Fontainebleau/CGMM N-761

LA DESTRUCTURATION DES HAUTES TENEURS et le krigeage des indicatrices

G. MATHERON

Juin 1982

LA DESTRUCTURATION DES HAUTES TENEURS
ET LE KRIGEAGE DES INDICATRICES

G. MATHERON

Mai 1982

Table des Matières

LA DESTRUCTURATION DES HAUTES TENEURS ET LE KRIGEAGE DES INDICATRICES

---

0 - UN PEU DE POLEMIQUE.

Dans une communication présentée au dernier congrès de l'APCOM, A. Journel nous,propose une méthode "nouvelle" pour l'estimation des fonction de récupération, à savoir le krigeage des indicatrices (il s'agit évidemment du krigeage propre ou autokrigeage de chacune des indicatrices de coupure considérée séparément : le cokrigeage complet de la famille de ces indicatrices coïncide, comme on sait, avec le krigeage disjonctif). On pourrait épiloguer sur la nouveauté d'une méthode qui ne semble pas différer de la technique bien connue qui consiste à travailler sur les "variables utiles". Jusqu'ici, à vrai dire, cette technique des "variables utiles" était plutôt considérée comme un expédient désespéré, auquel on n'avait recours que lorsqu'il n'était vraiment pas possible de faire autrement (gisements de type stockwerk voués à une exploitation très sélective, par exemple). L'élément réellement nouveau est, semble-t-il, que l'on nous présente maintenant cet expédient comme une panacée, et que l'on nous suggère de l'utiliser dans tous les cas : il s'agirait de la méthode de l'avenir, destinée à supplanter rapidement ces vieux trucs périmés que sont le krigeage disjonctif, le modèle multigaussien etc...

Pour justifier ce qui semble de prime abord une régression de 10 à 20 ans en arrière, on attendrait des arguments solides, théoriques et surtout expérimentaux. Des preuves expérimentales, qui seules seraient décisives, il n'y en a pas encore, semble-t-il : puisqu'il s'agit d'une méthode nouvelle, nous les attendons avec impatience. Sur le plan théorique, A. Journel avance deux sortes d'arguments. En premier lieu, le krigeage des indicatrices est beaucoup plus simple, et plus facile à comprendre pour les praticiens.

En second lieu, il ne nécessiterait le recours à aucune hypothèse et ne dépendrait d'aucun modèle.

Le premier argument mérite, à bon droit, le nom d'"argument de facilité": il est de nature plus démagogique que scientifique ou même simplement pratique. Car, après tout, la méthode des "polygones d'influence", elle aussi, est beaucoup plus simple que le krigeage et plus facile à comprendre pour les praticiens. Est-ce une raison pour y revenir ? Le second argument me semble douteux lui aussi. Il évoque un peu l'éloge ironique que l'on peut faire d'une personne qui parle de ce qu'elle ne connait pas : "au moins, elle n'a pas de préjugés!" Peut-être, mais elle a peu de chances aussi de tomber juste. De même, une méthode indépendante de toute hypothèse sur la nature du phénomène auquel on l'applique n'aura que fort peu de chances d'être adaptée à celle-ci. En réalité, on a toujours des préjugés : et ces derniers sont en général d'autant plus grossiers et simplistes qu'ils sont moins conscients et que l'on a au départ moins de connaissance véritable de ce dont on parle. De même, il n'existe pas de mode opératoire sans modèle au moins implicite. Car les données empiriques sont parfaitement muettes, et ne suggèrent d'elles-mêmes aucun mode opératoire particulier. Si nous choisissons tel algorithme plutôt que tel autre, c'est que nous pensons plus ou moins confusément qu'il y a une certaine adéquation entre cet algorithme et la grandeur que nous souhaitons estimer. Et ce modèle implicite sera en général d'autant plus simpliste qu'on l'aura choisi moins consciemment. La méthode des polygones d'influence ne semble liée à aucune hypothèse : c'est bien pourquoi sa valeur est douteuse. Le modèle implicite qui lui correspond (teneur constante sur le polygone d'influence de chaque sondage) se révèle en effet indéfendable une fois qu'on l'a explicité.

Dans ce qui suit, j'examine le modèle implicite sur lequel repose le krigeage des indicatrices. C'est le modèle "en mosaïque" : partition aléatoire de l'espace en compartiments à chacun desquels sont affectées des teneurs constantes, indépendantes et identiquement distribuées. Ce modèle, très particulier, n'est du reste nullement dépourvu d'intérêt. Il existe sans doute des phénomènes auxquels il s'applique en première approximation, du moins tant que l'on se limite aux variables à support ponctuel. Ce modèle (et ce modèle seulement) vérifie la condition d'autokrigeabilité, moyennant laquelle le krigeage propre des indicatrices coïncide avec leur cokrigeage, c'est-à-dire avec le K.D. Mais les choses se gâtent dès que l'on change de support. Si l'on conserve la condition d'autokrigeabilité pour les variables non ponctuelles, on déduit de ce modèle une formule de changement de support de type correction affine qui se révèle en opposition assez grossière avec la réalité (et avec le simple bon sens). Mais déjà au niveau ponctuel le modèle en mosaïque présente des caractères très spéciaux : par exemple, toutes les indicatrices ont le même corrélogramme. Or, l'étude expérimentale des variables utiles a jusqu'ici toujours mis en évidence, au contraire, un effet assez prononcé de destructuration des teneurs élevées, dont les modèles bigaussiens usuels rendent parfaitement compte. De ce point de vue, les deux modèles (mosaïque et bigaussien) se présentent un peu comme deux extrêmes, entre lesquels existe toute une gamme de modèles intermédiaires possibles : nous en proposerons une, qui présente l'avantage de rester dans la classe générale des lois hermitiennes.

Le variogramme d'ordre 1, défini par :

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E[|Z_{x+h} - Z_x|]$$

(qui est effectivement un variogramme, en ce sens que $-\gamma_1$ est une fonction de type positif conditionnel) doit pouvoir fournir un test intéressant : dans le cas mosaïque, en effet, γ_1 est proportionnel à γ, dans le cas bigaussien, au contraire, γ_1 est proportionnel à la racine carrée de γ (du moins si l'on prend comme variables les anamorphosées gaussiennes), d'où un critère expérimental possible pour mieux choisir le modèle. Il apparaitra ainsi peut-être que l'intérêt principal du "krigeage des indicatrices" aura été de suggérer indirectement ce critère, et d'attirer ainsi l'attention sur le variogramme d'ordre 1.

1 - L'EFFET DE DESTRUCTURATION DES TENEURS ELEVEES.

Tous ceux qui ont eu l'occasion de manipuler des "variables utiles" ont pu constater un effet de destructuration des hautes teneurs, qui semble constituer une loi assez générale : plus la teneur de coupure s'élève, plus se détériore le variogramme de la variable utile. Aucun modèle réaliste ne peut ignorer ce phénomène. Pour le krigeage (autokrigeage) des indicatrices, il conviendrait donc de connaître la covariance propre de chacune des indicatrices de coupure. Mais, dès que l'on applique une coupure un peu élevée, la covariance correspondante échappe en général à une inférence statistique sensée. C'est pourquoi A. Journel suggère d'adopter systématiquement, pour toutes les coupures, la même covariance, qui serait la covariance associée à la médiane (en principe la plus facile à estimer). On voit par là s'introduire un risque assez sérieux de surestimer la "zone d'influence" des teneurs élevées, d'où un biais systématique par excès, puisqu'en procédant ainsi on ne tient pas compte de cette destructuration.

