Fontainebleau/CGMM N-759

SURPOTENTES et SOUS-POTENTES

G. MATHERON Mai 1982

SURPOTENTES ET SOUS-POTENTES

G. MATHERON

Table des Matières

SURPOTENTES ET SOUSPOTENTES

Par

G. MATHERON

Mai 1982

Ce texte constitue la suite de la Note intitulée "Les applications idempotentes". C'est pourquoi le premier paragraphe porte le n° 10 (la Note précédente comportait neuf paragraphes). Les notations restent les mêmes, ainsi que la numérotation des formules ou des théorèmes : la référence au Théorème 4-3 se rapporte au Théorème 4 de paragraphe 3 de la Note précédente, tandis que le Théorème 10-1 concerne la présente.

10 - LE TREILLIS $\mathcal{P}'$ DES APPLICATIONS CROISSANTES.

Nous désignerons par $\mathcal{P}'$ l'ensemble des applications croissantes (non nécessairement idempotentes) définies sur le treillis $\mathcal{P}$. Muni de l'ordre :

$$f \subset g \quad \text{si} \quad f(A) \subset g(A) \qquad \forall A \in \mathcal{P}$$

$\mathcal{P}'$ est un treillis complet : toute famille f_i dans $\mathcal{P}'$ admet un Sup, noté $\cup f_i$, et un Inf, noté $\cap f_i$, défini par :

$$(\cup f_i)(A) = \cup (f_i(A)) \qquad (A \in \mathcal{P})$$

$\mathcal{P}'$ est aussi muni d'une opération appelée composition et notée o, définie par :

$$(f \circ g)(A) = f[g(A)] \qquad (A \in \mathcal{P})$$

Mais, le plus souvent, nous écrirons f g au lieu de f o g.

Le Sup $\bigcup$ et l'Inf $\bigcap$ sont distributifs à gauche pour cette loi de composition, mais non à droite :

$$(10\text{-}1) \quad \begin{cases} (\bigcup f_i) \circ g = \bigcup (f_i\, g) \\ (\bigcap f_i) \circ g = \bigcap (f_i\, g) \end{cases}$$

Mais on a seulement :

$$(10\text{-}2) \quad \begin{cases} g \circ (\bigcup f_i) \supset \bigcup g\, f_i \\ g \circ (\bigcap f_i) \subset \bigcap g\, f_i \end{cases}$$

Cette dissymétrie caractérise une structure algénrique très particulière. Nous pourrions, à partir de là, développer la théorie purement algébrique d'un treillis complet muni de ces axiomes. Mais il en résulterait certaines longueurs, et je préfère raisonner dans le cas où $\mathcal{P}'$ est effectivement l'espace des applications croissantes sur un premier treillis complet $\mathcal{P}$.

L'application $f \to f\, f$ de $\mathcal{P}'$ dans lui-même sera appelée auto-composition. Les éléments invariants pour l'auto-composition sont évidemment les idempotentes. Nous introduirons quatre autres opérations :

- Surcomposition à gauche : $f \to (I \bigcup f) \circ f = f \bigcup f\, f$
- Sous-composition à gauche : $f \to (I \bigcap f) \circ f = f \bigcap f\, f$
- Surcomposition à droite : $f \to f \circ (I \bigcup f)$
- Sous-composition à droite : $f \to f \circ (I \bigcap f)$

(I est l'application identique).

Comme $(I \bigcup f) \circ f = f \bigcup f\, f$, d'après (10-1), on a $(I \bigcup f)f = f$ si et seulement si $f\, f \subset f$. Ainsi :

Une application $f \in \mathcal{P}'$ est sous-potente si et seulement si elle est invariante pour la surcomposition à gauche. De même, f est surpotente si et seulement si elle est invariante pour la sous-composition à gauche .

Par définition, on dira que $f \in \mathcal{P}'$ est $\cup$-propre (ou est une application c.$\cup$) si f est invariante pour la surcomposition à droite. De même, $f \in \mathcal{P}'$ sera dite $\cap$-propre (ou c.$\cap$) si elle est invariante pour la sous-composition à droite.

En résumé :

$$\begin{cases} f \text{ sous potente} & \Leftrightarrow \quad f = (I \cup f) \circ f \\ f \; c \cup & \Leftrightarrow \quad f = f \circ (I \cup f) \\ f \text{ surpotente} & \Leftrightarrow \quad f = (I \cap f) \circ f \\ f \; c \cap & \Leftrightarrow \quad f = f \circ (I \cap f) \end{cases}$$

Du fait de la dissymétrie entre les relations (10-1) et (10-2), nous trouvons le résultat suivant :

THEOREME 10-1 - Toute application c $\cup$ est sous-potente, et toute application c $\cap$ est surpotente. Mais les énoncés réciproques ne sont pas vrais.

En effet, si f est c $\cup$, par exemple, on a d'après (10-2) :

$$f = f \circ (I \cup f) \supset f \cup f\,f \supset f\,f$$

et donc f est sous-potente. Mais il existe évidemment des sous-potentes qui ne sont pas $\cup$-propres.

THEOREME 10-2 - La classe des sous-potentes (respectivement surpotentes) est stable pour $\cap$ (resp. pour $\cup$), pour l'auto-composition, et pour les surcompositions ainsi que les sous-compositions à droite et à gauche.

En effet, si les f_i sont sous-potentes, par exemple, on trouve :

$$(\cap f_i) \circ (\cap f_i) = \bigcap_i (f_i \circ \cap f_j) \subset \bigcap_i f_i\, f_i \subset \cap f_i$$

De même, pour f sous-potente, $f\,f \subset f$ entraine $f\,f \circ f\,f \subset f\,f$, et l'auto-composée $f\,f$ est sous-potente. Comme

$$(I \cup f) \circ f = f \quad , \quad (I \cap f) \circ f = f\,f$$

les sous et sur-composées à gauche sont encore sous-potentes. De même :

$$f \circ (I \cup f) \circ f \circ (I \cup f) = f \circ ((I \cup f) \circ f) \circ (I \cup f) =$$

$$= f \circ f \circ (I \cup f) \subset f \circ (I \cup f)$$

$$f \circ (I \cap f) \circ f \circ (I \cap f) = f \circ ((I \cap f) \circ f) \circ (I \cap f) =$$

$$= f\,f\,f \circ (I \cap f) \subset f \circ (I \cap f)$$

Les c $\cup$ et les c $\cap$ ont des propriétés moins bonnes, sauf si <u>le treillis $\mathcal{P}$ est modulaire</u>.

<u>THEOREME 10-3</u> - La classe des c $\cup$ (resp. c $\cap$) est stable pour $\cap$ (resp. pour $\cup$), pour l'auto-composition, et pour la sur et la sous-composition <u>à gauche</u> et pour la surcomposition (resp. la sous-composition) à droite, mais non en général pour la sous-composition (resp. sur-composition) à droite.

Toutefois, <u>si le treillis $\mathcal{P}$ est modulaire</u>, la classe des c $\cup$ et celle des c $\cap$ sont stables pour les deux surcompositions et les deux sous-compositions.

