

$$h(z_0) = \frac{\bar{\gamma}}{2} \epsilon'' \varphi'^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon^{IV}}{4} (\varphi')^4 (\bar{\gamma})^2 + \epsilon''' \varphi'^2 \varphi'' \overline{\gamma_{13} \gamma_{33}} + \frac{1}{2} \epsilon'' (\varphi'')^2 \bar{\gamma}^2 \right]$$

Pour $\gamma(1) = 14$ 1-D $\bar{\gamma} = \frac{4}{3}$ $\overline{\gamma_{13} \gamma_{33}} = \frac{7}{60} \epsilon^2$ $\bar{\gamma}' = \frac{\epsilon}{6}$

Isop.

$$h = \epsilon \varphi'^2 \epsilon'' + \frac{\epsilon^2}{2} \left[2 \epsilon'' \varphi'^2 + \epsilon^{IV} \varphi'^4 + 4 \epsilon''' \varphi'^2 \varphi'' + 2 \epsilon'' \varphi''^2 \right]$$

Pour calculer dt : M_2

$$-2 \epsilon \varphi'^2 + \frac{\epsilon^2}{2} (4 \varphi'^2 + 4 \varphi''^2) = -\bar{\gamma} \varphi'^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \varphi''^2$$

$$t = \frac{\bar{\gamma}}{2} + \frac{1}{4} \left(\bar{\gamma}^2 - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}^2) \right)$$

→ Isop dom

$$h = \frac{\bar{\gamma}}{2} \epsilon'' \varphi'^2 + \frac{(\bar{\gamma})^2}{8} \left[2 \epsilon'' \varphi'^2 + \epsilon^{IV} \varphi'^4 + 4 \epsilon''' \varphi'^2 \varphi'' + 2 \epsilon'' \varphi''^2 \right] - \frac{1}{4} \left(\bar{\gamma}^2 - \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2 (\bar{\gamma}^2 - \bar{\gamma}^2) \right) \varphi'^2 \epsilon''$$

$$= h - \frac{\bar{\gamma}}{2} \epsilon'' \varphi'^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon^{IV}}{4} \varphi'^4 (\bar{\gamma})^2 + \epsilon''' \varphi'^2 \varphi'' (\bar{\gamma})^2 + \frac{1}{2} \epsilon'' \varphi''^2 \bar{\gamma}^2 \right]$$

Pour $\gamma = 14$: $+0(\epsilon)$
 arithmétique

$$\frac{1}{9} = 0,11111 \quad t^7$$

$$7/60 = 0,11667 \quad t^7$$

N-831

LES CHANGEMENTS DE SUPPORT A
 A L'APPROXIMATION DU PREMIER
 ORDRE

G. MATHERON

FONTAINEBLEAU

JUIN 1983

LES CHANGEMENTS DE SUPPORT A L'APPROXIMATION
DU PREMIER ORDRE

0 - <u>Introduction</u>	2
1 - <u>Le cas général</u>	3
Comparaison avec le modèle GD	4
Comparaison avec la correction affine	4
2 - <u>FA multigaussienne transformée</u>	5
Comparaison avec le modèle GD	9
Comparaison avec la correction affine	11
3 - <u>Processus markoviens stationnaires</u>	12
Cas des processus de diffusion	14
Cas d'un processus Fellerien	18
4 - <u>Un modèle interprétatif : le mélange bivariable uniforme</u>	20
Exemple du modèle mosaïque	21
Passage à $\mathbb{R}^n$	22
Vers de nouvelles techniques d'estimation locale	23

LES CHANGEMENTS DE SUPPORT A L'APPROXIMATION
DU PREMIER ORDRE

Introduction

J'essaie dans ce qui suit d'évaluer la partie principale $\delta F = F_{\delta V} - F$ de la variation de la distribution monovariante F d'une FA stationnaire $Z(x)$ lorsque l'on passe d'un support ponctuel à un support δV supposé très petit. Il apparaîtra que cette évaluation est possible, sur des bases rigoureuses, dans deux cas au moins :

i/ $Z(x) = \varphi(Y(x))$ où φ est une fonction suffisamment régulière (non nécessairement croissante) et $Y(x)$ une FA multigaussienne stationnaire dans R^n

ii/ $Z(x)$ est un processus de Markov stationnaire sur la droite réelle.

Malgré la restriction à 1-D, le second cas est intéressant en ce qu'il permet d'obtenir des résultats assez généraux, non liés à une hypothèse de structure multigaussienne. On remarquera néanmoins que les deux cas ci-dessus présentent une circonstance commune : à savoir que, dans le cas multigaussien aussi bien que dans le cas markovien, les lois multivariées sont déterminées univoquement dès que l'on connaît les lois bivariées. Il se pourrait bien que ce soit cette circonstance commune qui permette l'évaluation exacte de δF , et que par suite les résultats auxquels nous parviendrons n'aient pas valeur générale. A titre de conjoncture, cependant, je proposerai un modèle interprétatif, compatible avec ces résultats et susceptible d'être généralisé à d'autres cas. Ce modèle conduit à son tour à de nouvelles techniques d'estimation locale, qui pourront être du type espérance conditionnelle, dans le cas multigaussien, ou du type KD dans le cas général. A titre introductif, je commence par le fameux problème dit de la "permanence de la lognormalité".

1 - Le cas lognormal

Ici nous prenons

$$(1-1) \quad Z(x) = m e^{s Y(x) - s^2/2}$$

où $Y(x)$ est une FAST sur $\mathbb{R}^n$ multigaussienne réduite (moyenne nulle et variance unité) avec comme covariance :

$$(1-2) \quad \langle Y(x) Y(x+h) \rangle = \rho(h) = 1 - \gamma(h)$$

Nous nous intéressons à la variable :

$$(1-3) \quad Z_V = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$$

où V est un domaine considéré comme petit : si D désigne le diamètre de D , on pourra prendre $\gamma(D)$ comme infiniment petit principal, ou encore la valeur moyenne $\bar{\gamma}(V,V) = \bar{\gamma}$ de $\gamma(x-y)$ dans V .

