Fontainebleau/CGMM N-751

SIMULATION DE FAI-k DISCRETES

G. MATHERON

Avril 1982

SIMULATION DE FAI-k DISCRETES

Par

G. MATHERON

Avril 1982

Dans ce qui suit, mon objectif consiste à trouver des procédés permettant de construire des simulations de FAI-k admettant des covariances généralisées en $|h|^\alpha$, par exemple de FAI-1 de type spline (covariance en $r^2 \log r$). Je me limite au cas unidimensionnel. De plus, le cas "continu" se révélant trop difficile, je me contente ici d'aborder le cas des FAI-k discrètes (i.e. prenant leurs valeurs sur l'ensemble des entiers $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Le fil directeur est le suivant : dans le cas continu, l'opérateur infinitésimal associé au groupe des translations est l'opérateur de dérivation. Dans le cas discret, on doit évidemment lui substituer l'opérateur d'accroissement $\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$. Le cas discret présente ainsi un avantage incontestable : alors que, dans le cas continu, la dérivée $Z'(x)$ n'existe pas toujours, l'accroissement d'ordre 1, dans le cas discret, est évidemment toujours défini. Dans le cas continu, en particulier, seules les FAI-k (k+1) fois différentiables apparaissent comme des primitives d' ordre (k+1) de fonctions aléatoires stationnaires, donc admettent une représentation de la forme

$$(1) \qquad Z(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} \; Y(\xi)d\xi$$

où $Y(x)$ est une FAST. Au contraire, dans le cas discret, toute FAI-k admet une représentation du type :

$$(2) \qquad Z_n = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-i-1}^{k} \; Y_n$$

($n \geq k+1$; $Z_0 = Z_1 = \ldots = Z_k = 0$: il s'agit de la représentation nulle en $n = 0, 1, \ldots k$. L'écriture (2) n'est d'ailleurs valable que pour $n > k$. Pour $n \leq 0$, on dispose d'une autre expression qu'il n'est pas utile d'expliciter ici) où Y_n est une FAST discrète. Les autres représentations se déduisent de (2) en ajoutant une expression du type $A_0 + A_1 n + \ldots + A_k n^k$. Elles constituent la classe des solutions de l'équation aux différences finies :

$$\Delta^{(k+1)} Z_n \doteq \sum_{p=o}^{k+1} (-1)^p \, C_{k+1}^p \, Z_{n+k+1-p} = Y_n$$

Représentation spectrale.

Il est commode d'utiliser la représentation spectrale de la FAST discrète Y_n, soit

$$Y_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \, \xi(d\theta)$$

où $\xi(d\theta)$ est une mesure aléatoire complexe auto-orthogonale : si $\chi(d\theta)$ est la mesure spectrale associée à $\xi(d\theta)$, la covariance de la FAST Y_n est alors :

(3) $$C_n = < Y_m \, Y_{n+m} > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \, \chi(d\theta)$$

(Théorème de Bochner) : les C_n sont donc les coefficients de Fourier d'une mesure ≥ 0 $\chi(d\theta)$ sur le cercle unité.

On a évidemment :

$$\Delta \, Y_n \equiv Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \, (e^{i\theta}-1) \, \xi(d\theta)$$

Ainsi, l'opérateur d'accroissement d'ordre 1 a pour transformée de Fourier l'opérateur multiplicatif $(e^{i\theta}-1)$. Plus généralement, l'accroissement Δ^{k+1} d'ordre k+1 aura pour homologue l'opérateur multiplicatif $(e^{i\theta}-1)^{k+1}$.

En sens inverse, l'opérateur de sommation d'ordre (k+1), qui transforme la FAST Y_n en une FAI-k Z_n devrait avoir pour homologue l'opérateur $1/(e^{i\theta}-1)^{k+1}$, soit formellement :

(4) $$Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{(e^{i\theta}-1)^{k+1}} \, \xi(d\theta)$$

Malheureusement, cette intégrale n'est pas convergente.