Regardons comment les choses se présentent au niveau des modèles. Soit $Z(x)$ une F.A. stationnaire, m son espérance, σ^2 sa variance, $\rho(h)$ et $\sigma(h) = \sigma^2\rho(h)$ son corrélogramme et sa covariance, $\gamma(h)$ son variogramme, $F(dz)$ la loi monovariable de $Z(x)$ et $F_\rho(dz, dz')$ la loi bivariable de $Z = Z(x)$ et $Z' = Z(x+h)$ (l'indice $\rho = \rho(h)$ est simplement destiné à rappeler que Z et Z' ne sont pas indépendantes, mais sont liées par le coefficient de corrélation $\rho = \rho(h)$). L'indicatrice de la coupure à la teneur z au point x est :

$$I_z(x) = 1_{\{Z(x)\geq z\}}$$

C'est une F.A. stationnaire admettant la moyenne

$$E(I_z(x)) = P(Z \geq z) = 1 - F(z)$$

et la covariance :

(1-1) $$\sigma_z(h) = \int_z^\infty \int_z^\infty F_\rho(d\xi, d\xi') - (1-F(z))^2$$

que l'on peut écrire aussi :

(1-1') $$\sigma_z(h) = P(Z \wedge Z' \geq z) - P(Z \geq z)P(Z' \geq z)$$

En particulier, pour h = 0, on a Z = Z', et il vient :

(1-2) $$\mathrm{Var}(I_z) = F(z)\ (1-F(z))$$

<u>N.B.</u> En intégrant en z l'expression (1-2) de la variance de l'indicatrice I_z , on voit apparaître <u>l'indicateur S de dispersion</u> :

(1-2') $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Var}(I_z)\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)[1-F(z)]\ dz = S$$

Nous reviendrons un peu plus loin sur cette remarque.

Dans le cas d'une anamorphose $Z = \varphi(Y)$, où φ est une fonction croissante, les indicatrices sont évidemment conservées : il est équivalent de couper en y sur Y ou en $z = \varphi(y)$ sur Z.

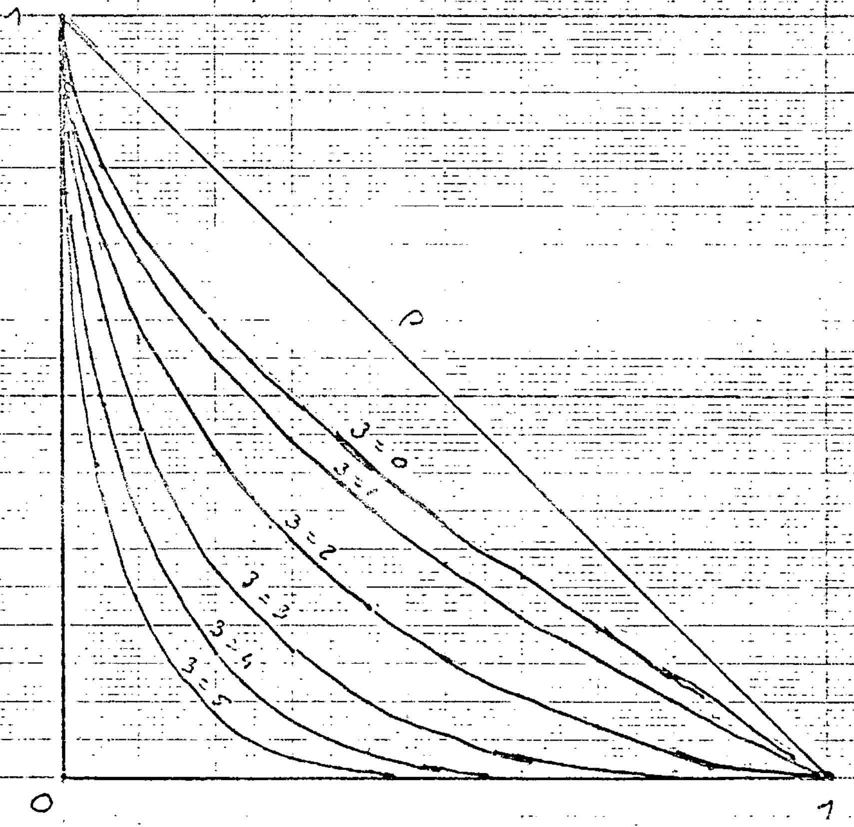
Ainsi, dans le cas d'un <u>modèle bigaussien</u> (Y, Y'), on aura :

(1-3) $$\sigma_z(h) = \sum_{n\geq 1} \frac{r^n}{n!}\ (H_{n-1}(y))^2\ (g(y))^2$$

(y est défini par $z = \varphi(y)$, r est le coefficient de corrélation des gaussiennes Y et Y', qui se déduit de $\rho = \rho(h)$ par les relations habituelles). Cette formule (1-3) permet un calcul extrêmement rapide de la covariance $\sigma_z(h)$. On peut voir sur la Figure 1 l'allure de ces courbes pour les coupures y = 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Pour des raisons de commodité, on a pris $r(h) = (1-|h|)_+$ ce qui ne nuit pas à la généralité (puisque $\sigma_z(h)$ est en réalité une fonction de r), et permet une comparaison graphique. Pour la même raison, au lieu des covariances, on a porté sur la figure les corrélogrammes correspondants. On est frappé de <u>l'intensité</u>

Figure 1

Destructuration aux teneurs élevées
(modèle bigaussien)



de l'effet de destructuration. Il ne faut sans doute pas chercher ailleurs la raison du succès pratique du modèle bigaussien.

Il est visible sur la Figure 1 (et on peut démontrer facilement) que, dans ce modèle, le comportement,de la covariance $\sigma_z(h)$ autour de $h = 0$ est en $\sqrt{\gamma(h)}$, soit en $|h|^{1/2}$ pour un variogramme linéaire à l'origine. Cela implique, comme on sait, que les courbes de niveau (dans l'espace à 2 dimensions) $\{Z(x) = z\}$ n'ont pas de longueur définissable (leur dimension fractale est 3/2) : c'est là une propriété bien connue des processus gaussiens. Pour nous, cette propriété implique surtout que les indicatrices sont toujours en corrélation beaucoup moins bonnes que les gaussiennes elles-mêmes, et cela pour toutes les teneurs de coupure. On en déduit que, dans le cas bigaussien, substituer l'autokrigeage des indicatrices au K.D. doit entrainer une perte d'information très substantielle.

Notons en passant une formule que j'ai eu l'occasion de commenter ailleurs : en dérivant en r l'expression de la covariance $\sigma_z(h)$, on obtient la densité de la loi de Gauss à deux variables

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_z = g_r(z,z)$$

d'où l'on déduit

$$\sigma_z(h) = \int_0^r g_{r'}(z,z)\, dr'$$

soit explicitement

$$\sigma_z(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r e^{-\frac{z^2}{1+x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1-4}$$

et, en particulier pour $z = 0$, la formule bien connue :

$$\sigma_0(h) = \frac{1}{2\pi} \text{ Arc Sin } r$$

On vérifie sans peine sur cette formule (1-4) que le comportement autour de $r = 1$ de la covariance σ_z est effectivement en $\sqrt{1-r}$.