Evaluons le moment d'ordre n de Z_V . Il vient

$$E(Z_V^n) = \frac{1}{V^n} \int_{V^n} E[Z(x_1) Z(x_2) \dots Z(x_n)] dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

D'après les formules habituelles de la loi lognormale, et compte tenu de la définition (1-1) de $Z(x)$, nous avons

$$E[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = m^n e^{-\frac{n s^2}{2} + \frac{s^2}{2} \sum_{i,j} \rho_{ij}} = m^n e^{-\frac{n(n-1)}{2} s^2 - s^2 \sum_{i < j} \gamma_{ij}}$$

donc, au premier ordre en γ :

$$E(Z_1 Z_2 \dots Z_n) = E(Z_0^n) [1 - s^2 \sum_{i < j} \gamma_{ij}] + O(\gamma)$$

où Z_0 représente la variable ponctuelle. En intégrant :

$$(1-3) \quad E(Z_V^n) = E(Z_0^n) [1 - \frac{n(n-1)}{2} s^2 \bar{\gamma}] + O(\bar{\gamma})$$

Nous allons comparer ce résultat (1-3), qui est un résultat exact, avec les prévisions auxquelles conduisent deux modèles simples usuels : le modèle gaussien discrétisé (GD) et la "correction affine" CA.

Comparaison avec le modèle GD

Ici, le modèle GD s'identifie à la "permanence de la lognormalité". On assimile donc Z_V à une lognormale admettant la même moyenne et la même variance que Z_V , soit :

$$Z_V \equiv m e^{s_V y - s_V^2/2}$$

Ce modèle conduit à la prévision :

$$E^*(Z_V^n) = m^n \frac{n(n-1)}{2} s_V^2$$

Pour déterminer le paramètre s_V au premier ordre en $\bar{\gamma}$, nous devons écrire dans le cas $n = 2$ l'égalité de la prévision ci-dessus et de la valeur vraie fournie par (1-3), soit :

$$e^{s_V^2} = e^{s^2} (1 - s^2 \bar{\gamma}) + o(\bar{\gamma})$$

Substituant dans l'expression générale de $E^*(Z_V^n)$, il vient au premier ordre :

$$(1-4) \quad E^*(Z_V^n) = m^n e^{\frac{n(n-1)}{2} s^2} (1 - \frac{n(n-1)}{2} s^2 \bar{\gamma}) + o(\bar{\gamma})$$

La partie principale est la même que celle que fournit (1-3). Concluons donc :

Dans le cas lognormal , l'hypothèse de la permanence de la lognormalité conduit à une évaluation correcte au premier ordre en $\bar{\gamma}$ du moment général d'ordre n . On explique ainsi un fait d'observation bien connu

Comparaison avec le modèle CA

Le modèle de la correction affine s'écrit :

$$Z_V \equiv (1-\varepsilon) Z + \varepsilon m \quad ; \quad \varepsilon : 1 - \frac{\sigma_V}{\sigma}$$

et conduit à la prévision (au premier ordre en $\bar{\gamma}$)

$$E^*(Z_V^n) = E(Z^n) (1-n \varepsilon) + n \varepsilon m E(Z^{n-1})$$

qui devient, dans le cas lognormal :

$$E^*(Z_V^n) = E(Z^n) [1 - n \varepsilon (1 - e^{-(n-1)s^2})]$$

Ici encore, on détermine le paramètre ε de façon à retrouver la variance correcte. La comparaison avec (1-3) donne à l'ordre 1 :

$$\varepsilon = \frac{s^2 \bar{Y}}{2(1 - e^{-s^2})}$$

La prévision du modèle CA est donc

$$(1-5) \quad E^*(Z_V^n) = E(Z^n) \left[1 - \frac{n(1 - e^{-(n-1)s^2})}{1 - e^{-s^2}} \frac{s^2 \bar{Y}}{2} \right] + o(\bar{Y})$$

Si la variance logarithmique s^2 est infiniment petite, (1-5) est équivalent à la formule exacte (1-3). Dans tous les autres cas, il y a divergence :

La correction affine surévalue toujours les moments d'ordre $n > 2$, et cette surévaluation est d'autant plus forte que la variance logarithmique s^2 est plus élevée.

2 - FA multigaussienne transformée

Ici, le modèle est donc :

$$(2-1) \quad Z(x) = \varphi(Y(x))$$

où $Y(x)$ est une FAST multigaussienne réduite sur R^n . Nous désignons encore la covariance de $Y(x)$ par :

$$\rho(h) = 1 - \gamma(h)$$

En ce qui concerne la fonction φ qui figure en (2-1), ce n'est pas nécessairement une anamorphose, en ce sens que nous ne la supposons pas monotone. (En particulier le modèle $\varphi(Y) = Y^2/2$ se révèle plein d'intérêt). Nous supposons, pour l'instant, que φ est une fonction très régulière, à savoir : φ admet des dérivées

continues jusqu'à l'ordre 3, et, de plus, φ est bornée ainsi que ses trois premières dérivées.

Le domaine V étant petit, nous écrirons Z_V sous la forme :

$$(2-2) \quad Z_V = Z_0 + \frac{1}{V} \int_V (Z_x - Z_0) dx$$

où $Z_0 = Z(x_0)$ est la valeur de la FA en un point x_0 du domaine V .

Il est clair que la variable $(1/V \int_V (Z_x - Z_0) dx)$ doit, en un certain sens, être considérée comme infiniment petite avec V . Pour déterminer la loi de Z_V , il faut connaître l'espérance $E[h(Z_V)]$ pour une classe assez compréhensive de fonction h (par exemple, les exponentielles complexes). Soit donc une fonction h vérifiant les hypothèses suivantes :

$\sim h$ admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3, et la dérivée troisième h''' est bornée.

Compte tenu de (2-2), la formule de Taylor donne :

$$(2-3) \quad h(Z_V) = h(Z_0) + \frac{1}{V} \int_V (Z_x - Z_0) dx \cdot h'(Z_0) + \frac{h''(Z_0)}{2 V^2} \left[\int_V (Z_x - Z_0) dx \right]^2 \\ + \frac{1}{6V^3} \left[\int_V (Z_x - Z_0) dx \right]^3 h'''(Z')$$

où Z' peut dépendre de manière compliquée de Z_x et de Z_0 . Cependant, d'après les hypothèses faites sur la fonction h , $h'''(Z')$ est bornée par un nombre fixe B_0 :

$$|h'''(Z')| \leq B_0$$

D'autre part, on a aussi une majoration de la forme :

$$|Z_x - Z_0| = |\varphi(Y_x) - \varphi(Y_0)| \leq B_1 |Y_x - Y_0|$$

puisque la dérivée de φ est bornée. Le terme d'ordre 3 de la formule (2-3) admet ainsi une majoration de la forme :

$$\frac{1}{V^3} \left[\int_V (Z_x - Z_o) dx \right]^3 \leq B \frac{1}{V^3} \left(\int_V |Y_x - Y_o| dx \right)^3$$

où B est un nombre fixe. Passant à l'espérance mathématique, un calcul simple montre que l'on obtient un terme infiniment petit (d'ordre 3/2) relativement à $\bar{Y}$. Autrement dit, il va nous suffire de calculer l'espérance des trois premiers termes de (2-3).

