Fontainebleau/CGMM

N-823

QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES
DES APPLICATIONS DE LA CLASSE $\mathcal{S}$

G. MATHERON

Mai 1983

QUEIQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES

DES APPLICATIONS DE LA CLASSE $\mathcal{S}$

Par

G. MATHERON

0 - CADRE ALGEBRIQUE	1
1 - SEMI-CONTINUITÉ SUPERIEURE	2
2 - SEMI-CONTINUITÉ INFERIEURE	7
3 - APPLICATIONS OUVERTES	9
4 - LA CLASSE $\mathcal{S}_0$ DES APPLICATIONS S.C.S. NULLES A L'INFINI	10
5 - OUVERTURE ASSOCIEE	14

QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES APPLICATIONS

DE LA CLASSE $\mathcal{S}$

Par

G. MATHERON

0. CADRE ALGEBRIQUE

E désignant un ensemble quelconque, toute application $\Gamma = E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ associant à chaque $x \in E$ un sous-ensemble $\Gamma(x)$ de l'espace E admet un prolongement par une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ que nous désignerons encore par Γ , à savoir l'application définie par :

$$(1) \quad \Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma(x) \quad (A \in \mathcal{P}(E))$$

Avec J. Serra [], nous désignerons par $\mathcal{S}$ la classe des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même ainsi définies. Il est immédiat qu'une application $\Gamma : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est dans la classe $\mathcal{S}$ si et seulement si on a :

$$(2) \quad \Gamma(\bigcup A_i) = \bigcup \Gamma(A_i)$$

pour toute famille de sous-ensembles de E.

De même, comme dans [], à toute application $\Gamma : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ nous associons l'application réciproque $\check{\Gamma} : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, définie par :

$$(3) \quad y \in \check{\Gamma}(x) \quad \text{ssi} \quad x \in \Gamma(y) \quad (x, y \in E)$$

Tout comme Γ lui-même, $\check{\Gamma}$ admet un prolongement sur $\mathcal{P}(E)$, défini par la règle (1). Ce prolongement, qui sera encore noté Γ , est évidemment dans la classe $\mathcal{S}$. En tant qu'applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, Γ et $\check{\Gamma}$ vérifient les relations :

$$(4) \quad \Gamma(A) \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \cap \check{\Gamma}(B) \neq \emptyset \quad (A, B \in \mathcal{P}(E))$$

En fait, la relation (4) caractérise la classe $\mathcal{S}$:

THEOREME 1 - Pour qu'une application Γ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ appartienne à la classe $\mathcal{S}$, il faut et il suffit qu'on puisse lui associer une application $\check{\Gamma} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ vérifiant la relation (4). Cette application réciproque $\check{\Gamma}$, si elle existe, est nécessairement unique, appartient à $\mathcal{S}$ et $\check{\check{\Gamma}} = \Gamma$.

La condition est nécessaire d'après (3) et (4). Inversement, soient Γ et $\check{\Gamma}$ deux applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même vérifiant (4). Lorsque l'ensemble A est réduit à un point x , soit $A = \{x\}$, nous écrirons $\Gamma(x)$ au lieu de $\Gamma(\{x\})$. Il faut montrer que cette application $x \rightarrow \Gamma(x)$ de E dans $\mathcal{P}(E)$ vérifie (1).

Avec $B = \{x\}$, la relation (4) donne :

$$(5) \quad x \in \Gamma(A) \Leftrightarrow A \cap \check{\Gamma}(x) \neq \emptyset$$

Si de plus $A = \{y\}$, ceci devient $x \in \Gamma(y) \Leftrightarrow y \in \check{\Gamma}(x)$, c'est-à-dire (3). D'après cette relation (3), $A \cap \check{\Gamma}(x) \neq \emptyset$, qui équivaut à $\exists y \in A$ tel que $y \in \check{\Gamma}(x)$, équivaut encore à $\exists y \in A$ tel que $x \in \Gamma(y)$, c'est-à-dire à $x \in \bigcup \{\Gamma(y), y \in A\}$. L'équivalence (5) entraîne donc

$$\Gamma(A) = \bigcup_{y \in A} \Gamma(y)$$

et Γ est dans la classe $\mathcal{S}$. De la même manière, on trouve $\check{\Gamma}(B) = \bigcup \{\check{\Gamma}(x), x \in B\}$, et l'unicité de $\check{\Gamma}$ découle alors de (3). Le reste est trivial.

1. SEMI-CONTINUITÉ SUPÉRIEURE

Nous allons maintenant supposer que E est un espace L.C.D., et nous intéresser à certaines sous-classes de $\mathcal{S}$ possédant de bonnes propriétés topologiques. Pour A sous-ensemble quelconque de E , on note $\mathfrak{F}_A$ la classe des fermés qui rencontrent A , et de même $\mathfrak{K}_A$ la classe des compacts qui rencontrent A . Posons un lemme qui nous sera utile.