2 - LE MODELE EN MOSAIQUE.

L'effet de destructuration est particulièrement intense dans le cas bigaussien. Pour obtenir, en sens inverse, un modèle sans destructuration, considérons le cas suivant :

(2-1) $\quad F(dz, dz') = \rho\ \delta_z(dz')\ F(dz) + (1-\rho)\ F(dz)\ F(dz')$

Autrement dit : Z et Z' sont égales, avec la probabilité ρ, ou indépendantes et de même loi F, avec la probabilité $(1-\rho)$. Il est immédiat que le coefficient ρ qui figure dans le mélange (2-1) est nécessairement égal au coefficient de corrélation (d'où la notation ρ).

Il existe effectivement des F.A. stationnaires admettant des lois bivariables du type (2-1). Leur forme générale est celle du modèle en mosaïque déjà évoqué. De fait, si pour chaque point x la loi bivariable de (Z_x, Z_y) est, pour tout y, de ce type (2-1), chaque réalisation de la F.A. définit une relation d'équivalence entre points de $\mathbb{R}^n$: deux points x et y sont équivalents si $z_x = z_y$, et la classe de x est l'ensemble des y pour lesquels cette égalité a lieu. Il s'agit ainsi d'une partition aléatoire de $\mathbb{R}^n$. La probabilité pour que x et x+h tombent dans le même compartiment est $\rho(h)$: Z_x et Z_{x+h} sont alors égaux. Au contraire, conditionnellement pour x et x+h dans des classes distinctes (ce qui a lieu avec la probabilité $1-\rho(h)$), Z_x et Z_{x+h} sont indépendants.

N.B. : Je considère ici comme oiseuse la question de savoir si cette indépendance conditionnelle 2 à 2 entraine l'indépendance conditionnelle n à n, pour n points tombés dans n compartiments distincts.

Dans ce modèle, si $\varphi(z)$ est une fonction quelconque, on a :

$$E[\varphi(Z)\ \varphi(Z')] = \rho\ E[\varphi^2(Z)] + (1-\rho)(E[\varphi(z)])^2$$

de sorte que le coefficient de corrélation de $\varphi(Z)$ et de $\varphi(Z')$ est encore égal à ρ. En particulier, toutes les indicatrices I_z ont le même corrélogramme $\rho(h)$ que la F.A. $Z(x)$ elle-même : il n'y a aucun effet de destructuration, ni des teneurs élevées relativement aux teneurs médianes, ni des indicatrices par rapport aux variables originelles.

Au lieu de la covariance propre de l'indicatrice $I_z(x)$, on peut aussi considérer les covariances mixtes de $I_z(x)$ et $I_{z'}(x+h)$ associées à deux coupures et à 2 points différents, soit :

$$\sigma_{zz'}(h) = \mathrm{Cov}(I_z(x)\ I_{z'}(x+h)) = \int_z^\infty \int_{z'}^\infty F_\rho(dz,\ dz') - (1-F(z))(1-F(z'))$$

Dans le modèle mosaïque, on trouve pour ces covariances mixtes :

$$\sigma_{zz'}(h) = \rho(h)[1-F(z \vee z') - (1-F(z))(1-F(z')]$$

soit :

(2-2) $$\sigma_{zz'}(h) = \rho(h)\ F(z \wedge z')\ [1-F(z \vee z')]$$

Comme ces covariances sont le produit d'une fonction $\rho(h)$ qui ne dépend que de h et d'une fonction qui ne dépend que de (z,z'), elles vérifient automatiquement la condition d'autokrigeabilité : dans le modèle mosaïque, krigeage propre des indicatrices (ou de toute autre fonction $\varphi(Z)$) et K.D. coïncident.

Cette propriété est caractéristique. Autrement dit, le modèle mosaïque est le seul qui satisfasse à la condition d'autokrigeabilité des indicatrices. Il s'agit donc bien du modèle implicite associé au krigeage propre des indicatrices.

En effet, cette condition d'autokrigeabilité s'écrit, comme on sait :

(2-3) $$\sigma_{zz'}(h) = \lambda(h)\ K(z,\ z')$$

pour une fonction λ ne dépendant que de h, et une fonction K ne dépendant que de z et z'. Prenons, en particulier, h = 0. Quitte à multiplier K(z, z') par un facteur convenable, on peut choisir

$$\lambda(0) = 1$$

Or, en h = 0, on a Z = Z' et donc :

$$\sigma_{zz'}(o) = K(z,z') = 1 - F(z \vee z') - (1-F(z))(1-F(z'))$$

Reportant cette expression de K(z,z') dans la relation (2-3), on voit que l'on doit avoir :

$$\int_z^\infty \int_z^\infty F_\rho(dz,dz') = \lambda(h)[1-F(z \vee z')] + [1-\lambda(h)][1-F(z)][1-F(z')]$$

c'est-à-dire :

$$F_\rho(dz,dz') = \lambda\ \delta_z(dz')\ F(dz) + (1-\lambda)\ F(dz)\ F(dz')$$

avec alors nécessairement $\lambda = \rho$: il s'agit bien du modèle mosaïque.

Le Krigeage en Modèle Mosaïque.

Comme toutes les transformées $\varphi(Z_x)$ ont le même corrélogramme $\rho(h)$, tous les krigeages ont les mêmes poids. Ainsi, à partir des $z(x_\alpha)$ expérimentaux, krigeage propre et K.D. coïncident, et conduisent à l'estimation suivante :

(2-4) $$F^*(dz) = \sum_\alpha \lambda^\alpha\ \delta_{z_\alpha} + (1-\sum \lambda^\alpha)\ F(dz)$$

pour la loi des teneurs ponctuelles dans un domaine V, les coefficients λ^α étant définis par le système :

$$\lambda^\alpha\ \rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \int_V \rho_{\beta,x}\ dx$$

Il s'agit en somme, simplement, de l'histogramme des valeurs z_α expérimentales (avec pondération des fréquences par les poids du krigeage) mélangé à la loi générale F (qui se voit attribuer le poids complémentaire $1 - \sum \lambda^\alpha$).

Noter que les poids λ^α sont, par construction, identiques à ceux du krigeage Z_V^* de $Z_V = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx$. Autrement dit, on a bien :

$$Z_V^* = \int z\, F^*(dz)$$

ce qui est indéniablement satisfaisant.

3 - CHANGEMENT DE SUPPORT EN MOSAIQUE.