Pour cela, nous allons d'abord évaluer ces espérances conditionnellement à Y_o fixé : les termes en $Z_o = \varphi(Y_o)$ doivent donc être traités comme des constantes, et il s'agit d'évaluer les expressions :

$$(2-4) \quad E\left[\frac{1}{V} \int_V (Z_x - Z_o) dx \mid Y_o\right] ; \quad E\left[\left(\frac{1}{V} \int_V (Z_x - Z_o) dx\right)^2 \mid Y_o\right]$$

Partons de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} Z_x - Z_o &= \varphi(Y_x) - \varphi(Y_o) = (Y_x - Y_o) \varphi'(Y_o) + \frac{1}{2} (Y_x - Y_o)^2 \varphi''(Y_o) \\ &\quad + \frac{1}{6} (Y_x - Y_o)^3 \varphi'''(Y') \end{aligned}$$

où Y' dépend de manière complexe de Y_x et Y_o : mais, par hypothèse, nous avons supposé que la dérivée troisième φ''' est bornée. Il est alors facile de voir que la contribution des termes du type

$$\frac{1}{6} (Y_x - Y_o)^3 \varphi'''(Y')$$

aux espérances conditionnelles (2-4) sera d'ordre > 1 en $\bar{Y}$. On peut donc négliger ce terme.

D'autre part, à Y_o fixé, $Y_x - Y_o$ est encore une gaussienne avec

$$\begin{cases} E(Y_x - Y_o \mid Y_o) = -(1 - \rho_{ox}) Y_o \\ \text{Cov}(Y_x - Y_o, Y_y - Y_o \mid Y_o) = \rho_{xy} - \rho_{ox} \rho_{oy} \end{cases}$$

A l'ordre (1) en $\bar{\gamma}$, ceci conduit à :

$$E(Y_x - Y_o / Y_o) = -\gamma_{ox} Y_o + O(\bar{\gamma})$$

$$E(Y_x - Y_o)^2 / Y_o = 2 \gamma_{ox} + O(\bar{\gamma})$$

$$E((Y_x - Y_o)(Y_y - Y_o) / Y_o) = -\gamma_{xy} + \gamma_{ox} + \gamma_{oy} + O(\bar{\gamma})$$

et tous les moments d'ordre supérieur à 2 sont $O(\bar{\gamma})$. Il vient ainsi :

$$\begin{cases} E(Z_V - Z_o / Y_o) = \gamma_{oV} [\varphi''(Y_o) - Y_o \varphi'(Y_o)] + O(\bar{\gamma}) \\ E(Z_V - Z_o)^2 / Y_o = \varphi'^2(Y_o) [2 \gamma_{oV} - \gamma_{VV}] + O(\bar{\gamma}) \end{cases}$$

Utilisons ces résultats pour calculer $E[h(Z_V)]$, compte tenu du fait que l'on peut négliger le dernier terme de (2-3). Sous forme conditionnelle, il vient :

$$\begin{aligned} E[h(Z_V) / Y_o] &= h(Z_o) + h'(Z_o) \gamma_{oV} [\varphi''(Y_o) - Y_o \varphi'(Y_o)] \\ &\quad + \frac{h''(Z_o)}{2} \varphi'^2(Y_o) [2 \gamma_{oV} - \bar{\gamma}] + O(\bar{\gamma}) \end{aligned}$$

Il reste à prendre l'espérance en Y_o . Désignant par g la densité de la loi de Gauss réduite, on sait que l'on a

$$(2-5) \quad \int u(y) [\varphi''(y) - y \varphi'(y)] g(y) dy = - \int u'(y) \varphi'(y) dy$$

Appliquant ceci avec $u(y) = h'(\varphi(y))$, on constate que les termes en γ_{oV} s'éliminent lors du passage à l'espérance, et il reste la formule suivante :

$$(2-6) \quad \boxed{E[h(Z_V)] = E[h(Z_o)] - \frac{\bar{\gamma}}{2} E[\varphi'^2(Y_o) h''(\varphi(Y_o))] + O(\bar{\gamma})}$$

Pour comparer ce résultat capital avec la prévision fournie par le modèle isofactoriel, il est commode d'introduire le générateur infinitésimal A du processus gaussien stationnaire et markovien :

$$(Af)(y) = f''(y) - y f'(y)$$

D'après la relation (2-5), ce générateur vérifie :

$$\int u.Af.g(y)dy = - \int u'f'g(y)dy$$

d'où l'on déduit

$$E[\varphi'^2 h''(\varphi)] = - E[h'(\varphi)A\varphi]$$

et l'écriture équivalente à (2-6) :

(2-6')

$$E[h(Z_V)] = E(h(\varphi)) + \frac{\bar{\gamma}}{2} E[h'(\varphi)A\varphi] + o(\bar{\gamma})$$

Sous cette forme, on peut penser que le résultat obtenu (2-6') reste valable sous des conditions moins strictes, par exemple :

~ la fonction φ est dans le domaine de A considéré comme un opérateur de $L^2(\mathbb{R},g)$, ce qui implique φ et $A\varphi \in L^2(\mathbb{R},g)$

~ la fonction h admet une dérivée première h' , et les fonctions $h(\varphi)$ et $h'(\varphi)$ sont dans $L^2(\mathbb{R},g)$.

En particulier, avec $h(z) = z^n$ et $\varphi(y) = m \exp(sy - s^2/2)$, les formules (2-6) ou (2-6'') redonnent la formule (1-5) du cas lognormal.

