Fontainebleau/CGMM N-743

LES APPLICATIONS IDEMPOTENTES

G. MATHERON Février 1982

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

LES APPLICATIONS IDEMPOTENTES

par

G. MATHERON

Table des Matières

Table des Matières (Suite)

LES APPLICATIONS IDEMPOTENTES

par

G. MATHERON

1 - PRELIMINAIRES

Dans ce qui suit, $\mathcal{P}$ désignera un treillis complet, c'est-à dire un ensemble muni d'une relation d'ordre, que nous noterons $\subset$ et tel que toute famille d'éléments A_i dans $\mathcal{P}$ admette dans $\mathcal{P}$ un plus petit majorant, que nous noterons $\bigcup A_i$, et un plus grand minorant, que nous noterons $\bigcap A_i$. Ceci implique l'existence dans $\mathcal{P}$ d'un plus grand élément E et d'un plus petit élément $\emptyset$.

Dans les applications, $\mathcal{P}$ pourra être l'ensemble $\mathcal{P}(\underline{E})$ des parties d'un ensemble donné E (et dans ce cas les notations $\cup$, $\cap$, $\subset$ etc... auront leur signification ensembliste usuelle), ou bien une classe de fonctions sur un espace donné (et dans ce cas $\bigcup f_i$ représentera un Sup). D'autres cas pourront se présenter. Par exemple, si E est un espace topologique, on pourra travailler sur l'espace des fermés $\mathfrak{F}$ ou des ouverts $\mathcal{G}$. Sur $\mathfrak{F}$, par exemple, l'Inf d'une famille $A_i \in \mathfrak{F}$ coïncide avec l'intersection ensembliste $\bigcap A_i$, par contre le Sup est la réunion fermée $\overline{\bigcup A_i}$.

Une application $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est dite croissante si $A \subset A'$ dans $\mathcal{P}$ implique $\psi(A) \subset \psi(A')$. Elle est dite idempotente si $\psi \circ \psi = \psi$ (le plus souvent, nous écrirons $\psi\psi$ au lieu de $\psi \circ \psi$). Elle est dite $\cup$-propre si :

$$\psi \circ (I \cup \psi) = \psi \qquad \text{(I : application identique)}$$

et $\cap$-propre si

$$\psi \circ (I \cap \psi) = \psi$$

Une application croissante, idempotente et $\cup$-propre (resp. $\cap$-propre) sera dite, par abréviation c.i.$\cup$ (resp. c.i.$\cap$).

On dira aussi que ψ est extensive si $\psi \supset I$, et anti-extensive si $\psi \subset I$. Une fermeture est une application croissante, extensive et idempotente ; une ouverture est une application c., i. et anti-extensive. Les ouvertures aussi bien que les fermetures sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.

Dans le cas où $\mathcal{P}$ est muni d'une complémentation $\complement$ (par exemple si $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$), les applications c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ se correspondent par dualité. En posant $\psi^* = \complement\, \psi\, \complement$, il est clair en effet que ψ sera c.i.$\cup$ si et seulement si ψ^* est c.i.$\cap$, et réciproquement.

Dans le cas $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, on s'intéressera parfois plus spécialement aux applications ψ compatibles avec les translations (i.e. $\tau\psi = \psi\tau$ pour toute translation τ), ou τ-applications. Il est facile de voir que les résultats que nous allons établir resteront vrais si nous remplaçons partout dans chaque énoncé le mot "application" par le mot "τ-application" (on le voit en remarquant que les diverses classes $\mathcal{B}_\psi$, $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ etc... définies ci-dessous sont automatiquement stables par translation dès que ψ est une τ-application).

Voici un premier résultat simple, qui nous servira de fil conducteur :

Soient φ une fermeture et γ une ouverture sur $\mathcal{P}$. Alors $\gamma\varphi$ est c.i.$\cup$ et $\varphi\gamma$ est c.i.$\cap$.

Ces deux énoncés se déduisant l'un de l'autre par dualité, il suffit de démontrer le premier d'entre eux. Posons

$$\psi = \gamma\varphi$$

Il est clair que ψ est croissante. Comme γ est une ouverture, on a $\gamma \subset I$ d'où $\psi = \gamma\varphi \subset \varphi$, donc $\varphi\, \gamma\, \varphi \subset \varphi\, \varphi = \varphi$ (idempotence et croissance de φ), puis $\gamma\, \varphi\, \gamma\, \varphi \subset \gamma\, \varphi$ (croissance de γ), c'est-à-dire

$$\psi\, \psi \subset \psi$$

Mais $\varphi \supset I$ entraine $\varphi\,\gamma\,\varphi \supset \gamma\,\varphi$, d'où $\gamma\,\varphi\,\gamma\,\varphi \supset \gamma\,\gamma\,\varphi = \gamma\,\varphi$ c'est-à-dire $\psi\,\psi \supset \psi$. D'où l'égalité

$$\psi\,\psi = \psi$$

ψ est donc <u>idempotente</u>. Enfin, de $\gamma\,\varphi \subset I \cup \gamma\,\varphi \subset I \cup \varphi = \varphi$, on tire $\gamma\,\varphi = \gamma\,\varphi\,\gamma\,\varphi \subset \gamma\,\varphi\, o(I \cup \gamma\,\varphi) \subset \gamma\,\varphi\,\varphi = \gamma\,\varphi$, d'où l'égalité

$$\psi = \psi\, o(I \cup \psi)$$

qui montre que ψ est <u>c.i.$\cup$</u> .

Nous verrons dans un instant que ce résultat admet une réciproque : toute application c.i.$\cup$ est de la forme $\gamma\,\varphi$, et toute application c.i.$\cap$ est du type $\varphi\,\gamma$. Il existe des applications croissantes qui sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.(nous apprendrons à les construire, en raison de leur intérêt), mais il en existe d'autres qui ne sont ni c.i.$\cup$, ni c.i.$\cap$ - et qui par suite ne peuvent pas se mettre sous la forme $\varphi\,\gamma$ ou $\gamma\,\varphi$. Voici un exemple simple :

Prenons $B \subset E$ $(B \neq E,\ B \neq \emptyset)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, posons

$$\psi(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \supset B \text{ ou si } A \subset B \\ B & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit facilement que ψ est croissante et idempotente.
Mais

$$\psi(A \cup \psi(A)) = A \cup B \quad \text{si } A \not\subset B, \quad = A \text{ si } A \subset B$$

$$\psi(A \cap \psi(A)) = A \cap B \quad \text{si } A \not\supset B, \quad = A \text{ si } A \supset B$$

de sorte que ψ n'est ni c.i.$\cup$ ni c.i.$\cap$.

2 - QUELQUES CRITERES

Donnons maintenant quelques <u>critères</u> qui seront constamment utilisés dans ce qui suit, et d'abord quelques notations.

Pour toute application $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, nous désignerons par $\mathrm{Im}(\psi)$ l'espace image $\psi(\mathcal{P})$, et par $\mathcal{B}_\psi$ (ou simplement $\mathcal{B}$ s'il n'y a pas d'ambiguité) la <u>famille des invariants</u> de ψ :

$$\mathcal{B}_\psi = \{A : A = \psi(A)\}$$

On a toujours l'inclusion :

$$\mathcal{B}_\psi \subset \mathrm{Im}(\psi)$$

et ψ est <u>idempotente si et seulement si l'égalité</u> :

$$\mathcal{B}_\psi = \mathrm{Im}(\psi)$$

<u>est réalisée</u>.

A toute classe $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ nous associerons la classe $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ <u>stable pour $\cup$ engendrée par $\mathcal{B}$</u> (i.e. l'intersection de toutes les classes stables pour $\cup$ contenant $\mathcal{B}$) et nous désignerons par $\underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$ (ou simplement $\underset{\sim}{I}$ s'il n'y a pas d'ambiguité) <u>l'ouverture</u> associée à $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}$ de la restriction à $\mathcal{B}$ de l'identité I. De même, $\tilde{\mathcal{B}}$ <u>sera la classe stable pour $\cap$</u> engendré par $\mathcal{B}$ et $\tilde{I}_{\mathcal{B}}$ (ou $\tilde{I}$) la <u>fermeture</u> associée à $\tilde{\mathcal{B}}$ (plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$). Explicitement :

$$\underset{\sim}{I}(A) = \cup \{B \; ; \; B \in \mathcal{B} , \; B \subset A\}$$

$$\tilde{I}(A) = \cap \{B \; ; \; B \in \mathcal{B} , \; B \supset A\}$$

<u>Critère 1</u> - Pour que deux applications ψ et ψ' soient idempotentes et admettent le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\psi \, \psi' = \psi' \quad ; \quad \psi' \, \psi = \psi$$

En effet, ces relations équivalent à :

$$\mathrm{Im}(\psi') \subset \mathcal{B}_{\psi} \quad ; \quad \mathrm{Im}(\psi) \subset \mathcal{B}_{\psi'}$$

Or, on a toujours $\mathcal{B}_{\psi} \subset \mathrm{Im}(\psi)$ et $\mathcal{B}_{\psi'} \subset \mathrm{Im}(\psi')$, de sorte que ces relations sont réalisées si et seulement si

$$\mathcal{B}_{\psi} = \mathcal{B}_{\psi'} = \mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi')$$

D'où le critère.

Il sera commode de désigner par $\underline{\mathfrak{I}d(\mathcal{B})}$ la famille des idempotentes admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$. Ainsi, $\psi \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B})$ si et seulement si

$$\psi\, \psi'_0 = \psi'_0 \quad ; \quad \psi'_0\, \psi = \psi$$

pour un élément $\psi'_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B})$, et ces relations ont alors lieu pour tout $\psi' \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B})$

Critère 2 - Si f est une application quelconque ($\mathcal{P} \to \mathcal{P}$) et $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f \supset \mathcal{B} &\Leftrightarrow f\,\psi_0 = \psi_0 && \text{pour un } \psi_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}) \\ &\Leftrightarrow f\,\psi = \psi && \forall\, \psi \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}) \\ &\Leftrightarrow f\,\psi_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}) && \text{pour un } \psi_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Les deux premières équivalences sont évidentes. D'après le critère 1, $f\,\psi_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}_{\psi_0})$ équivaut à $f\,\psi_0\,\psi_0 = \psi_0$ et $\psi_0\, f\,\psi_0 = f\,\psi_0$, soit

$$f\,\psi_0 = \psi_0 \text{ et } \psi_0\, f\,\psi_0 = f\,\psi_0$$

Comme la seconde relation est en fait une conséquence de la première, on a bien

$$f\,\psi_0 \in \mathfrak{I}d(\mathcal{B}_{\psi_0}) \Leftrightarrow f\,\psi_0 = \psi_0$$

<u>Critère 3</u> - Soit $\psi_o \in \mathcal{I}d(\mathcal{B})$, et f quelconque. Alors :

$$\mathcal{B}_f \supset \mathcal{B} \Rightarrow \psi_o\, f \in \mathcal{I}d(\mathcal{B})$$

En effet, $\mathcal{B}_f \supset \mathcal{B}$ entraine $f\,\psi_o = \psi_o$ (critère 2). On a alors

$$\psi_o\, f.\psi_o = \psi_o\,\psi_o = \psi_o \quad \text{et} \quad \psi_o.\psi_o\, f = \psi_o\, f$$

Donc $\psi_o\, f$ est idempotente et admet le même domaine d'invariance que ψ_o (critère 1). On peut améliorer ce critère comme suit :

<u>Critère 4</u> - Soit $\psi_o \in \mathcal{I}d(\mathcal{B})$ et f quelconque. Alors :

$$\psi_o\, f \in \mathcal{I}d(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \psi_o\, f\,\psi_o = \psi_o$$

En effet, la condition $\psi_o.\psi_o\, f = \psi_o\, f$ est toujours vérifiée. D'après le critère 1, on a donc $\psi_o\, f \in \mathcal{I}d(\mathcal{B}_{\psi_o})$ si et seulement si $\psi_o\, f.\psi_o = \psi_o$.

<u>Critère 5</u> - Si ψ_o est idempotente et f quelconque, alors :

$$\psi_o\, f = \psi_o \Rightarrow f\,\psi_o \text{ est idempotente.}$$

En effet, on a alors $f\,\psi_o\, f\,\psi_o = f\,\psi_o\,\psi_o = f\,\psi_o$

On notera que la relation d'ordre sur $\mathcal{P}$ ne joue aucun rôle dans les 5 critères précédents, et aussi bien ces critères concernent des idempotentes quelconques non nécessairement croissantes. Dans tout ce qui suit nous ne considèrerons plus que des applications <u>croissantes</u>. En particulier, nous désignerons maintenant par $\mathcal{I}d(\mathcal{B})$ l'ensemble des applications croissantes et idempotentes (s'il en existe) admettant $\mathcal{B}$ comme domaine d'invariance. Nous écrirons aussi $\mathcal{I}d(\psi)$ au lieu de $\mathcal{I}d(\mathcal{B}_\psi)$ pour désigner la famille des c.i. admettant le même domaine d'invariance que ψ.

Critère 6 - Soit f une application croissante quelconque. Alors

$$\mathcal{B}_f \supset \mathcal{B} \Leftrightarrow \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}} \subset f \subset \tilde{I}_{\mathcal{B}}$$

En effet, si f est invariante sur $\mathcal{B}$, elle est comprise entre le plus petit et le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$. Inversement, on a $\underset{\sim}{I}(B) = \tilde{I}(B) = B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, de sorte que $\underset{\sim}{I} \subset f \subset \tilde{I}$ entraine $f(B) = B$, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_f$.

Critère 7 - Soient f et g croissantes et idempotentes telles que $f \supset g$. Alors :

i/ $$f \supset f\,g\,f \supset \begin{matrix} gf \\ fg \end{matrix} \supset g\,f\,g \supset g$$

ii/ g f, f g, f g f et g f g sont croissantes et idempotentes, et :

$$f\,g\,f \in \mathfrak{I}d(f\,g) \quad ; \quad g\,f\,g \in \mathfrak{I}d(g\,f)$$

iii/ f g f est la plus petite idempotente majorant $g\,f \cup f\,g$,
g f g est la plus grande idempotente minorant g f et f g.

iv/ Les équivalences suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}d(f\,g) = \mathfrak{I}d(g\,f) &\Leftrightarrow f\,g\,f = g\,f \\ &\Leftrightarrow g\,f\,g = f\,g \\ &\Leftrightarrow f\,g \subset g\,f \end{aligned}$$

Les inégalités i/ sont immédiates. De

$$f \supset f\,g\,f \supset g\,f$$

on déduit, en multipliant à gauche par g :

$$g\,f \supset g\,f\,g\,f \supset g\,f$$

d'où $g\,f = g\,f\,g\,f$. De même $f\,g \supset g\,f\,g \supset g$ entraine, en multipliant par f : $f\,g \supset f\,g\,f\,g \supset f\,g$, d'où $f\,g = f\,g\,f\,g$. D'après le critère 1, les relations

$$f\,g\,f.f\,g = f\,g\,f\,g = f\,g$$

$$f\,g.f\,g\,f = f\,g\,f\,g.f = f\,g\,f$$

montrent ensuite $f\,g\,f \in \mathfrak{J}d(f\,g)$. On trouve de même $g\,f\,g \in \mathfrak{J}d(g\,f)$, d'où le point ii/.

$f\,g\,f$ est idempotente (ii/) et majore $f\,g \cup g\,f$ (i). Soit ϕ une idempotente croissante majorant $f\,g$ et $g\,f$

$$\phi \supset f\,g \qquad\qquad \phi \supset g\,f$$

On en déduit (s'agissant d'applications croissantes)

$$\phi = \phi\,\phi \supset f\,g.g\,f = f\,g\,f$$

Donc $f\,g\,f$ est bien la plus petite majorante c.i. de $f\,g \cup g\,f$.

Enfin, d'après ii/, on aura $\mathfrak{J}d(f\,g) = \mathfrak{J}d(g\,f)$ si et seulement si $f\,g\,f \in \mathfrak{J}d(g\,f)$. D'après le critère 1, cela équivaut à

$$f\,g\,f.g\,f = g\,f \quad \text{et} \quad g\,f.f\,g\,f = f\,g\,f$$

c'est-à-dire (compte tenu des idempotences établies ci-dessus) à la condition unique

$$f\,g\,f = g\,f$$

d'ailleurs elle-même équivalente à

$$g\,f\,g = f\,g$$

(comme on le voit en multipliant à droite par f ou par g).

Compte tenu de iii/, enfin, $f\,g\,f = g\,f$ équivaut à $g\,f \supset f\,g$, ce qui achève la démonstration.

<u>REMARQUE</u> - Noter que si $f = \varphi$ est une fermeture et $g = \gamma$ une ouverture, on a $\varphi \supset I \supset \gamma$, de sorte que l'idempotence de $\varphi\,\gamma$ et de $\gamma\,\varphi$ résulte du critère 7. Au fait que $\gamma\,\varphi$ est c.i.$\cup$ répond la circonstance plus générale suivante :

Si h est une application croissante quelconque telle que $g\,f \subset h \subset f$, alors

$$g\,f\,h = g\,f$$

Rn effet, en multipliant à gauche par $g\,f$ les inclusions ci-dessus, on trouve $g\,f\,g\,f = g\,f \subset g\,f\,h \subset g\,f\,f = g\,f$, d'où l'égalité. De même, si $f\,g \supset h \supset g$, on aura

$$f\,g\,h = f\,g$$

3 - STRUCTURE DU DOMAINE D'INVARIANCE $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ est une partie quelconque de $\mathcal{P}$, il n'est pas vrai en général qu'il existe des applications croissantes et idempotentes admettant $\mathcal{B}$ comme domaine d'invariance. Il convient donc de rechercher les conditions sous lesquelles $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ n'est pas vide.