La première partie de l'énoncé est triviale. La seconde ne fait que ré-énoncer le <u>lemme 4-1</u> : la démonstration de ce lemme ne fait nulle part intervenir l'idempotence, mais seulement la croissance de ϕ. De même, elle n'utilise pas réellement la distributivité du treillis $\mathcal{P}$:

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

mais seulement la propriété un peu plus faible (ou modularité) :

$$a \supset b \Rightarrow a \cap (b \cup c) = b \cup (a \cap c)$$

Naturellement, une application croissante f est idempotente si et seulement si elle est à la fois surpotente et sous-potente. D'après le théorème 10-1, une application à la fois c $\cup$ et c $\cap$ est donc idempotente, c'est à-dire à la fois c.i.$\cup$ et c.i.$\cap$ (nous écrirons pour abréger c.i.$\cup\cap$), et réciproquement. En fait, la classe stable pour $\cup$ (resp. pour $\cap$) engendrée par les idempotentes coïncide avec la classe des surpotentes (resp. des sous-potentes). De même, la classe stable pour $\cup$ (resp. pour $\cap$) engendrée par les c.i. $\cup\cap$ coïncide avec la classe des c $\cap$ (resp. des c $\cup$).

Plus précisément, on a le résultat suivant, qui évoque la génération des fonctions convexes ou concaves à partir des fonctions affines :

THEOREME 10-4 - Toute surpotente est l'union de ses minorantes idempotentes. Toute sous-potente est l'intersection de ses majorantes idempotentes. Toute c $\cap$ est l'union de ses minorantes c.i. $\cup\cap$. Toute c $\cup$ est l'intersection de ses majorantes c.i. $\cup\cap$.

En effet, soit par exemple f surpotente. Pour tout $A \in \mathcal{P}$, considérons l'application ϕ_A définie en posant pour chaque $A' \in \mathcal{P}$:

$$\phi_A(A') = \begin{cases} f(A) & \text{si } A' \supset A \text{ ou si } A' \supset f(A) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

ϕ_A est idempotente (immédiat) et minore f. En effet, si $A' \supset A$, on a bien $\phi_A(A') = f(A) \subset f(A')$. Si $A' \supset f(A)$, la surpotence de f donne :

$$\phi_A(A') = f(A) \subset f(f(A)) \subset f(A').$$

D'où $\psi_A \subset f$. Comme de plus $\psi_A(A) = f(A)$, on en conclut :

$$f = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} \psi_A$$

Donc f est bien l'union de ses minorantes idempotentes.

Si maintenant f est c $\cap$, on a par définition :

$$f(A) = f(A \cap f(A))$$

Nous poserons cette fois :

$$\psi_A(A') = \begin{cases} f(A) & \text{si } A' \supset A \cap f(A) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

ψ_A minore f : en effet, si $A' \supset A \cap f(A)$, on a :

$$\psi_A(A') = f(A) = f[A \cap f(A)] \subset f(A')$$

ψ_A est c.i. $\cup\cap$: si $A' \not\supset A \cap f(A)$, on a $\psi_A(A') = \emptyset$ et donc

$$\psi_A(A' \cap \psi_A(A')) = \emptyset = \psi_A(A')$$

$$\psi_A(A' \cup \psi_A(A')) = \psi_A(A')$$

et, si $A' \supset A \cap f(A)$, on a $\psi_A(A') = f(A)$ et

$$\psi_A(A' \cap \psi_A(A')) = \psi_A(A' \cap f(A)) = f(A)$$

$$\psi_A(A' \cup \psi_A(A')) = \psi_A(A' \cup f(A)) = f(A)$$

Donc, ψ_A est c.i. $\cup\cap$.

Comme enfin $\psi_A(A) = f(A)$, on trouve bien :

$$f = \bigcup_{A \in \mathcal{P}} \psi_A$$

et f est l'union de ses minorantes c.i.$\cup\cap$.

11 - LES ENVELOPPES SOUS-POTENTES, SURPOTENTES, c $\cup$ et c $\cap$.

A la classe des sous-potentes, stable pour $\cap$, est associée une fermeture F, ou fermeture sous-potente, sur $\mathcal{P}'$: pour toute $f \in \mathcal{P}'$, F f est la plus petite majorante sous-potente de f. D'après le théorème 10-4, F f est aussi l'intersection des majorantes idempotentes de f.

De même, à la classe des surpotentes, stable pour $\cup$, est associée l'ouverture surpotente G : pour toute $f \in \mathcal{P}'$, G f est la plus grande minorante surpotente de f, ou encore la réunion des minorantes idempotentes de f.

A la classe des c $\cup$, stable pour $\cap$, nous associons de même la fermeture c $\cup$ $F_{\cup}$: pour toute $f \in \mathcal{P}'$, $F_{\cup}$ f est la plus petite majorante c $\cup$ de f, ou encore l'intersection de ses majorantes c.i.$\cup\cap$.

Enfin, la classe des c $\cap$, stable pour $\cup$, engendre l'ouverture $G_{\cap}$: $G_{\cap}$ f est la plus grande minorante c $\cap$ de f, ou la réunion de ses minorantes c.i.$\cup\cap$.

Ces quatre enveloppes se laissent caractériser comme au début du paragraphe 5. Considérons par exemple le cas de la fermeture sous-potente F :

Pour toute f croissante, F f est la plus petite sous-potente majorant f, ou, si l'on veut, l'intersection de la classe $\mathcal{C}$ (stable pour $\cap$) des majorantes sous-potentes de f ; il s'agit en somme d'une caractérisation "per descensum" à partir du plus grand élément de $\mathcal{P}'$ (qui est l'application constante e : $e(A) = E$ $\forall A \in \mathcal{P}$, où E est le plus grand élément de $\mathcal{P}$).

On peut aussi caractériser F f "per ascensum" à partir de f. Désignons, en effet, par $\mathcal{C}'$ la classe stable pour $\cup$ et l'auto-composition engendrée par f (noter que $\mathcal{C}'$ est également stable pour la surcomposition à gauche, puisque $(I \cup f') \circ f' = f' \cup f'f'$). Comme la classe $\mathcal{C}''$ des minorantes de F f est elle-même une classe stable pour $\cup$ et pour l'auto-composition (car $g \subset F f$ entraine $g g \subset F f \circ F f \subset F f$, $F f$ étant sous-potente), et contient f, on a $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}''$. Soit alors $f_0 = \cup \{f', f' \in \mathcal{C}'\}$ le plus grand élément de $\mathcal{C}'$. Il appartient à $\mathcal{C}'$ (classe stable pour $\cup$), donc aussi à $\mathcal{C}''$, soit $f_0 \subset F f$. Comme $\mathcal{C}'$ est stable pour l'auto-composition, $f_0 f_0 \in \mathcal{C}'$, et par suite $f_0 f_0 \subset f_0$, puisque f_0 est le plus grand élément de $\mathcal{C}'$. Donc f_0 est sous-potente. Cela implique $f_0 \supset F f$ (puisque $f_0 \supset f$). Comme l'inclusion inverse est vraie, on conclut $f_0 = F f$.