Toutefois, pour toute combinaison linéaire autorisée λ_n (i.e. vérifiant $\sum \lambda_n n^i = 0$, i.= 0,1,...k) l'écriture

$$(5) \qquad Z(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sum \lambda_n e^{in\theta}}{(e^{i\theta}-1)^{k+1}} \xi(d\theta)$$

a un sens (et correspond à la définition abstraite de la FAI-k), puisque la combinaison $\sum \lambda_n e^{in\theta}$ s'annule ainsi que ses k premières dérivées en $\theta = 0$. A la représentation particulière (2) on peut d'ailleurs associer l'écriture intégrale :

$$Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}-1 - C_n^1(e^{i\theta}-1) - \ldots - C_n^k(e^{i\theta}-1)^k}{(e^{i\theta}-1)^{k+1}} \xi(d\theta)$$

Cette expression est, cette fois, parfaitement convergente. On peut d'ailleurs la mettre sous la forme :

$$Z_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{n-k-1} C_n^{k+1+p} \; (e^{i\theta}-1)^p \; \xi(d\theta) \qquad (n \geq k+1)$$

qui conduit à <u>l'identité</u> :

$$(6) \qquad Z_n = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-i-1}^{k} \; Y_n = \sum_{p=0}^{n-k-1} C_n^{k+1+p} \; \Delta^{(p)} \; Y_0$$

<u>Les covariances généralisées</u>.

Examinons maintenant la <u>covariance généralisée</u> K_n de la FAI-k Z_n. K_n n'est définie qu'à un polynome pair près en n de degré $\leq 2k$. Il sera commode d'adopter systématiquement la <u>version de K_n qui s'annule en $n = 0, \pm 1, \ldots \pm k$</u>. La (pseudo-) mesure spectrale associée à K_n sera évidemment :

$$\frac{\chi(d\theta)}{|e^{i\theta}-1|^{2k+2}} = \frac{\chi(d\theta)}{[2(1-\cos\theta)]^{k+1}}$$

Par suite K_n est nécessairement de la forme :

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta - f_o(\theta) - n^2 f_2(\theta) - \ldots - n^{2k} f_{2k}(\theta)}{(2(1-\cos\theta))^{k+1}} \chi(d\theta)$$

où les fonctions $f_o, \ldots f_{2k}$ doivent être choisies de manière à assurer la convergence de l'intégrale. Si nous adoptons la version de K_n nulle en $n = 0, \pm 1, \ldots \pm k$, ces fonctions sont univoquement définies par les conditions

$$f_o(\theta) + \ldots + n^{2k} f_{2k}(\theta) = \cos n\,\theta \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots \pm k)$$

Ainsi, pour $k = 0$:

(7) $$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\,\theta - 1}{2(1-\cos\theta)} \chi(d\theta)$$

Pour $k = 1$:

(7') $$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\,\theta - 1 - n^2(\cos\theta - 1)}{4(1-\cos\theta)^2} \chi(d\theta)$$

Pour $k = 2$:

(7") $$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\,\theta - 1 - n^2(\cos\theta - 1) - \frac{n^2(n^2-1)}{12}(\cos 2\theta - 1 - 4(\cos\theta - 1))}{8(1-\cos\theta)^3} \chi(d\theta)$$

etc...

Relation entre K_n et C_n

D'un autre côté, on doit aussi pouvoir exprimer directement K_n à l'aide de la covariance C_n de la FAST Y_n : il s'agit cette fois de trouver la solution de l'équation aux différences :

$$(-1)^{k+1} \Delta^{(2k+2)} K_{n-k-1} = C_n$$

nulle en $n = 0 \pm 1, \ldots \pm k$ (le premier membre de cette équation contient l'opérateur $(-1)^{k+1} \Delta^{2k+2} K_{n-k-1}$, et non $\Delta^{2k+2} K_n$, puisque cet opérateur est la transformée de

$$(2(1-\cos\theta))^{k+1} = (e^{i\theta}-1)^{k+1} (e^{-i\theta}-1)^{k+1}$$

c'est-à-dire :