Comparaison avec la correction isofactorielle GD

Dans ce modèle GD, on considère le processus gaussien Y_t défini par le générateur A ci-dessus, et on admet que la loi à 2 variables $(Z_V, Z_{\underline{x}})$ où $\underline{x}$ est aléatoire dans V est donnée par les transformations :

$$Z_V = \varphi_V(Y_0) \quad ; \quad Z_{\underline{x}} = \varphi(Y_{t_0})$$

où Y_0 et Y_{t_0} sont les valeurs en $t = 0$ et $t = t_0$ du processus ci-dessus. La relation de Cartier $E(Z_{\underline{x}}/Y_0) = \varphi_V(Y_0)$ donne ensuite la transformation φ_V sous la forme :

$$\varphi_V(y) = E[\varphi(Y_{t_0})/Y_0 = y]$$

Soit, en utilisant les notations du demi-groupe markovien $P_t = e^{At}$:

$$\varphi_V = e^{At_0} \varphi$$

Mais il est clair que t va être un infiniment petit du même ordre que $\bar{\gamma}$. Au premier ordre, on écrira donc :

$$(2-7) \quad \varphi_V = \varphi + t_0 A \varphi + O(\bar{\gamma})$$

Pour déterminer t_0 , évaluons le moment d'ordre 2.
D'après (27) :

$$E(\varphi_V^2) = E(\varphi^2) + 2 t_0 E(\varphi A \varphi) + O(\bar{\gamma})$$

Mais, d'après (2-6'), la valeur véritable est avec $h(z) = z^2$:

$$E(Z_V^2) = E(\varphi^2) + \bar{\gamma} E(\varphi A \varphi) + O(\bar{\gamma})$$

On aura donc la variance correcte (au premier ordre) en prenant :

$$t_0 = \frac{\bar{\gamma}}{2}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_V = \varphi + \frac{\bar{\gamma}}{2} A \varphi + O(\bar{\gamma})$$

Dès lors pour toute fonction h assez régulière :

$$h(\varphi_V) = h(\varphi) + \frac{\bar{\gamma}}{2} h'(\varphi) A \varphi + O(\bar{\gamma})$$

et par suite on retrouvera (2-6) :

$$E[h(\varphi_V)] = E(h(\varphi)) + \frac{\bar{\gamma}}{2} E[h'(\varphi) A \varphi] + O(\bar{\gamma})$$

On conclut donc :

La correction isofactorielle GD est correcte au premier ordre en $\bar{\gamma}$ pourvu seulement que la fonction φ appartienne au domaine de l'opérateur infinitésimal A.

On pourra peut-être affaiblir la condition sur φ : par exemple, il suffit probablement de supposer φ dérivable et $\varphi' \in L^2(R, g)$. Le résultat pourra donc s'appliquer à $\varphi(Y) = (Y-a)_+$, mais non à une indicatrice $\varphi(Y) : 1_{Y>a}$. Nous verrons plus tard comment traiter le cas des fonctions discontinues.

Comparaison avec la correction affine CA

Quitte à remplacer Z_x par Z_{x-m} , nous pouvons supposer $E(\varphi(Y)) = 0$, c'est-à-dire $m = 0$. La correction affine prévoit :

$$E^*[h(Z_V)] = E[h(\frac{\sigma_V}{\sigma} \varphi(Y))]$$

c'est-à-dire, à l'ordre 1 :

$$E^*[h(Z_V)] = E[h(\varphi)] - (1 - \frac{\sigma_V}{\sigma}) E[\varphi h'(\varphi)] + o(\bar{\gamma})$$

Comparant avec (2-6') écrite avec $h = z^2$, on voit que l'on aura la variance correcte pour $1 - \frac{\sigma_V}{\sigma} = \frac{\bar{\gamma}}{2} \frac{E(\varphi'^2)}{\sigma^2} = - \frac{\bar{\gamma}}{2} \frac{E(\varphi A \varphi)}{\sigma^2}$

La prévision de la correction affine est donc :

$$(2-7) \quad E^*[h(Z_V)] = E[h(\varphi)] - \frac{\bar{\gamma}}{2} \frac{E(\varphi'^2)}{\sigma^2} E(\varphi h'(\varphi)) + o(\bar{\gamma})$$

En général, donc, la correction affine sera fautive dès le premier ordre, puisque cette formule (2-7) diffère profondément de la formule exacte (2-6'). Plus précisément, h' étant une fonction quelconque, on voit que la correction affine sera exacte au premier ordre si et seulement si

$$(2-8) \quad E(\varphi u(\varphi)) = -\lambda E(u(\varphi) A \varphi)$$

pour toute fonction u telle que $u(\varphi) \in L^2(R, g)$. Avec $u(z) = z$, cette relation (2-8) entraîne automatiquement pour le paramètre λ la valeur correcte $\lambda = E(\varphi^2)/E(\varphi'^2)$.

En terme d'espérance conditionnelle, et en posant

$$Z = \varphi(Y)$$

Cette relation est équivalente à :

$$(2-8') \quad \varphi(Y) = -\lambda E[(A \varphi)(Y)/\varphi(Y)]$$

Elle est automatiquement vérifiée si $\varphi = -\lambda A \varphi$, c'est-à-dire lorsque φ est un facteur (i.e. un polynome d'Hermite). Cette condition suffisante devient nécessaire si φ est monotone (i.e. est une anamorphose), car dans ce cas φ est bijective, et, à une valeur donnée $z = \varphi(y)$ est associée une valeur unique de y : on a alors $E[A \varphi(Y)/\varphi(Y)] = A\varphi(Y)$. Mais le seul polynome d'Hermite monotone est Y lui-même : d'où une première conclusion :

La correction affine n'est correcte au premier ordre pour aucune anamorphose stricte φ non linéaire.

Si φ n'est pas croissante, il existe d'autres solutions que les polynomes d'Hermite. Par exemple, à côté du polynome d'ordre 2, qui est $Y^2 - 1$, on peut aussi considérer $Y_+^2 - 1/2$, qui vérifie également (2-8'). Mais l'ensemble des solutions de (2-8') constitue un espace fonctionnel très particulier et très pauvre.

En pratique, on peut conclure que les seules transformations φ pour lesquelles la correction affine est correcte au premier ordre sont les polynomes d'Hermite (à une constante et un facteur près) et quelques autres fonctions qui leur sont apparentées étroitement.

3 - Processus Markoviens Stationnaires

L'apparition inattendue du générateur infinitésimal A dans la formule (2-6') suggère de regarder de plus près ce qui se passe dans le cas d'un processus markovien plus général.