Fermons maintenant les yeux à la réalité physique, et cherchons à former un modèle de changement de support en étendant aux variables non ponctuelles la condition d'autokrigeabilité qui caractérise le modèle au niveau ponctuel. Nous exigeons donc que la variable :

(3-1) $$Z_V = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx$$

puisse se mettre sous la forme :

(3-2) $$Z_V = \varphi_V(X)$$

pour une variable X dont les indicatrices $I_z(V) = 1_{X \geq z}$ constitueront avec les $I_z(x)$ un modèle autokrigeable. Dans ces conditions, X doit admettre la même loi F que les Z(x) eux-mêmes. En effet, soit F'(dx) la loi de X. A partir de données expérimentales $z(x_\alpha) = z_\alpha$, on forme (par K.D. ou, ce qui est ici équivalent, par autokrigeage des indicatrices I_z) une estimation de la même forme que (2-4) :

$$F'^* = \sum_\alpha \lambda^\alpha\, \delta_{z_\alpha} + (1 - \sum \lambda^\alpha)\, F'$$

Mais l'espérance du K.D. (les Z_α étant substitués aux z_α) doit redonner F'. Comme $E(\delta_{Z_\alpha}) = F$, il vient :

$$F' = (\sum \lambda^\alpha)\ F + (1-\sum \lambda^\alpha)\ F'$$

Comme on ne peut pas avoir $\sum \lambda^\alpha = 0$ pour toutes les configurations de krigeage (voir, par exemple, le cas où il n'y a qu'un seul point expérimental) on conclut F' = F : ainsi <u>X admet la même loi F que Z(x)</u> . En réitérant le raisonnement déjà fait dans le cas des variables ponctuelles, on en déduit encore que pour chaque point x la loi de deux variables X et Z = Z(x) est de la forme :

$$F(dx,dz) = r\ F(dx)\ \delta_x(dz) + (1-r)\ F(dx)\ F(dz)$$

où r est une fonction du point x. Ainsi, à X fixé, l'espérance conditionnelle de Z(x) est :

$$E[Z(x)/X] = r(x)\ X + (1-r(x))\ m$$

D'après (3-1), on en déduit :

$$Z(V) = \frac{1}{V} \int_V E[Z(x)/X]\ dx = r_V\ X + (1-r_V)\ m$$

avec

$$r_V = \frac{1}{V} \int_V r(x)\ dx$$

Ainsi, l'anamorphose (3-2) est <u>nécessairement du type correction affine</u> :

$$Z_V = \Phi_V(X) = m + \frac{\sigma_V}{\sigma}\ (X-m) \tag{3-3}$$

avec une variable X équivalente en loi aux variables ponctuelles :

$$X \equiv Z$$

et un coefficient $r_V = \sigma_V/\sigma$ nécessairement égal au rapport des écarts types.

Il y a donc une cohérence implicite dans l'attitude de A. Journel qui recommande à la fois la correction affine et le krigeage propre des indicatrices.

Mais revenons maintenant à <u>l'estimation locale</u>. Les $Z(x_\alpha) = z_\alpha$ étant connus, la loi de X est estimée par K.D. (≡ krigeage propre) selon la formule déjà écrite :

$$F^* = \lambda_V^\alpha \, \delta_{z_\alpha} + (1-\Sigma \, \lambda_V^\alpha) \; F$$

et des λ_V^α déterminés par le système :

$$\lambda_V^\alpha \, \rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta X}$$

Or $\rho_{\beta X}$, corrélation de $Z(x_\beta)$ et X ne diffère pas, d'après (3-3) du coefficient de corrélation de $Z(x_\beta)$ et Z_V lui-même :

$$\rho_{\beta X} = \frac{\sigma_{\beta V}}{\sigma \; \sigma_V}$$

En réintroduisant, pour plus de clarté, la matrice des covariances :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^2 \; \rho_{\alpha\beta}$$

il apparait ainsi que nos coefficients λ_V^α sont la solution du système de krigeage suivant :

(3-4) $$\lambda_V^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma}{\sigma_V} \; \sigma_{\beta V}$$

<u>Ils ne coïncident pas avec les coefficients du krigeage</u> de Z_V lui-même. Si ces derniers sont les λ_K^α (tels que $\lambda_K^\alpha \, \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta V}$), on a, en effet,

(3-5) $$\lambda_V^\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_V} \; \lambda_K^\alpha$$

Et cela est <u>logique</u> : on doit, en effet, avoir pour le K.D. de X :

$$X^* = \int x \; F^*(dx) = \Sigma \lambda_V^\alpha z_\alpha + (1 - \Sigma \lambda_V^\alpha) \; m$$

et donc, d'après (2-7), pour le krigeage de Z_V lui-même :

$$Z_V^* = m + \frac{\sigma_V}{\sigma} (X^* - m) = \frac{\sigma_V}{\sigma} \Sigma \lambda_V^\alpha z_\alpha + (1 - \frac{\sigma_V}{\sigma} \Sigma \lambda_V^\alpha) \; m$$

ce qui impose bien la relation (3-5).

Mais on voit la conséquence : comme le rapport σ/σ_V est plus grand que 1 (et, en général, nettement plus grand), l'estimation F^* de la loi de X :

$$F^* = \frac{\sigma}{\sigma_V} \; \lambda_K^\alpha \, \delta_{z_\alpha} + (1 - \frac{\sigma}{\sigma_V} \Sigma \lambda_K^\alpha) \; F$$

va présenter des risques considérables d'apparition de densité négative. Outre les conditions habituelles $\lambda_K^\alpha \geq 0$ (pas de poids négatifs) les poids du krigeage devraient vérifier la condition supplémentaire :

$$\Sigma \lambda_K^\alpha \leq \frac{\sigma}{\sigma_V}$$

certainement très sévère (puisque σ/σ_V est $\prec 1$).

Ces graves anomalies indiquent que l'autokrigeabilité du modèle mosaïque ne peut pas s'étendre aux variables à support non ponctuel. D'où résulte que le changement de support par simple correction affine doit également être rejeté.

Cela est du reste assez évident a priori. Pour un petit support V, en effet, dans le modèle mosaïque, on aura soit :

$$Z_V = Z(x)$$

si V est inclus dans un seul compartiment de la mosaïque (ce qui a lieu avec une probabilité assez voisine de 1 lorsque V est petit), soit :

$$Z_V = \Sigma \, a_i \; Z(x_i) \qquad (\Sigma \, a_i = 1)$$

si V chevauche des compartiments distincts : dans le premier cas, la loi est F, la même que pour le support ponctuel ; dans le second, elle est beaucoup plus concentrée. La loi résultante est donc un mélange de la forme

$$F_V = (1-\lambda)\ F + \lambda\ F'$$

où F' est beaucoup plus concentrée que F : on est bien loin de la correction affine.

4 - LE VARIOGRAMME D'ORDRE 1.