$$(-1)^{k+1}\ (e^{i\theta}-1)^{k+1}\ (1-e^{-i\theta})^{k+1}$$

Pour k = 0, il vient ainsi :

$$\begin{cases} 2\,K_n - K_{n-1} - K_{n+1} = C_n & (n > 1) \\ 2\,K_o - 2\,K_1 = C_o & \\ K_o = 0 & \end{cases}$$

dont la solution est (pour $n \geq 0$) :

$$(8) \qquad \begin{cases} K_o = 0 \\ K_1 = -\frac{1}{2}\,C_o \\ K_n = -\sum\limits_{p=o}^{n} (n-p)\ C_p + \frac{n}{2}\,C_o \end{cases}$$

(et $K_n = K_{-n}$ pour n négatif)

Il est commode d'introduire la fonction génératrice :

$$G(s) = \frac{1}{2}\,C_o + \sum_{n\geq 1} C_n\ s^n$$

convergente pour $|s| < 1$. On notera surtout que le terme C_o est affecté du coefficient 1/2. Cela se comprend, si l'on remarque que la densité spectrale (si elle existe et admet un développement convergent en série de Fourier) doit s'écrire :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\ e^{in\theta} \equiv C_o + 2\sum_{n\geq 1} C_n \cos n\theta = G(e^{i\theta}) + G(e^{-i\theta})$$

Alors, la solution (8) est associée à la fonction génératrice :

$$K(s) = \sum K_n\ s^n$$

(ici, $K_o = 0$, et il n'y a donc plus lieu d'affecter un coefficient 1/2 au terme K_o) qui se relie à G(s) selon la formule :

$$K(s) = \frac{-s}{(1-s)^2} \quad G(s)$$

En itérant cette opération, on voit que la solution nulle en $n = 0, \pm 1, .. \pm k$, pour $k \geq 0$ quelconque, sera associée à la fonction génératrice :

$$K(s) = \left(\frac{-s}{(1-s)^2}\right)^{k+1} \quad G(s)$$

ce qui donne, sous forme explicite :

(9) $$K_n = (-1)^{k+1} \sum_{p=o}^{n-k-1} C_{n+k-p}^{1+2k} \; C_p - \frac{(-1)^{k+1}}{2} \; C_{n+k}^{1+2k} \; C_o$$

ou, sous forme plus parlante :

(9') $$K_n = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \sum_{p=1}^{n-k-1} (n-p)[(n-p)^2-1]\ldots[(n-p)^2 - k^2] \; C_p + \frac{(-1)^{k+1}}{2(2k+1)!} \; n(n^2-1)..(n^2-k^2) \; C_o$$

Les CG polynomiales.

EXEMPLE : Si Y_n est un bruit blanc discret normé, on a $C_o = 1$ et $C_n = 0$, $n \geq 1$. La FAI-k Z_n que l'on en déduit par k+1 sommations, admet ainsi la covariance généralisée

(10) $$K_n = (-1)^{k+1} \; \frac{n(n^2-1)..(n^2-k^2)}{2(2k+1)!}$$

(qui diffère donc substantiellement de l'expression obtenue dans le cas continu, à savoir

$$(-1)^{k+1} \; \frac{|h|^{2k+1}}{2(2k+1)!} \;).$$

Ici, la mesure spectrale est $\chi(d\theta) = d\theta$. d'où les identités :

$$\begin{cases} -\dfrac{n}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos n\,\theta - 1}{2(1-\cos\theta)}\, d\theta \\[2ex] \dfrac{n(n^2-1)}{12} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos n\,\theta - 1 - n^2(\cos\theta - 1)}{4(1-\cos\theta)^2}\, d\theta \end{cases}$$

etc...

Version discrète des CG en $|h|^\alpha$ et $r^2 \log r$.

