$\|X\| \leq \frac{1}{\lambda} \, \|Y\|$$

(si l'on pose $Y = R_\lambda X$, l'opérateur R_λ ainsi défini coïncide alors, comme on sait, avec la <u>résolvante</u> du demi-groupe T_t admettant le générateur B, soit :

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, T_t \, dt$$

Formellement, si l'on pose $T_t = e^{tB}$, on s'attend bien, en effet, à trouver $R_\lambda = [\lambda I - B]^{-1}$).

Examinons ces différents points.

a/ L'opérateur A est <u>dense</u> dans H'.

De fait, A X existe et appartient à H pour tout X borné admettant des gradients d'ordre 1 et 2 bornés (espace H_{b2}) , comme on le voit à partir de l'expression initiale

$$A X = \frac{1}{2} \nu^{ij} D_{ij} X + \lambda^i D_i X$$

Or $A X \in H$ entraine A X appartient à H' (puisque ϖ est p.s. bornée) et H_{2b} est dense dans H, lui-même dense dans H'. Donc A est dense dans H'.

b/ L'opérateur A n'est pas fermé, en général, mais nous allons voir qu'il admet une <u>fermeture</u> $\bar{A}$ dans H' : $\bar{A}$, qui prolonge A, sera donc dense et fermé (par la suite, nous écrirons en général A au lieu de $\bar{A}$).

En effet, désignons par $< \, >'$ le produit scalaire dans H' :

$$< X, Y >' = < \varpi X, Y > = E(\varpi X Y)$$

en réservant la notation $< \, >$ pour le produit scalaire dans H. Pour tout Z suffisamment régulier (par exemple $Z \in H_{b2}$) et tout X appartenant au domaine $\mathcal{D}_A$ de définition de l'opérateur A sur H', on trouve :

$$< Z,\ A\ X >' = < Z,\ \frac{1}{2} D_i\ \varpi\ \nu^{ij}\ D_j\ X + Q^i\ D_i\ X >$$

Or, on a déjà rencontré la relation :

$$< Z,\ Q^i\ D_i\ X > = -\ < X,\ Q^i\ D_i\ Z >$$

valable dans H pour tout vecteur Q conservatif. D'autre part, on a aussi dans H

$$< Z,\ \frac{1}{2} D_i\ \varpi\ \nu^{ij}\ D_j\ X > = -\ \frac{1}{2}\ < \varpi\ \nu^{ij}\ D_i\ Z,\ D_j\ X >$$

(puisque Z est dans H_{2b}), et aussi :

$$< \varpi\ \nu^{ij}\ D_i\ Z,\ D_j\ X > = -\ < X,\ D_j\ \varpi\ \nu^{ij}\ D,\ Z >$$

(puisque $\varpi\ \nu^{ij}$ est différentiable). Au total, il vient donc :

$$< Z,\ A\ X >' = < X,\ \frac{1}{2} D_j\ \varpi\ \nu^{ij}\ D_i\ Z - Q^i\ D_i\ Z >$$

Mais on a évidemment :

$$\frac{1}{2} D_j\ \varpi\ \nu^{ij}\ D_i\ Z - Q^i\ D_i\ Z = \varpi\ (A\ Z - 2\ \frac{Q^i}{\varpi}\ D_i\ Z)$$

Par suite :

(6.3) $$< Z,\ A\ X >' = < X,\ A\ Z - 2\ \frac{Q^i}{\varpi}\ D_i\ Z >'$$

les produits scalaires étant cette fois pris au sens de H'.

Montrons alors que A admet une fermeture. Soit X_n une suite dans H' telle que $X_n \to 0$ et $A\ X_n \to Y'$ dans H'. Il faut montrer Y' = 0. Or, pour tout $Z \in H_{b2}$, la relation (6.3) va nous donner :

$$< Z,\ A\ X_n >' = < X_n\ ,\ A\ Z - Z\ Q^i\ D_i\ Z >'$$

Cette expression tend vers 0, puisque $X_n \to 0$ dans H'. Il en résulte

$< Z, Y' >' = 0$ pour tout $Z \in H_{b2}$, et donc $Y' = 0$, puisque H_{b2} est dense dans H'.