Dans le cas particulier où f est <u>surpotente</u>, on peut remplacer $\mathcal{C}''$ par la classe $\mathcal{C}'''$ des minorantes surpotentes de $F f$: elle est encore stable pour $\cup$ et l'auto-composition (Th. 10-2 et sous-potence de $F f$) et contient f : donc $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}'''$: ce qui veut dire que la classe $\mathcal{C}'$ stable pour $\cup$ et l'autocomposition engendrée par la surpotente f <u>ne contient que des surpotentes</u> : En particulier, son plus grand élément f_0 est encore surpotent. Comme $f_0 = F f$ est aussi souspotente, $F f$ est ici en fait <u>idempotente</u>. En particulier, pour f croissante quelconque, $G f$ est surpotente, et donc $F G f$ est idempotente. De même $G F f$ est idempotente.

<u>THEOREME 11-1</u> - Pour toute application croissante f, la fermeture sous-potente $F f$ est le plus grand élément de la classe stable pour $\cup$ et l'auto-composition engendrée par f. De même, l'ouverture surpotente $G f$ est le plus petit élément de la classe stable pour $\cap$ et l'auto-composition engendrée par f. De plus, si f est surpotente, $F f$ est idempotente. Si f est sous-potente, $G f$ est idempotente.

Ainsi, $F G f$ et $G F f$ étant idempotentes, ces enveloppes vérifient :

$$G F G = F G \quad ; \quad F G F = G F$$

D'après le critère 7, ces applications $F G$, $G F$, etc.., idempotentes sur $\mathcal{P}'$, admettent le même domaine d'invariance $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}'$, à savoir l'ensemble des idempotentes sur $\mathcal{P}$. D'autre part, la classe des surpotentes coïncide avec $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ (classe stable pour $\cup$ engendrée par $\mathcal{B}$) et celle des sous-potentes avec $\widetilde{\mathcal{B}}$. Nous reportant au Théorème 3 et au scholie 1, nous voyons que la classe $\mathcal{B}$ des idempotentes sur $\mathcal{P}$, munie de l'ordre induit par $\subset$, est complètement réticulée (ce que nous savions déjà). Mais de plus, puisque $F = \tilde{I}_{\mathcal{B}}$ et $G = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$, nous voyons aussi que F G est le plus petit élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, et G F son plus grand élément.

Ainsi, si l'on pose la question : existe-t-il des opérateurs H sur $\mathcal{P}'$ transformant toute application croissante f en une idempotente H f en vérifiant la condition

$$H\,\psi = \psi \quad \text{si } \psi \text{ est idempotente}$$

(ce qui implique H H f = H f, i.e. l'idempotence de H), la réponse est : oui, il en existe, par exemple G F et F G, et de plus on a nécessairement

$$F\,G \subset H \subset G\,F$$

De plus, d'après le Théorème 5-3, la famille constituée de ces opérateurs H (c'est-à-dire $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$) est complètement réticulée. Pour toute famille H_i il existe un Sup et un Inf donnés par :

$$\begin{aligned} \vee\, H_i &= H \circ \bigcup H_i \\ \wedge\, H_i &= H \circ \bigcap H_i \end{aligned} \qquad (H \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}))$$

Examinons maintenant le cas de la fermeture c $\bigcup$, soit $F_{\bigcup}$. Per descensum, $F_{\bigcup}$ f (pour f croissante quelconque) est l'intersection de la classe $\mathcal{C}$ (stable pour $\bigcap$) des majorantes c $\bigcup$ de f. Voyons la caractérisation per ascensum : ici, la classe $\mathcal{C}'$ sera <u>la classe stable pour $\bigcup$ et pour la surcomposition à droite engendrée par f</u> (i.e. : $f' \in \mathcal{C}' \Rightarrow f' \circ (I \cup f') \in \mathcal{C}'$). Comme $F_{\bigcup}$ f est $\bigcup$-propre et majore f, la classe $\mathcal{C}''$ de ses minorantes est stable pour $\bigcup$ et pour la surcomposition à droite, et contient f : donc $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}''$. Ainsi, en désignant par f_o le plus grand élément de $\mathcal{C}'$, on a $f_o \subset F_{\bigcup}$ f. Mais $\mathcal{C}'$ est stable pour la surcomposition à droite. Donc $f_o \circ (I \cup f_o) \in \mathcal{C}'$. Cela implique $f_o \circ (I \cup f_o) \subset f_o$, puisque f_o est le plus grand élément de $\mathcal{C}'$. Par suite

$f_o = f_o\, o(I \cup f_o)$: f_o est c $\cup$. Mais cela entraine $f_o \supset F_\cup f$, et donc l'égalité

$$f_o = F_\cup f$$

Dans le cas où f est c $\cap$, il n'ést pas vrai en général que $F_\cup f$ soit c.i.$\cup\cap$, sauf toutefois si le treillis $\mathcal{P}$ est modulaire. Supposons donc $\mathcal{P}$ modulaire. Dans ce cas, on peut remplacer $\mathcal{C}$"par la classe $\mathcal{C}$''' des minorantes c $\cap$ de $F_\cup f$. D'après le Théorème 10-3, $\mathcal{C}$''' est stable pour la surcomposition à droite, et pour la réunion. Comme $\mathcal{C}$''' contient f, elle contient $\mathcal{C}$'. Donc $f_o = F_\cup f$ est encore c $\cap$; il est par suite c.i.$\cup\cap$.

THEOREME 11-2 - Pour toute application f croissante, la fermeture c $\cup$, soit $F_\cup f$ est le plus grand élément de la classe stable pour $\cup$ et la surcomposition à droite engendrée par f. De même, l'ouverture c $\cap$, $G_\cap f$ est le plus petit élément de la classe stable pour $\cap$ et la sous-composition à droite engendrée par f.

Si de plus le treillis $\mathcal{P}$ est modulaire, $F_\cup f$ est c.i.$\cup\cap$ dès que f est c $\cap$, et $G_\cap f$ est c.i.$\cup\cap$ dès que f est c $\cup$.

COROLLAIRE 1 - Supposons $\mathcal{P}$ modulaire. Alors, pour toute c $\cap$ (resp. c $\cup$) $f \in \mathcal{P}$' la classe stable pour $\cup$ (resp. $\cap$) et la surcomposition (resp. sous-composition) à droite engendrée par f ne contient que des c $\cap$ (resp. des c $\cup$).

Dans le même ordre d'idée, si f est c $\cap$ (donc surpotente), son enveloppe sous-potente F f est c.i.$\cap$: elle est idempotente (puisque f est surpotente, Th. 11-1). D'autre part, F f o(I $\cap$ F f) est encore sous-potente (Th. 10-2) et majore f o(I $\cap$ f) = f. On a donc F f o(I $\cap$ F f) $\supset$ F f, et par suite l'égalité : F f est c $\cap$:

COROLLAIRE 2 - Si f est c $\cap$, son enveloppe sous-potente F f est c.i.$\cap$. De même, si f est c $\cup$, son enveloppe surpotente G f est c.i.$\cup$.

(Noter que ce corollaire 2 ne suppose pas la modularité du treillis $\mathcal{P}$).