Si Z est une variable aléatoire positive et F sa loi, les relations :

$$\int_0^\infty 1_{Z\geq z}\, dz = Z \quad ; \quad \int_0^\infty [1-F(z)]\, dz = E(Z) = m$$

donnent très simplement :

$$\int_0^\infty (1_{Z\geq z} - E(1_{Z\geq z}))\, dz = Z - m$$

Dans le cas d'une variable Z quelconque (non nécessairement ≥ 0) cette relation subsiste. De fait, en définissant Z_+ et Z_- par :

$$Z_+ = Z\ 1_{Z\geq 0} \quad ; \quad Z_- = -\ Z\ 1_{Z<0}$$

on trouve

$$\int_0^\infty [1_{Z\geq z} - 1 + F(z)]\, dz = Z_+ - E(Z_+)$$

$$\int_{-\infty}^0 [1_{Z\geq z} - 1 + F(z)]\, dz = - \int_{-\infty}^0 [1_{Z<z} - F(z)]\, dz = - Z_- + E(Z_-)$$

d'où résulte encore :

$$(4\text{-}1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} [1_{Z\geq z} - 1 + F(z)]\, dz = Z - m$$

Cette relation simple permet de relier les covariances des indicatrices à la covariance de la F.A. elle-même. Considérons en effet la covariance <u>mixte</u> :

$$\sigma_{zz'}(\rho) = E\left[\left(1_{Z\geq z} - 1 + F(z)\right)\left(1_{Z'\geq z'} - 1 + F(z')\right)\right]$$

et intégrons en z et z' : compte tenu de (4-1), cela donne :

$$\iint \sigma_{zz'}(\rho)\, dz\, dz' = E[(Z-m)(Z'-m)] = Cov(Z,Z')$$

Ainsi, la covariance $\sigma(h)$ d'une F.A. s'exprime simplement à l'aide de la famille $\sigma_{zz'}(h)$ des covariances <u>mixtes</u> des indicatrices de coupure $I_z(x)$ et $I_{z'}(x+h)$, selon la formule :

$$(4\text{-}2) \qquad \sigma(h) = \iint \sigma_{zz'}(h)\, dz\, dz'$$

On peut alors se demander ce que représente l'intégrale (simple) de la <u>covariance propre</u> $\sigma_z(h)$ de l'indicatrice de coupure $I_z(x)$.

On a déjà vu que, pour h = 0, cette intégrale, qui représente alors l'intégrale en z de la variance de l'indicatrice I_z, est égale à l'indicateur de dispersion S :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Var(I_z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\,[1-F(z)]\, dz = S$$

Dans le cas général ($h \neq 0$), il est plus agréable de raisonner sur le variogramme. En effet, l'expression $(I_z - I'_z)^2$ ne prend que deux valeurs : 1, si la coupure z tombe entre Z et Z', et 0 autrement, ce qui s'écrit :

$$(I_z - I'_z)^2 = 1_{Z \wedge Z' < z \leq Z \vee Z'}$$

et, en intégrant en z :

$$\int (I_z - I'_z)^2 \, dz = |Z - Z'|$$

Posons

$$\gamma_z = \frac{1}{2} E(|I_z - I'_z|^2)$$

En intégrant en z, nous trouvons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_z \, dz = \frac{1}{2} E[\int |I_z - I'_z|^2 dz] = \frac{1}{2} E(|Z-Z'|)$$

Ainsi, si l'on désigne par $F_\rho(dz, dz')$ une loi bivariable symétrique en z et z' admettant des marginales égales à F(dz), et si l'on pose, selon des notations qui se comprennent d'elles-mêmes :

$$(4\text{-}3) \begin{cases} S_\rho = \frac{1}{2} E_\rho(|Z-Z'|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |z-z'| \; F_\rho(dz, dz') \\ S_o = \frac{1}{2} E_o(|Z-Z'|) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |z-z'| \; F(dz) \; F(dz') \\ \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \; [1-F(z)] \; dz \end{cases}$$

il apparait que l'intégrale en z de la covariance propre $\sigma_z(\rho)$ de l'indicatrice de coupure est donnée par :

$$(4\text{-}4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z(\rho) \, dz = S_o - S_\rho = \frac{1}{2} E_o(|Z-Z'|) - \frac{1}{2} E_\rho(|Z-Z'|)$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire, avec $Z = Z_x$ et $Z' = Z_{x+h}$, cette formule devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_z(h) \, dz = S_o - S_{\rho(h)}$$

Il est plus agréable d'introduire le <u>variogramme de l'indicatrice</u>

$$\gamma_z(h) = \frac{1}{2} E[(I_z(x) - I_z(x+h))^2]$$

On trouve alors :

$$\int \gamma_z(h)\ dz = S_{\rho(h)} = \frac{1}{2} E(|Z_{x+h} - Z_x|) \tag{4-5}$$

Ainsi, si nous définissons le <u>variogramme d'ordre 1</u> en posant :

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E(|Z_{x+h} - Z_x|)$$

il apparait que <u>le variogramme d'ordre 1 est égal à l'intégrale en z du variogramme des indicatrices de coupure I_z</u> . D'où résulte en particulier que $\gamma_1(h)$ est un vrai variogramme (i.e. : $-\gamma_1$ est de type positif conditionnel). Plus généralement, montrons le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> - Soit Z(x) une F.A.I.-0 au sens strict. Alors, pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leq 2$ la fonction γ_α définie en posant

$$\gamma_\alpha(h) = \frac{1}{2} E(|Z_{x+h} - Z_x|^\alpha)$$

est un variogramme (i.e. : $-\gamma_\alpha$ est de type positif conditionnel).

(Par FAI-0 au <u>sens strict</u>, on entend que les accroissements $Z(x+h) - Z(x)$ sont stationnaires (en x) au sens strict, et non pas seulement stationnaires d'ordre 2 : il suffit, en réalité, de supposer que, pour toute fonction φ telle que cette espérance existe, $E[\varphi(Z_{x+h} - Z_x)]$ ne dépend que de h).

Pour démontrer ceci, partons d'une fonction f(x) quelconque, et soit N une poissonnienne d'espérance θ. Définissons une F.A. $Z_1(x)$ en posant :

$$Z_1(x) = [f(x)]^N$$

Sa covariance (non centrée) est :

$$< Z_1(x),\ Z_1(y) > = e^{-\theta[1-f(x)\ f(y)]}$$

En particulier :

$$\|Z_1(x)\| = e^{-\frac{\theta}{2}[1-f^2(x)]}$$

Soit alors $Z_o(x)$ la F.A. obtenue en normant $Z_1(x)$:

$$Z_o(x) = \frac{Z_1(x)}{\|Z_1(x)\|}$$

Elle admet la <u>covariance</u>

$$C(x,y) = e^{-\frac{\theta}{2}[f(x)-f(y)]^2} \tag{4-6}$$

Ainsi, pour toute fonction f et tout $\theta \geq 0$, la fonction définie en (4-6) est de type positif. Si maintenant nous remplaçons f(x) par une FAI-0 (au sens strict) Z(x), il en résulte, en passant à l'espérance, que la fonction :

$$C_t(h) = E\left[e^{-t(Z_{x+h}-Z_x)^2}\right]$$

(qui ne dépend que de h) est une covariance pour tout $t \geq 0$.

Choisissons alors α ($0 < \alpha < 2$) et substituons à t une variable aléatoire positive T obéissant à la <u>loi stable</u> de paramètre $\alpha/2$, définie par :

$$E\left(e^{-\lambda T}\right) = e^{-a\,\lambda^{\alpha/2}}$$

On trouve ainsi que l'expression :

$$E(C_T(h)) = E\left[e^{-a|Z_{x+h}-Z_x|^{\alpha}}\right]$$

est encore une covariance pour tout $a > 0$. Par suite :

$$E\left[\frac{1-e^{-a|Z_{x+h}-Z_x|^{\alpha}}}{a}\right]$$

est un variogramme pour tout $a > 0$. Il suffit alors de faire tendre a vers 0 pour voir que la fonction :

$$\gamma_\alpha(h) = E[|Z_{x+h} - Z_x|^\alpha]$$

est elle-même encore un variogramme.

N.B. On rapprochera ce théorème du résultat plus simple suivant : si $\gamma(h)$ est un variogramme, $(\gamma(h))^\beta$ est encore un variogramme pour tout réel β tel que $0 < \beta \leq 1$.