Soit ϕ une application c.i., $\mathcal{B}_\phi = \mathcal{B}$ son domaine d'invariance, $\underset{\sim}{I}$ et $\tilde{I}$ l'ouverture et la fermeture associées à $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$. D'après le critère 6, nous avons déjà :

(3-1) $$\underset{\sim}{I} \subset \phi \subset \tilde{I}$$

et, comme $\mathcal{B}$ est contenu dans $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$, le critère 2 nous donne aussi :

(3-2) $$\underset{\sim}{I}\,\phi = \tilde{I}\,\phi = \phi$$

d'où aussi, d'après le critère 3

(3-3) $$\phi\,\underset{\sim}{I} \in \mathcal{J}d(\phi) \qquad \phi\,\tilde{I} \in \mathcal{J}d(\phi)$$

En fait, on a les égalités

$$\phi\,\underset{\sim}{I} = \tilde{I}\,\underset{\sim}{I} \;\; ; \;\; \phi\,\tilde{I} = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$$

En effet, $\psi \supset \underset{\sim}{I}$ entraine $\psi\, \tilde{I} \supset \underset{\sim}{I}\, \tilde{I}$. Mais $\tilde{I} \supset \psi$ entraine aussi $\underset{\sim}{I}\, \tilde{I} \supset \underset{\sim}{I}\, \psi = \psi$ d'après (3-2), et, en multipliant à droite par $\tilde{I}$: $\underset{\sim}{I}\, \tilde{I}\, \tilde{I} = \underset{\sim}{I}\, \tilde{I} \supset \psi\, \tilde{I}$, d'où l'égalité $\psi\, \tilde{I} = \underset{\sim}{I}\, \tilde{I}$. On démontre de même $\psi\, \underset{\sim}{I} = \tilde{I}\, \underset{\sim}{I}$. Noter que, d'après (3-2), $\tilde{I}\, \underset{\sim}{I}\, \tilde{I} = \tilde{I}\, \psi\, \tilde{I} = \psi\, \tilde{I}$, et de même $\underset{\sim}{I}\, \tilde{I}\, \underset{\sim}{I} = \psi\, \underset{\sim}{I}$. Nous poserons donc

$$(3\text{-}4) \qquad \begin{cases} \psi_m = \tilde{I}\, \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{I}\, \tilde{I}\, \underset{\sim}{I} = \psi\, \underset{\sim}{I} \\ \psi_M = \underset{\sim}{I}\, \tilde{I} = \tilde{I}\, \underset{\sim}{I}\, \tilde{I} = \psi\, \tilde{I} \end{cases}$$

et il vient les inégalités :

$$(3\text{-}5) \qquad \underset{\sim}{I} \subset \psi_m \subset \psi \subset \psi_M \subset \tilde{I}$$

On note, d'après (3-3), que ψ_m et ψ_M sont dans $\mathcal{J}d(\psi)$. Plus précisément, en remarquant que ces éléments ne dépendent que de $\underset{\sim}{I}$ et $\tilde{I}$, c'est-à-dire de $\mathcal{B}$ (et non du choix de l'élément particulier $\psi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$, pourvu toutefois que $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ ne soit pas vide), on voit que <u>ψ_m et ψ_M sont respectivement le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$</u>. Comme $\underset{\sim}{I}$ est une ouverture et $\tilde{I}$ une fermeture, on note aussi que <u>ψ_m est c.i.$\cap$, et ψ_M c.i.$\cup$.</u>

Il en résulte que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ est <u>complètement réticulé</u> (pour l'ordre induit par $\subset$) si $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ n'est pas vide.

En effet, soit $B_i \in \mathcal{B}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}$. On a évidemment $\cup B_i \in \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, soit $\cup B_i = \underset{\sim}{I}(\cup B_i)$, donc, d'après (3-4)

$$\psi(\cup B_i) = \psi\, \underset{\sim}{I}(\cup B_i) = \psi_m(\cup B_i) = \tilde{I}\, \underset{\sim}{I}(\cup B_i)$$

c'est-à-dire, puisque $\underset{\sim}{I}(\cup B_i) = \cup B_i$:

$$\tilde{I}(\cup B_i) = \psi(\cup B_i) \in \mathcal{B}$$

On trouve de la même manière :

$$\underset{\sim}{I}(\cap B_i) = \psi(\cap B_i) \in \mathcal{B}$$

Ainsi, la famille B_i admet un plus petit majorant dans $\mathcal{B}$, à savoir $\tilde{I}(\bigcup B_i) \in \mathcal{B}$, et un plus grand minorant dans $\mathcal{B}$, à savoir $\underset{\sim}{I}(\bigcap B_i) \in \mathcal{B}$.

Il se trouve que la réciproque est vraie. En effet, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ complètement réticulé pour l'ordre induit par $\subset$ (i.e. $\tilde{I}(\bigcup B_i)$ et $\underset{\sim}{I}(\bigcap B_i) \in \mathcal{B}$ pour toute famille B_i dans $\mathcal{B}$). Il faut montrer que $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ n'est pas vide.

Soit $A \in \mathcal{P}$. $\tilde{I}(A)$ est l'intersection de la famille des $B \in \mathcal{B}$ tels que $B \supset A$. Cette famille admet donc un plus grand minorant dans $\mathcal{B}$, puisque $\mathcal{B}$ est un treillis complet, soit $\underset{\sim}{I}\,\tilde{I}(A) \in \mathcal{B}$. Désignant par $\psi_M = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$ cette application c.i.$\bigcup$, nous avons donc

$$\mathcal{B}_{\psi_M} \subset \mathcal{B}$$

Mais, $\mathcal{B}$ étant contenu dans $\tilde{\mathcal{B}}$ et dans $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$, on a aussi $\tilde{I}(B) = \underset{\sim}{I}(B) = B$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, donc aussi $\psi_M(B) = B$. Par suite $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\psi_M}$. D'où l'égalité

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\psi_M}$$

qui montre que l'élément ψ_M est dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$. Ainsi :

<u>THEOREME 3</u> - Pour qu'il existe des applications croissantes et idempotentes admettant un sous-ensemble $\mathcal{B}$ donné de $\mathcal{P}$ comme domaine d'invariance, il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ soit complètement réticulé pour l'ordre induit par $\subset$, c'est-à-dire :

$$\tilde{I}(\bigcup B_i) \in \mathcal{B} \quad ; \quad \underset{\sim}{I}(\bigcap B_i) \in \mathcal{B}$$

pour toute famille dans $\mathcal{B}$.

<u>SCHOLIE 1</u> - Cette condition étant remplie, on a de plus

$$\tilde{I}(\bigcup B_i) = \psi(\bigcup B_i) \quad ; \quad \underset{\sim}{I}(\bigcap B_i) = \psi(\bigcap B_i)$$

pour tout $\psi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$. De plus $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ admet un plus petit élément ψ_m (qui est c.i.$\cap$) et un plus grand élément ψ_M (qui est c.i.$\cup$) donnés par

$$\begin{aligned} \psi_m &= \tilde{I}\,\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}\,\underset{\sim}{I} = \psi\,\underset{\sim}{I} \\ \psi_M &= \underset{\sim}{I}\,\tilde{I} = \tilde{I}\,\underset{\sim}{I}\,\tilde{I} = \psi\,\tilde{I} \end{aligned} \qquad (\forall\ \psi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}))$$

On a encore pour tout $\psi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$

$$\underset{\sim}{I}\,\psi = \tilde{I}\,\psi = \psi$$

et les inégalités

$$\underset{\sim}{I} \subset \psi_m \subset \psi \subset \psi_M \subset \tilde{I}$$

Notons maintenant que l'on a nécessairement :

$$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}$$

De fait, $\underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}} \supset \mathcal{B}$. Mais, inversement, tout $B \in \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}$ est invariant pour $\tilde{I}$ et $\underset{\sim}{I}$, donc pour $\psi_M = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$. Donc $\underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_{\psi_M} = \mathcal{B}$, et l'égalité.

Cette condition nécessaire (mais non suffisante) n'est d'ailleurs pas très stricte. En effet, soit $\mathcal{B}_0$ quelconque dans $\mathcal{P}$, et $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_0$ ($\tilde{\mathcal{B}}_0$) la famille stable pour $\cup$ (resp. pour $\cap$) engendrée par $\mathcal{B}_0$. Posons :

$$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}}_0 \cap \tilde{\mathcal{B}}_0$$

Alors, on a évidemment $\mathcal{B} \supset \mathcal{B}_0$ et $\underset{\sim}{\mathcal{B}} = \underset{\sim}{\mathcal{B}}_0$, $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}_0$, de sorte que $\mathcal{B}$ vérifie la condition

$$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}$$

En effet, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ entraine $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_0 \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, et $\mathcal{B} \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}_0$ donne $\underset{\sim}{\mathcal{B}} \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}_0$, d'où l'égalité $\underset{\sim}{\mathcal{B}} = \underset{\sim}{\mathcal{B}}_0$.

On peut alors présenter le théorème 3 sous une forme plus analytique :

<u>SCHOLIE 2</u> - Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{P}$. Pour que $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ ne soit pas vide, il est nécessaire que l'on ait :

(a) $$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{B}}$$

Cette condition étant remplie, les énoncés suivants sont équivalents :

i/ $\mathcal{J}d(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ (ou $\mathcal{B}$ est complètement réticulé)

ii/ $\underset{\sim}{I}(\widetilde{\mathcal{B}}) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$

iii/ $\tilde{I}(\underset{\sim}{\mathcal{B}}) \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}$

iv/ $\tilde{I}\,\underset{\sim}{I}\,\tilde{I} \subset \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$

v/ $\underset{\sim}{I}\,\tilde{I}\,\underset{\sim}{I} \supset \tilde{I}\,\underset{\sim}{I}$

En effet, la condition ii/, par exemple, exprime que l'élément (c.i.$\cup$) $\psi_M = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$ vérifie $\mathcal{B}_{\psi_M} \subset \widetilde{\mathcal{B}}$. Comme $\underset{\sim}{I}\,\tilde{I}(A) \in \underset{\sim}{\mathcal{B}}$ pour tout A, la condition ii/ équivaut à $\mathcal{B}_{\psi_M} \subset \widetilde{\mathcal{B}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{B}}$. Mais on a toujours $\widetilde{\mathcal{B}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}_{\psi_M}$. Ainsi, puisque $\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{B}}$ d'après (a), cette condition ii/ équivaut à $\mathcal{B}_{\psi_M} = \mathcal{B}$, i.e. $\psi_M \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$. De même, iii/ équivaut à $\psi_m = \tilde{I}\,\underset{\sim}{I} \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$. Comme $\tilde{I} \supset I$, iv/ est équivalent à $\tilde{I}\,\underset{\sim}{I}\,\tilde{I} = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$: cette condition exprime que, pour tout $A \in \mathcal{P}$, l'élément $\psi_M(A)$ est à la fois dans $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ et dans $\widetilde{\mathcal{B}}$ et équivaut donc à ii/ De même v/ équivaut à iii/.

<u>REMARQUE</u> - Soit $\mathcal{B}$ quelconque $\subset \mathcal{P}$. On peut toujours supposer

$$\mathcal{B} = \underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \widetilde{\mathcal{B}}$$

(quitte à remplacer $\mathcal{B}$ par cette intersection). Mais en général on n'aura pas $\underset{\sim}{I}(\widetilde{\mathcal{B}}) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$, et $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ sera vide. Mais considérons l'application c.i.$\cup$ ψ_1 définie en posant :

$$\psi_1 = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$$

Elle admet le domaine d'invariance $\mathcal{B}_1 = \underset{\sim}{I}(\tilde{\mathcal{B}})$ avec $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$. Soient $\underset{\sim}{I}_1$ et $\tilde{I}_1$ l'ouverture et la fermeture associées à $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_1$ et $\tilde{\mathcal{B}}_1$. On a donc

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 = \underset{\sim}{I}(\tilde{\mathcal{B}}) \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}$$

Il en résulte $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_1 = \underset{\sim}{\mathcal{B}}$, soit $\underset{\sim}{I}_1 = \underset{\sim}{I}$. Comme $\phi_1 \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}_1)$, on a aussi

$$\mathcal{B}_1 = \underset{\sim}{\mathcal{B}}_1 \cap \tilde{\mathcal{B}}_1$$

Mais, en général, l'inclusion $\tilde{\mathcal{B}} \subset \tilde{\mathcal{B}}_1$ (i.e. $\tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$) sera stricte. Pour que l'égalité $\tilde{I}_1 = \tilde{I}$ ait lieu, il faut, en effet, avoir $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, c'est-à-dire $\mathcal{J}d(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.

Comme $\underset{\sim}{I}_1 = \underset{\sim}{I}$, $\tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$, on voit que l'élément maximum de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_1)$, qui est $\underset{\sim}{I}_1 \tilde{I}_1$ vérifie

$$\underset{\sim}{I}_1 \tilde{I}_1 \subset \underset{\sim}{I} \tilde{I} = \phi_1$$

Mais, puisque $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{\phi_1}$ par construction, on a aussi $\phi_1 \subset \underset{\sim}{I}_1 \tilde{I}_1$ et donc l'égalité :

$$\phi_1 = \underset{\sim}{I}_1 \tilde{I}_1 = \underset{\sim}{I} \tilde{I}$$

Par contre, l'inégalité

$$\tilde{I}_1 \underset{\sim}{I}_1 \subset \tilde{I} \underset{\sim}{I}$$

sera stricte en général : pour que l'on ait l'égalité, il faut (et il suffit) que $\tilde{I} \underset{\sim}{I}$ et $\underset{\sim}{I} \tilde{I}$ aient le même domaine d'invariance, qui est alors nécessairement $\underset{\sim}{\mathcal{B}} \cap \tilde{\mathcal{B}}$, c'est-à-dire $\mathcal{B}$: l'égalité n'a donc lieu que si $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ n'est pas vide.

On aurait pu, évidemment, faire la construction en sens inverse, en partant de $\phi_2 = \tilde{I} \underset{\sim}{I}$, avec cette fois $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \tilde{\mathcal{B}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{B}} \subset \underset{\sim}{\mathcal{B}}_2$, soit $\tilde{I}_2 = \tilde{I}$ $\underset{\sim}{I} \subset \underset{\sim}{I}_2$. Cette fois, c'est l'élément minimal ,$\tilde{I}_2 \underset{\sim}{I}_2$ qui reste égal à $\tilde{I} \underset{\sim}{I}$, tandis que l'élément maximal $\underset{\sim}{I}_2 \tilde{I}^2$ est $\supset \underset{\sim}{I} \tilde{I}$.

4 - PLUS PETITE MAJORANTE C.I.$\bigcup$, PLUS GRANDE MINORANTE C.I.$\bigcap$

Soit ψ croissante et idempotente, $\mathcal{B}$ son domaine d'invariance. Nous voulons établir l'existence d'une plus petite majorante c.i.$\bigcup$ (p.p. M c.i.$\bigcup$) et d'une plus grande minorante c.i.$\bigcap$ (p.g.m c.i.$\bigcap$) de ψ. Partons de la remarque suivante :

Soit $A \in \mathcal{P}$. On aura $\psi(A) = \underset{\sim}{I}(A)$ si et seulement si $A \supset \psi(A)$. En effet, $\underset{\sim}{I}$ étant une ouverture, on a toujours $A \supset \underset{\sim}{I}(A)$, de sorte que $\psi(A) = \underset{\sim}{I}(A)$ entraine $A \supset \psi(A)$. Mais, en sens inverse, $A \supset \psi(A)$ entraine $\underset{\sim}{I}(A) \supset \underset{\sim}{I}\ \psi(A) = \psi(A)$ (car $\underset{\sim}{I}\ \psi = \psi$, Scholie 1). Mais $\psi(A) \supset \underset{\sim}{I}(A)$, d'après le même scholie, et donc $\underset{\sim}{I}(A) = \psi(A)$. De la même façon, $\psi(A) = \tilde{I}(A)$ si et seulement si $A \subset \psi(A)$.

Ceci conduit aux <u>définitions</u> suivantes :

<u>Domaines d'extensivité et d'anti-extensivité</u>.

Nous appellerons <u>domaine d'extensivité</u> de ψ le sous-ensemble $\check{\mathcal{B}}_\psi$ de $\mathcal{P}$ défini par

$$(4\text{-}1) \qquad \check{\mathcal{B}}_\psi = \{I \subset \psi\} = \{\tilde{I} = \psi\}$$

et <u>domaine d'anti-extensivité</u> de ψ le sous-ensemble $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ de $\mathcal{P}$ défini par :

$$(4\text{-}1') \qquad \hat{\mathcal{B}}_\psi = \{I \supset \psi\} = \{\underset{\sim}{I} = \psi\}$$

Le <u>domaine d'extensivité</u> $\check{\mathcal{B}}_\psi$ <u>est stable pour</u> $\bigcup$ <u>infini, et contient</u> $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$. De même $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ <u>est stable pour</u> $\bigcap$ <u>infini et contient</u> $\tilde{\mathcal{B}}$.

De fait, si $A_i \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$, i.e. $\psi(A_i) \subset A_i$, on a :

$$\psi(\bigcap A_i) \subset \bigcap \psi(A_i) \subset \bigcap A_i$$

et donc $\bigcap A_i \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$. Comme $A = \psi(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$, on a $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$, et donc $\tilde{\mathcal{B}} \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$. Même démonstration pour $\check{\mathcal{B}}_\psi$. Ainsi :

$$\underset{\sim}{\mathcal{B}} \subset \check{\mathcal{B}}_\psi \quad ; \quad \tilde{\mathcal{B}} \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$$

et ces inclusions sont, en général, strictes. Néanmoins :

$$\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}}_\psi \cap \check{\mathcal{B}}_\psi = \tilde{\mathcal{B}} \cap \underset{\sim}{\mathcal{B}}$$

(puisque $\psi(A) = A$ équivaut à $A \subset \psi(A)$ et $A \supset \psi(A)$).

Il est donc naturel d'introduire l'ouverture $\check{\psi}$ associée au domaine d'extensivité $\check{\mathcal{B}}_\psi$, puisque celui-ci est stable pour $\cup$, et de même la fermeture $\hat{\psi}$ associée au domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_\psi$:

$$\begin{cases} \check{\psi}(A) = \bigcup \{B : B \in \check{\mathcal{B}}_\psi \, , \, B \subset A\} \\ \hat{\psi}(A) = \bigcap \{B : B \in \hat{\mathcal{B}}_\psi \, ; \, B \supset A\} \end{cases}$$

En fait, $\hat{\psi}$ est la plus petite fermeture majorant ψ, et de même, $\check{\psi}$ est la plus grande ouverture minorant ψ.

En effet, soit, par exemple, φ une fermeture et $\mathcal{B}_\varphi$ son domaine d'invariance. L'équivalence :

$$\varphi \supset \hat{\psi} \Leftrightarrow \mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$$

est évidente. Or, supposons $\varphi \supset \psi$. Si $A \in \mathcal{B}_\varphi$, on a donc $A = \varphi(A) \supset \psi(A)$, et par suite $A \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$. Ainsi $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$. Inversement, supposons $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$. On a donc $I \supset \psi$ sur $\mathcal{B}_\varphi$, et par suite ψ est majorée par le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$ de la restriction de I à $\mathcal{B}_\varphi$, c'est-à-dire $\psi \subset \varphi$. Autrement dit, on a $\varphi \supset \psi$ sieet seulement si $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$, donc si et seulement si $\varphi \supset \hat{\psi}$. Par suite $\hat{\psi}$ est bien la plus petite fermeture majorant ψ. De la même façon, on montre que $\check{\psi}$ est la plus grande ouverture minorant ψ .

p.p.M c.i.$\cup$ et p.g.m c.i.$\cap$.