D'après le Théorème, et sous l'hypothèse de modularité de $\mathcal{P}$, on aura :

$$G_\cap F_\cup G_\cap = F_\cup G_\cap \quad ; \quad F_\cup G_\cap F_\cup = G_\cap F_\cup$$

Désignant cette fois par $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}'$ l'ensemble des c.i.$\cup\cap$, on voit que $\mathcal{B}$ est le domaine d'invariance des diverses idempotentes $F_\cup G_\cap$ etc... sur $\mathcal{P}'$. Compte tenu du Théorème 10-4 ci-dessus, on a d'ailleurs ici encore :

$$F_\cup = \tilde{I}_{\mathcal{B}} \quad ; \quad G_\cap = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$$

Donc $GG_\cap F_\cup$ et $F_\cup G_\cap$ sont respectivement le plus grand et le plus petit élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$. Tout opérateur H sur $\mathcal{P}'$ transformant les f de $\mathcal{P}'$ en c.i.$\cup\cap$ H f, et tel que $H\phi = \phi$ dès que ϕ est c.i.$\cup\cap$ est donc nécessairement compris entre $G_\cap F_\cup$ et $F_\cup G_\cap$:

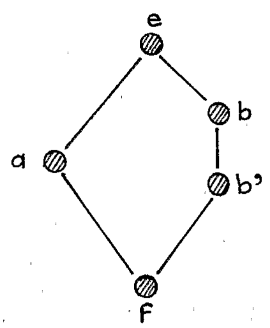
$$F_\cup G_\cap \subset H \subset G_\cap F_\cup$$

Si f est, par exemple, c $\cap$, il n'y a plus, en fait, qu'<u>un seul résultat possible</u> : à savoir $H f = F_\cup f$. En effet, $f = G_\cap f$, et, puisque $G_\cap = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$, $H G_\cap = H \underset{\sim}{I} = \tilde{I}\, \underset{\sim}{I} = F_\cup G_\cap$ (Scholie 1 du Théorème 3), de sorte que :

$$H f = F_\cup f \qquad \forall H \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}) \quad \text{pour f c} \cap$$

$$H f = G_\cap f \qquad \forall H \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}) \quad \text{pour f c} \cup$$

<u>REMARQUE</u> - Dans l'énoncé du Théorème 11-2, <u>la condition de modularité ne peut pas être affaiblie</u>. Considérons, en effet, le treillis $\mathcal{P}_0$ à cinq éléments : e (élément maximum), f (plus petit élément), $b \supset b'$ et a non comparable à b et à b'. Prenons $\mathcal{B} = \{b, b'\}$. Tout élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ transforme e, b, b' et f comme suit :



e → b

b → b

b' → b'

f → b'

Il n'y a donc que deux éléments ψ et ψ' dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, caractérisés par

$$\psi(a) = b \quad ; \quad \psi'(a) = b'$$

ψ est c.i.$\cup$, mais,non c.i.$\cap$; ψ' est c.i.$\cap$, mais non c.i.$\cup$. Ainsi ψ' est la p.g.m. c.i.$\cap$ de ψ, et ψ la p.p.M c.i.$\cup$ de ψ' : ce qui contredit le lemme 4-1 et le Théorème 4-3, aussi bien que le Théorème 11-2. De même, $\psi \circ (I \cap \psi) = \psi'$ n'est pas c.i.$\cup$, et $\psi' \circ (I \cup \psi') = \psi$ n'est pas c.i.$\cap$: de sorte que les classes des c $\cup$ et des c $\cap$ ne sont pas stables pour la surcomposition à droite ou sous-composition à droite.

Or, on montre en algèbre qu'un treillis $\mathcal{P}$ est non modulaire si et seulement si il contient un sous-treillis isomorphe à $\mathcal{P}_0$.

(N.B. : par sous-treillis de $\mathcal{P}$, les algébristes entendent une partie de $\mathcal{P}$ stable pour $\cup$ et $\cap$ finis).

Il suffit alors de considérer la classe $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ sur $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ avec $\mathcal{B} = \{b, b'\}$ pour voir que la classe des c $\cup$ ne peut pas être stable pour la sous-composition à droite (il suffit de considérer les restrictions à $\mathcal{P}_0$). Ainsi la modularité du treillis $\mathcal{P}$ est nécessaire et suffisante pour cette stabilité.

12 - CARACTERISATION DE CES ENVELOPPES

Pour aller plus loin, nous aurons besoin d'associer à toute f croissante ses domaines d'invariance, d'extensivité et d'anti-extensivité. Les définitions sont les mêmes que pour les idempotentes :

$$\hat{\mathcal{B}}_f = \{f \subset I\} \quad ; \quad \check{\mathcal{B}}_f = \{f \supset I\}$$

$$\mathcal{B}_f = \check{\mathcal{B}}_f \cap \hat{\mathcal{B}}_f = \{f = I\}$$

(noter cependant que l'on n'a plus, en général, $f = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}_f}$ sur $\hat{\mathcal{B}}_f$

comme dans le cas des idempotentes. Cette égalité subsiste, toutefois, comme nous le verrons, si f est surpotente).

On vérifie sans peine que le domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_f$ est stable pour $\cap$, et de même $\check{\mathcal{B}}_f$ stable pour $\cup$. Il est donc naturel d'introduire la fermeture $\hat{f}$ associée à $\hat{\mathcal{B}}_f$, et de même l'ouverture $\check{f}$ associée à $\check{\mathcal{B}}_f$.

En fait, $\hat{f}$ est la plus petite fermeture majorant f, et $\check{f}$ la plus grande ouverture minorant f.

Notons que toute application extensive g (i.e. $g \supset I$) est surpotente (car $g \supset I$ entraine $g\,g \supset g$), et de même toute application anti-extensive est sous-potente. Donc, si $g \supset I$, $F\,g$ est idempotente (Th. 11-1) et constitue par suite la plus petite fermeture majorant g. Ainsi, pour f croissante quelconque, la plus petite fermeture majorant f sera $F(I \cup f)$, et la plus grande ouverture minorant f sera $G(I \cap f)$. Nous devons donc établir les égalités :

$$\hat{f} = F(I \cup f) \quad ; \quad \check{f} = G(I \cup f)$$

Or, soit φ une fermeture quelconque. Si $\varphi \supset f$, on a $f \subset I = \varphi$ sur $\mathcal{B}_\varphi$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_f$, d'après la définition même du domaine d'anti-extensivité. Mais inversement, $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_f$ signifie $f \subset I$ sur $\mathcal{B}_\varphi$, et cela entraine que f est majorée par le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}$ de l'identité sur $\mathcal{B}_\varphi$, soit $f \subset \varphi$. Ainsi $\varphi \supset f$ équivaut à $\mathcal{B}_\varphi \subset \hat{\mathcal{B}}_f$, c'est-à-dire à $\varphi \supset \hat{f}$. On a donc bien $\hat{f} = F(I \cup f)$. Enonçons :

THEOREME 12-1 - Pour f croissante quelconque, la fermeture $\hat{f}$ associée au domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_f$ est la plus petite fermeture majorant f. De même, la plus grande ouverture minorant f coïncide avec l'ouverture $\check{f}$ associée à $\check{\mathcal{B}}_f$. Soit :

$$\hat{f} = F(I \cup f) \quad ; \quad \check{f} = G(I \cup f)$$

Nous allons en déduire un critère important :

Critère 12 - Soit f croissante quelconque. Alors :

f est sous-potente	si et seulement si	$f = \hat{f}\, f$
f est c $\bigcup$	"	$f = f\, \hat{f}$
f est surpotente	"	$f = \check{f}\, f$
f est c $\bigcap$	"	$f = f\, \check{f}$

En effet, pour que f soit sous-potente, il faut et il suffit que l'on ait $f[f(A)] \subset f(A)$, c'est-à-dire $f(A) \in \hat{\mathcal{B}}_f$ pour tout $A \in \mathcal{P}$, soit encore $\mathrm{Im}(f) \subset \hat{\mathcal{B}}_f$: mais cela équivaut à $f = \hat{f}\, f$.