Telles sont les analogues discrets des covariances "polynomiales" en $|h|^{2k+1}$. Nous allons maintenant rechercher un analogue discret pour $|h|^\alpha$, α non entier, et aussi pour le terme $|h|^2 \log |h|$ qui correspond au cas des splines. Le mieux, ici, est de se laisser guider par le point de vue spectral. Au terme en $|h|^\alpha$ est associée une mesure spectrale du type $du/|u|^{1+\alpha}$. Or $|u|^2$ est associé à l'opérateur de dérivée seconde, dont l'équivalent discret est $2(1-\cos\theta)$. On est donc conduit à prendre comme mesure spectrale une expression du type

$$\frac{d\,\theta}{[2(1-\cos\theta)]^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$

à laquelle devrait correspondre une CG K_n équivalente à n^α pour n grand.

Pour $\beta > -\frac{1}{2}$, $(2(1-\cos\theta))^\beta\, d\theta$ est une vraie mesure spectrale, et il existe donc une covariance stationnaire :

$$C_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [2(1-\cos\theta)]^\beta\, e^{in\theta}\, d\theta$$

Il est facile de construire une FAST admettant cette covariance. De fait, de la relation

$$2-2\cos\theta = (1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})$$

on déduit que Y_n doit être de la forme :

$$Y_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta}(1-e^{-i\theta})^\beta \ \xi(d\theta)$$

où $\xi(d\theta)$ est la mesure orthogonale associée à un bruit blanc discret normé ε_n. Le développement :

$$(1-e^{-i\theta})^\beta = \sum \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\ n!} \ e^{-in\theta}$$

montre que Y_n est la régularisée :

$$Y_n = \sum_{p=o}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\beta)}{\Gamma(-\beta)\ p!} \ \varepsilon_{n-p}$$

du bruit blanc ε_n, avec des coefficients qui sont ceux du développement de $(1-x)^\beta$ (pour n grand, ces coefficients sont équivalents à $1/n^{1+\beta}$). On pourra donc effectivement construire des simulations de cette FAST.

Calcul de $C_n(\beta)$.

Passons au calcul de $C_n(\beta)$. Le plus simple est sans doute de partir du développement (absolument convergent si $\beta > 0$) :

$$2(1-\cos\theta)^\beta = (1-e^{i\theta})^\beta \ (1-e^{-i\theta})^\beta$$

$$= \sum_{n,n'} \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\ n!} \ \frac{\Gamma(n'-\beta)}{\Gamma(-\beta)\ n'!} \ e^{i(n-n')\theta}$$

$$= \sum_p \ C_p(\beta) \ e^{ip\beta}$$

d'où, par identification

$$C_p(\beta) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma(n+p-\beta)\ \Gamma(n-\beta)}{(\Gamma(-\beta))^2\ (n+p)!\ n!}$$

Pour simplifier cette expression, nous pouvons utiliser la formule classique donnant la valeur en x = 1 de l'hypergéométrique $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$, soit :

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,n!} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

Ceci conduit à

$$C_p(\beta) = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(-\beta)} \; \frac{\Gamma(p-\beta)}{\Gamma(1+p+\beta)}$$

On peut ensuite jouer sur les relations connues :

$$\begin{cases} \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\mathrm{Sin}\;\pi x} \\ \Gamma(1+2x) = \dfrac{2^{2x}}{\sqrt{\pi}}\;\Gamma(\frac{1}{2}+x)\;\Gamma(1+x) \end{cases}$$

pour obtenir diverses expressions équivalentes :

$$\begin{cases} C_n(\beta) = -\dfrac{\mathrm{Sin}\;\pi\beta}{\pi}\;\Gamma(1+2\beta)\;\dfrac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1+n+\beta)} \\ C_n(\beta) = \dfrac{2^{2\beta}}{\sqrt{\pi}}\;\dfrac{\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(-\beta)}\;\dfrac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1+n+\beta)} \end{cases}$$

La symétrie $C_n = C_{-n}$ apparait dans l'expression :

$$\Big\{\; C_n(\beta) = (-1)^n \frac{\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\beta+n)\,\Gamma(1+\beta-n)}$$