L'application $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ est c.i.$\cup$, puisque $\check{\psi}$ est une ouverture et $\hat{\psi}$ une fermeture, et de même $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ est c.i.$\cap$. On a d'ailleurs :

$$(4\text{-}2)\qquad \begin{cases} \check{\psi}\,\hat{\psi} = \underset{\sim}{I}\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi} \supset \psi \\ \hat{\psi}\,\check{\psi} = \tilde{I}\,\check{\psi} = \psi\,\check{\psi} \subset \psi \end{cases}$$

En effet, sur $\hat{\mathcal{B}}_{\psi}$, par exemple, on a $\psi = \underset{\sim}{I}$, d'après (4-1'). Comme $\psi \supset \check{\psi} \supset \underset{\sim}{I}$ (puisque $\check{\psi}$ est la plus grande ouverture minorant ψ) il en résulte $\psi = \check{\psi} = \underset{\sim}{I}$ sur $\hat{\mathcal{B}}_{\psi}$, et donc $\check{\psi}\,\hat{\psi} = \underset{\sim}{I}\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi}$.

Comme $\hat{\psi} \supset \psi$, il en résulte $\check{\psi}\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi} \supset \psi\,\psi = \psi$. Démonstration duale pour $\hat{\psi}\,\check{\psi}$.

Ces deux éléments sont dans $\mathcal{J}d(\psi)$:

$$(4\text{-}3)\qquad \check{\psi}\,\hat{\psi} \in \mathcal{J}d(\psi) \qquad \hat{\psi}\,\check{\psi} \in \mathcal{J}d(\psi)$$

En effet, $\mathcal{B}_{\psi} \subset \hat{\mathcal{B}}_{\psi}$ donne d'abord $\hat{\psi}\,\psi = \psi$, et $\mathcal{B}_{\psi} \subset \check{\mathcal{B}}_{\psi}$ donne $\check{\psi}\,\psi = \psi$. D'où :

$$\check{\psi}\,\hat{\psi}\,\psi = \check{\psi}\,\psi = \psi$$

Comme $\check{\psi}\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi}$, d'après (4-3), il vient ensuite :

$$\psi\,\check{\psi}\,\hat{\psi} = \psi\,\psi\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi} = \check{\psi}\,\hat{\psi}$$

Ainsi, les deux conditions du critère 1 sont remplies, et $\check{\psi}\,\hat{\psi} \in \mathcal{J}d(\psi)$.

Nous allons maintenant montrer que $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ est la p.p.M c.i.$\cup$ de ψ et $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ sa p.p.m c.i.$\cap$.

Il suffit de raisonner dans le cas de $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ (celui de $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ se traite par dualité). Nous savons déjà, d'après (4-2), que la c.i.$\cup$ $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ majore ψ.

Montrons d'abord que <u>ϕ est c.i.$\cup$ si et seulement si</u>

$$\phi = \check{\phi}\,\hat{\phi}$$

La condition est suffisante, puisque $\check{\phi}\,\hat{\phi}$ est c.i.$\cup$. Inversement, supposons ϕ c.i.$\cup$, soit :

$$\phi \circ (I \cup \phi) = \phi$$

On en déduit $(I \cup \phi)\circ(I \cup \phi) = (I \cup \phi) \cup \phi \circ (I \cup \phi) = I \cup \phi$.

Etant croissante, idempotente et $\supset I$, $I \cup \phi$ est alors une fermeture. Comme $\varphi \supset I \cup \phi$ pour toute fermeture majorant ϕ , $I \cup \phi$ est donc la plus petite fermeture majorant ϕ, soit :

$$I \cup \phi = \hat{\phi}$$

Mais, ϕ étant c.i.$\cup$, il en résulte :

$$\check{\phi}\,\hat{\phi} = \phi\,\hat{\phi} = \phi \circ (I \cup \phi) = \phi$$

ce qui constitue le résultat annoncé. Nous pouvons donc, au passage, énoncer le

<u>THEOREME 4-1</u> - Une application ϕ est c.i.$\cup$ (resp. c.i.$\cap$) si et seulement si elle est de la forme $\phi = \gamma\,\varphi$ (resp. $\phi = \varphi\,\gamma$) pour une ouverture γ et une fermeture ϕ.

Montrons maintenant que, dans le cas général, $\check{\phi}\,\hat{\phi}$ <u>est la plus petite majorante c.i.$\cup$ de ϕ.</u>

Soit, en effet, ϕ' une c.i.$\cup$. On a donc $\phi' = \check{\phi}'\,\hat{\phi}'$ d'après ce que l'on vient de voir. Si de plus $\phi' \supset \phi$, la plus petite fermeture majorant ϕ', qui est $\hat{\phi}'$, majore $\hat{\phi}$, et de même $\check{\phi}' \supset \check{\phi}$. Par suite :

$$\phi' = \check{\phi}'\,\hat{\phi}' \supset \check{\phi}\,\hat{\phi} \supset \phi$$

et $\check{\phi}\,\hat{\phi}$ est bien la p.p.M c.i.$\cup$ de ϕ.

En résumé :

<u>THEOREME 4-2</u> - Soit ψ croissante et idempotente. La plus petite fermeture $\hat{\psi}$ majorant ψ (resp. la plus grande ouverture $\check{\psi}$ minorant ψ) admet comme domaine d'invariance le domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ (resp. le domaine d'extensivité $\check{\mathcal{B}}_\psi$) de ψ. L'application $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ est la plus petite majorante c.i.$\cup$ de ψ, et $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ sa plus grande minorante c.i.$\cap$. De plus, $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ sont dans $\mathcal{J}d(\psi)$ et vérifient :

$$\check{\psi}\,\hat{\psi} = \underset{\sim}{I}\,\hat{\psi} = \psi\,\hat{\psi} \quad ; \quad \hat{\psi}\,\check{\psi} = \tilde{I}\,\check{\psi} = \psi\,\check{\psi}$$

Enfin, $\hat{\psi}$ et $\check{\psi}$ vérifient les relations :

$$\hat{\psi} = I \cup \check{\psi}\,\hat{\psi} \quad ; \quad \check{\psi} = I \cap \hat{\psi}\,\check{\psi}$$

Notons encore les relations suivantes :

$$(4\text{-}4) \qquad \begin{cases} \check{\psi}\,\hat{\psi}(A) = \cap\,\{\psi(B)\ ,\ B \in \hat{\mathcal{B}}_\psi\ ,\ B \supset A\} \\ \hat{\psi}\,\check{\psi}(A) = \cup\,\{\psi(B)\ ,\ B \in \check{\mathcal{B}}_\psi\ ,\ B \subset A\} \end{cases}$$

La première montre que la p.p.M c.i.$\cup$ $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ constitue <u>le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$ de la restriction de ψ à son domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_\psi$</u>. De même $\hat{\psi}\,\check{\psi}$ est <u>le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}$ de la restriction de ψ à $\check{\mathcal{B}}_\psi$</u>.

On démontre facilement la première d'entre elles, en remarquant que la famille des $B \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$ qui contiennent A admet un plus petit élément, qui est $\hat{\psi}(A)$. Par suite l'intersection des $\psi(B)$, B parcourant cette famille, coïncide avec $\psi\,\hat{\psi}(A) = \check{\psi}\,\hat{\psi}(A)$.

Comme $\check{\psi}\,\hat{\psi}$ est c.i.$\cup$, soit $\check{\psi}\,\hat{\psi}\,o(I \cup \check{\psi}\,\hat{\psi}) = \check{\psi}\,\hat{\psi}$, on a encore :

$$\check{\psi}\,\hat{\psi}\,h = \check{\psi}\,\hat{\psi}$$

pour toute application croissante h telle que $I \subset h \subset I \cup \check{\psi}\,\hat{\psi} = \hat{\psi}$, et de même $\hat{\psi}\,\check{\psi}\,h' = \hat{\psi}\,\check{\psi}$ pour $I \supset h' \supset I \cap \hat{\psi}\,\check{\psi} = \check{\psi}$. En particulier, avec $h = I \cup \psi$ et $h' = I \cap \psi$:

$$(4\text{-}5) \qquad \begin{cases} \psi\,\hat{\psi}\; o(I \cup \psi) = \psi\,\hat{\psi} \\ \psi\,\check{\psi}\; o(I \cap \psi) = \psi\,\check{\psi} \end{cases}$$

<u>Domaines de $\cup$ et de $\cap$-propreté.</u>

On peut définir le <u>domaine de $\cup$-propreté</u> de ψ comme l'ensemble des $A \in \mathcal{P}$ pour lesquels $\psi(A) = \psi(A \cup \psi(A))$, et de même son <u>domaine de $\cap$-propreté</u> comme l'ensemble $\{\psi = \psi\; o(I \cap \psi)\}$. Ces domaines vérifient la propriété suivante :

$$(4\text{-}6) \qquad \begin{cases} \{\psi = \psi\; o(I \cup \psi)\} \;=\; \{\psi = \psi\,\hat{\psi}\} \supset \hat{\mathcal{B}}_\psi \cup \check{\mathcal{B}}_\psi \\ \{\psi = \psi\; o(I \cap \psi)\} \;=\; \{\psi = \psi\,\check{\psi}\} \supset \hat{\mathcal{B}}_\psi \cup \check{\mathcal{B}}_\psi \end{cases}$$

En effet, de $\psi \subset I \cup \psi \subset \hat{\psi}$ résulte que $\psi(A) = \psi\,\hat{\psi}(A)$ entraine $\psi(A) = \psi(A \cup \psi(A))$, soit $\{\psi = \psi\,\hat{\psi}\} \subset \{\psi = \psi\; o(I \cup \psi)\}$. Inversement, si $\psi(A) = \psi(A \cup \psi(A))$, on a $A \cup \psi(A) \supset \psi(A) = \psi(A \cup \psi(A))$, et donc $A \cup \psi(A) \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$, donc $\hat{\psi}(A \cup \psi(A)) = A \cup \psi(A)) = A \cup \psi(A)$ et par suite $\psi\,\hat{\psi}(A \cup \psi(A)) = \psi(A \cup \psi(A)) = \psi(A)$. D'après (4-5), cela entraine $\psi\,\hat{\psi}(A) = \psi(A)$, et $\{\psi = \psi\; o(I \cup \psi)\} \subset \{\psi = \psi\,\hat{\psi}\}$. D'où l'égalité.

Comme on a $\hat{\psi} = I$ sur $\hat{\mathcal{B}}_\psi$, l'inclusion $\hat{\mathcal{B}}_\psi \subset \{\psi = \psi\,\hat{\psi}\}$ est immédiate. Si $A \in \check{\mathcal{B}}_\psi$, soit $A = \check{\psi}(A)$, on a d'une part $\psi(A) = \psi\,\check{\psi}(A)$, d'autre part $\psi\,\hat{\psi}(A) = \psi.\hat{\psi}\,\check{\psi}(A)$. Mais $\psi.\hat{\psi}\,\check{\psi} = \hat{\psi}\,\check{\psi} = \psi\,\check{\psi}$, puisque $\hat{\psi}\,\check{\psi} \in \mathcal{I}d(\psi)$ (critère 1), donc $\psi\,\hat{\psi}(A) = \psi\,\check{\psi}(A) = \psi(A)$, de sorte que $\{\psi = \psi\,\hat{\psi}\}$ contient aussi le domaine d'extensivité $\check{\mathcal{B}}_\psi$.

<u>Les applications à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.</u>

Venons-en maintenant à un autre résultat important. Partant d'une idempotente ψ, nous pouvons former sa p.p.M c.i.$\cup$ $\psi_1 = \check{\psi}\,\hat{\psi}$.

Comme ϕ_1 majore ϕ, l'inégalité $\hat{\phi} \supset \phi_1$ montre que $\hat{\phi}$ est encore la plus petite fermeture majorant ϕ_1 , soit $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}$. Par contre, l'inclusion $\check{\phi} \subset \check{\phi}_1$ est en général stricte, de sorte que la p.g. m c.i.$\cap$ de ϕ_1 , qui est $\phi_2 = \hat{\phi}_1 \check{\phi}_1$ majore la p.g.m c.i.$\cap$ $\hat{\phi}\check{\phi}$ de ϕ. On peut ensuite former la p.p.M c.i.$\cup$ $\phi_3 = \check{\phi}_2 \hat{\phi}_2$ de ϕ_2 , et ainsi de suite à l'infini. En réalité, le processus se bloque dès la seconde étape, et l'on a $\phi_3 = \phi_2$. En effet, nous allons voir que la p.g.m c.i.$\cap$ d'une c.i.$\cup$ est à la fois c.i.$\cap$ et c.i.$\cup$, et de même la p.p.M c.i.$\cup$ d'une c.i.$\cap$ est à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.

Pour démontrer cela, posons un lemme, valable seulement si le treillis $\mathcal{P}$ est distributif.

LEMME 4-1 - Lorsque le treillis $\mathcal{P}$ est distributif, si ϕ est c.i.$\cup$, $\phi\, o(I \cap \phi)$ est encore c.i.$\cup$ et appartient à $\mathcal{J}d(\phi)$. Si ϕ est c.i.$\cap$, $\phi\, o(I \cup \phi)$ est encore c.i.$\cap$ et appartient à $\mathcal{J}d(\phi)$.

Montrons, par exemple, le premier énoncé. Comme $(I \cap \phi)o\,\phi = \phi$, le critère 3 montre $\phi\, o(I \cap \phi) \in \mathcal{J}d(\phi)$. Posons

$$h = \phi\, o(I \cap \phi)$$

Il faut montrer $h = h\, o(I \cup h)$, dès que ϕ est c.i.$\cup$. Explicitement, on a

$$h\, o\, I \cup h = \phi\, [(I \cup \phi\, o(I \cap \phi)) \cap \phi\, (I \cup \phi\, o(I \cap \phi))]$$

Or, les inégalités $I \subset I \cup \phi\, o(I \cap \phi) \subset I \cup \phi$ donnent :

$$\phi \subset \phi\, o(I \cup \phi\, o(I \cap \phi)) \subset \phi(I \cup \phi)$$

Comme ϕ est c.i.$\cup$, on a en fait $\phi = \phi(I \cup \phi)$ et par suite l'égalité :

$$\phi\, (I \cup \phi\, o(I \cap \phi)) = \phi$$

D'où une première simplification dans l'expression de $h\, o(I \cup h)$, qui devient :

$$h\ o(I \cup h) = \phi\ [\phi \cap (I \cup \phi\ o(I \cap \phi))]$$

Utilisant maintenant l'hypothèse que le treillis $\mathcal{P}$ est distributif, nous pouvons écrire :

$$\phi \cap (I \cup \phi\ o(I \cap \phi)) = (I \cap \phi) \cup (\phi \cap \phi\ o(I \cap \phi))$$

Comme $\phi\ o(I \cap \phi)$ est dans ϕ, il vient :

$$\phi \cap (I \cup \phi\ o(I \cap \phi)) = (I \cap \phi) \cup \phi\ o(I \cap \phi) = (I \cup \phi)\ o(I \cap \phi)$$

Ainsi :

$$h\ o(I \cup h) = \phi\ o(I \cup \phi)\ o\ (I \cap \phi)$$

Mais, ϕ étant c.i.$\cup$, on a $\phi\ o(I \cup \phi) = \phi$. Donc :

$$h\ o(I \cup h) = \phi\ o(I \cap \phi) = h$$

Par suite, h est c.i.$\cup$.

Venons-en au résultat principal :

THEOREME 4-3 - Lorsque le treillis $\mathcal{P}$ est distributif, la plus petite majorante c.i.$\cup$ d'une application c.i.$\cap$, ainsi que la plus grande minorante c.i.$\cap$ d'une application c.i.$\cup$ sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.

En effet, soit par exemple ϕ c.i.$\cap$ et $\phi\ \hat{\Phi}$ sa plus petite majorante c.i.$\cup$. Posons

$$h = \phi\ \hat{\Phi}\ o(I \cap \phi\ \hat{\Phi})$$

de sorte que h est encore c.i. $\cup$ d'après le lemme 4-1. Comme $\phi\ \hat{\Phi}$ majore ϕ, qui est c.i.$\cap$ par hypothèse, on a les inégalités

$$h \supset \phi\ \hat{\Phi}\ o(I \cap \phi) \supset \phi\ o(I \cap \phi) = \phi$$

Comme h est c.i.$\cup$, h $\supset \phi$ entraine ensuite que h majore la p.p.M c.i.$\cup$ de ϕ, soit h $\supset \phi\,\hat{\Phi}$. Mais l'inclusion inverse est évidente. On a donc l'égalité

$$h = \phi\,\hat{\Phi}$$

Ainsi $\phi\,\hat{\Phi} = \phi\,\hat{\Phi}\, o(I \cap \phi\,\hat{\Phi})$, ce qui signifie que $\phi\,\hat{\Phi}$ est c.i.$\cap$.

<u>REMARQUE</u> - La distributivité du treillis $\mathcal{P}$ joue un rôle essentiel dans la démonstration du lemme, et donc du théorème 4-3. Mais dans la plupart des applications, le treillis $\mathcal{P}$ est effectivement distributif. C'est, évidemment, le cas pour $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, ou encore lorsque, au lieu de $\mathcal{P}(E)$, on prend un espace $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ ou $\widetilde{\mathcal{K}}$ (espaces des fermés, des ouverts et compactifié de l'espace $\mathcal{K}$ des compacts d'un espace topologique E), puisque ces espaces sont stables pour la réunion et l'intersection finies. Le treillis $\mathcal{P}$ est encore distributif lorsqu'il s'agit de l'espace de toutes les fonctions, ou bien des fonctions s.c.s., ou des fonctions s.c.i. (on le voit en raisonnant sur les surgraphes de ces fonctions).

<u>Les représentations $\phi = \gamma\,\varphi$ d'une c.i.$\cup$.</u>

D'après le théorème 4-1, ϕ est c.i.$\cup$ si et seulement si elle admet une représentation $\phi = \gamma\,\varphi$ pour une ouverture γ et une fermeture φ. Mais cette représentation n'est certainement pas unique. On a déjà noté, par exemple, que l'on a $\phi = \check{\Phi}\,\hat{\Phi} = \underset{\sim}{I}\,\hat{\Phi}$.

En fait, pour ϕ c.i.$\cup$ donnée, la classe des ouvertures γ telles que l'on ait $\phi = \gamma\varphi$ pour une fermeture φ ne dépend pas de cette fermeture φ (qui peut, ou non, coïncider avec $\hat{\Phi}$). Plus précisément :

> Soit ϕ c.i.$\cup$, et γ une ouverture. Pour qu'il existe une fermeture φ telle que $\phi = \gamma\,\varphi$, il faut et il suffit que l'on ait :
>
> $$\underset{\sim}{I} \subset \gamma \subset \check{\Phi}$$

La condition est suffisante : si $\underset{\sim}{I} \subset \gamma \subset \check{\psi}$, on a $\underset{\sim}{I}\, \hat{\psi} \subset \gamma\, \hat{\psi} \subset \check{\psi}\, \hat{\psi}$. Mais, ψ étant c.i.$\cup$, $\psi = \check{\psi}\, \hat{\psi} = \underset{\sim}{I}\, \hat{\psi}$, et par suite $\psi = \gamma\, \varphi$ pour la fermeture $\varphi = \hat{\psi}$.