La démonstration part du théorème connu selon lequel $\gamma(h)$ est un variogramme si et seulement si $e^{-t\gamma(h)}$ est uneccovariance pour tout $t > 0$: on substitue à t une V.A. $T \geq 0$ telle que

$$E(e^{-\lambda T}) = e^{-a\lambda^\beta}$$

d'où résulte que $e^{-a\gamma^\beta}$ est une covariance pour tout $a > 0$, et par suite γ^β est un variogramme.

5 - EXEMPLES.

Dans ce qui suit, nous adoptons les notations (légèrement abusives)

$$S_\rho = \frac{1}{2} \iint |z-z'| \; F_\rho(dz,dz') \quad ; \quad S_o = \frac{1}{2} \iint |z-z'| \; F(dz) \; F(dz')$$

pour toute loi bivariable symétrique $F_\rho(dz,dz')$ admettant des marginales égales à $F(dz)$. De même, dans le cas d'une F.A. stationnaire (au sens strict) :

$$\begin{cases} \gamma_1(h) = S_{\rho(h)} = \frac{1}{2} E(|Z_{x+h} - Z_x|) \\ \gamma(h) = \frac{1}{2} E(|Z_{x+h} - Z_x|^2) \end{cases}$$

a - Une inégalité.

Pour toute V.A. X admettant un moment d'ordre 1, on a :

$$E(|X|) \leq (E(X^2))^{1/2}$$

avec égalité si et seulement si $|X| = E(|X|)$ p.s., c'est-à-dire si la loi de X est concentrée sur deux points symétriques par rapport à l'origine.

Appliquons ceci à $X = |Z-Z'|$, lorsque Z et Z' admettent la loi bivariable F_ρ. Comme on a :

$$E(|Z-Z'|) = 2\ S_\rho \quad ; \quad E((Z-Z')^2) = 2\ \sigma^2(1-\rho)$$

il vient :

(5-1) $$S_\rho \leq \sigma\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}$$

Soit encore, pour les variogrammes :

(5-1') $$\gamma_1(h) \leq \sqrt{\frac{1}{2}\ \gamma(h)}$$

J'ignore si l'égalité peut être atteinte dans ces inégalités. Rappelons seulement que, dans le cas où Z et Z' sont <u>indépendantes</u> (et non pas seulement sans corrélation), l'indicateur de dispersion $S = S_0$ vérifie l'inégalité suivante, plus sévère que (5-1) :

$$S = S_0 \leq \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

avec égalité si et seulement si la loi F est une loi uniforme sur un segment de droite. (On en déduit qu'il ne peut pas exister de FAST possédant de bonnes propriétés ergodiques (fortement mélangeantes) pour laquelle (5-1') deviendrait une égalité : car pour $h \to \infty$ on trouverait $\gamma_1 \leq \gamma/\sqrt{3}$).

b - <u>Modèle mosaïque</u>.

Avec la loi bivariable du modèle mosaïque :

$$F_\rho dz,dz') = \rho\ \delta_z(dz')\ F(dz) + (1-\rho)\ F(dz)\ F(dz')$$

il vient :

(5-2) $$S_\rho = (1-\rho)\ S_o$$

soit, en termes de variogrammes :

(5-2') $$\gamma_1(h) = \frac{S}{\sigma^2}\ \gamma(h)$$

où $S = S_o$ est l'indicateur de dispersion de la loi monovariable F, et σ^2 sa variance. Ainsi, dans le modèle mosaïque, le variogramme d'ordre 1 est proportionnel au variogramme d'ordre 2.

c - Modèle bigaussien.

Pour toute gaussienne centrée X, on a

$$E(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\ \mathrm{Var}\ X}$$

Par suite dans le modèle bigaussien les anamorphosées gaussiennes vérifient toujours :

(5-3) $$\begin{cases} S_\rho = \sigma \sqrt{\dfrac{1-\rho}{\pi}} \\ \gamma_1(h) = \sqrt{\dfrac{\gamma(h)}{\pi}} \end{cases}$$

Le variogramme d'ordre 1 est donc ici proportionnel à la racine carrée du variogramme γ : son comportement autour de $h = 0$ est donc très différent de celui que prévoit le modèle mosaïque (effet de destructuration très intense), ce qui doit permettre, dans les applications, de procéder à des tests très simples pour discriminer ces deux modèles.

d - Modèle bilognormal.

Dans le cas lognormal, ρ et σ^2 désignent le coefficient de corrélation et la variance du logarithme des variables, et non des variables elles-mêmes. Par contre, γ et γ_1 désignent les variogrammes d'ordre 2 et 1 des variables elles-mêmes. En particulier :

$$\gamma(h) = m^2 e^{\sigma^2} [1 - e^{-\sigma^2(1-\rho)}]$$

Pour calculer le variogramme d'ordre 1, partons de l'anamorphose :

$$Z = m\, e^{\sigma Y - \sigma^2/2}$$

où Y est gaussienne réduite, et reportons-nous à la formule (1-4). La covariance de l'indicatrice $1_{Y \geq y}$, soit $\sigma_y(\rho)$ est donnée par :

$$\sigma_y(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\rho e^{-\frac{y^2}{1+x}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et nous devons calculer l'intégrale :

$$H(\rho) = \int \sigma_y(\rho)\, dz = m\, e^{-\sigma^2/2}\, \sigma \int e^{\sigma y}\, \sigma_y(\rho)\, dy$$

Comme on a :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \sigma_y(\rho) = \frac{e^{-\frac{y^2}{1+\rho}}}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}}$$

on trouve d'abord :

$$\frac{\partial H(\rho)}{\partial \rho} = \frac{m\, e^{-\sigma^2/2}}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}}\, \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma y - \frac{y^2}{1+\rho}}\, dy$$

$$= \frac{m\,\sigma}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{\sigma^2}{4}}\, \frac{e^{\rho \frac{\sigma^2}{4}}}{\sqrt{1-\rho}}$$

D'après (1-1), on a ensuite :

$$S_o - S_\rho = H(\rho) - H_o = \frac{m\ \sigma}{2\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{\sigma^2}{4}} \int_0^\rho e^{x\frac{\sigma^2}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= m\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\rho}}^{\sigma/\sqrt{2}} e^{-z^2/2}\ dz$$

D'où enfin :

$$S_o - S_\rho = 2\ m \left[G\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - G\left(\sigma\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right)\right]$$

où G est la fonction de répartition de la loi de Gauss. En $\rho = 1$, on a ensuite $S_\rho = 0$, d'où

$$S_o = m\left[2\ G\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$

et enfin :

(5-4) $$S_\rho = m\left[2\ G\left(\sigma\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right) - 1\right]$$

ou, en terme de variogramme :

(5-4') $$\gamma_1(h) = m\left[2\ G\left(\sqrt{\frac{\gamma_L(h)}{2\ \sigma^2}}\right) - 1\right]$$

γ_L désignant cette fois le variogramme de $\ell_n\ Z(x)$.

e - Modèle bigamma.