Comme $\hat{f}$ est $\supset f$, $\hat{f}\, f$ est d'ailleurs toujours sous-potente (car $\hat{f}\, f\, \hat{f}\, f \subset \hat{f}\, \hat{f}\, \hat{f}\, f = \hat{f}\, f$). De même, $\hat{f}$ étant c.i.$\bigcup$ et majorant $f\, \hat{f}$, on a toujours

$$f\, \hat{f} \subset f\, \hat{f}\, o(I \cup f\, \hat{f}\,) \subset f\, \hat{f}\, o(I \cup \hat{f}) = f\, \hat{f}$$

et l'égalité : $f\, \hat{f}$ est donc toujours c $\bigcup$, et $f\, \hat{f} = f$ entraine que f est c $\bigcup$.

Inversement, si f est c $\bigcup$, on trouve :

$$(I \cup f)\; o\; (I \cup f) = I \cup f \cup f\; o(I \cup f) = I \cup f$$

Ainsi, $I \cup f$ étant idempotente, extensive et croissante, est une fermeture. C'est donc la plus petite fermeture majorant f, soit, d'après le Théorème 12-1, $\hat{f} = I \cup f$. Il en résulte :

$$f\, \hat{f} = f\; o(I \cup f) = f$$

puisque f est c $\bigcup$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE - Soit f croissante. Alors :

f est sous-potente	si et seulement si	elle est de la forme	$f = \varphi\, g$
f est c $\bigcup$	"	"	$f = g\, \varphi$
f est surpotente	"	"	$f = \gamma\, g$
f est c $\bigcap$	"	"	$f = g\, \gamma$

pour une application croissante g quelconque et une fermeture $\varphi \supset g$ ou une ouverture $\gamma \subset g$.

Ces conditions sont nécessaires, d'après le critère. Inversement, si $\varphi \supset g$, on a aussi $\varphi\,\varphi = \varphi \supset \varphi\, g$, donc

$$\varphi\, g\, \varphi\, g \subset \varphi\, \varphi\, g = \varphi\, g$$

et $\varphi\, g$ est sous-potente. De même, les inégalités

$$g\,\varphi \subset g\,\varphi\; o(I \cup g\,\varphi) \subset g\,\varphi\; o(I \cup \varphi) = g\,\varphi$$

montrent que $g\,\varphi$ est $c \cup$.

On en déduit :

THEOREME 12-2 - Pour toute f croissante, la fermeture sous-potente, la fermeture $c \cup$, l'ouverture surpotente et l'ouverture $c \cap$ sont données par :

$$F f = \hat{f} f \quad ; \quad F_{\cup} f = f \hat{f}$$

$$G f = \check{f} f \quad ; \quad G_{\cap} f = f \check{f}$$

Démontrons, par exemple, la première de ces relations. Si $g \in \mathcal{P}'$ est sous-potente, on a $g = \hat{g}\, g$ d'après le critère 12. Si de plus $g \supset f$, on a aussi $\hat{g} \supset \hat{f}$ (puisque $\hat{g}$ majore f, et que $\hat{f}$ est la plus petite fermeture majorant f), donc $g = \hat{g}\, g \supset \hat{f}\, f \supset f$: $\hat{f}\, f$, qui est sous-potente, (corollaire du critère) est donc la plus petite majorante sous-potente de f.

Comme $F \subset F_{\cup}$ et $G \supset G_{\cap}$, ce théorème implique que l'on a toujours les inégalités :

$$f \check{f} \subset \check{f} f \subset f \subset \hat{f} f \subset f \hat{f}$$

qui ne font rien d'autre que porter à la limite les inégalités triviales :

$$f\; o(I \cap f) \subset (I \cap f) o\; f \subset f \subset (I \cup f) o\; f \subset f\; o(I \cup f)$$

En particulier :

COROLLAIRE - $f \in \mathcal{P}'$ est idempotente si et seulement si $\check{f} f = \hat{f} f$. Elle est c.i.$\cup\cap$ si et seulement si $f \check{f} = f \hat{f}$, c.i.$\cup$ si et seulement si $\check{f} f = f \hat{f}$ et c.i.$\cap$ si et seulement si $f \check{f} = \hat{f} f$.

13 - STABILITE DU DOMAINE D'INVARIANCE

Je me propose, dans ce paragraphe, de montrer qu'une application croissante quelconque f a le même domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$ que les quatre enveloppes $f\hat{f}$, $\hat{f}f$, $f\check{f}$ et $\check{f}f$. Montrons d'abord que $\mathcal{B}_f$ n'est jamais vide.

Posons d'abord un lemme.

LEMME 13-1 - Les domaines d'extensivité et d'anti-extensivité sont stables pour f :

$$f(\hat{\mathcal{B}}_f) \subset \hat{\mathcal{B}}_f \quad ; \quad f(\check{\mathcal{B}}_f) \subset \check{\mathcal{B}}_f$$

En effet, soit $B \in \hat{\mathcal{B}}_f$, c'est-à-dire $f(B) \subset B$. Comme f est croissante, il en résulte $f[f(B)] \subset f(B)$, c'est-à-dire $f(B) \in \hat{\mathcal{B}}_f$.

D'autre part, $\hat{\mathcal{B}}_f$ n'est pas vide (il contient au moins le plus grand élément E de $\mathcal{P}$) et il est stable pour $\cap$. On a donc encore $B_0 \in \hat{\mathcal{B}}_f$ en posant $B_0 = \cap \hat{\mathcal{B}}_f$. D'après le lemme, il en résulte $f(B_0) \in \hat{\mathcal{B}}_f$. Mais $f(B_0) \subset B_0$ (puisque $B_0 \in \hat{\mathcal{B}}_f$). Comme B_0 est le plus petit élément de $\hat{\mathcal{B}}_f$, il en résulte $f(B_0) = B_0$, soit $B_0 \in \mathcal{B}_f$. Comme $\mathcal{B}_f \subset \hat{\mathcal{B}}_f$, on voit même que B_0 est le plus petit élément de $\mathcal{B}_f$. Ainsi :

<u>Le domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$ n'est pas vide. Il contient toujours au moins un plus petit et un plus grand élément, à savoir les éléments</u> (éventuellement confondus) :

$$\cap\, \hat{\mathcal{B}}_f \quad \text{et} \quad \cup\, \check{\mathcal{B}}_f$$

En fait, quand nous aurons montré que f admet le même domaine d'invariance que ses enveloppes, il apparaîtra que $\mathcal{B}_f$ est le domaine d'invariance commun à f, F f, G f, etc.., mais aussi à G F f etc.. Or G F f est une <u>idempotente</u> (Th. 11-1). Par suite, d'après le Théorème 3, il en résultera que $\mathcal{B}_f$ est <u>complètement réticulé</u> (pour l'ordre induit par $\subset$).