Inversement, supposons $\psi = \gamma\, \varphi$. Cela implique

$$\mathcal{B}_\psi = \gamma(\mathcal{B}_\varphi) \subset \mathcal{B}_\gamma$$

et donc $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_\psi \subset \mathcal{B}_\gamma$, soit $\underset{\sim}{I} \subset \gamma$. D'autre part $\varphi \supset I$ donne $\psi = \gamma\, \varphi \supset \gamma$, et par suite $\check{\psi} \supset \gamma$. D'où la conclusion.

En ce qui concerne φ, de $\gamma \subset I$ on déduit $\psi = \gamma\, \varphi \subset \varphi$, et donc :

$$\varphi \supset \hat{\psi}$$

Mais il n'existe pas de limite supérieure unique pour φ. Par contre, en sens inverse, étant données une ouverture γ et une fermeture φ, on peut facilement reconstituer le domaine d'invariance $\mathcal{B}_\psi$ et le domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ de $\psi = \gamma\, \varphi$.

Il est clair d'abord que $\mathcal{B}_\psi$ est l'image de $\mathcal{B}_\varphi$ par γ :

$$\mathcal{B}_\psi = \gamma(\mathcal{B}_\varphi) \subset \mathcal{B}_\gamma$$

Quant au domaine d'anti-extensivité, $\hat{\mathcal{B}}_\psi$, il contient $\mathcal{B}_\varphi$:

$$\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$$

puisque φ majore $\hat{\psi}$. Plus précisément, on trouve :

(4-7) $$\hat{\mathcal{B}}_\psi = \{\gamma = \psi\} = \{A : \exists\, B \in \mathcal{B}_\varphi \,,\ \gamma(B) \subset A \subset B\}$$

En effet, $\gamma\, \varphi(A) \subset A$ équivaut à $\gamma\, \varphi(A) \subset \gamma(A)$, donc aussi à $\gamma\, \varphi(A) = \gamma(A)$ (puisque $\gamma \subset \gamma\, \varphi$). Par suite :

$$\hat{\mathcal{B}}_\psi = \{\gamma = \psi\}$$

Maintenant $\gamma\, \varphi(A) \subset A$ donne $\gamma(B) \subset A \subset B$ avec $B = \varphi(A) \in \mathcal{B}_\varphi$.

En sens inverse, si $\gamma(B) \subset A \subset B$ pour un $B \in \mathcal{B}_\varphi$, on en déduit $\gamma(B) \subset \varphi(A) \subset \varphi(B) = B$, puis $\gamma(B) \subset \gamma\ \varphi(A) = \psi(A) \subset \gamma(B)$. On a donc $\gamma\ \varphi(A) = \gamma(B)$. Mais $\gamma(B) \subset A \subset B$ donne aussi $\gamma(B) = \gamma(A)$. Donc $\psi(A) \subset A$ et $A \in \hat{\mathcal{B}}_\psi$. D'où la seconde relation (4-7).

On a évidemment, par dualité, des résultats semblables, qu'il est inutile d'expliciter, dans le cas d'une c.i.$\cap$ $\psi = \varphi\ \gamma$.

<u>5 - LE TREILLIS COMPLET DES IDEMPOTENTES</u>.

Les résultats obtenus ci-dessus se comprennent mieux lorsque l'on sait que l'ensemble des applications croissantes et idempotentes sur un treillis complet $\mathcal{P}$ est lui-même complètement réticulé, ainsi d'ailleurs que l'ensemble des c.i.$\cup$ et l'ensemble des c.i.$\cap$.

Pour établir simplement ces résultats, il est commode d'introduire la notion d'application surpotente ou sous-potente. Une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ sera dite <u>surpotente</u> si

$$f\ f \supset f$$

et <u>sous-potente</u> si

$$f\ f \subset f$$

L'ensemble des applications croissantes et <u>surpotentes</u> est <u>stable pour $\cup$ infini</u> et <u>pour l'autocomposition</u> . De même, l'ensemble des applications croissantes et <u>sous-potentes est stable pour $\cap$ infini et pour l'autocomposition</u>.

En effet, soit f_i une famille de surpotentes croissantes. Posons $f = \cup f_i$. On a $f \supset f_i$, et donc $f\ f \supset f_i\ f_i \supset f_i$ pour chaque indice i. Par suite $f\ f \supset \cup f_i = f$, et f est surpotente (et, évidemment, croissante). Comme $f\ f \supset f$ entraine $f\ f.f\ f \supset f\ f$, l'autocomposée f f d'une surpotente f est elle-même surpotente.

Dans ces conditions, toute famille f_i de surpotentes admet une plus petite majorante idempotente, et de même toute famille f_i de sous-potentes admet une plus grande minorante idempotente.

Considérons, en effet, une famille f_i de surpotentes, et la classe $\mathcal{C}$ des sous-potentes g telles que $g \supset \bigcup f_i$. Cette classe $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection (car pour toute famille g_j dans $\mathcal{C}$, $\bigcap g_j$ majore chaque f_i et est elle-même souspotente) et pour l'autocomposition (car $g \supset f_i$ entraine $g\, g \supset f_i\, f_i \supset f_i$ pour chacune des surpotentes f_i, et d'autre part $g\, g$ est encore sous-potente). Posant $g_o = \bigcap \{g,\ g \in \mathcal{C}\}$, on a donc encore $g_o \in \mathcal{C}$. Cet élément g_o est ainsi la plus petite majorante sous-potente de $\bigcup f_i$.

Mais en fait g_o est idempotente. En effet, $g_o\, g_o \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est stable pour l'autocomposition, et $g_o\, g_o \subset g_o$, puisque g_o est sous-potente. Comme g_o est le plus petit élément de $\mathcal{C}$, on a aussi $g_o\, g_o \supset g_o$ et par suite l'égalité $g_o\, g_o = g_o$.

On peut encore raisonner comme suit. Désignons par $\mathcal{C}'$ la classe de surpotentes stable pour $\bigcup$ et l'autocomposition engendrée par les f_i (ou simplement par $f = \bigcup f_i$) - c'est-à-dire l'intersection de toutes les classes stables pour $\bigcup$ et l'autocomposition contenant les f_i (ou simplement f). Les éléments de $\mathcal{C}'$ sont majorés par les éléments de $\mathcal{C}$, et en particulier par le plus petit élément de $\mathcal{C}$, qui est l'idempotente g_o. En effet, la classe des surpotentes majorées par g_o est elle-même stable pour la réunion et l'autocomposition, et contient les f_i(et f), donc contient $\mathcal{C}'$. Par suite, le plus grand élément de $\mathcal{C}'$, qui est

$$f_o = \bigcup \{h,\ h \in \mathcal{C}'\}$$

est lui-même dans $\mathcal{C}'$, d'où $f_o \subset g_o$. Etant dans $\mathcal{C}'$, f_o vérifie $f_o\, f_o \supset f_o$ (puisque f_o est surpotente) et $f_o\, f_o \in \mathcal{C}'$ (car $\mathcal{C}'$ est stable pour l'autocomposition). Mais $f_o\, f_o \subset f_o$ (puisque f_o est le plus grand élément de $\mathcal{C}'$). Donc f_o est idempotente. Comme $f = \bigcup f_i$ appartient à $\mathcal{C}'$, on a aussi $f \subset f_o$. Mais alors f_o est également dans $\mathcal{C}$ (elle est idempotente, donc sous-potente, et majore $f = \bigcup f_i$). Donc $f_o \supset g_o$. Comme on a aussi $f_o \subset g_o$, il en résulte $f_o = g_o$.

Ce résultat s'applique, en particulier, dans le cas où les f_i sont idempotentes (donc surpotentes). Nous conviendrons de désigner par $\vee f_i$ la plus petite idempotente majorant les f_i . Par dualité, on établit de même l'existence de la plus grande idempotente $\wedge f_i$ minorant les f_i :

THEOREME 5-1 - L'ensemble des idempotentes est complètement réticulé. Pour toute famille ϕ_i d'idempotentes, l'idempotente $\vee \phi_i$ est la plus petite sous-potente majorant les ϕ_i. C'est aussi le plus grand élément de la classe de surpotentes stable pour $\bigcup$ et l'autocomposition engendrée par $\bigcup \phi_i$. On a un énoncé dual pour $\wedge \phi_i$.

COROLLAIRE 1 - L'ensemble des c.i.$\bigcup$ et l'ensemble des c.i.$\bigcap$ sont complètement réticulés.

Pour le démontrer, on peut refaire le raisonnement ci-dessus, en se limitant aux majorantes croissantes,,sous-potentes et propres pour l'union (classe stable pour $\bigcap$). Il est plus simple d'utiliser les résultats antérieurs : si les ϕ_i sont c.i.$\bigcup$, elles admettent une plus petite majorante c.i.$\bigcup$: à savoir la plus petite majorante c.i.$\bigcup$ de $\vee \phi_i$. De même, $\wedge \phi_i = \phi$ admet une plus petite majorante c.i.$\bigcup$, qui est $\phi\, \hat{\Phi}$. Comme chaque ϕ_i est c.i.$\bigcup$, $\phi \subset \phi_i$ entraine $\phi\, \hat{\Phi} \subset \phi_i$. On a donc $\phi\, \hat{\Phi} \subset \wedge \phi_i$, c'est-à-dire l'égalité $\wedge \phi_i = \phi\, \hat{\Phi}$/ Ainsi, les c.i.$\bigcup$ forment un treillis complet, et nous avons même démontré un résultat plus fort, à savoir :

COROLLAIRE 2 - Pour toute famille de c.i.$\bigcup$ ϕ_i , $\wedge \phi_i$ est encore c.i.$\bigcup$. De même $\vee \phi_i$ est c.i.$\bigcap$ pour toute famille de c.i.$\bigcap$.

Mentionnons encore un résultat :

COROLLAIRE 3 - Si $\mathcal{P}$ est un treillis distributif, la plus petite majorante c.i.$\bigcup$ d'une famille de c.i.$\bigcap$ est à la fois c.i.$\bigcup$ et c.i.$\bigcap$. Même énoncé pour la plus grande minorante c.i.$\bigcap$ d'une famille de c.i.$\bigcup$.

En effet, si les ϕ_i sont c.i.$\cap$, $\vee\, \phi_i$ est encore c.i.$\cap$, d'après le corollaire 2 : la plus petite majorante c.i.$\cup$ des ϕ_i , qui coïncide évidemment avec la p.p.M c.i.$\cup$ de la c.i.$\cap$ $\vee\, \phi_i$ est donc à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ (théorème 4-3).

<u>Fermeture c.i.$\cup$, ouverture c.i.$\cap$.</u>

Sur le treillis complet des idempotentes, l'application F définie en posant $F\,\phi = \phi\,\hat{\phi}$ (p.p.M c.i.$\cup$ de ϕ) est croissante ($\phi \subset \phi' \Rightarrow F\,\phi \subset F\,\phi'$) extensive ($\phi \subset F\,\phi$) et idempotente ($F\,F\,\phi =$ $= F\,\phi$). C'est donc une <u>fermeture</u>, que nous appellerons <u>fermeture c.i.$\cup$.</u> De même, l'application G : $G\,\phi = \phi\,\check{\phi}$ est une ouverture sur le treillis complet des idempotentes, à savoir <u>l'ouverture c.i.$\cap$.</u> La famille des invariants de F (les c.i.$\cup$) est donc stable pour $\wedge$, et celle des invariants de G (les c.i.$\cap$) est stable pour $\vee$ (cf. le corollaire 2).

Utilisant le critère 7, nous voyons que F, F G, F G F etc... sont encore des idempotentes (sur le treillis des idempotentes) et :

$$F \supset F\,G\,F \supset {\begin{matrix} F\,G \\ G\,F \end{matrix}} \supset G\,F\,G \supset F$$

G F est d'ailleurs c.i.$\vee$, et F G c.i.$\wedge$ (puisque G est une ouverture, et F une fermeture) c'est-à-dire :

$$G\,F\,(\phi \vee G\,F\,\phi) = G\,F\,\phi$$

$$F\,G\,(\phi \wedge F\,G\,\phi) = F\,G\,\phi$$

($G\,F\,\phi$ représente la p.p.m c.i.$\cap$ de la p.p.M c.i.$\cup$ de ϕ).

D'après le théorème 4-3, on a d'ailleurs ici (pourvu que $\mathcal{P}$ soit distributif) :

$$F\,G\,F = G\,F \quad ; \quad G\,F\,G = G\,F$$

Nous reportant au critère 7, nous voyons que les quatre idempotentes FG, GF, FGF et GFG admettent le même domaine d'invariance, qui est ici simplement constitué par la famille des ψ à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.

Etude de $\vee\ \psi_i$.

Soit ψ_i une famille d'idempotentes, et $\psi = \vee\ \psi_i$ sa plus petite majorante idempotente. Proposons-nous d'étudier les domaines $\mathcal{B}_\psi$ d'invariance, $\hat{\mathcal{B}}_\psi$ d'anti-extensivité et $\check{\mathcal{B}}_\psi$ d'extensivité de ψ .

Soit $\hat{\psi}$ la plus petite fermeture majorant ψ. De $\hat{\psi} \supset \psi \supset \psi_i$ résulte $\hat{\psi} \supset \hat{\psi}_i$, donc $\hat{\psi} \supset \vee\ \hat{\psi}_i$. En fait, on a l'égalité. En effet, pour toute fermeture φ, $\varphi \supset \psi$ équivaut à $\varphi \supset \psi_i\ \ \forall\ i$, donc aussi à $\varphi \supset \hat{\psi}_i$, $\forall$ i, soit $\varphi \supset \vee\ \hat{\psi}_i$. On a donc

$$\hat{\psi} = \vee\ \hat{\psi}_i$$

ce qui est équivalent à :

(5-1) $$\hat{\mathcal{B}}_\psi = \cap\ \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}$$

(en effet, une fermeture φ majore une fermeture φ_i si et seulement si $\mathcal{B}_\varphi \subset \mathcal{B}_{\varphi_i}$. Donc φ majore $\cup\ \varphi_i$ si et seulement si $\mathcal{B}_\varphi \subset \cap\ \mathcal{B}_{\varphi_i}$: la plus petite fermeture majorant $\cup\ \varphi_i$, c'est-à-dire $\vee\ \varphi_i$ admet donc $\cap\ \mathcal{B}_{\varphi_i}$ comme domaine d'invariance).

Pour le domaine d'extensivité, on trouve seulement :

$$\underbrace{\cup\ \check{\mathcal{B}}_{\psi_i}} \subset \check{\mathcal{B}}_\psi \quad , \quad \text{soit} \quad \vee\ \check{\psi}_i \subset \check{\psi}$$

En effet, $A \subset \psi_{i_o}(A)$ pour un indice i_o entraine $A \subset \cup\ \psi_i(A) \subset \psi(A)$, et pour le <u>domaine d'invariance</u>

(5-3) $$\mathcal{B}_\psi \supset \cap\ \mathcal{B}_{\psi_i}$$

(car $\mathcal{B}_\psi = \hat{\mathcal{B}}_\psi \cap \check{\mathcal{B}}_\psi \supset (\cap \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}) \cap (\cup \check{\mathcal{B}}_{\psi_j}) \supset \cap (\hat{\mathcal{B}}_{\psi_i} \cap \check{\mathcal{B}}_{\psi_i}) = \cap \mathcal{B}_{\psi_i}$).

En fait, on peut caractériser beaucoup mieux $\mathcal{B}_\psi$. Pour le voir, désignons par γ la plus petite ouverture majorant les $\check{\psi}_i$, soit :

$$\gamma = \cup \check{\psi}_i \equiv \vee \check{\psi}_i \subset \check{\psi}$$

On a donc :

$$\gamma \hat{\psi} \subset \check{\psi} \hat{\psi}$$

Mais $\hat{\psi} = \vee \hat{\psi}_i \supset \cup \hat{\psi}_i$, et donc :

$$\gamma \hat{\psi} \supset (\cup \check{\psi}_i) \circ (\cup \hat{\psi}_j) \supset \cup \check{\psi}_i \hat{\psi}_i \supset \cup \psi_i$$

ce qui entraine

$$\gamma \hat{\psi} \supset \vee \psi_i = \psi$$

Ainsi, $\psi \subset \gamma \hat{\psi} \subset \check{\psi} \hat{\psi}$. Mais, $\gamma \hat{\psi}$ étant c.i.$\cup$, cela implique que $\gamma \hat{\psi}$ coïncide avec la p.p.M c.i.$\cup$ de ψ, soit

$$\gamma \hat{\psi} = \check{\psi} \hat{\psi} \tag{5-4}$$

Il en résulte que l'on a $\gamma = \cup \check{\psi}_i = \psi$ sur $\hat{\mathcal{B}}_\psi = \cap \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}$, donc aussi $\gamma = \cup \psi_i$ (puisque $\psi_i = \check{\psi}_i$ sur $\hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}$). Comme $\check{\psi} \hat{\psi} =$ $= \gamma \hat{\psi}$ et ψ elle-même admettent le même domaine d'invariance $\mathcal{B}_\psi$, il en résulte :

$$\mathcal{B}_\psi = \gamma(\hat{\mathcal{B}}_\psi) = \{ \cup \psi_i(B) \ , \ B \in \cap \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i} \} \tag{5-5}$$

Pour obtenir une seconde caractérisation de $\mathcal{B}_\psi$, nous utiliserons le lemme suivant :

<u>LEMME 5-1</u> - Si $\psi = \vee \psi_i$, on a les égalités :

$$\psi = (\cup \psi_i) \circ \psi = \psi \circ (\cup \psi_i)$$

En effet, on vient de voir que l'on a $\psi = \bigcup \psi_i$ sur $\hat{\mathcal{B}}_\psi$. Comme $\mathcal{B}_\psi \subset \hat{\mathcal{B}}_\psi$, il en résulte

$$\psi = (\bigcup \psi_i) \circ \psi$$

On en déduit (critère 3) $\psi\, o(\bigcup \psi_i) \in \mathcal{I}d(\psi)$, donc en particulier $\psi\, o(\bigcup \psi_i)$ est <u>idempotente</u>. Les inclusions :

$$\psi = \psi\,\psi \supset \psi\, o(\bigcup \psi_i) \supset \bigcup \psi_j \circ \bigcup \psi_\eta \supset \bigcup \psi_i\, \psi_i = \bigcup \psi_i$$

entrainent donc (puisque $\psi\, o(\bigcup \psi_i)$ est idempotente)

$$\psi \supset \psi\, o(\bigcup \psi_i) \supset \vee\, \psi_i = \psi$$

et par suite l'égalité :

$$\psi = \psi\, o(\bigcup \psi_i)$$

Ce lemme posé,montrons que <u>ψ et $\bigcup \psi_i$ ont le même domaine d'invariance</u>, soit :

(5-6) $$\mathcal{B}_\psi = \{B : B = \bigcup \psi_i(B)\}$$

En effet, soit $B \in \mathcal{B}_\psi$, c'est-à-dire $\psi(B) = B$. La relation $\psi = (\bigcup \psi_i) \circ \psi$ (lemme 5-1) donne alors $\psi(B) = \bigcup \psi_i(B)$.