Nous considérons maintenant le cas où Z et Z' sont des gamma (de paramètre α) avec une loi bivariable F_ρ définie par sa transformée de Laplace :

$$E[e^{-\lambda Z - \mu Z'}] = \frac{1}{[1 + \lambda + \mu + (1-\rho)\ \lambda\mu]^\alpha}$$

ou sa densité :

$$\begin{cases} f_\rho(z,z') = \sum_{n=o}^{\infty} p_n \dfrac{1}{(1-\rho)^2} \; f_{n+\alpha}\left(\dfrac{z}{1-\rho}\right) f_{n+\alpha}\left(\dfrac{z'}{1-\rho}\right) \\ p_n = \dfrac{(1-\rho)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \; \dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{n!} \; \rho^n \end{cases}$$

($f_{n+\alpha}$ est la densité de la loi gamma réduite de paramètre $\alpha + n$). On sait que cette loi bivariable est celle d'un processus markovien du type diffusion (avec $\rho(h)$ de la forme $e^{-a|h|}$).

Changeant λ en $-iu$ et μ en $+iu$ dans l'expression de la transformée de Laplace, il vient immédiatement :

$$(5\text{-}5) \qquad E[e^{iu(Z-Z')}] = \frac{1}{[1 + (1-\rho)\, u^2]^\alpha}$$

d'où résulte :

$$E_\rho(|Z-Z'|) = \sqrt{1-\rho}\,.\; E_o(|Z-Z'|)$$

c'est-à-dire

$$S_\rho = S_o \sqrt{1-\rho}$$

Ainsi, exactement comme dans le cas bigaussien, le variogramme d'ordre 1 est proportionnel à la racine carrée du variogramme d'ordre 2.

Pour calculer le coefficient de proportionnalité, partons de (5-5) écrite avec $\rho = 0$:

$$E[e^{iu(Z-Z')}] = \frac{1}{(1+u^2)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-tu^2}\, dt$$

qui montre l'équivalence en loi :

$$Z-Z' \equiv X \sqrt{2\, T_\alpha}$$

où X est gaussienne réduite et T_α gamma (α) réduite indépendante de X. Par suite :

$$E(|Z-Z'|^\lambda) = 2^\lambda \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2})\ \Gamma(\alpha+\frac{\lambda}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\alpha)}$$

et, pour $\lambda = 1$

$$S_o = \frac{1}{2} E(|Z-Z'|) = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\alpha)}$$

il vient ainsi :

$$\gamma_1(h) = S_\rho = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\alpha)} \sqrt{1-\rho}$$

D'autre part, la variance σ^2 est égale à α, et par suite :

$$\gamma(h) = \alpha\sqrt{1-\rho}$$

d'où la relation cherchée :

$$\gamma_1(h) = \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{\gamma(h)}{\alpha\ \pi}} \tag{5-6}$$

Lorsque α tend vers l'infini, on obtient à la limite (comme il se doit) la relation (5-3) du cas bigaussien.

6 - LE MODELE HERMITIEN.

Considérons maintenant avec quelques détails le modèle hermitien le plus général. Dans ce modèle, les anamorphosées gaussiennes Y, Y' admettent comme lois bivariables des <u>mélanges de lois de Gauss à 2 variables</u>. Plus précisément, la loi bivariable de (Y,Y') est définie par ses marginales (loi de Gauss de densité g(y)) et des coefficients T_n tels que :

$$E(H_n(Y)/Y') = T_n\ H_n(Y')$$

Sous réserve de convergence, la densité d'une telle loi bivariable s'écrit :

$$f(y,y') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n}{n!} H_n(y)\ H_n(y')\ g(y)\ g(y')$$

($T_0 = 1$, $T_1 = E(YY') = \rho$). J'ai montré ailleurs que <u>les T_n définissent effectivement une loi si et seulement si ils sont de la forme</u>

(6-1) $$T_n = \int_{-1}^{+1} r^n\ \varpi(dr)$$.

où $\varpi(dr)$ est une loi de probabilité concentrée sur (0,1) : ce qui revient à dire que toute loi hermitienne est un mélange de lois bigaussiennes $g_r(y,y')$ de la forme :

(6-2) $$f(y,y') = \int_{-1}^{+1} g_r(y,y')\ \varpi(dr)$$

(ou encore que <u>toute hermitienne se déduit d'une bigaussienne en randomisant le coefficient de corrélation r</u>).Dans tout ce qui suit nous supposerons vérifiée cette condition (6-1).

A $T_1 = \rho$ fixé, considérons la famille hermitienne définie par (6-1), sous la condition :

(6-3) $$\int_{-1}^{+1} r\ \varpi(dr) = \rho$$

Calculons S_ρ : compte tenu de (5-3) et de l'expression (6-2) du mélange bigaussien, il vient immédiatement :

(6-4) $$S_\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-r}\ \varpi(dr)$$

Comme $\sqrt{1-r}$ est une fonction <u>concave</u> sur (-1,1), on en déduit immédiatement que S_ρ est <u>maximale</u> (à ρ fixé) lorsque la loi $\varpi(dr)$ est concentrée en son barycentre ρ, imposé par la condition

(6-3), et minimale, au contraire, lorsque ϖ est concentrée sur les deux points $r = \pm 1$, soit respectivement pour

$$\begin{cases} \varpi_{Max} = \delta_\rho \\ \varpi_{Min} = \frac{1-\rho}{2}\,\delta_{-1} + \frac{1+\rho}{2}\,\delta_1 \end{cases}$$

avec respectivement :

$$S_{\rho_{Max}} = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}} \quad ; \quad S_{\rho_{Min}} = \frac{1-\rho}{\sqrt{2\,\pi}}$$

ou encore, en introduisant pour plus de clarté l'indice S de dispersion de la loi de Gauss réduite, qui est :

$$(6\text{-}5) \qquad \begin{cases} S = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \\ S_{\rho_{Max}} = S\,\sqrt{1-\rho} \;;\quad S_{\rho_{Min}} = S\,\dfrac{(1-\rho)}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

et, dans le cas général :

$$(6\text{-}5') \qquad \frac{S(1-\rho)}{\sqrt{2}} \leq S_\rho \leq S\,\sqrt{1-\rho}$$

Le modèle mosaïque figure comme cas particulier de notre modèle hermitien général. On l'obtient en prenant :

$$\varpi = \rho\,\delta_1 + (1-\rho)\delta \qquad (\rho \geq 0)$$

c'est-à-dire

$$T_0 = 1 \;;\; T_n = \rho \qquad (\forall\, n \geq 1)$$

il lui correspond la valeur :

$$S_\rho = S(1-\rho)$$

Ainsi, le cas bigaussien (ϖ concentré en un seul point ρ) est un cas extrêmal : il correspond au maximum de destructuration.

Chose curieuse, le minimum de destructuration n'est pas obtenu pour le modèle mosaïque, mais pour ϖ_{Min} concentrée en (-1 et +1). A ce minimum de destructuration est associée, tout comme pour le modèle mosaïque, une relation de proportionnalité entre les variogrammes d'ordre 1 et 2 (au lieu d'une loi en $\gamma_1 \sim \sqrt{\gamma}$ dans le cas bigaussien).

On notera aussi qu'à ce minimum de destructuration (ϖ_{Min} concentré en -1 et +1) est associée une loi bivariable très particulière, puisque concentrée sur les 2 bissectrices $Y = \pm Y'$.