$C_n(\beta)$ dépend de n de manière algébriquement simple :

$$\Big\{\; C_n(\beta) = \frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(1+\beta)}\;\frac{(n-\beta-1)(n-\beta-2)\;\ldots\;(-\beta)}{(n+\beta)(n+\beta-1)\;\ldots\;(1+\beta)}$$

Pour $\beta = p$ <u>entier</u>, il vient

$$C_n(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ (-1)^n\, C_{2p}^{p-n} & (n \leq p) \end{cases}$$

Pour $\beta = p + \frac{1}{2}$ <u>demi entier</u>, on trouve :

$$C_n(p+\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^{p+1}}{\pi} \; \frac{(2\,p+1)!}{(n^2-\frac{1}{4})\,..\,(n^2-(p+\frac{1}{2})^2)}$$

Nous nous intéresserons surtout au cas $\beta = \frac{1}{2}$, pour lequel :

$$\boxed{C_n(\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{\pi}\;\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}}$$

Passage aux CG.

D'après la relation de départ :

$$(11) \qquad C_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [2(1-\cos\,\theta)]^{\beta}\; e^{in\theta}\; d\theta$$

nous savons que ces quantités vérifient l'équation aux différences finies

$$2\; C_n(\beta) - C_{n+1}(\beta) - C_{n-1}(\beta) = C_n(\beta+1)$$

D'autre part, l'expression obtenue pour $C_n(\beta)$:

$$(12) \qquad C_n(\beta) = -\frac{\mathrm{Sin}\;\pi\beta}{\pi}\;\Gamma(1+2\beta)\;\frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(1+n+\beta)}$$

reste valable, par prolongement analytique, tant que l'intégrale (11) est convergente, soit $\beta > -\frac{1}{2}$. En $\beta = -1/2$, plus généralement pour β demi-entier négatif, des singularités apparaissent, sur lesquelles nous reviendrons. Pour β entier négatif, on retrouve l'expression (10) de la covariance généralisée polynomiale :

$$C_n(-k-1) = (-1)^{k+1}\;\frac{n(n^2-1)\;\ldots\;(n^2-k^2)}{2(2k+1)!}$$

Ceci suggère;donc que, pour β négatif (non demi entier), soit $\beta = -\alpha$, $\alpha > 0$, l'expression :

$$A_n(\alpha) \equiv C_n(-\alpha) = \frac{\mathrm{Sin}\;\pi\alpha}{\pi}\;\Gamma(1-2\alpha)\;\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(1+n-\alpha)}$$

constitue une <u>covariance généralisée</u>. De fait, les A_n vérifient :

$$2\, A_n(\alpha) - A_{n+1}(\alpha) - A_{n-1}(\alpha) = A_n(\alpha-1) = C_n(1-\alpha)$$

Or $C_n(1-\alpha)$ est une covariance stationnaire dès que $1-\alpha > -\frac{1}{2}$, soit $\alpha < 3/2$: donc, pour <u>$\alpha < 3/2$, $A_n(\alpha)$ est une CG d'ordre 0</u>, et $-A_n(\alpha)$ est un variogramme, à savoir :

$$A_n(\alpha) - A_o(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{\cos n\theta - 1}{(2(1-\cos\theta))^{\alpha}}\, d\theta \qquad (\alpha < 3/2)$$

Par une récurrence immédiate, il apparait de même que $A_n(\alpha)$ est une CG d'ordre k pour $\alpha < \frac{3}{2} + k$. Par exemple :

$$A_n(\alpha) - A_o(\alpha) - n^2(A_1(\alpha) - A_o(\alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \frac{\cos n\theta - 1 - n^2(\cos\theta - 1)}{(2(1-\cos\theta))^{\alpha}}\, d\theta$$

est une CG d'ordre 1, pourvu que $\alpha < \frac{5}{2}$, etc...