Ainsi A admet une <u>fermeture</u> $\bar{A}$. La relation (6.3) montre de plus que <u>l'adjoint</u> A^* de A coïncide avec la fermeture de l'opérateur

$$A - 2 \frac{Q^i}{\varpi} D_i = \frac{1}{\varpi} [\frac{1}{2} D_i \varpi \nu^{ij} D_j - Q^i D_i]$$

c/ Soit maintenant H_o' l'ensemble des $\lambda X - A X$, X décrivant $\mathcal{D}_A$ ($\lambda > 0$ fixé). Montrons que H_o' est <u>dense</u> dans H'. En effet, soit Z un élément de H' orthogonal à H_o', soit :

$$< Z, \lambda X - A X > = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D}_A$$

c'est-à-dire :

$$< \lambda Z - A^*Z, X > = 0 \qquad \forall X \in \mathcal{D}_A$$

Comme $\mathcal{D}_A$ est dense dans H', on en déduit :

$$\lambda Z - A^*Z = 0$$

Calculons la norme, dans H', de $\lambda Z - A^*Z$:

$$\|\lambda Z - A^*Z\|'^2 = \lambda^2 \|Z\|'^2 + \|A^*Z\|'^2 - 2 \lambda < Z, A^*Z >' \tag{6.4}$$

Or, un calcul immédiat montre :

$$< Z, A^*Z >' = < Z, A Z >' = - \frac{1}{2} E (\varpi \nu^{ij} D_i Z D_j Z) \leq 0$$

Ainsi, la norme (6.4) est somme de trois termes ≥ 0. Elle ne peut donc s'annuler que si chacun des trois termes est égal à 0. En particulier $\|Z\|' = 0$, c'est-à-dire $Z = 0$ dans H' : <u>H_o' est dense.</u>

Pour tout $Y \in H_o'$, l'équation

$$\lambda X - A X = Y \tag{6.5}$$

a donc une solution. Cette solution est unique : car le même calcul que précédemment montre que $\|\lambda X - A X\|' = 0$ entraine $X = 0$. Elle définit donc un opérateur $R_\lambda : H'_o \to H'$, tel que $X = R_\lambda Y$ soit l'unique solution de (6.5) pour $Y \in H'_o$. Reprenant le même calcul que ci-dessus :

$$\|\lambda X - A X\|'^2 = \lambda^2 \|X\|'^2 + \|AX\|'^2 - 2\lambda < Z, A Z >' \geq \lambda^2 \|X\|'$$

nous trouvons ensuite :

$$\|Y\|' \geq \lambda \|X\|'$$

Cela montre que l'opérateur R_λ est continu dur H'_o (puisque $\|R_\lambda\| \leq 1/\lambda$). Il se prolonge donc par continuité sur l'adhérence de H'_o, c'ést-à-dire sur H' tout entier, puisque H'_o est dense dans H'. Autrement dit, l'équation (6.5) a une solution X et une seule pour tout $Y \in H'$, et cette solution vérifie la condition $\|X\|' \leq \frac{1}{\lambda} \|Y\|'$ du théorème de Hill-Yosida : ce qui achève la démonstration.

7. PROPRIETES ERGODIQUES.

Contrairement à ce qui se produit dans le cas d'un groupe de convection pure, le demi-groupe de dispersion dont nous venons d'établir l'existence possédera, en général, de bonnes propriétés ergodiques.