Considérons d'abord les enveloppes supérieures $F\, f = \hat{f}\, f$ et $F_\cup\, f = f\, \hat{f}$. Comme $\hat{f} \supset f$ entraîne $\hat{f} = \hat{f}\, \hat{f} \supset f\, \hat{f}$, on a :

$$\hat{f} \supset f\, \hat{f} \supset \hat{f}\, f \supset f$$

Par suite $\hat{f}$ est encore la plus petite fermeture majorant $f\, \hat{f}$ et $\hat{f}\, f$. D'après le Théorème 12-1, cela entraine que f et les deux enveloppes supérieures $f\, \hat{f}$ et $\hat{f}\, f$ ont <u>le même domaine d'anti-extensivité</u> $\hat{\mathcal{B}}_f$.

Les domaines d'invariance $\mathcal{B}_{f\hat{f}}$ et $\mathcal{B}_{\hat{f}f}$ des deux enveloppes sont donc contenus dans $\hat{\mathcal{B}}_f$. Mais, sur $\hat{\mathcal{B}}_f$, on a $f = f\, \hat{f}$ (puisque $\hat{f} = I$ sur $\hat{\mathcal{B}}_f$), donc aussi $f = \hat{f}\, f = f\, \hat{f}$ (à cause des inégalités $f \subset \hat{f}\, f \subset f\, \hat{f}$), de sorte que chacune des égalités $\hat{f}\, f(A) = A$ ou $f\, \hat{f}(A) = A$ (qui entraine $A \in \hat{\mathcal{B}}_f$) a lieu si et seulement si $f(A) = A$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{B}_f$.

<u>THEOREME 13-1</u> - Toute application croissante f admet le même domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$ que ses quatre enveloppes $f\, \hat{f}$, $\hat{f}\, f$, $\check{f}\, f$ et $f\, \check{f}$. De plus, f, $\hat{f}\, f$ et $f\, \hat{f}$ ont le même domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_f$, sur lequel elles coïncident. De même, f, $\check{f}\, f$ et $f\, \check{f}$ ont le même domaine d'extensivité $\check{\mathcal{B}}_f$ sur lequel elles coïncident.

<u>COROLLAIRE 1</u> - $\mathcal{B}_f$ est complètement réticulé pour l'ordre induit par $\subset$.

<u>COROLLAIRE 2</u> - $G\, F f$, $F\, G\, f$, $G_\cap\, F\, f$, $G\, F_\cup\, f$, $F\, G_\cap\, f$, $F_\cup\, G\, f$, $G_\cap\, F_\cup\, f$ et $F_\cup\, G_\cap f$ sont dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_f)$.

Pour aller un peu plus loin, introduisons les classes $\underset{\sim}{\mathcal{B}}_f$ et $\tilde{\mathcal{B}}_f$ (classes stables respectivement pour $\cup$ et pour $\cap$ engendrées par $\mathcal{B}_f$), ainsi que l'ouverture $\underset{\sim}{I}$ et la <u>fermeture</u> $\tilde{I}$ associées. On a évidemment $\underset{\sim}{I} \subset f \subset \tilde{I}$, puisque $f = I$ sur $\mathcal{B}_f$ (et que, par suite, f est compris entre le plus petit et le plus grand prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_f$). Il en résulte :

(13-1) $\quad \underset{\sim}{I} \subset \check{f} \subset f\,\check{f} \subset \check{f}\,f \subset f \subset \hat{f}\,f \subset f\,\hat{f} \subset \hat{f} \subset \tilde{I}$

Maintenant, d'après le Théorème 13-1, $F_\cup f = f\,\hat{f}$ a même domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$ et d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_f$ que f elle-même. Sa plus grande minorante surpotente, qui est $G\,F_\cup f = G(f\hat{f})$ a encore le même domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$ (d'après le même Théorème 13-1), et un domaine d'anti-extensivité qui <u>contient</u> $\hat{\mathcal{B}}_f$ (puisque $G\,F_\cup f$ minore $F_\cup f$). Or $G\,F_\cup f$ est <u>idempotente</u> (et même c.i.$\cup$, d'après le Corollaire 2 du Théorème 11-2). Elle vérifie donc la relation (4-1'), soit $G\,F_\cup f = \underset{\sim}{I}$ sur le domaine d'anti-extensivité de $G\,F_\cup f$, lequel contient $\hat{\mathcal{B}}_f$. On a donc :

(13-2) $$G\,F_\cup f = \underset{\sim}{I} \text{ sur } \hat{\mathcal{B}}_f$$

et de même $$F\,G_\cap f = \tilde{I} \text{ sur } \check{\mathcal{B}}_f$$

Comme $F_\cup f \supset F\,f \supset f$, on a d'ailleurs les inégalités :

$$G\,F_\cup f \supset G\,F\,f \supset G\,f = \check{f}\,f \supset f\,\check{f} \supset \check{f} \supset \underset{\sim}{I}$$

et de même

$$G\,F_\cup f \supset G_\cap F_\cup f \supset G_\cap F\,f \supset G_\cap f = f\,\check{f} \supset \check{f} \supset \underset{\sim}{I}$$

de sorte que ces inégalités deviennent des égalités sur $\hat{\mathcal{B}}_f$:

$$\begin{cases} G\,F_\cup f = G_\cap F\,f = G\,F\,f = G_\cap F_\cup f = \check{f}\,f = f\,\check{f} = \check{f} = \underset{\sim}{I} \text{ sur } \hat{\mathcal{B}}_f \\ F\,G_\cap f = F_\cup G\,f = F\,G\,f = F_\cup G_\cap f = \hat{f}\,f = f\,\hat{f} = \hat{f} = \tilde{I} \text{ sur } \check{\mathcal{B}}_f \end{cases}$$