<u>Cas de α demi entier.</u>

Reste à examiner le cas où α est demi entier. Soit, tout d'abord $\alpha = \frac{1}{2}$. Pour $3/2 > \alpha > \frac{1}{2}$, nous avons une CG d'ordre 0; nulle en n = 0, en prenant :

$$K_n = A_n(\alpha) - A_o(n) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\, \Gamma(1-2\alpha) \left[\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(1+n-\alpha)} - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \right]$$

En $\alpha = \frac{1}{2}$, le terme entre crochets s'annule, tandis que $\Gamma(1-2\alpha)$ tend vers l'infini. Il est facile de voir que, pour $\alpha \downarrow \frac{1}{2}$, on obtient la limite suivante :

$$(13) \qquad \boxed{K_n(-\tfrac{1}{2}) = -\frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p - \frac{1}{2}}} \qquad (n > 0, \text{ et } K_o = 0)$$

qui est donc encore une CG d'ordre 0, à savoir

$$K_n(-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta - 1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \, d\theta$$

Pour n grand, $K_n(-\frac{1}{2})$ est équivalent à $-\frac{1}{\pi}\log n$: il s'agit donc de <u>la version discrétisée du schéma DeWijsien</u>.

De même, le cas $\alpha = 3/2$ se traite par passage à la limite $\alpha \downarrow 3/2$ à partir de $A_n(\alpha) - A_o(\alpha) - n^2(A_1(\alpha)-A_o(\alpha))$. Le calcul donne ici :

$$(14) \qquad \boxed{K_n(-\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{3n^2}{2} + (n^2 - \tfrac{1}{4})\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p-\frac{1}{2}}\right]} \qquad (n > 0)$$

Il s'agit donc cette fois d'une CG d'ordre 1, équivalente à $n^2 \log n/2\pi$ lorsque n est grand : c'est donc <u>la version discrétisée du modèle en $h^2 \log h$</u>.

Relativement au terme :

$$C_n(1/2) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1/4}$$

$K_n(-\frac{1}{2})$ constitue la solution nulle en $n = 0$ de l'équation aux différences habituelles

$$2\,K_n(-\tfrac{1}{2}) - K_{n-1}(-\tfrac{1}{2}) - K_{n+1}(-\tfrac{1}{2}) = C_n(\tfrac{1}{2})$$

et de même

$$2\,K_n(-\tfrac{3}{2}) - K_{n-1}(-\tfrac{3}{2}) - K_{n+1}(-\tfrac{3}{2}) = K_n(-\tfrac{1}{2})$$

Partant donc de la FAST associée à la covariance $C_n(1/2)$, soit :

$$Y_n = \varepsilon_n - 2\sum_{p=1}^{\infty} 2^{-2p} \frac{(2p-2)!}{(p-1)!\;p!}\,\varepsilon_{n-p}$$

on obtiendra, par sommations successives, d'abord la FAI-0 :

$$Z_n^{(o)} = \sum_{p=o}^{n-1} Y_p$$

associée au variogramme quasi DeWijsien $-K_n(-\frac{1}{2})$, puis la FAI-1 :

$$Z_n^{(1)} = \sum_{p=o}^{n-1} Z_p^{(o)}$$

qui constitue la version discrétisée des "splines", avec comme covariance généralisée $K_n(-3/2)$.

Améliorations.

Dans l'expression de $A_n(\alpha)$ figure le rapport $\Gamma(n+\alpha)/\Gamma(1+n-\alpha)$, dont l'expression asymptotique pour n grand est :

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(1+n-\alpha)} = n^{2\alpha-1}\left[1 - \frac{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)}{6\ n^2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha-1)(2\alpha-3)(5\alpha+1)}{360\ n^4} + \ldots\right]$$

La CG correspondante diffère donc du modèle "polynomial" $n^{2\alpha-1}$ par un terme d'ordre 2 en $1/n$. Est-il possible de corriger cette différence, au moins à l'ordre 2? C'est en fait assez facile.