Cherchons, en effet, les éléments invariants pour ce demi-groupe T_t c'est-à-dire les solutions (dans H') de l'équation :

$$A X = 0$$

Or $A X = 0$ entraine, évidemment, $< X, A X >' = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} E(\varpi \nu^{ij} D_i X D_j X) = 0$$

Si la porosité ϖ et le tenseur ν sont > 0 p.s. strictement, cela entraine $D_i X = 0$, donc $X = C^{ste}$ (si le groupe unitaire U_x de départ est lui-même supposé ergodique, comme il est naturel). En général, cependant, la porosité n'est pas p.s. > 0 (il y a des grains imperméables où elle est nulle), mais le tenseur ν est p.s. > 0 strictement (au moins sur $\{\varpi > 0\}$, sa définition sur $\{\varpi = 0\}$ est dépourvue de signification physique). On trouve alors seulement :

$$D\,X = 0 \text{ sur } \{\varpi > 0\} \quad (\text{p.s. pour } P)$$

Noter que $D\,X = 0$ sur $\{\varpi > 0\}$, p.s. pour la probabilité P équivaut à $D\,X = 0$ p.s. pour P', c'est-à-dire $D\,X = 0$ en tant qu'élément de H' (mais non peut-être en tant qu'élément de H). Cela ne suffit donc pas, en toute rigueur, pour entrainer $X = C^{ste}$ et l'ergodicité de T_t. Il est vraisemblable, cependant, que, pour une porosité ϖ physiquement plausible, la relation $D\,X = 0$ dans H' entrainera bien $X = C^{ste}$ dans H'.

On peut donc penser que le demi-groupe sera, le plus souvent, ergodique sur H' (au sens faible : pas d'invariants autres que les constantes). Il est même vraisemblable qu'il possèdera des propriétés plus fortes. En effet, la relation déjà écrite :

$$\frac{d}{dt} \|T_t X\|'^2 = 2 < T_t X,\ A\,T_t X >' \leq 0$$

sera, en général, une inégalité stricte : de fait, pour X différentiable, on a vu que l'on a :

$$2 < X,\ A\,X >' = -\,E(\varpi\,\nu^{ij}\,D_i X\,D_j X)$$

de sorte que cette quantité ne s'annule que pour $D\,X = 0$ dans H' (donc $X = C^{ste}$ d'après nos hypothèses). En fait, nous ne savons pas si $T_t X$ reste dans le domaine $\mathcal{D}_D$ de D pour tout t (on suppose $X \in \mathcal{D}_D$) mais cela est plausible : la norme serait donc strictement décroissante (sauf si X est un invariant évidemment), et ceci laisse présager la convergence au sens fort (ou au moins au sens faible)

$$\lim_{t \to \infty} T_t X = < 1, X >' = \frac{E(\varpi X)}{E(\varpi)}$$

et en tous cas très vraisemblablement au moins :

$$(7.1) \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2} \int_0^t T_\tau X \, d\tau = \frac{E(\varpi X)}{E(\varpi)}$$

Dans l'interprétation physique dece modèle, les coordonnées X_t^i de la particule au temps t constituent (pour chaque $\omega \in \Omega$ fixé) un processus de Markov, avec (à $\omega \in \Omega$ fixé) :

$$E(d\, X_t^i/\omega) = E(\lambda^i(X_t)/\omega) \, dt$$

Mais $E(\lambda^i(X_t)/\omega)$ n'est autre que $T_t \lambda^i$. En termes physiques, donc, les coordonnées au temps t du centre de gravité g(t) du nuage de dispersion seront données par

$$g^i(t) = \int_0^t T_\tau \lambda^i \, d\tau$$

D'après (7.1), donc, on trouvera pour la vitesse moyenne asymptotique :

$$\bar{v}^i = \lim \frac{g^i(t)}{t} = \frac{E(\varpi \lambda^i)}{E(\varpi)}$$

D'après (6.1), d'ailleurs, puisque $D_j \nu^{ij}$ a une espérance nulle, cette vitesse moyenne s'exprime aussi bien à l'aide du flux conservatif Q^i :

$$(7.2) \qquad \bar{v}^i = \frac{E(Q^i)}{E(\varpi)} = \frac{E(\varpi \lambda^i)}{E(\varpi)}$$

Un Exemple.