Inversement, supposons $B = \bigcup \psi_i(B)$. On a $B \supset \psi_i(B)$, donc $B \in \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}$ pour chaque indice i, soit $B \in \bigcap \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i}$, et $B = \bigcup \psi_i(B)$. D'après (5-5), cela entraine $B \in \mathcal{B}_\psi$, ce qui achève la démonstration. Enonçons :

<u>THEOREME 5-2</u> - Soit $\psi = \vee\, \psi_i$ pour une famille d'idempotentes ψ_i.

Alors :

$$\hat{\mathcal{B}}_\psi = \bigcap \hat{\mathcal{B}}_{\psi_i} \quad , \quad \hat{\psi} = \vee\, \hat{\psi}_i$$

$$\check{\mathcal{B}}_\psi \supset \bigcup \check{\mathcal{B}}_{\psi_i} \quad , \quad \check{\psi} \supset \bigcup \check{\psi}_i$$

$$\mathcal{B}_\psi = \{\bigcup \psi_i(B) = B \in \hat{\mathcal{B}}_\psi\} = \{B : B = \bigcup \psi_i(B)\}$$

Autrement dit, $\vee\, \phi_i$ et $\bigcup\, \phi_i$ ont le même domaine d'invariance. De plus, on a $\check{\phi} = \bigcup\, \check{\phi}_i = \phi$ sur $\widehat{\mathcal{B}}_\phi$, et la p.p.M c.i.$\bigcup$ de ϕ est :

$$\phi\, \check{\phi} = \bigcup\, \check{\phi}_i\, \hat{\phi}$$

Enoncé analogue, par dualité, pour $\wedge\, \phi_i$.

Le treillis complet $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$.

Dans le cas où les ϕ_i admettent le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$, les résultats ci-dessus se simplifient notablement. Posons $\phi = \vee\, \phi_i$.

D'après (5-3), on a d'abord $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\phi$, soit $\phi\, \phi_i = \phi_i$ pour chaque i, (critère 2), ce qui implique $\phi_i\, \phi$ idempotent (et $\in\, \mathcal{J}d(\mathcal{B})$, critère 3). De $\phi_i\, \phi_j = \phi_j$ (critère 1) découle :

$$\phi_i\, \phi \supset \phi_i\, o(\bigcup\, \phi_j) \supset \bigcup_j\, \phi_i\, \phi_j = \bigcup\, \phi_j$$

et, comme $\phi_i\, \phi$ est idempotent, il en résulte

$$\phi_i\, \phi \supset \vee\, \phi_j = \phi$$

Mais $\phi_i \subset \phi = \vee\, \phi_i$ donne $\phi_i\, \phi \subset \phi$, d'où l'égalité $\phi_i\, \phi = \phi$. Comme on a déjà vu $\phi\, \phi_i = \phi_i$, il en résulte (critère 1) $\phi \in \mathcal{J}d(\phi_i)$, soit :

$$\phi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$$

Soit alors ϕ' un élément quelconque dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, vérifiant donc pour tout indice i (critère 1)

$$\phi'\, \phi_i = \phi_i \qquad \phi_i\, \phi' = \phi'$$

On a donc, en particulier, $\bigcup\, \phi_i\; o\; \phi' = \phi'$, ce qui implique (critère 3)

$$\phi'\, o(\bigcup\, \phi_i) \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$$

On a évidemment aussi (puisque ϕ est dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$)

$$\phi' \circ (\bigcup \phi_i) \subset \phi' \circ \vee \phi_i = \phi' \phi = \phi$$

Mais d'autre part

$$\phi' \circ (\bigcup \phi_i) \supset \bigcup \phi' \phi_i = \bigcup \phi_i$$

Or, $\phi' \circ (\bigcup \phi_i)$ étant idempotent, ceci implique :

$$\phi' \circ (\bigcup \phi_i) \supset \vee \phi_i = \phi$$

On a donc en fait l'égalité :

$$\phi' \circ (\bigcup \phi_i) = \phi$$

D'où le :

THEOREME 5-3 - Pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, tel que $\mathcal{J}d(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ est un treillis complet. Pour toute famille ϕ_i dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, $\vee \phi_i$ et $\wedge \phi_i$ sont dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ et sont donnés par les relations :

$$\vee \phi_i = \phi' \circ (\bigcup \phi_i) \quad ; \quad \wedge \phi_i = \phi' \circ (\bigcap \phi_i)$$

où ϕ' est un élément quelconque dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$.

6 - LE THEOREME DE LA MEDIANE.

On a vu (Théorème 3) que $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ n'est pas vide si et seulement si $\mathcal{B}$ est complètement réticulé. Soient $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\phi$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_\alpha$ deux parties de $\mathcal{P}$ complètement réticulées, telles que $\mathcal{B}_\phi \subset \mathcal{B}_\alpha$, et soient ϕ un élément quelconque de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, α un élément quelconque de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}')$. La condition $\mathcal{B}_\phi \subset \mathcal{B}_\alpha$ se traduit (critère 2) par

$$\alpha \phi = \phi$$

Considérons une famille B_i d'éléments de $\mathcal{B}_\phi$. En tant que famille dans $\mathcal{B}_\phi$, elle admet un plus petit majorant dans

$\mathcal{B}_\psi$, qui est

$$\psi\ (\bigcup B_i) = \tilde{I}_\psi\ (\bigcup B_i) \in \mathcal{B}_\psi$$

Mais B_i est aussi une famille dans $\mathcal{B}_\alpha$, puisque $\mathcal{B}_\psi \subset \mathcal{B}_\alpha$ et admet donc à ce titre un plus petit majorant dans $\mathcal{B}_\alpha$, qui est

$$\alpha(\bigcup B_i) = \tilde{I}_\alpha\ (\bigcup B_i) \in \mathcal{B}_\alpha$$

De $\tilde{\mathcal{B}}_\psi \subset \tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ résulte $\tilde{I}_\alpha\ (\bigcup B_i) \subset \tilde{I}_\psi\ (\bigcup B_i)$. Mais en général, ces deux éléments sont différents. Pour qu'ils coïncident, il faut et il suffit que l'on ait

(6-1) $$\psi = \alpha\ ,\ \text{i.e. } \tilde{I}_\psi = \tilde{I}_\alpha \quad \text{sur } \underset{\sim}{\mathcal{B}_\psi}$$

Supposons cette condition vérifiée. Soit $A \in \mathcal{B}_\alpha$, et B_i la famille des $B \in \mathcal{B}_\psi$ tels que $B \subset A$. On a donc (puisque $\mathcal{B}_\psi \subset \mathcal{B}_\alpha$) :

$$\bigcup B_i = \bigcup \alpha(B_i) \subset \alpha\ (\bigcup B_i) \subset \alpha(A) = A$$

et par suite d'après l'hypothèse (6-1) :

$$\tilde{I}_\psi\ (\bigcup B_i) = \psi\ (\bigcup B_i) = \alpha\ (\bigcup B_i) \subset A$$

Comme $\psi\ (\bigcup B_i) \in \mathcal{B}_\psi$, cette relation exprime que tout $A \in \mathcal{B}_\alpha$ <u>admet un plus grand minorant dans $\mathcal{B}_\psi$</u> , et par suite :

(6-2) $$\underset{\sim}{I}_\psi(A) \in \mathcal{B}_\psi \qquad \forall\ A \in \mathcal{B}_\alpha$$

Désignons par

$$\psi_m = \tilde{I}_\psi\ \underset{\sim}{I}_\psi$$

<u>le plus petit élément</u> de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\psi)$, et par $\hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$ son domaine d'anti-extensivité.

Je dis que la condition (6-2) équivaut à la suivante :

(6-3) $$\mathcal{B}_\alpha \subset \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$$

En effet, $\underset{\sim}{I}_\psi(A) \in \mathcal{B}_\psi$ entraine $\psi_m(A) = \psi\, \underset{\sim}{I}_\psi(A) = \underset{\sim}{I}_\psi(A) \subset A$, et donc $A \in \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$, donc (6-2) entraine (6-3).

Inversement, si (6-3) est vérifiée, $A \in \mathcal{B}_\alpha$ entraine $A \in \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$, et donc $\psi_m(A) = \underset{\sim}{I}_\psi(A) \subset A$: mais cela entraine $\underset{\sim}{I}_\psi(A) \in \mathcal{B}_\psi$, et signifie que tout $A \in \mathcal{B}_\alpha$ admet un plus grand minorant dans $\mathcal{B}_\psi$, donc que (6-2) est vérifiée.

Bouclons la boucle, en montrant que (6-2) entraine à son tour (6-1). Soit B_i une famille dans $\mathcal{B}_\psi$. On a (puisque $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha \supset \tilde{\mathcal{B}}_\psi$)

(6-4) $\quad \tilde{I}_\psi(\bigcup B_i) = \psi\,(\bigcup B_i) \supset \tilde{I}_\alpha\,(\bigcup B_i) = \alpha\,(\bigcup B_i) \supset \bigcup \alpha(B_i) = \bigcup\,(B_i)$

d'où :

$$\underset{\sim}{I}_\psi\, \psi\,(\bigcup B_i) = \psi\,(\bigcup B_i) \supset \underset{\sim}{I}_\psi\, \alpha\,(\bigcup B_i) \supset \bigcup B_i$$

Mais, par hypothèse, (6-2) est vérifiée, de sorte que $\underset{\sim}{I}_\psi\, \alpha\,(\bigcup B_i) \in \mathcal{B}_\psi$: comme $\bigcup B_i \subset \underset{\sim}{I}_\psi\, \alpha\,(\bigcup B_i) \subset \psi\,(\bigcup B_i)$ et que cet élément est dans $\mathcal{B}_\psi$, il coïncide avec le plus petit majorant de $\bigcup B_i$ dans $\mathcal{B}_\psi$, qui est $\psi\,(\bigcup B_i)$. Ainsi :

$$\psi\,(\bigcup B_i) = \underset{\sim}{I}_\psi\, \alpha\,(\bigcup B_i) \subset \alpha\,(\bigcup B_i)$$

Or l'inclusion inverse résulte de (6-4). On a donc l'égalité :

$$\alpha\,(\bigcup B_i) = \psi\,(\bigcup B_i)$$

pour toute famille B_i dans $\mathcal{B}_\psi$: (6-1) est donc vérifiée.

Soit enfin $\alpha_m = \tilde{I}_\alpha\, \underset{\sim}{I}_\alpha$ le plus petit élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\alpha)$. Je dis que les conditions équivalentes (6-1), (6-2) et (6-3) équivalent encore à :

(6-5) $$\alpha_m \supset \psi_m$$

En effet, supposons (6-2) vérifiée, c'est-à-dire $\underset{\sim}{I}_\psi(\mathcal{B}_\alpha) \subset \mathcal{B}_\psi$. On a en fait $\underset{\sim}{I}_\psi(\mathcal{B}_\alpha) = \mathcal{B}_\psi$ (car $\mathcal{B}_\psi \subset \mathcal{B}_\alpha$ et

$\underset{\sim}{I}_\psi(\mathcal{B}_\psi) = \mathcal{B}_\psi$). Il en résulte $\underset{\sim}{I}_\psi \circ \alpha_m \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}_\psi)$, donc

$$\alpha_m \supset \underset{\sim}{I}_\psi\, \alpha_m \supset \psi_m$$

et (6-5) est vérifiée. Inversement, si $\alpha_m \supset \psi_m$, pour tout $A \in \mathcal{B}_\alpha$ on a $A = \alpha_m(A) \supset \psi_m(A)$, donc $A \in \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$. Ainsi (6-5) entraine (6-3).

Ainsi :

<u>THEÔREME 6-1</u> - Soient α et ψ idempotentes telles que $\mathcal{B}_\psi \subset \mathcal{B}_\alpha$, c'est-à-dire $\alpha\,\psi = \psi$, ψ_m le plus petit élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\psi)$, α_m le plus petit élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\alpha)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ $\psi = \alpha$, c'est-à-dire $\tilde{I}_\psi = \tilde{I}_\alpha$ sur $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_\psi$

ii/ Tout A dans $\mathcal{B}_\alpha$ admet un plus grand minorant dans $\mathcal{B}_\psi$ soit $\underset{\sim}{I}_\psi(\mathcal{B}_\alpha) \subset \mathcal{B}_\psi$.

iii/ $\mathcal{B}_\alpha \subset \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m}$

iv/ $\alpha_m \supset \psi_m$

On a évidemment un énoncé analogue par dualité. En réunissant le théorème et son dual, on obtient le

<u>COROLLAIRE</u> - Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont complètement réticulés dans $\mathcal{P}$, et si on désigne par ψ_m, ψ_M, (α_m et α_M) le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ (resp. de $\mathcal{J}d(\mathcal{A})$), les conditions suivantes sont équivalentes :

i/ $\psi_m \subset \alpha_m \subset \alpha_M \subset \psi_M$

ii/ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{B}}_{\psi_m} \cap \check{\mathcal{B}}_{\psi_M}$

iii/ $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, et tout $A \in \mathcal{A}$ admet un plus grand minorant et un plus petit majorant dans $\mathcal{B}$.

iv/ $\mathcal{B}$ est un sous-treillis de $\mathcal{A}$, et toute famille B_i dans $\mathcal{B}$, admet les mêmes bornes supérieures et in-

-férieures au sens de $\mathcal{A}$ et au sens de $\mathcal{B}$:

$$\underset{\sim}{I}_{\mathcal{A}}(\cap B_i) = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}(\cap B_i) \quad ; \quad \tilde{I}_{\mathcal{A}}(\cup B_i) = \tilde{I}_{\mathcal{B}}(\cup B_i)$$

Immédiat. Noter simplement que la condition i/ entraine $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

On voit que $\hat{\mathcal{B}}_{\psi_m} \cap \check{\mathcal{B}}_{\psi_M}$ constitue la plus grande partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions du corollaire, pour $\mathcal{B}$ donné, pourvu seulement que $\hat{\mathcal{B}}_{\psi_m} \cap \check{\mathcal{B}}_{\psi_M}$ soit un treillis complet. Il en est bien ainsi, comme nous allons le voir dans des conditions un peu plus générales.

L'élément médian.

THEOREME 6-2 - Le treillis $\mathcal{P}$ étant supposé distributif, soient f c.i.$\cup$ et g c.i.$\cap$ telles que $f \supset g$. Alors, il existe une application α c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ vérifiant :

$$\alpha = \check{f}\,\hat{g} = \hat{g}\,\check{f} \quad , \quad f \supset \alpha \supset g \quad , \quad \mathcal{B}_\alpha = \check{\mathcal{B}}_f \cap \hat{\mathcal{B}}_g$$
$$\hat{\alpha} = \hat{g} \; , \; \check{\alpha} = \check{f}$$

En effet, posons $\alpha = \check{f}\,\hat{g}$ et $\alpha' = \hat{g}\,\check{f}$. α est c.i.$\cup$, et

$$\check{\mathcal{B}}_f \cap \hat{\mathcal{B}}_g \subset \mathcal{B}_\alpha \subset \check{\mathcal{B}}_f$$

Mais $f \supset g$ entraine $\check{f} \supset \check{g}$, et $\check{f}\,\check{g} = \check{g}$. On a donc $\check{g}_\alpha = \check{g}\,\check{f}\,\hat{g} = \check{g}\,\hat{g} \supset g$. Pour $A \in \mathcal{B}_\alpha$, soit $A = \alpha(A)$, il vient ainsi $\check{g}\,\alpha(A) = \check{g}(A) \supset g(A)$, donc $g(A) \subset A$, car $\check{g}$ est une ouverture, et par suite $A \in \hat{\mathcal{B}}_g$. On a donc $\mathcal{B}_\alpha \subset \check{\mathcal{B}}_f \cap \hat{\mathcal{B}}_g$, et par suite l'égalité :

$$\mathcal{B}_\alpha = \check{\mathcal{B}}_f \cap \hat{\mathcal{B}}_g \tag{a}$$

qui implique

$$\alpha = \check{f}\,\hat{g} = \hat{g}\,\check{f}\,\hat{g}$$

~ Soit maintenant $\hat{\alpha} = I \vee \alpha$ et $\check{\alpha} = I \wedge \alpha$. Comme $\check{f}$ est une ouverture, on a $\alpha = \check{f}\,\hat{g} \subset \hat{g}$, et donc $\hat{\alpha} \subset \hat{g}$. Mais $\alpha = \check{f}\,\hat{g} \supset \check{g}\,\hat{g} \supset g$

entraine aussi $\hat{\alpha} \supset \hat{g}$, d'où $\hat{\alpha} = \hat{g}$.

De même $\alpha = \check{f}\,\hat{g} \subset \check{f}\,\hat{f} = f$ (puisque f est c.i.$\bigcup$) donne $\check{\alpha} \subset \check{f}$. Mais $\check{f} \subset \check{f}\,\hat{g} = \alpha$ (puisque $\hat{g}$ est $\supset I$) donne $\check{f} \subset \check{\alpha}$, d'où l'égalité. On a donc :

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} f \supset \alpha \supset g \\ \check{\alpha} = \check{f} \quad , \quad \hat{\alpha} = \hat{g} \end{cases}$$

L'étude de $\alpha' = \hat{g}\,\check{f}$ conduit de même, par dualité, à :

$$\text{(b')} \qquad \begin{cases} f \supset \alpha' \supset g \\ \hat{\alpha}' = \hat{g} \quad , \quad \check{\alpha}' = \check{f} \end{cases}$$

On a donc $\check{\alpha} = \check{\alpha}'$ et $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$. Ainsi l'ouverture c.i.$\bigcap$ de la c.i.$\bigcup$ $\alpha = \check{\alpha}\,\hat{\alpha}$, coïncide avec $\alpha' = \hat{\alpha}\,\check{\alpha}$, qui est donc à la fois c.i.$\bigcup$ et c.i.$\bigcap$ (théorème 4-3). De même, la fermeture c.i.$\bigcup$ de α' va coïncider avec α. Mais, puisque α' est à la fois c.i.$\bigcup$ et c.i.$\bigcap$, cela implique $\alpha = \alpha'$, ce qui achève la démonstration.