De (13-2) résulte évidemment :

$$(G\ F_{\cup}\ f)\ \hat{f} = \underset{\sim}{I}\ \hat{f}$$

d'où résulte $\underset{\sim}{I}\ \hat{f} \supset G\ F_{\cup}\ f$ (car $\hat{f} \supset I$). Mais $F_{\cup}\ f = f\ \hat{f}$, et donc $\underset{\sim}{I}\ \hat{f} \subset f\ \hat{f} = F_{\cup}\ f$. Comme $\underset{\sim}{I}\ \hat{f}$ est idempotente, cela implique $\underset{\sim}{I}\ \hat{f} \subset G\ F_{\cup}\ f$. D'où l'égalité :

$$\underset{\sim}{I}\ \hat{f} = G\ F_{\cup}\ f$$

La plus grande minorante surpotente de $F_{\cup}\ f$ est donc $\underset{\sim}{I}\ \hat{f}$. Elle est c.i.$\cup$, en accord avec le corollaire 2 du Théorème (11-2) et de plus :

$$\underset{\sim}{I}\ \hat{f} \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}_f)$$

d'où résulte en particulier que $\underset{\sim}{I}$ applique $\hat{\mathcal{B}}_f$ sur $\mathcal{B}_f$:

$$\mathcal{B}_f = \underset{\sim}{I}\ (\hat{\mathcal{B}}_f)$$

Il en résulte $f\ \underset{\sim}{I}\ \hat{f} = \underset{\sim}{I}\ \hat{f}$. Donc (critère 3) :

$$\underset{\sim}{I}\ \hat{f}\ f \in \mathcal{J}d(\mathcal{B}_f)$$

Que représente cette idempotente ? Etant surpotente, et minorant $\hat{f}\ f = F\ f$, elle <u>minore</u> $G\ F\ f$. D'un autre côté, $\hat{f}\ f \supset G\ F\ f$ entraine $\underset{\sim}{I}\ \hat{f}\ f \supset \underset{\sim}{I}\ G\ F\ f$. Mais $G\ F\ f$ est idempotente et appartient à $\mathcal{J}d(\mathcal{B}_f)$. Donc $\underset{\sim}{I}\ G\ F\ f = G\ F\ f$ (Scholie 1 du Théorème 3), et par suite $\underset{\sim}{I}\ \hat{f}\ f$ <u>majore</u> $G\ F\ f$. On a donc l'égalité :

$$\underset{\sim}{I}\ \hat{f}\ f = G\ F\ f$$

<u>THEOREME 13-2</u> - Pour f croissante quelconque, on a :

$$\mathcal{B}_f = \underset{\sim}{I}(\hat{\mathcal{B}}_f) = \tilde{I}\ (\check{\mathcal{B}}_f)$$

$$G\ F_{\cup}\ f = \underset{\sim}{I}\ \hat{f} = \check{f}\ \hat{f} \quad ; \quad G\ F\ f = \underset{\sim}{I}\ \hat{f}\ f = \check{f}\ \hat{f}\ f$$

$$F\ G_{\cap}\ f = \tilde{I}\ \check{f} = \hat{f}\ \check{f} \quad ; \quad F\ G\ f = \tilde{I}\ \check{f}\ f = \hat{f}\ \check{f}\ f$$

Enfin les six enveloppes $G\,F_{\cup}\,f$, $G_{\cap}\,F\,f$, $G\,F\,f$, $G_{\cap}\,F_{\cup}\,f$, $f\,\check{f}$ et $\check{f}\,f$ coïncident avec $\check{f}$ et avec $\underset{\sim}{I}$ sur le domaine d'anti-extensivité $\hat{\mathcal{B}}_f$. De même, $F\,G_{\cap}\,f = F_{\cup}\,G\,f = F\,G\,f = F_{\cup}\,G_{\cap}\,f = f\,\hat{f} = \hat{f}\,f = \hat{f} = \tilde{I}$ sur $\check{\mathcal{B}}_f$.

<u>COROLLAIRE 1</u> - Si f est surpotente, on a $f = \underset{\sim}{I}$ sur $\hat{\mathcal{B}}_f$. Si f est sous-potente, $f = \tilde{I}$ sur $\check{\mathcal{B}}_f$.

EEn effet, pour f surpotente, on a $f = \check{f}\,f$, et $\check{f}\,f = \underset{\sim}{I}$ sur $\hat{\mathcal{B}}_f$, d'après le Théorème.

<u>COROLLAIRE 2</u> - Toute surpotente f (resp. sous-potente f') applique son domaine d'anti-extensivité (resp. d'extensivité) sur son domaine d'invariance, soit :

$$\mathcal{B}_f = f\,(\hat{\mathcal{B}}_f) \qquad (\text{resp. } \mathcal{B}_{f'} = f'(\check{\mathcal{B}}_{f'}))$$

En effet, d'après le corollaire 1, si f est surpotente, on a $F_{\cup}\,f = f\,\hat{f} = \underset{\sim}{I}\,\hat{f}$, et le domaine d'invariance de cette idempotente est donc $\mathcal{B}_f = \underset{\sim}{I}\,(\hat{\mathcal{B}}_f) = f\,(\hat{\mathcal{B}}_f)$.

Soit, maintenant, f_i une famille de surpotentes, et $f' = \bigcup f_i$ sa réunion, qui est encore surpotente. Comme $\bigcup f_i(A) \subset A$ équivaut à $f_i(A) \subset A$ pour tout i, on a évidemment :

$$\hat{\mathcal{B}}_{f'} = \bigcap \hat{\mathcal{B}}_{f_i}$$

D'après le corollaire 2, il en résulte :

$$\mathcal{B}_{f'} = f'(\bigcap \hat{\mathcal{B}}_{f_i})$$

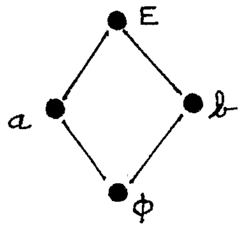
Ainsi :

<u>COROLLAIRE 3</u> - Pour toute famille de surpotentes f_i ou de sous-potentes g_i, on a respectivement :

$$\mathcal{B}_{\bigcup f_i} = \{\bigcup f_i(B) \quad , \quad B \in \bigcap \hat{\mathcal{B}}_{f_i}\}$$

$$\mathcal{B}_{\bigcap g_i} = \{\bigcap g_i(B) \quad , \quad B \in \bigcap \check{\mathcal{B}}_{g_i}\}$$

La réciproque du corollaire 1 <u>est fausse</u>. Soit, en effet, un treillis $\mathcal{P}$ à quatre éléments : E, $\emptyset$, et deux éléments a et b non comparables. Considérons l'application croissante :



$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ a & \rightarrow & b \\ b & \rightarrow & a \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array}$$

Ici, $\hat{\mathcal{B}}_f = \{E, \emptyset\}$. Or $\underset{\sim}{I}(E) = f(E) = E$, $\underset{\sim}{I}(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset$, donc $\underset{\sim}{I} = f$ sur $\hat{\mathcal{B}}_f$, mais f n'est nullement surpotente (on remarque aussi que f f = I <u>n'a pas</u> le même domaine d'invariance que f).