Pour illustrer ce qui précède, partons de l'opérateur

$$B = V^i D_i = \frac{Q^i}{\varpi} D_i$$

qui engendre un groupe unitaire S_t sur H'. Soit ensuite $g_t(\tau)$ la densité de la loi de Gauss de variance ct et de moyenne bt. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(\tau) = \frac{c}{2} \frac{\partial^2 g_t}{\partial \tau^2} - b \frac{\partial g_t}{\partial t} \tag{7.3}$$

Pour tout $Y \in H'$, posons

$$T_t Y = \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(\tau) S_\tau Y d\tau \tag{7.4}$$

Alors T_t définit un demi-groupe de contractions sur H'. En effet, on a d'abord

$$\|T_t Y\|' \leq \int g_t(\tau) \|S_\tau Y\|' d\tau$$

Mais $\|S_\tau Y\|' = \|Y\|'$, puisque S_τ est un opérateur unitaire. Par suite :

$$\|T_t Y\|' \leq \|Y\|' \int g_t(\tau) d\tau = \|Y\|'$$

et T_t est une contraction sur H'.

Calculons maintenant $T_t T_{t'}$ pour montrer qu'il s'agit d'un demi-groupe. On trouve :

$$T_t(T_{t'} Y) = \int g_t(\tau) S_\tau Y d\tau \int g_{t'}(\tau') S_{\tau'} Y d\tau'$$
$$= \int g_t(\tau) d\tau \int g_{t'}(\tau') S_{\tau+\tau'} Y d\tau'$$

En faisant le changement de variable $\tau' = h - \tau$, il vient :

$$T_t T_{t'} Y = \int S_h Y dh \int g_t(\tau) g_{t'}(h-\tau) d\tau$$

Mais $g_t * g_{t'} = g_{t+t'}$ (convolution de lois de Gauss) .

Donc :

$$T_t T_{t'} = \int g_{t+t'}(h) S_h Y dh = T_{t+t'} Y$$

Il s'agit bien d'un demi-groupe de contractions sur H'.

Cherchons donc l'expression du générateur infinitésimal associé à T_t. Partons de l'équation d'évolution :

$$\frac{d}{dt} T_t Y = A T_t Y$$

Compte tenu de (7.3), la dérivée de $T_t Y$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} T_t Y &= \int \frac{\partial}{\partial t} g_t(\tau)\, S_\tau Y\, d\tau \\ &= \frac{c}{2} \int \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} g_t(\tau)\, S_\tau Y\, d\tau - b \int \frac{\partial}{\partial \tau} g_t(\tau)\, S_\tau Y\, d\tau \\ &= \frac{c}{2} \int g_t(\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S_\tau Y\, d\tau + b \int g_t(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S_\tau Y\, d\tau\end{aligned}$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} S_\tau Y = B\, B\, S_\tau Y = -\, B^* B\, S_\tau Y$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_\tau Y = B\, S_\tau Y$$

Par suite :

$$A T_t Y = \frac{d}{dt} T_t Y = \int g_t(\tau) \left[\frac{c}{2} B\, B\, S_\tau Y + b\, B\, S_\tau Y\right] d\tau$$

et, en $t = 0$:

(7.5) $$A Y = \frac{c}{2} B\, B\, Y + b\, B\, Y$$

Explicitement, ceci peut s'écrire :

$$A Y = \frac{1}{\varpi} \left[\frac{c}{2} D_i\, \varpi\, V^i\, V^j\, D_j Y + b\, Q^i D_i Y\right]$$

Quitte à remplacer ϖ par ϖ/b, on peut supposer $b = 1$. Nous avons donc bien un générateur de la forme (6.2) avec un tenseur v^{ij} donné par :

$$v^{ij} = c\, V^i\, V^j$$

(il est de type positif non strict).