Notons quelques propriétés de cet élément $\alpha = \check{f}\,\hat{g} = \hat{g}\,\check{f}$. Tout d'abord, on a

$$\text{(6-6)} \qquad \alpha = \check{f} \vee g = f \wedge \hat{g}$$

En effet, $\alpha \supset \check{\alpha} = \check{f}$ et $\alpha \supset g$, d'après le théorème, d'où

$$\alpha \supset \check{f} \cup g$$

Soit alors une idempotente ϕ majorant $\check{f} \cup g$. On en déduit $\check{\phi} \supset \check{f}$ et $\hat{\phi} \supset \hat{g}$. Donc $\phi \supset \hat{\phi}\,\check{\phi} \supset \hat{g}\,\check{f} = \alpha$. Il en résulte $\alpha = \check{f} \vee g$. On montre par dualité $\alpha = f \wedge \hat{g}$.

On a aussi

$$\text{(6-7)} \qquad \alpha = \hat{g} \cap \hat{f}\,\check{f} = \check{f} \cup \check{g}\,\hat{g}$$

En effet, $\check{f}$, plus grande ouverture minorant f, ou, aussi bien, minorant l'ouverture c.i.$\cap$ $\hat{f}\,\check{f}$ de f, est donnée par :

$$\check{f} = I \cap \hat{f}\,\check{f}$$

On en tire

$$\alpha = \check{f}\,\hat{g} = (I \cap \hat{f}\,\check{f}) \circ \hat{g} = \hat{g} \cap \hat{f}\,\check{f}\,\hat{g}$$

Mais $\check{f}\,\hat{g} = \alpha = \hat{g}\,\check{f}$, et $\hat{f}\,\hat{g} = \hat{f}$, puisque la fermeture $\hat{f}$ majore la fermeture $\hat{g}$, donc $\hat{f}\,\check{f}\,\hat{g} = \hat{f}\,\hat{g}\,\check{f} = \hat{f}\,\check{f}$, et $\alpha = \hat{g} \cap \hat{f}\,\check{f}$. Démonstration analogue pour la seconde relation (6-7).

Cette formule (6-7) montre que α <u>est lié de manière très simple à l'ouverture</u> c.i.$\cap$ de f et à la <u>fermeture</u> c.i.$\cup$ de g, soit $\hat{f}\,\check{f}$ et $\check{g}\,\hat{g}$ respectivement : on a, en effet :

$$f \supset \hat{f}\,\check{f} \supset \alpha = \check{f}\,\hat{g} = \hat{g}\,\check{f} \supset \hat{g}\,\check{g} \supset g$$

et, d'après (6-7) :

$$\alpha = (I \cup \check{g}\,\hat{g}) \cap \hat{f}\,\check{f} = (I \cap \hat{f}\,\check{f}) \cup \check{g}\,\hat{g}$$

Cet élément est ainsi, en un certain sens, à "mi-distance" entre f et g.

Un <u>exemple</u> intéressant est fourni par le cas :

$$f = \phi_M \quad , \quad g = \phi_m$$

où ϕ_m et ϕ_M sont le plus petit et le plus grand élément d'un $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ donné. On a donc ici :

$$\alpha = \check{\phi}_M\,\hat{\phi}_m = \hat{\phi}_m\,\check{\phi}_M$$

et

$$\mathcal{B}_\alpha = \check{\mathcal{B}}_{\phi_M} \cap \hat{\mathcal{B}}_{\phi_m}$$

Nous reportant au corollaire du théorème (6-1), nous voyons que $\mathcal{B}_\alpha$ est ainsi <u>la plus grande partie réticulée</u> $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ vérifiant les <u>conditions du corollaire</u> , $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\alpha)$ est le plus grand majorant de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ pour la relation $\mathcal{J}d(\mathcal{B}) \leq \mathcal{J}d(\mathcal{A})$ définie par i/ $(\phi_m \subset \alpha_m$ et $\phi_M \supset \alpha_M)$.

Notons que $\alpha = \check{\phi}_M \hat{\phi}_m = \hat{\phi}_m \check{\phi}_M$ est <u>le seul élément à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\alpha)$</u>.

En effet, soit α' c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_\alpha)$. On a donc

$$\begin{cases} \alpha' = \underset{\sim}{I}_\alpha \hat{\alpha}' = \tilde{I}_\alpha \check{\alpha}' \\ \alpha = \underset{\sim}{I}_\alpha \hat{\phi}_m = \tilde{I}_\alpha \check{\phi}_M \end{cases}$$

Or $\phi_m \subset \alpha_m \subset \alpha'$ donne $\hat{\phi}_m \subset \hat{\alpha}'$, donc $\alpha \subset \alpha'$. De même, $\alpha' \subset \alpha_M \subset \phi_M$ donne $\check{\phi}_M \supset \check{\alpha}'$, donc $\alpha \supset \alpha'$, et l'égalité $\alpha = \alpha'$.

Réciproquement, (toujours en supposant $\mathcal{P}$ distributif) d'ailleurs, on a <u>$\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ admet un unique élément à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$</u> .

Cela est nécessaire, d'après ce qu'on vient de voir. Inversement, si $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ ne contient qu'un seul élément c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ celui-ci coïncide à la fois avec l'ouverture c.i.$\cap$ de ϕ_M et avec la fermeture c.i.$\cup$ de ϕ_m . On a donc

$$\hat{\phi}_M \check{\phi}_M = \check{\phi}_m \hat{\phi}_m$$

Or $\alpha = \check{\phi}_M \hat{\phi}_m = \hat{\phi}_m \check{\phi}_M$ est toujours compris entre ces deux éléments. Il leur est donc ici égal, et cela implique $\alpha \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$, soit $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}$.

7 - POINT DE VUE DES PARTITIONS ASSOCIEES.

Nous avons vu (critères 1 et 2) que la relation de préordre $\mathcal{B}_\varphi \subset \mathcal{B}_{\varphi'}$, entre idempotentes se traduit algébriquement par :

$$\varphi = \varphi' \circ \varphi$$

(φ admet φ' comme facteur à gauche, ou φ' factorise φ à gauche). La relation d'équivalence associée ($\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_{\varphi'}$, soit $\varphi = \varphi'\,\varphi$ et $\varphi' = \varphi\,\varphi'$) à ce préordre peut s'écrire : $\varphi \in \mathcal{I}d(\varphi')$. Les classes d'équivalences correspondantes sont les $\mathcal{I}d(\mathcal{B})$ que nous avons étudiés.

Du point de vue algébrique, nous pouvons aussi considérer l'autre relation :

$$\varphi = \varphi \circ \varphi'$$

(φ' factorise φ à droite). Il s'agit bien d'un préordre entre idempotentes (car $\varphi = \varphi \circ \varphi$; $\varphi = \varphi \circ \varphi'$ et $\varphi' = \varphi' \circ \varphi''$ entrainent $\varphi = \varphi \circ \varphi' \circ \varphi'' = \varphi\,\varphi''$). D'une manière générale, f et g étant des applications quelconques, non nécessairement idempotentes, nous dirons que f se laisse factoriser à droite par g si l'on peut trouver une application h telle que

$$f = h \circ g$$

Il est facile de voir qu'il en est ainsi si et seulement si l'équivalence modulo g ($A \equiv A'(g)$ si et seulement si $g(A) = g(A')$) entraine l'équivalence modulo f ($f(A) = f(A')$). Pour toute application f, l'équivalence modulo f définit une partition Π_f dont les classes d'équivalences sont les $f^{-1} \circ f(A) \subset \mathcal{P}$, A parcourant $\mathcal{P}$. Le préordre : $\exists$ h tel que $f = h\,g$ signifie que la partition Π_g est plus fine que Π_f (chaque classe d'équivalence modulo f est réunion de classes modulo g), ce qui s'écrit simplement :

$$g^{-1} \circ g \subset f^{-1} \circ f$$

Lorsque g est <u>idempotente</u>, s'il existe h tel que $f = h \circ g$, on peut toujours prendre $h = f$. En effet, on trouve alors $f \circ g = h \circ g \circ g = h \circ g$. Donc $f = f \circ g$.

En résumé, <u>entre idempotentes</u>, le préordre en question s'écrit :

$$\psi = \psi\,\psi' \Leftrightarrow \psi'^{-1} \circ \psi' \subset \psi^{-1} \circ \psi$$

et signifie que la partition $\Pi_{\psi'}$ est plus fine que Π_{ψ}.

A ce préordre est associée la <u>relation d'équivalence</u> :

$$\psi = \psi\,\psi' \text{ et } \psi' = \psi'\psi \Leftrightarrow \psi'^{-1} \circ \psi = \psi^{-1} \circ \psi \Leftrightarrow \Pi_{\psi'} = \Pi_{\psi}$$

(soit = $\psi(A) = \psi(A')$ si et seulement si $\psi'(A) = \psi'(A')$)

On note d'ailleurs que, si f et g sont des applications <u>quelconques</u>, les relations :

$$f = f\,g \quad \text{et} \quad g = g\,f$$

suffisent pour entrainer <u>l'idempotence</u> de f et g.

En effet, de $f = f\,g$ on tire $f\,f = f\,g\,f$. Mais $g\,f = g$, donc $f\,f = f\,g = f$.

<u>Classes admettant un plus grand élément</u>.

Notons un premier résultat :

<u>LEMME 7-1</u> - Soit ψ une application idempotente (non nécessairement croissante). Pour que chaque classe d'équivalence modulo ψ admette un plus grand élément, il faut et il suffit qu'il existe une application φ <u>extensive</u> et <u>idempotente</u> telle que :

(a) $$\psi\,\varphi = \psi \quad ; \quad \varphi\,\psi = \varphi$$

En effet, supposons que, pour chaque A la classe $\psi^{-1} \circ \psi(A)$ modulo ψ contienne un plus grand élément, soit $\varphi(A)$. On a $\varphi(A) \supset A$. Comme $\varphi(A)$ appartient à la classe de A modulo ψ, on a $\psi\varphi(A) = \psi(A)$. La classe de $\varphi(A)$, coïncidant avec celle de A, admet le même élément amximal $\varphi(A)$, soit $\varphi(A) = \varphi\ \varphi(A)$. Enfin, ψ étant idempotente, $\psi(A)$ et A sont dans la même classe, donc $\varphi\ \psi(A) = \varphi(A)$.

Inversement, supposons vérifiée la condition (a). Soit A' un élément de la classe $\psi^{-1}\ \psi(A)$ de A, soit $\psi(A') = \psi(A)$. Des relations (a), on tire $\varphi(A') = \varphi\ \psi(A') = \varphi\ \psi(A) = \varphi(A)$. Comme φ est extensive, il en résulte : $A' \subset \varphi(A') = \varphi(A)$. Mais $\psi\ \varphi(A) = \psi(A)$, d'après (a), ce qui montre que l'élément $\varphi(A)$ appartient à la classe de A. Comme il majore tout A' dans cette classe, il en constitue le plus grand élément.

Naturellement, le cas le plus intéressant sera celui où ψ et φ sont idempotentes et <u>croissantes</u> : φ est alors une fermeture. Notons que, si l'idempotente ψ du lemme 7-1 est croissante, il n'en résulte pas nécessairement que l'idempotente extensive φ soit croissante : on pourrait très bien avoir $A' \subset A$ sans pour autant que le plus grand élément $\varphi(A')$ de la classe de A' soit inférieur à $\varphi(A)$. Le théorème suivant donne la condition nécessaire et suffisante pour que φ soit croissante, c'est-à-dire une fermeture :

<u>THEOREME 7</u> - Soit ψ idempotente et croissante. Il existe une <u>fermeture</u> φ telle que

(a) $$\psi\ \varphi = \psi \quad ; \quad \varphi\ \psi = \varphi$$

si et seulement si on a, pour toute famille A_i dans $\mathcal{P}$:

(b) $$\psi\ (\cup A_i) = \psi\ (\cup\ \psi(A_i))$$

Pour chaque $A \in \mathcal{P}$, $\varphi(A)$ est alors le plus grand élément de la classe de A modulo ψ.

On a, évidemment, par dualité, un énoncé analogue pour une ouverture γ vérifiant (a), et $\cap$ au lieu de $\cup$ dans (b) : $\gamma(A)$ représente alors le plus petit élément de la classe de A.

En effet, supposons (a) vérifié. D'après le lemme, $\varphi(A)$ est le plus grand élément de la classe de A:modulo ψ, et de plus $A' \subset A$ entraine ici $\varphi(A') \subset \varphi(A)$. On a toujours $\psi(\cup A_i) \supset \cup \psi(A_i)$, ψ étant croissante, d'où :

$$\psi(\cup A_i) \supset \psi(\cup \psi(A_i))$$

puisque ψ est idempotente. Multipliant à gauche par φ, et tenant compte de (a) et du fait que φ est croissante, on en tire

$$\varphi (\cup A_i) \supset \varphi(\cup \psi(A_i)) \supset \cup \varphi \psi(A_i) = \cup \varphi(A_i)$$

Multipliant à nouveau à gauche par φ :

$$\varphi (\cup A_i) \supset \varphi (\cup \psi(A_i)) \supset \varphi (\cup \varphi(A_i)) \supset \varphi (\cup A_i)$$

la dernière inclusion résultant de $\varphi \supset I$). Compte tenu de $\psi \varphi = \psi$, l'inclusion $\varphi (\cup \psi(A_i)) \supset \varphi (\cup A_i)$ devient

$$\psi (\cup \psi(A_i)) \supset \psi (\cup A_i)$$

L'égalité (b) en résulte.

Inversement, supposons (b) vérifiée. Posons pour tout $A \in \mathscr{P}$:

$$\varphi(A) = \cup \{A' : \psi(A') \subset \psi(A)\}$$

φ est manifestement croissante. On a évidemment $A \subset \varphi(A)$, puisque $\psi(A) \subset \psi(A)$, donc φ est extensive. En utilisant (b), il vient ensuite :

$$\psi \varphi(A) = \psi (\cup \{\psi(A') : \psi(A') \subset \psi(A)\}) = \psi \psi(A) = \psi(A)$$

$$\varphi \psi(A) = \cup \{A' : \psi(A') \subset \psi \psi(A) = \psi(A)\} = \varphi(A)$$

Soit $\psi\ \varphi = \psi$ et $\varphi\ \psi = \varphi$. Ces relations entrainent l'idempotence de φ. Donc φ est une fermeture vérifiant les relations (a).

COROLLAIRE 1 - Une ouverture γ vérifie les propriétés (a) et (b) si et seulement si elle est compatible avec $\bigcup$:

(c) $$\gamma(\bigcup A_i) = \bigcup \gamma(A_i)$$

Car, si $\psi = \gamma$, $\mathcal{B}_\gamma$ est stable pour la réunion, et $\bigcup \psi(A_i) \in \mathcal{B}_\gamma$: (b) entraine (c) et réciproquement.

Dans le cas $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E)$, les ouvertures compatibles avec la réunion sont assez triviales. En effet, pour chaque $x \in E$, on a soit $\gamma(\{x\}) = \emptyset$, soit $\gamma(\{x\}) = \{x\}$. Désignons par A_o l'ensemble des x tels que $\gamma(\{x\}) = \{x\}$. Si l'ouverture γ est compatible avec la réunion, on trouve :

$$\gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma(\{x\}) = A \cap A_o$$

Le plus grand élément de la classe de A modulo γ est alors :

$$\varphi(A) = (A \cap A_o) \cup A_o^c$$

Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, l'ouverture $A \cap A_o$ n'est compatible avec les translations que si $A_o = \emptyset$ ou $A_o = \mathbb{R}^n$, soit les deux ouvertures triviales $\gamma = \emptyset$ et $\gamma = I$.

Si une idempotente vérifie la condition (b) du théorème, elle est nécessairement c.i.$\bigcup$.

En effet, on a nécessairement $\varphi \supset \psi$ (car $\psi(A)$ appartient à la classe de A, dont le plus grand élément est $\varphi(A)$, d'où $\psi(A) \subset \varphi(A)$) et donc $\varphi \supset I \cup \psi$, φ étant une fermeture. On a donc, d'après (a) :

$$\psi \subset \psi \circ (I \cup \psi) \subset \psi\ \varphi = \psi$$

et l'égalité.

En fait, ψ vérifie même la propriété plus forte :

$$\psi\ (\cup A_i) = \psi\ (\cup\ \varphi(A_i))$$

On le voit en écrivant $\psi(\cup A_i) = \psi\ \varphi\ (\cup A_i) = \psi\ \varphi\ (\cup\ \varphi(A_i))$ $= \psi\ (\cup\ \varphi(A_i))$.(Car toute fermeture φ vérifie la propriété (b)). Ainsi :

<u>COROLLAIRE 2</u> - Si ψ vérifie les conditions du théorème 7, elle est nécessairement c.i.$\cup$. De plus, on a $\varphi \supset I \cup \psi$ et :

(b')
$$\psi\ (\cup A_i) = \psi\ (\cup\ \varphi(A_i))$$

Etant c.i.$\cup$, ψ est de la forme

$$\psi = g\ f$$

pour une <u>ouverture</u> g et une <u>fermeture</u> f (par exemple $g = \check{\psi}$, $f = \hat{\psi}$). Des relations (a), on déduit alors : $\varphi\ g\ f = \varphi$ et $g\ f\ \varphi = g\ f$. Donc $\varphi\ f = \varphi\ g\ f\ f = \varphi\ g\ f = \varphi$. Mais $\varphi\ f = \varphi$ entraine $\varphi \supset f$ et donc $f\ \varphi = \varphi$. On a donc $\psi = g\ f = g\ f\ \varphi = g\ \varphi$, soit en résumé :

$$\psi = g\ \varphi \quad , \quad \varphi = \varphi\ g\ \varphi$$

La réciproque est vraie : car si $\psi = g\ \varphi$ pour une ouverture g et une fermeture φ telle que $\varphi = \varphi\ g\ \varphi$, on a bien $\varphi\ \psi = \varphi$ et $\psi\ \varphi = \psi$.

Notons aussi que $\varphi = \varphi\ g\ \varphi$ entraine $\varphi\ g \in \mathfrak{J}d(\varphi)$, d'après le critère 1 (car $\varphi\ g\ \varphi = \varphi$ et $\varphi\ \varphi\ g = \varphi\ g$):

<u>COROLLAIRE 3</u> - Une idempotente vérifie les conditions (a) et (b) de l'énoncé si et seulement si elle admet la représentation $\psi = \gamma\ \varphi$ pour une ouverture γ et une fermeture φ telle que :

$$\varphi = \varphi\ \gamma\ \varphi$$

Cette fermeture φ est identique à celle qui vérifie les relations (a).

8 - IDEMPOTENTES s.c.s. sur $\mathcal{F}$ ou $\tilde{\mathcal{K}}$.