LEMME 1 - Pour $A \subset E$, $\mathfrak{F}_A$ est une partie fermée de $\mathfrak{F}$ si et seulement si A est compact, $\mathcal{K}_A$ est une partie fermée de $\mathcal{K}$ si et seulement si A est fermé.

Démontrons seulement le premier énoncé, qui est le plus délicat. Si $A \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{F}_A$ est fermé dans $\mathfrak{F}$ d'après la définition de la topologie de $\mathfrak{F}$. Inversement, supposons $\mathfrak{F}_A$ fermé dans $\mathfrak{F}$. Si $A = \emptyset$, A est compact. Si $A \neq \emptyset$, montrons que toute suite $x_n \in A$ admet dans E une valeur d'adhérence $x \in A$. De fait, la suite $\{x_n\}$ admet une valeur d'adhérence A_0 dans l'espace compact $\mathfrak{F}$, et A_0 est soit $\emptyset$, soit réduit à un point x . Mais, $\mathfrak{F}_A$ étant fermé dans $\mathfrak{F}$ par hypothèse, on a $A_0 \in \mathfrak{F}_A$, c'est-à-dire $A_0 \cap A \neq \emptyset$. Donc A_0 ne peut pas être vide. Ainsi on a $A_0 = \{x\}$ pour un $x \in E$. Mais ce point x est évidemment alors une valeur d'adhérence de la suite x_n dans E . De plus, comme $A_0 \in \mathfrak{F}_A$, on a aussi $x \in A$: donc A est compact.

LEMME 2 - Pour tout $\Gamma \in \mathcal{Y}(E)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(6) $\Gamma(K)$ est compact pour tout $K \in \mathcal{K}$.

(6') $\{F : F \in \mathfrak{F}, \check{\Gamma}(F) \cap K \neq \emptyset\}$ est fermé dans $\mathfrak{F}$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

De même, sont équivalentes les propriétés

(7) $\check{\Gamma}(F)$ est fermé pour tout fermé F

(7') $\{K : K \in \mathcal{K}, \Gamma(K) \cap F \neq \emptyset\}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ pour tout $F \in \mathfrak{F}$.

On a évidemment des énoncés réciproques en remplaçant Γ par $\check{\Gamma}$.

D'après le lemme 1, $\Gamma(K)$ est compact si et seulement si

$$\mathfrak{F}_{\Gamma(K)} = \{F : F \in \mathfrak{F}, F \cap \Gamma(K) \neq \emptyset\}$$

est fermé dans $\mathfrak{F}$. Mais d'après (4), cela équivaut à (6'). De même, $\check{\Gamma}(F)$ est fermé si et seulement si $\mathcal{K}_{\check{\Gamma}(F)}$ est fermé dans $\mathcal{K}$, ce qui équivaut à (7') d'après (4).

THEOREME 2 - Pour toute application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\Gamma(K)$ est compact pour tout $K \in \mathcal{K}$ et $\check{\Gamma}(F)$ fermé pour tout $F \in \mathcal{F}$.
- b) Γ est une application scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.
- c) $\check{\Gamma}$ est une application scs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

Ceci résulte aussitôt du lemme 2, car :

- a) $\Leftrightarrow$ (6) et (7)
- b) $\Leftrightarrow$ (6) et (7')
- c) $\Leftrightarrow$ (6') et (7)

Le théorème suivant donne des résultats plus forts :

THEOREME 3 - Pour que $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ soit scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, il faut et il suffit que l'une des trois propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

- d) l'application $x \rightarrow \Gamma(x)$ est scs de E dans $\mathcal{K}$.
- e) $\Gamma(x)$ est compact pour tout $x \in E$ et $\check{\Gamma}(F)$ est fermé pour tout $F \in \mathcal{F}$.
- f) $\check{\Gamma}(y) \in \mathcal{F}$ pour tout $y \in E$ et $\Gamma(K) \in \mathcal{K}$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

D'après le théorème 2, chacune de ces conditions est nécessaire. Il reste à montrer que chacune d'elles est suffisante, ce qui assurera automatiquement leur équivalence.

~ Montrons d'abord d) $\Leftrightarrow$ e)

De fait, soit $x \rightarrow \Gamma(x)$ une application de E dans $\mathcal{K}$. Cette application sera scs si et seulement si l'ensemble

$$\{x : x \in E, \Gamma(x) \cap F \neq \emptyset\}$$

est fermé pour tout $F \in \mathcal{F}$. Mais, d'après (4), cet ensemble n'est autre que $\check{\Gamma}(F)$: d'où l'équivalence de d) et e).

~ Montrons d) $\Rightarrow$ b)

Soit $x \rightarrow \Gamma(x)$ une application scs de E dans $\mathcal{K}$. Comme on vient de le voir, cela entraîne $\check{\Gamma}(F) \in \mathfrak{F}$ pour tout $F \in \mathfrak{F}$. D'après le théorème 2, il suffit de montrer que $\Gamma(K)$ est compact pour tout compact K (puisque $a) \Leftrightarrow b)$).