Dans ce chapitre, le modèle sera le suivant : Y_t désigne un processus markovien stationnaire sur la droite réelle R . Il est défini par son générateur infinitésimal A et la probabilité stationnaire $p(dy)$ (supposée définie de manière univoque par $\int p A f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}_A$). L'opérateur A sera en fait considéré comme un opérateur sur $L^2(R, p)$. Nous nous donnons de plus une transformation φ , sur laquelle nous serons amenés à faire certaines hypothèses de régularité, et nous allons nous intéresser au processus transformé

$$Z_t = \varphi(Y_t)$$

Ici le volume V sera un segment $(0, t)$ avec $t = V$, et nous écrirons donc

$$Z_V = \frac{1}{V} \int_0^V \varphi(Y_t) dt$$

Moyennant des hypothèses convenables sur φ (par exemple φ bornées !, mais selon les cas des hypothèses beaucoup moins restrictive sont possibles) le moment d'ordre n , $E(Z_V^n)$ existe. Cherchons à l'évaluer au premier ordre en V . On a :

$$Z_V^n = \frac{n!}{V^n} \int_0^V Z_{t_1} dt_1 \int_{t_1}^V Z_{t_2} dt_2 \int_{t_{n-1}}^V Z_{t_n} dt_n$$

avec $Z_{t_i} = \varphi(Y_{t_i})$. Pour calculer l'espérance de cette expression, on peut utiliser la propriété markovienne pour calculer d'abord l'espérance conditionnelle $E(Z_{t_n} | Y_{t_{n-1}})$ de Z_{t_n} à $Y_{t_{n-1}}$ fixé, puis celle de $Z_{t_{n-1}}$ $E(Z_{t_n} | Y_{t_{n-1}})$ à $Y_{t_{n-2}}$ fixé et ainsi de suite. Posant $P_t = \exp(At)$, ces espérances conditionnelles sont :

$$E(Z_{t_n} | Y_{t_{n-1}}) = (P_{t_n - t_{n-1}} \varphi)(Y_{t_{n-1}})$$

$$E[Z_{t_{n-1}} E(Z_{t_n} | Y_{t_{n-1}}) | Y_{t_{n-2}}] = (P_{t_{n-1} - t_{n-2}} \varphi P_{t_n - t_{n-1}} \varphi)(Y_{t_{n-2}})$$

etc... Avec $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, il vient donc :

$$(3-1) \quad E[Z_{t_1} Z_{t_2} \dots Z_{t_n}] = E[(\varphi^{P_{t_2-t_1}} \varphi^{P_{t_3-t_2}} \dots \varphi^{P_{t_n-t_{n-1}}}) (Y_{t_1})]$$

D'autre part, les $t_{i+1} - t_i$ sont des infiniment petits.

Nous allons supposer que φ appartient au domaine du générateur infinitésimal A , et, plus précisément, que l'on a :

$$(P_t \varphi)(y) = \varphi(y) + t(A\varphi)(y) + O(y, t)$$

avec $\frac{1}{t} \|O(y, t)\| \rightarrow 0$ dans $L^2(\mathbb{R},)$ pour $t \rightarrow 0$. Nous supposons $\varphi^n \in L^2$ quelque soit l'entier n (pour assurer l'existence des moments). Dès lors :

$$\varphi^{P_{\delta t_1}} \varphi^{P_{\delta t_2}} \dots \varphi^{P_{\delta t_{n-1}}} \varphi = \varphi^n + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^k \delta t_k A \varphi^{n-k} + O(v)$$

D'après (3-1), cela entraîne :

$$E(Z_{t_1} Z_{t_2} \dots Z_{t_n}) = E(\varphi^n) + \sum_{k=1}^{n-1} \delta t_k E(\varphi^k A \varphi^{n-k}) + O(v)$$

En intégrant sur les variables t_i (avec $\delta t_k = t_{k+1} - t_k$), il vient ensuite

$$(3-2) \quad E(Z_{\frac{n}{v}}^n) = E(Z_0^n) + \frac{v}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} E(\varphi^k A \varphi^{n-k}) + O(v)$$

C'est cette formule capitale que nous allons maintenant commenter.

Cas des processus de diffusion

Les processus de diffusion correspondent au cas où le générateur A est un opérateur local, soit :

$$(Af)(y) = a(y) f''(y) - b(y) f'(y)$$

où les fonctions a et b vérifient certaines conditions de régularité, et, de plus, $a \geq 0$. La loi stationnaire (si elle existe) admet une densité que nous désignerons par g , défini par l'équation

différentielle :

$$(ag)' + bg = 0$$

(équivalente à $\int Af.g(y)dy = 0$ pour tout f), ce qui donne :

$$g(y) = \frac{A}{a(y)} \int_0^y \frac{b(x)}{a(x)} dx$$

où A est une constante de normalisation (et la condition d'existence est évidemment $\int g(y)dy < \infty$). Pour $a=1$, $b=y$, on obtient la loi de Gauss. Pour $a=y$ et $b=(y-\alpha)$, on obtient la loi gamma de paramètre α , etc...

Si f est dans le domaine de A , et si φ admet une dérivée φ' avec $\varphi, \varphi' \in L^2(R, g)$, on obtient sans peine la relation :

$$(3-3) \quad \int \varphi(y) (Af)(y) g(y) dy = - \int a(y) \varphi' f' g(y) dy$$

c'est-à-dire, dans L^2 :

$$(3-4) \quad \langle \varphi, Af \rangle = - E(a \varphi' f') = \langle A\varphi, f \rangle$$

qui montre que A est auto adjoint. En particulier :

$$\langle \varphi^k, A \varphi^{n-k} \rangle = - k(n-k) E[a \varphi'^2 \varphi^{n-2}]$$

Reportant ce résultat dans (3-2), on obtient sans peine :

$$(3-5) \quad \boxed{E[(Z_v)^n] = E(Z_0^n) - \frac{n(n-1)}{6} v E[a \varphi'^2 \varphi^{n-2}] + O(v)}$$

Dans le cas gaussien, $a=1$, de sorte que (3-4) s'identifie à (2-6) avec $\frac{v}{3} = \bar{\gamma}$: ce qui est naturel, puisqu'ici

$\gamma(h) = 1 - e^{-|h|}$, et $\bar{\gamma}(v, v) = \frac{v}{3}$, au premier ordre.