Sur ce même treillis, considérons deux applications f_1 et f_2 définies comme suit :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & a \\ a & \rightarrow & \emptyset \\ b & \rightarrow & \emptyset \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & b \\ b & \rightarrow & \emptyset \\ a & \rightarrow & \emptyset \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array}$$

Elles sont croissantes et sous-potentes, $\mathcal{B}_{f_1} = \mathcal{B}_{f_2} = \{\emptyset\}$, donc elles ont le même domaine d'invariance, et, étant toutes deux anti-extensives, le même domaine d'anti-extensivité, qui est $\mathcal{P}$ lui-même. Ici, $\tilde{I}$ est donné par :

$$\tilde{I}\,(E) = \tilde{I}(a) = \tilde{I}(b) = E \quad ; \quad \tilde{I}(\emptyset) = \emptyset$$

Pour $\tilde{I}\, f_1$ et $f_1\, \tilde{I}$, on trouve

$$\tilde{I}\, f_1 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ a & \rightarrow & \emptyset \\ b & \rightarrow & \emptyset \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array} \qquad f_1\, \tilde{I} : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & a \\ a & \rightarrow & a \\ b & \rightarrow & a \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array}$$

Les domaines d'invariance sont, respectivement, $\{\emptyset, E\}$ et $\{\emptyset, a\}$, strictement plus grands que $\mathcal{B}_{f_1}$.

D'une manière générale, donc, les inclusions :

$$\mathcal{B}_f \subset \mathcal{B}_{\tilde{I}f} \quad ; \quad \mathcal{B}_f \subset \mathcal{B}_{f\tilde{I}}$$

peuvent être strictes.

Sur le même exemple, considérons l'application $f_1 \cup f_2$:

$$f_1 \cup f_2 : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ a & \rightarrow & \emptyset \\ b & \rightarrow & \emptyset \\ \emptyset & \rightarrow & \emptyset \end{array}$$

Son domaine d'invariance est $\{E, \emptyset\}$, strictement plus grand que $\mathcal{B}_{f_1} = \mathcal{B}_{f_2}$. Ainsi, pour des applications f_i admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$, l'inclusion

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{\cup f_i}$$

peut être stricte.

De manière générale, désignons par $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ l'ensemble des applications croissantes admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$ (nous supposons $\mathcal{B}$ complètement réticulé pour l'ordre induit, de sorte que $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ n'est pas vide).

Nous savons que le sous-ensemble $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$ est complètement réticulé. L'exemple ci-dessus montre que $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ n'est pas, en général, un treillis. (Toute application $g \supset f_1 \cup f_2$ vérifiera $g(E) = E$, soit $E \in \mathcal{B}_g$, et donc $g \notin \mathcal{P}'(\mathcal{B})$, puisque $\mathcal{B}$ est ici réduit au seul élément $\emptyset$). Il n'est même pas vrai, toujours d'après cet exemple, que $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ admette un plus grand et un plus petit élément.

Cependant, si $f \in \mathcal{P}'(\mathcal{B})$ est surpotente, on a nécessairement

$$f \subset \psi_M$$

et de même $f \supset \phi_m$ si f est sous-potente ($\phi_M = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$ est le plus grand élément de $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, et ϕ_m son plus petit élément). En effet, on a $f \subset F\,f$, mais $F\,f$ est idempotente, donc majorée par ϕ_M, dès que f est surpotente.

En fait, l'ensemble des surpotentes, et celui des sous-potentes de $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ constituent des <u>demi-treillis</u> complets. Plus précisément :

<u>THEOREME 13-3</u> - Soit f_i une famille d'applications croissantes surpotentes (respectivement sous-potentes) admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$. Alors $\bigcup f_i$ (resp. $\bigcap f_i$) admet encore $\mathcal{B}$ comme domaine d'invariance.

En effet, soit f_i une famille de surpotentes dans $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$, et $f' = \bigcup f_i$. Etant surpotentes, f_i et f' admettent des idempotentes comme enveloppes supérieures, soient $F\,f_i$ et $F\,f'$. Comme toute fermeture, F vérifie la formule

$$F(\bigcup f_i) = F(\bigcup F\,f_i)$$

qui donne ici :

$$F\,f' = \vee\, F\,f_i$$

puisque les $F\,f_i$ sont idempotentes ($\vee$ désigne le Sup dans le treillis des idempotentes, voir Th. 5-1). Mais $F\,f_i \in \mathcal{J}d(\mathcal{B})$, d'après le Th. 13-1. Donc $F\,f' = \vee\, F\,f_i$ est encore dans $\mathcal{J}d(\mathcal{B})$, d'après le Th. 5-3. Comme f' et $F\,f'$ ont le même domaine d'invariance, on conclut $f' \in \mathcal{P}'(\mathcal{B})$.

<u>COROLLAIRE</u> - Les surpotentes (resp. sous-potentes) de $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ admettent un plus grand (resp. plus petit) élément, qui est $\phi_M = \underset{\sim}{I}\,\tilde{I}$ (resp. $\phi_m = \tilde{I}\,\underset{\sim}{I}$).

Notons encore quelques résultats à peu près évidents.

THEOREME 13-4 - f a le même domaine d'invariance que ses surcomposées et ses sous-composées à droite et à gauche. Si f est surpotente ou sous-potente, f et f f ont le même domaine d'invariance.

En effet, les inégalités $f \subset f\, o(I \cup f) \subset F_{\cup}\, f$ montrent que l'on a $F_{\cup}\,(f\, o(I \cup f)) = F_{\cup}\, f$. Par suite, d'après le Théorème 13-1, f et $f\, o(I \cup f)$ ont le même domaine d'invariance. Démonstration analogue pour les trois autres cas.

Si f est surpotente, on a $f\, f = (I \cup f) o\, f$. Si f est sous-potente, on a $f\, f = (I \cap f) o\, f$: dans les deux cas, f et f f ont donc le même domaine d'invariance.

On a vu plus haut un exemple montrant que l'inclusion

$$\mathcal{B}_f \subset \mathcal{B}_{ff}$$

peut être stricte si f n'est ni sur- ni sous-potente.

COROLLAIRE 1 - Pour toute partie $\mathcal{B}$ complètement réticulée de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ est stable pour les deux surcompositions et les deux sous-compositions. La famille des sous-potentes de $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$, ainsi que celle des surpotentes sont encore stables pour l'autocomposition.

COROLLAIRE 2 - Si f est surpotente, la classe stable pour la réunion et l'autocomposition (ou la surcomposition à droite engendrée par f) est constituée de surpotentes admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}_f$. Enoncé dual pour f sous-potente.

En effet, d'après le corollaire 1 et le Th. 13-3, si f est surpotente, la famille des surpotentes de $\mathcal{P}'(\mathcal{B}_f)$ est stable pour la réunion, l'autocomposition et la surcomposition à droite, et contient f : elle contient donc la classe correspondante engendrée par f.

<u>SCHOLIE 13</u> - La classe $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ des applications croissantes admettant le même domaine d'invariance $\mathcal{B}$ est stable pour les deux surcompositions, les deux sous-compositions et les quatre enveloppes F, G, $F_{\cup}$ et $G_{\cap}$. La classe des surpotentes de $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ est stable pour ces 8 opérations, ainsi que pour la réunion et l'auto-composition. Si le treillis $\mathcal{P}$ est modulaire, la classe des $c\cap$ de $\mathcal{P}'(\mathcal{B})$ possède les mêmes propriétés. Mêmes énoncés pour la classe des sous-potentes et celle des $c\cup$, avec "intersection" au lieu de "réunion".