Si E est un espace topologique, l'espace $\mathcal{F}$ des fermés est un sous-treillis de $\mathcal{P}(E)$: l'inf y est encore donné par l'intersection $\bigcap F_i$, mais le sup est la réunion fermée $\overline{\bigcup F_i}$. Nous noterons $\bar{\bigcup} F_i$ cette union fermée, ou Sup dans le sous-treillis $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$, qu'il faut évidemment soigneusement distinguer de l'union ordinaire $\bigcup F_i$, qui est le Sup de la même famille F_i , mais dans le treillis $\mathcal{P}$ lui-même. L'espace E sera supposé L.C.D., et le treillis $\mathcal{F}$ sera aussi muni de sa topologie habituelle.

En ce qui concerne l'espace $\mathcal{K}$, il ne constitue pas un treillis complet (sauf si E est un espace compact) puisqu'il ne contient pas de plus grand élément. Nous lui adjoindrons donc l'élément E, et nous poserons

$$\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \{E\}$$

Cette notation est cohérente : $\mathcal{K}$, en effet, n'est pas, au sens strict, stable pour l'intersection (du moins si E n'est pas compact), puisqu'il ne contient pas l'intersection de la famille vide, qui est E. L'espace obtenu en ajoutant l'élément E à $\mathcal{K}$ représente donc bien la classe stable pour l'intersection engendrée par $\mathcal{K}$.

Du point de vue topologique, l'espace $\tilde{\mathcal{K}}$ s'identifie au compactifié de $\mathcal{K}$, E jouant le rôle de point à l'infini, dont les voisinages ouverts sont les complémentaires des sous-ensembles compacts de $\mathcal{K}$. La famille des $\{K : K \in \mathcal{K},\ K \not\subset K_0\}$, K_0 décrivant $\mathcal{K}$ constitue donc un système fondamental de voisinages ouverts de E dans $\tilde{\mathcal{K}}$. Une suite K_n dans $\mathcal{K}$ converge vers E au sens de $\tilde{\mathcal{K}}$ si et seulement si elle n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathcal{K}$, autrement dit si, pour tout $K_0 \in \mathcal{K}$, il existe N tel que $K_n \not\subset K_0$ dès que $n \geq N$. Pour le reste, la topologie de $\tilde{\mathcal{K}}$ ne diffère pas de la topologie myope usuelle de $\mathcal{K}$.

Dans le treillis $\tilde{\mathcal{K}}$, l'inf est encore l'intersection $\bigcap K_i$. Par contre, le Sup est l'union fermée $\overline{\bigcup K_i}$ seulement si la réunion $\bigcup K_i$ est bornée. Lorsque la réunion $\bigcup K_i$ n'est pas bornée, le Sup est l'élément maximal E de $\tilde{\mathcal{K}}$. Pour unifier les notations relatives à $\tilde{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{F}$, nous poserons

$$\bar{\bigcup} K_i = \begin{cases} \overline{\bigcup K_i} & \text{si } \bigcup K_i \text{ est bornée} \\ E & \text{sinon} \end{cases}$$

(sauf toutefois si $\tilde{\mathcal{K}}$ doit être considéré comme un sous-treillis de $\mathcal{F}$: dans ce cas, il faut impérativement distinguer le Sup au sens de $\tilde{\mathcal{K}}$ et au sens de $\mathcal{F}$: le premier sera alors noté $\tilde{\bigcup}$ et le second $\bar{\bigcup}$).

Sur l'espace $\mathcal{G}$ des ouverts, dual de $\mathcal{F}$, le Sup coïncide avec la réunion ordinaire, et l'Inf est l'intersection ouverte $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap G_i}}$, que nous noterons $\overset{\circ}{\bigcap} G_i$. Le treillis $\mathcal{G}$ sera muni de sa topologie usuelle.

Soit, maintenant, ψ une idempotente sur $\tilde{\mathcal{K}}$ ou sur $\mathcal{F}$, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\psi \subset \mathcal{F}$ ou $\tilde{\mathcal{K}}$ son domaine d'invariance, qui est donc un sous-treillis de $\mathcal{F}$ ou $\tilde{\mathcal{K}}$. Le domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}$, et aussi $\tilde{\mathcal{B}}$ sont stables pour l'intersection ordinaire. Par contre, le domaine d'extensivité et la classe $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ sont stables, non pour la réunion ordinaire en général, mais pour la réunion fermée $\bar{\bigcup}$: $K_i \in \check{\mathcal{B}}$ entraine $\overline{\bigcup K_i} \in \check{\mathcal{B}}$, mais non $\bigcup K_i \in \check{\mathcal{B}}$. A cette question de notation près, les résultats précédents sont applicables. On devrait en principe distinguer les applications c.i.$\bar{\bigcup}$ sur $\tilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathcal{F}$, pour lesquelles

$$\psi\ (K \bar{\bigcup} \psi(K)) = \psi(K) \quad (K \in \tilde{\mathcal{K}} \text{ ou } \mathcal{F})$$

et les c.i.$\bigcup$ usuelles : toutefois, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{F}$ étant stables pour la réunion finie, $K \bar{\bigcup} \psi(K)$ ne diffère pas de la réunion usuelle $K \bigcup \psi(K)$, et on peut ignorer cette distinction.

Si l'idempotente ψ est s.c.s. sur $\tilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathcal{F}$, son domaine d'extensivité $\check{\mathcal{B}}$ est fermé dans $\tilde{\mathcal{K}}$ (ou $\mathcal{F}$).

En effet, si $K_n \to K$ avec $K_n \subset \psi(K_n)$, on trouve, ψ étant s.c.s.

$$K \subset \underline{\lim}\ \psi(K_n) \subset \overline{\lim}\ \psi(K_n) \subset \psi(K)$$

Donc $K \in \check{\mathcal{B}}$.

Notons d'ailleurs que $\check{\mathcal{B}}$, étant nécessairement <u>stable pour la réunion fermée</u> $\overline{\bigcup}$, en tant que domaine d'extensivité d'une idempotente sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$, sera fermé s'il est de plus <u>stable pour l'intersection décroissante</u>.

On sait que la condition : $\check{\mathcal{B}}$ fermé dans $\tilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathcal{F}$, est la condition nécessaire et suffisante pour que l'ouverture associée soit s.c.s. Ainsi : Si ψ est s.c.s., <u>la plus grande ouverture $\check{\psi}$ minorant ψ est elle-même s.c.s.</u>

<u>N.B.</u> : on devrait écrire $\overline{\check{\psi}}$ au lieu de $\check{\psi}$, puisque l'on a :

$$\check{\psi}(K) = \overline{\bigcup}\ \{K' : K' \in \check{\mathcal{B}},\ K' \subset K\}$$

avec la <u>réunion fermée</u> et non la réunion ordinaire, et de même $\overline{\check{\mathcal{B}}}$ au lieu de $\check{\mathcal{B}}$. Nous ne le ferons cependant pas, pour ne pas trop alourdir les notations : ici encore, d'ailleurs, cette distinction serait illusoire : en effet, $\check{\mathcal{B}}$ étant stable pour la réunion fermée, $\check{\psi}(K)$ est dans $\check{\mathcal{B}}$, de sorte que l'on a <u>aussi</u> :

$$\check{\psi}(K) = \bigcup\ \{K',\ K' \in \check{\mathcal{B}},\ K' \subset K\}$$

avec la <u>réunion ordinaire</u>.

Du <u>domaine d'invariance $\mathcal{B}$</u> de l'idempotente s.c.s. ψ, et de <u>son domaine d'anti-extensivité</u> $\hat{\mathcal{B}}$, on peut seulement dire qu'ils sont <u>stables pour l'intersection décroissante</u>.

En effet, $K_n \downarrow K$ entraine $\psi(K_n) \downarrow \psi(K)$ pour toute application s.c.s. croissante (c'est même, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application croissante soit s.c.s.). Il en résulte que l'on a encore $K = \psi(K)$ ou $K \supset \psi(K)$ si $K_n = \psi(K_n)$ ou $K_n \supset \psi(K_n)$.

<u>Si ψ est s.c.s., sa plus grande minorante c.i.$\cap$ est encore s.c.s</u>. En effet, la p.g.m c.i.$\cap$ de ψ peut s'écrire $\psi\,\check{\psi}$, et on a vu que $\check{\psi}$ était s.c.s. dès que ψ est s.c.s. (et d'autre part le produit de composition de deux applications croissantes s.c.s. est encore s.c.s.).

De la plus petite majorante c.i.$\cup$, on ne peut, semble-t-il, rien dire en général. Toutefois :

<u>Une application c.i.$\cup$ ψ sur $\widetilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathfrak{F}$ est s.c.s. si et seulement si $\check{\psi}$ et $\hat{\psi}$ sont s.c.s</u>.

En effet, soit ψ c.i.$\cup$ et s.c.s. On a déjà vu que $\check{\psi}$ est alors s.c.s. Mais, ψ étant c.i.$\cup$, on a ici $\hat{\psi} = I \cup \psi$, de sorte que $\hat{\psi}$ est aussi s.c.s. Réciproquement, si $\check{\psi}$ et $\hat{\psi}$ sont s.c.s., la c.i.$\cup$ $\psi = \check{\psi}\,\hat{\psi}$ est elle-même s.c.s. comme produit de composition de deux s.c.s. Résumons ces maigres résultats.

<u>THEOREME 8-1</u> - Si ψ est croissante, idempotente et s.c.s. sur $\widetilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathfrak{F}$, $\check{\psi}$ est s.c.s., ainsi que la p.g.m c.i.$\cap$ $\psi\,\check{\psi}$ de ψ. $\check{\mathcal{B}}$ est fermé, $\mathcal{B}$ et $\hat{\mathcal{B}}$ sont stables pour l'intersection décroissante. Pour qu'une c.i.$\cup$ ψ soit s.c.s. sur $\widetilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que $\check{\psi}$ et $\hat{\psi}$ soient toutes deux s.c.s.

On rappelle qu'une ouverture γ est s.c.s. sur $\widetilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathfrak{F}$ si et seulement si $\mathcal{B}_\gamma$ est fermé. De même, une fermeture φ est s.c.s. sur $\widetilde{\mathcal{K}}$ ou $\mathfrak{F}$ si et seulement si $\mathcal{B}_\varphi$ contient un système fondamental de voisinages de chacun de ses éléments : pour tout $B \in \mathcal{B}_\varphi$ et tout ouvert $G \supset B$, on peut trouver $B' \in \mathcal{B}_\varphi$ et un ouvert G' tel que $B \subset G' \subset B' \subset G$. Donc :

<u>COROLLAIRE</u> : Une c.i.$\cup$ ψ est s.c.s. si et seulement si $\check{\mathcal{B}}$ est fermé et $\hat{\mathcal{B}}$ contient un système fondamental de voisinages de chacun de ses éléments.

<u>Fermeture s.c.s. d'une τ-idempotente sur $\widetilde{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)$</u>.

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas $E = \mathbb{R}^n$ et aux τ-applications, pour la raison suivante : si f est une τ-application croissante sur $\tilde{\mathcal{K}}$, en posant pour tout ouvert G :

$$f_g(G) = \bigcup \{f(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$$

on a toujours $f_g(G) \in \mathcal{G}$, et f_g est alors s.c.i. sur $\mathcal{G}$. (Ce résultat ne subsiste pas en général si f n'est pas une τ-application). On sait de plus qu'en posant, pour $K \in \tilde{\mathcal{K}}$:

$$f_k(K) = \bigcap \{f_g(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$$

on a également $f_k(K) \in \tilde{\mathcal{K}}$, $f_k \supset f$. De plus, f_k est s.c.s. sur $\tilde{\mathcal{K}}$, et plus précisément, constitue la plus petite application croissante et s.c.s. sur $\tilde{\mathcal{K}}$ majorant f.

Plaçons-nous dans le cas d'une application ϕ croissante, idempotente sur $\tilde{\mathcal{K}}$ et compatible avec les translations : alors ϕ_g et ϕ_k sont elles-mêmes idempotentes , et ϕ_k , en particulier, est la plus petite idempotente s.c.s. majorant ϕ sur $\tilde{\mathcal{K}}$. Nous dirons que ϕ_k est la fermeture s.c.s. de l'idempotente ϕ.

En effet, soit ϕ τ-c.i. sur $\tilde{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^n)$. Posons pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\phi_g(G) = \bigcup \{\phi(K),\ K \subset G\}$$

On sait que $\phi_g(G) \in \mathcal{G}$, et ϕ_g est s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Notons que $K \subset G$ impliquant évidemment $\phi(K) \subset \phi_g(G)$, on a aussi :

(a) $$\phi_g(G) = \bigcup \{\phi(K) : \phi(K) \subset \phi_g(G)\}$$

Montrons que ϕ_g est idempotente. Nous savons que ϕ_g est s.c.i. Donc, pour G ouvert et K compact tel que $K \subset \phi_g(G)$, on peut trouver $K' \in \tilde{\mathcal{K}}$ avec $K' \subset G$ et $K \subset \phi_g(G')$ pour tout ouvert $G' \supset K'$.

Choisissons alors B ouvert borné (donc $\overline{B}$ compact) tels que :

$$K' \subset B \subset \overline{B} \subset G$$

Il vient alors :

$$K \subset \psi_g(B) \subset \psi(\overline{B}) \subset \psi_g(G)$$

On en déduit que :

$$\psi_g\ \psi_g(G) = \bigcup \{\psi(K),\ K \subset \psi_g(G)\}$$

se met sous la forme :

$$\psi_g\ \psi_g(G) = \bigcup \{\psi\ \psi(\overline{B}) = \psi(\overline{B})\ :\ \psi(\overline{B}) \subset \psi_g(G)\}$$

Compte tenu de (a), cela entraine :

$$\psi_g\ \psi_g(G) = \psi_g(G)$$

et ψ_g est idempotente.

Montrons maintenant <u>l'idempotence de ψ_k</u>. Plus généralement, soit ψ' τ-c.i. sur $\mathcal{G}$, et posons pour $K \in \mathcal{K}$:

$$\psi'_k(K) = \bigcap \{\psi'(G),\ G \supset K\}$$

Comme $G \supset K$ entraine $\psi'(G) \supset \psi'_k(K)$, on a aussi :

(a') $$\psi'_k(K) = \bigcap \{\psi'(G)\ :\ \psi'(G) \supset \psi'_k(K)\}$$

Maintenant, on sait que ψ'_k est s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Ainsi $G \supset \psi'_k(K)$ ($G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$) entraine $\exists\ G' \in \mathcal{G}$, $G' \supset K$ tel que l'on ait $\psi'_k(K') \subset G$ pour tout compact $K' \subset G'$. Choisissons B ouvert borné tel que

$$K \subset B \subset \overline{B} \subset G'$$

d'où :

$$\psi'_k(K) \subset \psi'(B) \subset \psi'_k(\overline{B}) \subset G$$

Alors

$$\psi'_k\ \psi'_k(K) = \bigcap \{\psi'(G),\ G \supset \psi'_k(K)\}$$

peut s'écrire

$$\psi'_k \, \psi'_k(K) = \cap \{\psi'(B) \; : \; \psi'(B) \supset \psi'_k(K)\}$$

Comparant avec (a'), on conclut :

$$\psi'_k \, \psi'_k(K) = \psi'_k(K)$$

et ψ'_k est idempotente.

D'où le :

THEOREME 8-2 - Soit ψ une τ-application croissante et idempotente sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, ψ_g la restriction à $\mathcal{G}$ de son plus petit prolongement sur $\mathcal{P}$, et ψ_k la restriction à $\mathcal{K}$ du plus grand prolongement de ψ_g sur $\mathcal{P}$. Alors ψ_g est croissante, idempotente et s.c.i. sur $\mathcal{G}$, et ψ_k est croissante, idempotente et s.c.s. sur $\mathcal{K}$. Plus précisément, ψ_k est la plus petite majorante c.i. s.c.s. de ψ sur $\mathcal{K}$.

De même, soit ψ' une τ-c.i. sur $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$, ψ'_k la restriction à $\mathcal{K}$ de son plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$, et ψ'_g la restriction à $\mathcal{G}$ du plus petit prolongement de ψ'_k sur $\mathcal{P}$. Alors ψ'_k est c.i. et s.c.s. sur $\mathcal{K}$, et ψ'_g c.i. et s.c.i. sur $\mathcal{G}$. Plus précisément, ψ'_g est la plus grande minorante c.i. et s.c.i. de ψ sur $\mathcal{G}$.

Prolongement d'une idempotente.

On peut se demander si une idempotente sur $\mathcal{K}$ admet des prolongements sur $\mathcal{P}$ tout entier. Nous allons voir qu'il en existe effectivement. Mais, comme il s'agit d'une question purement algébrique, où les notions topologiques ne jouent aucun rôle, nous avons tout intérêt à nous placer dans un cadre plus général.

Nous désignerons donc par $\mathcal{A}$ une partie complètement réticulée quelconque de $\mathcal{P}$. Nous noterons $\cup_a$ et $\cap_a$ le Sup et l'Inf dans $\mathcal{A}$, pour les distinguer du Sup et de l'Inf dans $\mathcal{P}$ qui restent désignés par $\cup$ et $\cap$. De même, pour une famille ϕ_i idempotente sur $\mathcal{A}$, $\vee_a \phi_i$ et $\wedge_a \phi_i$ désigneront la plus petite idempotente sur $\mathcal{A}$, majorant cette famille, et la plus grande idempotente la minorant.

Soit donc ϕ idempotente et croissante sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}_a$, $\check{\mathcal{B}}_a$ et $\hat{\mathcal{B}}_a$ ses attributs habituels au sens du treillis $\mathcal{A}$ (qui sont donc $\subset \mathcal{A}$). Nous désignerons par $\underset{\sim}{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ le plus petit et le plus grand prolongement croissant de ϕ sur $\mathcal{P}$, soit pour tout $P \in \mathcal{P}$:

$$\underset{\sim}{\phi}(P) = \cup \{\phi(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \subset P\}$$

$$\tilde{\phi}(P) = \cap \{\phi(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \supset P\}$$

En général $\underset{\sim}{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ ne sont nullement idempotents. Mais tout prolongement idempotent ϕ_i de ϕ - s'il en existe - devra vérifier

$$\underset{\sim}{\phi} \subset \phi_i \subset \tilde{\phi}$$

En fait, $\underset{\sim}{\phi}$ est <u>surpotent</u>, et $\tilde{\phi}$ est <u>sous-potent</u>.