De manière générale, si Z_n est une représentation d'une FAI-k discrète, on obtient une deuxième FAI-k en posant

$$Z_n' = Z_n + a(Z_{n+1} - Z_n)$$

Sous forme spectrale :

$$\frac{\chi'(d\theta)}{(2(1-\cos\theta))^{k+1}} = |1 + a(e^{i\theta}-1)|^2 \frac{\chi(d\theta)}{(2(1-\cos\theta))^{k+1}}$$

Or, on trouve

$$|1 + a(e^{i\theta}-1)|^2 = 1 + a(a-1)\ 2(1-\cos\theta)$$

et donc :

$$\frac{\chi'(d\theta)}{(2(1-\cos\theta))^{k+1}} = \frac{\chi(d\theta)}{(2(1-\cos\theta)^{k+1}} + a(a-1)\frac{\chi(d\theta)}{(2(1-\cos\theta))^{k}}$$

soit

$$K_n' = K_n + a(a-1)\,[2\,K_n - K_{n-1} - K_{n+1}]$$

En particulier, si $K_n = A_n(\alpha)$ (à un polynome pair près en n), on trouvera :

$$K_n' = A_n(\alpha) + a(a-1)\,A_n(\alpha-1)$$

Compte tenu de l'expression :

$$A_n(\alpha) = \frac{\text{Sin}\,\alpha\pi}{\pi}\,\Gamma(1-2\alpha)\,\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(1+n-\alpha)}$$

il vient

$$A_n(\alpha-1) = -\frac{2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{n^2-(\alpha-1)^2}\,A_n(\alpha)$$

soit

$$K_n' = A_n(\alpha)\left[1 - \frac{2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{n^2-(\alpha-1)^2}\,a(a-1)\right]$$

donc, à un facteur constant près :

$$K_n' = n^{2\alpha-1}\left(1 - \frac{\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)}{6\,n^2} + \dots\right)\left(1 - \frac{2(\alpha-1)(2\alpha-1)}{n^2}\,a(a-1) + \dots\right)$$

$$= n^{2\alpha-1}\left[1 - \frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)}{n^2}\left(\frac{\alpha}{6} + 2a(a-1)\right) + \dots\right]$$

On annulera donc le terme en $1/n^2$ en prenant pour a l'une des racines de l'équation :

$$a^2 - a + \frac{\alpha}{12} = 0$$

soit

$$a = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{\alpha}{3}}\right)$$

La correction est donc possible pour $\alpha \leq 3$. Le cas $\alpha = 2$ est particulièrement intéressant. Pour $\alpha = 2$, en effet, on a

$$K_n = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

Prenant $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}})$, soit $a^2 - a + \frac{1}{6} = 0$, on trouve :

$$K_n' = \frac{n(n^2-1)}{12} + \frac{1}{6}\frac{n}{2} = \frac{n^3}{12}$$

La correction est <u>exacte</u> (et non pas seulement approchée). Il est donc très facile de former des FAI-1 discrètes admettant la CG $K_n = n^3/12$.

Dans le cas $\alpha = 3/2$, on trouve :

$$a(a-1) + \frac{1}{8} = 0 \quad , \quad a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}})$$

et il vient

$$K_n' = K_n(-\tfrac{3}{2}) - \tfrac{1}{8} K_n(-\tfrac{1}{2})$$

soit, d'après (13) et (14), et à un terme près en n^2 :

$$K_n' = \frac{n^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p-1/2}$$

ce qui constitue une meilleure approximation de $n^2 \log n$, en comparaison de (14).

<u>N.B</u>. Plutôt que $Z_n' = Z_n + a(Z_{n+1}-Z_n)$, on peut adopter l'expression

$$Z_n'' = Z_n + b(Z_n - Z_{n-1})$$

(qui n'oblige pas, à n donné, d'anticiper le terme Z_{n+1}). On trouve cette fois

$$K_n'' = K_n + b(b+1)(2K_n - K_{n+1} - K_{n-1})$$

et la correction à l'ordre $1/n^2$ conduit à prendre pour b l'une des racines de l'équation

$$b^2 + b + \frac{\alpha}{12} = 0$$