Compte tenu de (3-4), on a la formule équivalente :

$$(3-5') \quad E[(Z_v)^n] = E(Z_0^n) + \frac{n v}{6} E(\varphi^{n-1} A \varphi)$$

Il est assez facile de voir que cela entraîne pour toute fonction h suffisamment régulière :

$$(3-6) \quad E[h(Z_v)] = E(h(Z_0)) - \frac{v}{6} E[a(y)\varphi'^2(y)h''(\varphi(y))] + O(v)$$

et aussi bien

$$(3-6') \quad E[h(Z_v)] = E[h(Z_0)] + \frac{v}{6} E[h'(\varphi) A\varphi] + O(v)$$

Ainsi tout processus de diffusion vérifie, au premier ordre, une loi de changement de support analogue à celle du cas gaussien. Cela entraîne, de la même manière, que la correction isofactorielle est correcte au premier ordre :

La démonstration est la même que dans le cas gaussien. On considère que la loi à deux variables $(Z_v, Z_{\underline{t}})$, où $\underline{t}$ est aléatoire sur $(0, t)$, se déduit de celle de (Y_0, Y_{t_0}) par des transformations :

$$Z_v = \varphi_v(Y_0) ; Z_{\underline{t}} = \varphi(Y_{t_0})$$

La relation de Cartier $E(Z_{\underline{t}}/Z_v) = Z_v$ donne alors :

$$\varphi_v(Y_0) = E[\varphi(Y_{t_0})/Y_0]$$

c'est-à-dire $\varphi_v = P_{t_0} \varphi$. Au premier ordre en v , cela signifie

$$\varphi_v = \varphi + t_0 A\varphi$$

En particulier $E(\varphi_v^2) = E(\varphi^2) + 2 t_0 E(\varphi A\varphi)$. D'où, en comparant avec (3-5') la valeur de t_0 qui fournit la variance correcte : $t_0 = v/6$. Dès lors :

$$h(\varphi_v) = h(\varphi + \frac{v}{6} A\varphi) = h(\varphi) + \frac{v}{6} h'(\varphi) A\varphi + O(v)$$

et

$$E(h(\varphi_v)) = E(h(\varphi)) + \frac{v}{6} E(h'(\varphi) A\varphi) + O(v)$$

relation qui coïncide au premier ordre avec la formule correcte (3-6').

Examinons la correction affine. Quitte à remplacer Z_x par Z_{x-m} , on peut supposer $E(\varphi) = 0$. On trouve alors pour la correction affine la même prévision que dans le cas gaussien :

$$E^*[h(Z_v)] = E[h(\varphi)] - (1 - \frac{\sigma_v}{\sigma}) E(\varphi h'(\varphi)) + O(v)$$

Avec $h = z^2$, on trouve que la variance correcte correspond à

$$(1 - \frac{\sigma_v}{\sigma}) \sigma^2 = E(a \varphi'^2)$$

D'où la forme définitive de la CA :

$$E^*[h(Z_v)] = E[h(\varphi)] - \frac{E(a \varphi'^2)}{\sigma^2} E(\varphi h'(\varphi)) \frac{\gamma}{2}$$

Comparant avec (3-6'), il apparaît ici encore que la correction affine est correcte au 1er ordre en v si et seulement si

$$(3-7) \quad \varphi(Y) = -\lambda E[A \varphi(Y)/\varphi(Y)]$$

avec les mêmes conclusions que dans le cas gaussien :

Si φ est strictement croissante, la CA est correcte au 1er ordre si et seulement si φ est un facteur du modèle isofactoriel. Dans le cas général où φ n'est pas supposée strictement croissante, la CA sera correcte au 1er ordre uniquement si φ vérifie (3-7), c'est-à-dire si φ est (à une constante près) un facteur ou une fonction étroitement apparentée à un facteur.

Dans le cas du processus de diffusion à loi gamma, j'ai donné ailleurs l'expression exacte de la loi de $(1/v) \int_0^v Y_t dt$, et montré numériquement qu'elle ne diffère que très peu de la correction affine jusqu'à des valeurs relativement élevées de v : de fait, on a ici $\varphi(y) = y$ et $y-m$ est un facteur pour la loi gamma correspondante.

Cas d'un processus Fellerien

Les processus de diffusion ont des trajectoires ps continues. A l'autre extrême, les processus du type Fellerien sont ps des fonctions en escalier. Conditionnellement pour $Y_0 = y$, le processus Y_t reste constant et égal à y jusqu'à une date aléatoire T , dont la loi est exponentielle avec $E(T) = 1/C(y)$ dépendant éventuellement de y , puis, au temps aléatoire T , prend une autre valeur y' selon une loi $\pi_y(dy')$ qui dépend en général de y .

La forme générale du générateur A d'un processus fellerien est donc :

$$(3-8) \quad (Af)(y) = -C(y)f(y) + C(y) \int \pi_y(dy') f(y')$$

Montrons ce que devient la formule générale (3-2) dans ce cas. Le plus simple est d'ailleurs de faire un raisonnement direct. Durant le laps de temps v très petit (et conditionnellement si $Y_0 = y$), le processus reste égal à y sur $(0, v)$ avec la probabilité $1 - C(y)v$, ou subit un seul changement d'état qui le conduit en y' , de loi $\pi_y(dy')$, avec la probabilité $C(y)v$. La probabilité pour qu'il y ait plus d'un changement d'état sur le très petit intervalle $(0, v)$ est, en effet, infiniment petite relativement à $C(y)v$. Maintenant, conformément aux propriétés classiques des processus de Poisson, cet unique changement d'état survient à une date aléatoire τ uniformément distribuée sur le segment $(0, v)$, soit $\tau = vU$ où U est une VA uniforme sur $(0, 1)$. Dans ce cas, la valeur conditionnelle de Z_v est :

$$(3-9) \quad Z_v = U \varphi(Y_0) + (1-U)\varphi(Y_v)$$

Mais il est clair que cette formule reste vraie dans l'autre hypothèse, celle où aucun saut n'est survenu entre 0 et v : car alors $Y_v = Y_0$ et $Z_v = Z_0 = \varphi(Y_0)$. Dans tous les cas, on doit donc avoir (3-9) au premier ordre en v .