7 - UN EXEMPLE DE F.A. A LOI HERMITIENNE.

Donnons, pour terminer ce tour d'horizon (qui s'est finalement élevé quelque peu au-dessus du point de vue du seul "krigeage des indicatrices") un exemple de fonction aléatoire non triviale admettant des lois bivariables hermitiennes. Partons de la remarque simple suivante : soient Z_1 et Z_2 deux gaussiennes réduites et X une V.A. quelconque indépendante de Z_1 et Z_2. Posons:

$$Z = Z_1 \cos X + Z_2 \sin X$$

Alors Z est une gaussienne réduite indépendante de X.

En effet, on trouve immédiatement pour la loi conditionnelle de Z à X fixé :

$$E[e^{iuZ}/X] = e^{-\frac{u^2}{2}(\cos^2 X + \sin^2 X)} = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

expression qui ne dépend plus de X.

De la même façon, considérons deux F.A. gaussiennes stationnaires $Z_1(x)$ et $Z_2(x)$, d'espérance nulle, de variance unité et admettant la même fonction de covariance $\rho(h)$, et soit $X(x)$ une FAI-0 (au sens strict) indépendante de Z_1 et Z_2 . Posons :

$$Z(x) = Z_1(x) \cos X_x + Z_2(x) \sin X_x \tag{7-1}$$

Pour chaque point x, la V.A. Z(x) est une gaussienne réduite indépendante de la F.A. X (même raisonnement que ci-dessus). Considérons deux points x et y, et les variables Z_x et Z_y : conditionnellement lorsque la réalisation de X est fixée, on trouve cette fois :

$$E[e^{iuZ_x+ivZ_y}/X] = e^{-\frac{u^2+v^2}{2} - \rho(h)uv\cos(X_x-X_y)}$$

(avec h = x-y). La loi bivariable est donc définie par :

$$E[e^{iuZ_x+ivZ_y}] = e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} E[e^{-\rho(h)uv\cos(X_x-X_y)}]$$

Comme X est une FAI-0, l'espérance qui figure au second membre ne dépend que de h : d'où la <u>stationnarité de la loi bivariable</u> (ce qui veut dire que Z(x) est stationnaire d'ordre 2 ainsi que toutes les anamorphosées $\varphi(Z_x)$). Et la <u>loi bivariable elle-même est une loi hermitienne</u>, avec

$$(7\text{-}2) \qquad T_n = \rho^n(h)\ E[(\cos(X_{x+h} - X_x))^n]$$

<u>EXEMPLE</u> : Si X_x est une FAST ne prenant que les deux valeurs 0 et $\pi/2$, on obtient un <u>modèle du type mosaïque</u>. L'espace entier est divisé en deux classes (un ensemble aléatoire et son complémentaire) selon que $Z_x = 0$ ou $\pi/2$: sur le premier ensemble Z(x) coïncide avec $Z_1(x)$, sur le second avec $Z_2(x)$.

Notons pour terminer que <u>la loi de Gauss ne reste pas invariante par changement de support</u> dans ce modèle très curieux (7-1). De fait, lorsque la réalisation de X est fixée, la variable

$$Z_V = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx$$

apparait comme une gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$Var(Z_V/X) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \rho(x-y)\cos(X_x-X_y)\,dx\,dy$$

On trouve donc pour la loi de Z_V :

$$(7\text{-}3) \qquad E(e^{iuZ_V}) = E\ e^{-\frac{u^2}{2}\frac{1}{V^2}\iint_{VV} \rho(x-y)\cos(X_x - X_y)dx\,dy}$$

Cette loi se présente comme un mélange de lois de Gauss admettant la même moyenne (nulle) mais des variances différentes. En langage bref, Z_V est une gaussienne à variance randomisée. Cette remarque pourra peut-être servir de point de départ pour élaborer de meilleurs modèles de changement de support.

ANNEXE - UNE PROPRIETE DE L'INDICATEUR DE DISPERSION S.

Je note ici, pour ne pas l'oublier, une propriété de l'indicateur S qui n'a guère de rapport avec ce qui précède, mais pourra servir à l'occasion. A toute loi monovariable F, nous associons son indicateur S_F défini par :

$$(A\text{-}1) \qquad S_F = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)(1-F(z)dz = \frac{1}{2}\iint F(dz)\ |z-z'|\ F(dz')$$

Alors :

THEOREME - La fonctionnelle S_F est une fonctionnelle concave sur l'espace des lois monovariables.

En effet, on remarque que la fonctionnelle :

$$\mu \rightarrow S_\mu = \frac{1}{2}\iint \mu(dz)\ |z-z'|\ \mu(dz')$$

définit une forme quadratique sur l'espace des mesures sur R. Il est normal de lui associer la forme bilinéaire correspondante :

$$S_{\mu,\mu'} = \frac{1}{2}\iint \mu(dx)\ |x-x'|\ \mu'(dx')$$

En particulier, si F et F' sont deux lois, on trouve :

$$S_{(F-F')} = S_F + S_{F'} - 2\ S_{F,F'}$$

Mais on a nécessairement :

$$S_{(F-F')} \leq 0$$

En effet, la mesure $\mu = F-F'$ vérifie la condition $\int \mu = 0$. Comme $-|h|$ est de type positif conditionnel, il en résulte bien

$$S_{(F-F')} = \iint \mu(dx) \; |x-x'| \; \mu(dx') \leq 0$$

avec d'ailleurs égalité si et seulement si $F = F'$. Ainsi

(A-2)
$$S_{F,F'} \geq \frac{S_F+S_{F'}}{2}$$

Soit alors F_o et F_1 deux lois, et $\lambda \in (0,1)$. Posons :

$$F_\lambda = (1-\lambda)\; F_o + \lambda \; F_1$$

On en déduit aussitôt :

$$S_{F_\lambda} = (1-\lambda)^2 \; S_{F_o} + 2\;\lambda(1-\lambda)\; S_{F_oF_1} + \lambda^2 \; S_{F_1}$$

et, compte tenu de (A-2)

$$\begin{aligned} S_{F_\lambda} &\geq (1-\lambda)^2 \; S_{F_o} + \lambda(1-\lambda)\;[S_{F_o} + S_{F_1}] + \lambda^2 \; S_{F_1} \\ &= (1-\lambda)\; S_{F_o} + \lambda \; S \; F_1 \end{aligned}$$

D'où le théorème.

<u>COROLLAIRE</u> - La fonctionnelle

$$d(F,F') = \sqrt{2\; S_{FF'} - S_F - S_{F'}}$$

constitue une <u>distance</u> sur l'espace des lois monovariables.

En effet, considérons sur R une FAI-0 $Z(x)$ admettant le variogramme $\frac{1}{2}\;|h|$. On trouve

$$d(F,F') = \| \int (F(dx)-F'(dx))\ Z(x) \| = \|Z_F - Z_{F'}\|$$

Par suite :

$$d(F,F'') = \|Z_F - Z_{F''}\| \leq \|Z_F - Z_{F''}\| + \|Z_{F'} - Z_{F''}\|$$

d'où résulte l'inégalité triangulaire :

$$d(F,F'') \leq d(F,F') + d(F',F'')$$

D'autre part, on a déjà vu que $d(F,F') = 0$ entraine $F = F'$: il s'agit donc bien d'une distance.