En effet, raisonnons, par exemple, dans le cas de $\underset{\sim}{\phi}$. On a

$$\underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\phi}(P) = \cup \{\phi(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \subset \underset{\sim}{\phi}(P)\}$$

Comme $\phi(A) \in \mathcal{A}$ pour $A \in \mathcal{A}$, et que $A \subset P$ entraine $\phi(A) \subset \phi(P)$, on a d'autre part

$$\underset{\sim}{\phi}(P) = \cup \{\phi(A),\ A \in \mathcal{A},\ \phi(A) \subset \underset{\sim}{\phi}(P)\}$$

Or, la famille des $\phi(A)$, $\phi(A) \subset \underset{\sim}{\phi}(P)$ est une sous-famille de celle des $\phi(A)$, $A \subset \underset{\sim}{\phi}(P)$ (à savoir, celle des $A \in \mathcal{B}_a \subset \mathcal{A}$). On a donc

$$\underset{\sim}{\phi}(P) \subset \underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{\phi}(P)$$

Etant surpotente, $\underset{\sim}{\phi}$ admet <u>une plus petite majorante idempotente</u> sur $\mathcal{P}$ (voir paragraphe 5). Désignons-la par ϕ_-. De même, la sous-potente $\tilde{\phi}$ admet <u>une plus grande minorante idempotente</u> ϕ_+.

Toutefois, nous ne savons pas encore si ϕ_- et ϕ_+ coïncident sur $\mathcal{A}$ avec ϕ.

Mais, par hypothèse, $\mathcal{A}$ est une partie complètement réticulée de $\mathcal{P}$. Donc (théorème 3) il existe des idempotentes sur $\mathcal{P}$ admettant $\mathcal{A}$ comme domaine d'invariance. Soit η l'une d'entre elles (par exemple l'élément minimal $\eta = \eta_m = \tilde{I}_a \underset{\sim}{I}_a$, ou l'élément maximal $\eta_M = \underset{\sim}{I}_a \tilde{I}_a$ de $\mathcal{J}d(\mathcal{A})$). Alors, posant :

$$\phi' = \phi \circ \eta$$

on obtient effectivement <u>un prolongement de ϕ sur $\mathcal{P}$</u>: en effet, ϕ' est idempotente, car $\eta \circ \phi' = \phi'$, puisque ϕ' applique $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{A}$ et que η est invariante sur $\mathcal{A}$, et $\phi'(A) = \phi(\eta(A)) = \phi(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$. Du reste, $\eta(\mathcal{P}) = \mathcal{A}$ et $\phi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_a$ montrent que le domaine d'invariance de ϕ' est identique au domaine d'invariance $\mathcal{B}_a$ de ϕ.

Mais ce prolongement idempotent ϕ' de ϕ sur $\mathcal{P}$, majorant $\underset{\sim}{\phi}$ majore aussi la plus petite majorante idempotente ϕ_- de $\underset{\sim}{\phi}$: $\phi' \supset \phi_-$, et de même $\phi' \subset \phi_+$. Dès lors, pour $A \in \mathcal{A}$, on a $\phi(A) = \phi'(A) \supset \phi_-(A) \supset \underset{\sim}{\phi}(A) = \phi(A)$. Donc $\phi_-(A) = \phi(A)$, et de même $\phi_+(A) = \phi(A)$. Par suite ϕ_- et ϕ_+ sont effectivement des prolongements de ϕ, et ce sont donc le plus petit et le plus grand prolongement de ϕ sur $\mathcal{P}$.

Ainsi :

<u>THEOREME 8-3</u> - Pour toute partie $\mathcal{A}$ complètement réticulée de $\mathcal{P}$, toute idempotente croissante ϕ sur $\mathcal{A}$ admet un plus petit et un plus grand prolongement par une idempotente croissante sur $\mathcal{P}$.

9 - EXEMPLES.

Donnons, pour terminer, quelques exemples construits à partir d'une ouverture γ et d'une fermeture φ. D'après le critère 7, on a

$$\varphi \supset \varphi\,\gamma\,\varphi \supset \begin{matrix}\varphi\,\gamma\\ \gamma\,\varphi\end{matrix} \supset \gamma\,\varphi\,\gamma \supset \gamma$$

$\varphi\,\gamma\,\varphi$ et $\varphi\,\gamma$ etc.. sont idempotentes, $\varphi\,\gamma\,\varphi$ et $\varphi\,\gamma$ ont même domaine d'invariance, ainsi que $\gamma\,\varphi$ et $\gamma\,\varphi\,\gamma$; $\varphi\,\gamma\,\varphi$ est $\varphi\,\gamma \vee \gamma\,\varphi$, et de même $\gamma\,\varphi\,\gamma = \varphi\,\gamma \wedge \gamma\,\varphi$. Enfin, $\mathcal{B}_{\varphi\gamma} = \mathcal{B}_{\gamma\varphi}$ si et seulement si $\gamma\,\varphi \supset \varphi\,\gamma$, ou bien $\varphi\,\gamma\,\varphi = \gamma\,\varphi$, ou bien $\gamma\,\varphi\,\gamma = \varphi\,\gamma$.

De plus, <u>$\gamma\,\varphi$ et $\varphi\,\gamma\,\varphi$ sont c.i.$\cup$, $\varphi\,\gamma$ et $\gamma\,\varphi\,\gamma$ sont c.i.$\cap$.</u> Pour $\gamma\,\varphi$ et $\varphi\,\gamma$, on le sait déjà. Comme $I \cup \varphi\,\gamma\,\varphi \subset I \cup \varphi = \varphi$, on a $\varphi\,\gamma\,\varphi \subset \varphi\,\gamma\,\varphi \circ (I \cup \varphi\,\gamma\,\varphi) \subset \varphi\,\gamma\,\varphi \circ \varphi = \varphi\,\gamma\,\varphi$, d'où l'égalité, qui montre que $\varphi\,\gamma\,\varphi$ est c.i.$\cup$ et de même $\gamma\,\varphi\,\gamma$ est c.i.$\cap$.

Notons encore ceci : <u>si $\gamma\,\varphi$ est c.i.$\cap$ (donc à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$)</u> <u>$\varphi\,\gamma\,\varphi$ est lui aussi c.i.$\cap$ et c.i.$\cup$.</u> De même, <u>si $\varphi\,\gamma$ est c.i.$\cup$, $\gamma\,\varphi\,\gamma$ est lui aussi à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$.</u>

En effet, on a $\varphi\,\gamma\,\varphi \supset I \cap \varphi\,\gamma\,\varphi \supset I \cap \gamma\,\varphi$. Donc, si $\gamma\,\varphi$ est c.i.$\cap$:

$$\varphi\,\gamma\,\varphi \supset \varphi\,\gamma\,\varphi \circ (I \cap \varphi\,\gamma\,\varphi) \supset \varphi \circ \gamma\,\varphi \circ (I \cap \gamma\,\varphi) = \varphi\,\gamma\,\varphi$$

D'où l'égalité, qui montre que $\varphi\,\gamma\,\varphi$ est encore c.i.$\cap$.

Lorsque $\gamma\,\varphi$ et $\varphi\,\gamma$, donc aussi $\gamma\,\varphi\,\gamma$ et $\varphi\,\gamma\,\varphi$ sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$, <u>l'élément médian</u> α compris entre $\varphi\,\gamma\,\varphi$ et $\gamma\,\varphi\,\gamma$ est particulièrement facile à construire (voir paragraphe 6). D'après la formule (6-7), appliquée avec $f = \varphi\,\gamma\,\varphi$ et $g = \gamma\,\varphi\,\gamma$, on a

$$\alpha = \hat{g} \cap \hat{f}\,\check{f} = \check{f} \cup \check{g}\,\hat{g}$$

Mais f étant c.i.$\cap$ et g c.i.$\cup$, on a :

$$f = \hat{f}\,\check{f} = \check{f}\,\hat{f} \qquad g = \check{g}\,\hat{g} = \hat{g}\,\check{g}$$

$$\check{f} = I \cap f \qquad \hat{g} = I \cup g$$

Donc, dans ce cas, l'élément médian α sera :

$$\alpha = (I \cup g) \cap f = (I \cap f) \cup g$$

Soit, explicitement :

(9-1) $$\alpha = (I \cup \gamma\,\varphi\,\gamma) \cap \varphi\,\gamma\,\varphi = (I \cap \varphi\,\gamma\,\varphi) \cup \gamma\,\varphi\,\gamma$$

Notons encore que, lorsque γ et φ sont en <u>dualité</u> ($\gamma = \varphi^*$), l'élément α coïncidera avec son propre dual :

(9-2) $$\alpha = \alpha^*$$

En effet, avec $f = \varphi\,\gamma\,\varphi$ et $g = \gamma\,\varphi\,\gamma$, on aura encore $g = f^*$, et il est facile de voir que cela entraine $\hat{g} = (\check{f})^*$, $\check{g} = (\hat{f})^*$, d'où (9-2).

<u>Cas d'une ouverture et d'une fermeture topologiques</u>

Soit E un espace topologique, et pour $A \in \mathcal{P}(E)$:

$$\gamma(A) = \mathring{A} \quad , \quad \varphi(A) = \overline{A}$$

($\mathring{A}$ est l'interieur de A, et $\overline{A}$ son adhérence). Ici, donc :

$$\gamma\,\varphi(A) = \mathring{\overline{A}} \qquad \varphi\,\gamma(A) = \overline{\mathring{A}}$$

$$\gamma\,\varphi\,\gamma(A) = \mathring{\overline{\mathring{A}}} \qquad \varphi\,\gamma\,\varphi(A) = \overline{\mathring{\overline{A}}}$$

La condition $\gamma\,\varphi = \varphi\,\gamma\,\varphi$ n'est pas vérifiée, de sorte que $\mathfrak{I}d(\gamma\,\varphi)$ et $\mathfrak{I}d(\varphi\,\gamma)$ ne coïncident pas. Par contre, nous sommes ici dans le cas où $\gamma\,\varphi$, $\varphi\,\gamma$, $\gamma\,\varphi\,\gamma$ et $\varphi\,\gamma\,\varphi$ sont <u>toutes les quatre à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$</u> , d'où résulte, d'après (9-1), que <u>l'élément médian</u> α est défini par :

$$\alpha(A) = (A \cup \mathring{\overline{\mathring{A}}}) \cap \overline{\mathring{\overline{A}}} = (A \cap \overline{\mathring{\overline{A}}}) \cup \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

avec de plus :

$$\alpha = \alpha^*$$

d'après (9-2), puisque γ et φ sont en dualité.

En effet, il suffit de montrer que $\varphi\gamma$ est $\cup$-propre (d'où résultera, par dualité, que $\gamma\ \varphi$ est c.i.$\cap$, et aussi comme on l'a vu, que $\varphi\ \gamma\ \varphi$ et $\gamma\ \varphi\ \gamma$ sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$).

On a évidemment $\varphi\ \gamma\ o\ (I \cup \varphi\ \gamma) \supset \varphi\ \gamma$, et il faut montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire

$$\overline{\left(\overline{\mathring{A}} \cup A\right)^{\circ}} \subset \overline{\mathring{A}} \qquad (9\text{-}3)$$

Supposons que (9-3) ne soit <u>pas</u> vérifiée. Il existe donc un $x \in E$ avec

$$x \notin \overline{\mathring{A}} \quad \text{et} \quad x \in \overline{\left(\overline{\mathring{A}} \cup A\right)^{\circ}}$$

De $x \notin \overline{\mathring{A}}$ résulte que l'on peut trouver <u>un</u> voisinage ouvert V_x de x disjoint de $\mathring{A}$:

$$V_x \cap \overline{\mathring{A}} = \emptyset$$

Mais de $x \in \overline{\left(\overline{\mathring{A}} \cup A\right)^{\circ}}$, nous déduisons que <u>tout</u> voisinage ouvert V'_x de x rencontre $\left(\overline{\mathring{A}} \cup A\right)^{\circ}$, donc contient un point $y \in V'_x$ admettant un voisinage ouvert $W_y \subset V'_x$ et contenu dans $\overline{\mathring{A}} \cup A$. Prenons $V'_x = V_x$, disjoint de $\overline{\mathring{A}}$. Ainsi $y \in V_x$ admet un voisinage ouvert $W_y \subset V_x$ tel que $W_y \subset \overline{\mathring{A}} \cup A$. Comme V_x est, par hypothèse, disjoint de $\overline{\mathring{A}}$, cela entraine $W_y \subset A$. Donc $y \in \mathring{A}$. Or $y \in V_x$, et V_x, disjoint de $\overline{\mathring{A}}$ est a fortiori disjoint de $\mathring{A}$: on arrive ainsi à une contradiction. On conclut donc :

$$\overset{\overline{\circ}}{\widehat{\overline{\mathring{A}} \cup A}} \subset \overline{\mathring{A}}$$

d'où l'égalité : $\varphi\ \gamma$ estddonc c.i.$\cup$.

Ouverture et fermeture selon un segment de droite.

Prenons maintenant, sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, γ et φ définis par :

$$\gamma(A) = A_L \quad , \quad \varphi(A) = A^L$$

où L est un segment de droite. Ici encore, γ et φ sont en dualité, $\gamma\ \varphi$ et $\varphi\ \gamma$, donc aussi $\gamma\ \varphi\ \gamma$ et $\varphi\ \gamma\ \varphi$ sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$, et de plus la condition :

$$\gamma\ \varphi = \varphi\ \gamma\ \varphi$$

est elle-même vérifiée. Je laisse au lecteur le soin de vérifier ces propriétés, ce qui n'est du reste pas très difficile. Il en résulte que le domaine $\mathcal{B}$ d'invariance, commun à nos quatre applications, est constitué des ensembles à la fois ouverts et fermés selon L :

$$\mathcal{B} = \{A : A = A_L = A^L\}$$

L'élément médian α coïncide avec son dual

$$\alpha = \alpha^*$$

et, explicitement :

$$\alpha(A) = [A \cup ((A_L)^L)_L] \cap ((A^L)_L)^L$$

Toutefois, α n'appartient pas à $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$. Dans le cas de cet exemple très simple, il est possible de former directement des éléments $\phi \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$ coïncidant avec leur dual ($\phi = \phi^*$), dont les uns sont à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$, et les autres ne sont ni c.i.$\cup$ ni c.i.$\cap$.

Notons que l'on peut supposer $n = 1$. En effet, pour $n > 1$, A_L , A^L etc... apparaissent comme les réunions des $(A')_L$,$(A')^L$ etc... où A' décrit la famille des intersections de A par les droites parallèles au segment L.

Avec $n = 1$, A se présente comme une succession de segments (ouverts, fermés, ou mi-ouverts mi-fermés). En fait, le long de la droite réelle $\mathbb{R}$, on observe la succession de 3 types de constituants :

~ type 1 : segments de A contenant un translaté de L

~ type 2 : segments de A^c contenant un translaté de L

~ type 3 : segments où alternent des passées successives de A et de A^c dont aucune ne contient un translaté de L.

Voici une première idempotente ϕ possédant les propriétés annoncées ($\phi = \phi^*$, $\phi \in \mathcal{I}d(\mathcal{B})$, ϕ <u>à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$</u> .

Les passées de type 1 sont incorporées à $\phi(A)$, celle de type 2 au complémentaire $\complement\phi(A)$. Les passées de type 3 comprises entre deux passées de type 1 sont mises dans $\phi(A)$, celles qui sont comprises entre deux passées de type 2 sont mises dans $\complement\phi(A)$. Enfin, les passées de type 3 comprises entre une passée de type 1 et une passée de type 2 sont mises dans $\phi(A)$ ou dans $\complement\phi(A)$ selon que le <u>point médian</u> de la passée de type 3 tombe dans A ou dans A^c .

Voici maintenant une idempotente ϕ' autoduale, appartenant à $\mathcal{I}d(\mathcal{B})$, mais qui n'est cette fois-ci <u>ni c.i. $\cup$ ni c.i.$\cap$</u> :

On construit ϕ' exactement comme ϕ, sauf en ce qui concerne les passées de type 3 comprises entre une passée de type 1 et une passée de type 2. Dans ce cas, on met dans $\phi'(A)$ la moitié de la passée de type 3 adjacente à la passée de type 1 (point médian exclu), et l'autre moitié (point médian exclu) dans $\complement\phi'(A)$. Enfin, le point médian lui-même est mis dans $\phi'(A)$ ou dans $\complement\phi'(A)$ selon qu'il tombe dans A ou dans A^c .

Ouverture et fermeture selon un compact.

Nous nous plaçons maintenant dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ou dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$, et nous considérons l'ouverture et la fermeture s.c.s. définies par

$$\gamma(A) = A_B \quad , \quad \varphi(A) = A^B$$

où B est un compact fixe.

Les propriétés, cette fois, sont moins bonnes : en général, $\gamma\ \varphi$ n'est pas c.i.$\cap$ et $\varphi\ \gamma$ n'est pas c.i.$\cup$, et la condition $\gamma\ \varphi = \varphi\ \gamma\ \varphi$ n'est pas non plus vérifiée. Explicitement :

$$\gamma\ \varphi(A) = (A^B)_B \quad , \quad \varphi\ \gamma(A) = (A_B)^B$$

$$\varphi\ \gamma\ \varphi(A) = ((A^B)_B)^B \ , \quad \gamma\ \varphi\ \gamma(A) = ((A_B)^B)_B$$

Posons, pour abréger :

$$\psi = \varphi\ \gamma\ \varphi \quad ; \quad \psi' = \gamma\ \varphi\ \gamma$$

On s'attachera surtout à la construction de l'ouverture c.i.$\cap$ ψ $\check{\psi}$ de ψ (à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$), et de la fermeture c.i.$\cup$ ψ' $\hat{\psi}'$ de ψ' (c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$), à partir desquelles on forme sans peine l'élément médian autodual α .

De manière générale, la construction de l'ouverture c.i.$\cap$ d'une c.i.$\cup$ s.c.s. f se fait par limite séquentielle décroissante. Posant $f_o = f$ et, par récurrence :

$$f_{n+1} = f_n \circ (I \cap f)$$

on obtient une suite décroissante de c.i.$\cup$. En utilisant la semi-continuité supérieure, on peut montrer sans trop de peine que la limite

$$\psi = \lim \downarrow f_n = \cap f_n$$

est à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$, donc est l'ouverture c.i.$\cap$ de f.

Par contre, la construction de la fermeture c.i.$\cup$ d'une c.i.$\cap$ s.c.s. f' ne présente pas les mêmes facilités. Posant

$$f'_{n+1} = f'_n \circ (I \cup f)$$

on obtient une suite croissante, à l'égard de laquelle la semi-continuité supérieure ne nous garantit rien : il n'est donc pas certain que l'élément $\psi' = \overline{\bigcup} f'_n$ soit c.i.$\cup$.

Dans les applications pratiques, toutefois, on travaille sur une trame discrétisée et des ensembles constitués d'un <u>nombre fini</u> de points : il est alors certain que les suites monotones f_n et f'_n atteignent une limite idempotente <u>au bout d'un nombre fini d'itérations</u>.