Calculons le moment d'ordre n tel qu'on peut le déduire de (3-9) :

$$E(Z_V^n) = \sum_{k=0}^n C_n^k E(U^k(1-U)^{n-k}) E[\varphi^k(Y_0) \varphi(Y_V)^{n-k}]$$

Comme U est uniformément distribuée, on trouve :

$$C_n^k E[U^k(1-U)^{n-k}] = \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$\begin{aligned} E[Z_V^n] &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n E[\varphi^k(Y_0) \varphi^{n-k}(Y_V)^{n-k}] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n E(\varphi^k P_V \varphi^{n-k}) \end{aligned}$$

A l'approximation du premier ordre,

$P_V \varphi^{n-k} = \varphi^{n-k} + v A \varphi^{n-k}$, et il reste

$$E[Z_V^n] = E(\varphi^n) + \frac{v}{n+1} \sum_{\xi=1}^{n-1} E(\varphi^\xi A \varphi^{n-\xi})$$

c'est-à-dire (3-2) (on somme de $k = 1$ à $n-1$ et non de $k = 0$ à n , car $E(A \varphi^n) = 0$ et $A \varphi^0 = A 1 = 0$).

Or, on note que cette vérification ne fait en rien intervenir l'hypothèse que le processus est Fellerien : on n'a nulle part, en effet, utilisé le fait que le générateur infinitésimal est de la forme (3-8). La conclusion subsiste dans le cas d'un processus markovien stationnaire quelconque : le modèle (3-9) conduit, au premier ordre, aux valeurs correctes des moments de Z_V , et donc à la loi de Z_V elle-même. Cela n'est pas tellement surprenant si l'on se souvient que tout processus markovien stationnaire est limite de processus fellerien. Mais cela ouvre la voie à de vastes généralisations.

4 - Un modèle interprétatif (le mélange bivarié uniforme)

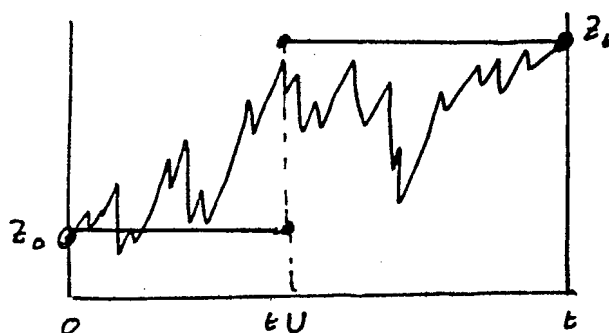
Dans le cas d'un processus markovien Y_t stationnaire sur la droite réelle, nous sommes arrivés à la conclusion générale suivante : si on pose

$$Z_t = \varphi(Y_t)$$

alors, on a l'équivalence en loi suivante, au 1er ordre en t :

$$(4-1) \quad \frac{1}{t} \int_0^t Z_\tau d\tau \equiv U Z_0 + (1-U)Z_t$$

où U est une VA uniforme sur $(0,1)$, indépendante du processus



D'un point de vue géométrique, cela revient à dire que l'on peut (en premier ordre) remplacer le processus réel Z_τ sur $(0,t)$ par le processus

$$Z_\tau = \begin{cases} Z_0 & \text{sur } (0, Ut) \\ Z_t & \text{sur } (Ut, t) \end{cases}$$

Le calcul explicite de la loi de la variable (4-1) ne nécessite rien de plus que la connaissance de la loi bivariée (Z_0, Z_t) . Nous dirons que (4-1) est le modèle de mélange bivarié uniforme : les deux variables Z_0 et Z_t (non indépendantes, évidemment) sont pondérées par les poids U et $1-U$, où U est une variable uniforme indépendante de Z_0 et Z_t .

Sous cette forme, on a bien le sentiment que l'hypothèse markovienne de départ (sur Y_t) ne doit jouer à peu près aucun rôle dans ce modèle. On peut, de plus, penser que ce modèle se prêtera à une généralisation facile dans R^n , et conduira à de nouvelles techniques d'estimation locales. Avant d'aborder ce point, examinons un exemple simple :

Exemple du modèle mosaïque

Dans ce modèle, Z_t lui-même est un processus fellerien. Son générateur est du type (3-8) avec :

$$C(z) = C = C^{te} \quad ; \quad \Pi_Z(dz') = p(dz') \quad (\forall z)$$

Autrement dit, dans la relation (4-1), les deux variables Z_0 et Z_t sont égales (avec la probabilité e^{-Ct}) ou au contraire (avec la probabilité complémentaire $1 - e^{-Ct}$) indépendantes et admettant la même loi $p(dz)$, qui est évidemment aussi la loi stationnaire du processus. Sous cette forme, la généralisation à $\mathbb{R}^n$ ne pose pas de problèmes. On a donc, au premier ordre en t , d'après la loi (4-1) du mélange bivariable uniforme

$$\frac{1}{t} \int_0^t Z_\tau d\tau - m = U(Z_0 - m) + (1-U)(Z_1 - m)$$

avec $P(Z_0 = Z_1) = 1 - Ct$, et, au contraire, avec la probabilité Ct , ces deux variables sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour le moment centré d'ordre n , cela donne :

$$(4-2) \quad E\left[\left(\frac{1}{t} \int_0^t Z_\tau d\tau - m\right)^n\right] = (1-Ct) E(Z_0 - m)^n \\ + \frac{Ct}{n+1} \sum_{k=0}^n E(Z_0 - m)^{n-k} + o(t)$$

On sait que, dans le cas du modèle mosaïque, le KD (au niveau ponctuel) d'une indicatrice $1_{Z_x > 3}$ coïncide avec l'autokrigeage de cette indicatrice. D'où l'intérêt de regarder la valeur de la correction affine, que la mode du jour associe volontier à cet autokrigeage. La conclusion est formelle : la correction affine est toujours incompatible, dès le premier ordre, avec le modèle mosaïque.

La CA prévoit, en effet :

$$E^*\left[\left(\frac{1}{t} \int_0^t Z_\tau d\tau - m\right)^n\right] = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma}\right)^n E(Z - m)^n$$

Pour $n = 2$, la formule exacte (4-2) donne, au premier ordre en t :

$$\sigma_t^2 = (1 - \frac{Ct}{3}) \sigma^2$$

et par suite :

$$(4-3) \quad E^* \left[\left(\frac{1}{t} \int_0^t Z_\tau d\tau - m \right)^n \right] = (1 - n \frac{Ct}{6}) E(Z-m)^n$$

On constate, pour $n = 3$, que la prévision du moment centré $\mu_3^*(t)$ par (4-3) coïncide avec la valeur correcte $(1 - \frac{Ct}{2})\sigma^2$ fournie par (4-2). Pour $n = 4$, par contre, (4-3) donne

$$\mu_4^*(t) = (1 - \frac{2}{3} Ct) \mu_4(0)$$

contre la valeur exacte déduite de (4-2), qui est

$$\mu_4(t) = (1 - \frac{3}{5} \frac{Ct}{5}) \mu_4(0) + \frac{Ct}{5} \sigma^4$$

L'égalité $\mu_4^* = \mu_4$ au premier ordre en t impliquerait donc

$$(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}) \mu_4 + \frac{\sigma^4}{5} = 0$$

c'est-à-dire $\mu_4 + 3 \sigma^4 = 0$, ce qui est impossible. D'où l'incompatibilité annoncée.

Passage à $\mathbb{R}^n$

Le modèle du mélange uniforme bivariable peut, à titre de conjoncture, être généralisé à une FAST $Z(x)$ quelconque dans $\mathbb{R}^n$. On suppose seulement que la loi bivariable (Z_x, Z_y) est symétrique et ne dépend que d'un seul paramètre r (par exemple, le coefficient de corrélation de Z_x, Z_y), autrement dit qu'elle est du type $F(dz, dz' ; r)$. Ces hypothèses ne sont pas très restrictives. Il n'est pas nécessaire, au stade actuel, d'admettre que, r variant, les diverses lois F_r constituent un modèle isofactoriel.

A titre de conjecture, examinons le modèle suivant : pour un support V petit, et au premier ordre par rapport à un infiniment petit principal que nous préciserons dans un instant, la variable $Z_V = (1/|V|) \int_V Z_x dx$ vérifie l'équivalence en loi :

$$(4-4) \quad Z_V \cong U Z + (1-U)Z'$$

où Z et Z' admette une loi du type $F_r(dz, dz')$, pour une valeur $r = r_V$ à préciser, et U est uniforme sur $(0,1)$ et indépendante de Z et Z' . Si $r = r_V$ est le coefficient de corrélation de Z et Z' , on le choisira de manière à obtenir la variance correcte, soit :

$$(4-5) \quad \sigma_V^2 = \sigma^2 \left(\frac{2+r_V}{3} \right)$$

D'après ce qui précède, nous savons déjà que ce modèle est correct au premier ordre dans les deux types de FA que nous avons examinés : processus markovien stationnaire (et dans ce cas l'infiniment petit principal est V lui-même) ou multigaussien stationnaire transformé dans R^n (et alors l'infiniment petit principal est $\bar{y}$).

Mais ceci ne concerne qu'un usage global du modèle (4-4). Il serait beaucoup plus intéressant encore d'utiliser ce modèle au niveau local, c'est-à-dire d'introduire l'hypothèse supplémentaire que l'équivalence (au premier ordre) indiquée par (4-4) reste valable lorsque les différentes variables sont conditionnées par des données expérimentales Z_α .

Vers de nouvelles techniques d'estimation locale

Comme Z et Z' jouent des rôles symétriques, elles devraient dans ce modèle avoir le même coefficient de corrélation $r_{\alpha V}$ avec une donnée Z_α . D'après (4-4) le coefficient $r_{\alpha V}$ sera donc défini par :

$$(4-5') \quad \sigma_{\alpha V} = r_\alpha \sigma^2, \text{ i.e. } r_\alpha = \frac{\sigma_{\alpha V}}{\sigma^2} = \rho_{\alpha V} \frac{\sigma_V}{\sigma}$$

*

Il faut toutefois s'assurer que les matrices de covariances entre les Z_α , Z et Z' que l'on formera ainsi sont bien de type positif. Considérons donc une combinaison linéaire quelconque des données, soit

$$Z_\lambda = \sum \lambda^\alpha Z_\alpha$$

Posant $Z_0 = Z_\lambda$, $Z_1 = Z$, $Z_2 = Z'$, il faut s'assurer que $\langle Z_i Z_j \rangle$ est de type positif. Or cette matrice est :

$$\langle Z_i Z_j \rangle = \begin{pmatrix} \sigma_\lambda^2 & \sigma_{\lambda V} & \sigma_{\lambda V} \\ \sigma_{\lambda V} & \sigma^2 & r_V \sigma^2 \\ \sigma_{\lambda V} & r_V \sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

On voit facilement qu'elle est de type positif si et seulement si $|r_V| \leq 1$, soit

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\sigma_V^2}{\sigma^2} \leq 1$$

La seconde inégalité est triviale, mais non la première : elle indique une limite absolue pour la taille du support, au-delà de laquelle le modèle (4-4) ne pourra plus être utilisé au moins sous forme locale : il est vrai que, sauf très fort effet de pépité, une réduction de la variance au tiers de sa valeur correspond à un très grand changement de support, pour lequel les approximations du premier ordre ne sont certainement plus acceptable. *

Nous connaissons donc les lois de tous les couples (Z_α, Z_β) ; (Z_α, Z) et (Z_α, Z') . Cela ne permet pas, en principe, de faire le KD de la loi de Z_V , puisqu'il faudrait pour cela connaître la loi de Z_V conditionnelle en chaque Z_α : ce qui,

d'après (4-4), nécessite la connaissance des lois trivariables (Z, Z', Z_α) . Toutefois, dans le cas où $Z_X = \varphi(Y_X)$ où Y_X est multigaussienne, la reconstitution des lois tri (et même multivariables à partir des lois bivariables est en principe possible. La même remarque s'applique dans le cas markovien.

Dans le cas général, il conviendra donc de rechercher un bon modèle de loi trivariante (Z_α, Z, Z') . On pourra ensuite travailler par KD. Dans le cas multigaussien, on pourra ainsi travailler en espérance conditionnelle.

~ 350 loges

~	Naissement
~	Noyer
~	Serre
~	Klein
~	Bender
~	Notker
~	Steinberg

- ~ Estimation : variansu } 40 loges
Algorithme de comptage
- ~ Meilleure méthode hexagone 5 loges 0-10
- ~ construction de bord de champ 15 loges
- ~ Le perimetre (et notation eq. en binaire de gris) (Noyer)
angositi } 25 loges
- ~ Fiche morphologique 50 loges ←
- ~ Algorithme de tranfo 35 loges
- ~ probiter topologique 15 loges ←
- ~ Naissement sur le graphe d'ensemble 20
- ~ Amincissement
- ~ Squelch à binaire de gris (Bender) 40 loges
- ~ Groupes planaires (Noyer) 20
- ~ fonction à binaire de gris 20 loges