Soit donc $G_i, i \in I$ un recouvrement ouvert de $\Gamma(K) = \bigcup \{\Gamma(x), x \in K\}$. Pour chaque $x \in K$, $\Gamma(x)$ est compact par hypothèse. On peut donc trouver un sous-ensemble fini $I(x) \subset I$ tel que :

$$\Gamma(x) \subset \bigcup \{G_i, i \in I(x)\}$$

De plus, $x \rightarrow \Gamma(x)$ étant scs, on peut aussi trouver un voisinage ouvert G_x de x tel que l'on ait

$$\Gamma(y) \subset \bigcup \{G_i, i \in I(x)\}$$

pour tout $y \in G_x$. Maintenant, K lui-même étant compact, est couvert par un nombre fini de tels ouverts, soit $G_{x_k}, k = 1, 2, \dots, n$. On a alors :

$$\Gamma(K) = \bigcup \{\Gamma(y), y \in K\} \subset \bigcup \{G_i, i \in I(x_1) \cup \dots \cup I(x_n)\}$$

et ce recouvrement est fini : $\Gamma(K)$ est donc compact.

~ Montrons enfin f) $\Rightarrow$ a).

Soit $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ telle que $\Gamma(K) \in \mathcal{K}$ pour tout compact K . Montrons que s'il existe un fermé F tel que $\check{\Gamma}(F)$ ne soit pas fermé, alors il existe nécessairement un point $y \in E$ tel que $\check{\Gamma}(y)$ ne soit pas fermé, ce qui entraînera l'implication f) $\Rightarrow$ a).

Soit donc $F \in \mathfrak{F}$ tel que $\check{\Gamma}(F) \notin \mathfrak{F}$. On peut donc trouver deux suites y_n et x_n telles que :

$$y_n \in F, \quad x_n \in \check{\Gamma}(y_n), \quad x_n \rightarrow x \quad \text{et} \quad x \notin \check{\Gamma}(F)$$

L'ensemble $K = \{x\} \cup \{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ étant compact, la suite

$y_n \in \Gamma(x_n) \subset \Gamma(K)$ est contenue dans $\Gamma(K)$ qui est compact par hypothèse. Cette suite admet donc une valeur d'adhérence y et, quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer $y_n \rightarrow y$ avec $y \in F$, puisque F est fermé.

Alors $\check{\Gamma}(y)$ n'est pas fermé. En effet, si $\check{\Gamma}(y)$ est fermé, d'après le lemme 1, l'ensemble

$$\mathcal{K}_{\check{\Gamma}(y)} = \{K : K \in \mathcal{K}, y \in \Gamma(K)\} \text{ est fermé dans } \mathcal{K}.$$

Considérons alors la suite décroissante de compacts

$$K_N = \{x\} \cup \{x_n, n \geq N\}$$

Dès que $n \geq N$, $y_n \in \Gamma(x_n)$ est dans $\Gamma(K_N)$. Comme $y_n \rightarrow y$, cela entraîne $y \in \Gamma(K_N)$, puisque $\Gamma(K_N)$ est compact par hypothèse. Mais, pour N tendant vers l'infini, la suite K_N converge vers $\{x\}$ dans $\mathcal{K}$. Si donc $\mathcal{K}_{\check{\Gamma}(y)}$ était fermé dans $\mathcal{K}$, on aurait $\{x\} \in \mathcal{K}_{\check{\Gamma}(y)}$, c'est à dire $x \in \check{\Gamma}(y)$. Mais cela entraîne $x \in \check{\Gamma}(F)$, puisque $y \in F$, et contredit l'hypothèse $x \notin \check{\Gamma}(F)$. Donc $\check{\Gamma}(y)$ n'est pas fermé, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE : Bien que la démonstration du théorème 3 soit achevée, il est intéressant du point de vue technique de montrer directement e) $\Rightarrow$ a).

Soit $F \in \mathcal{S}(E)$ telle que $\check{\Gamma}(F)$ soit fermé pour tout fermé F . Montrons que s'il existe un compact K tel que $\Gamma(K)$ ne soit pas compact, alors il existe nécessairement un point $y \in E$ tel que $\Gamma(y)$ ne soit pas compact : ce qui entraîne l'implication e) $\Rightarrow$ a).

Soit donc $K \in \mathcal{K}$ tel que $\Gamma(K)$ ne soit pas compact. On peut donc trouver dans $\Gamma(K)$ une suite x_n sans valeur d'adhérence ou admettant une limite $x \notin \Gamma(K)$. Dans les deux cas, la suite $\{x_n\}$ admet dans l'espace compact $\mathfrak{X}$ une limite $A_0 \in \mathfrak{X}$, qui est $A_0 = \emptyset$ dans le premier cas, et $A_0 = \{x\}$ dans le second, mais dans les deux cas $A_0 \cap \Gamma(K) = \emptyset$.

D'autre part, comme $x_n \in \Gamma(K)$, il existe une suite $y_n \in K$

avec $x_n \in \Gamma(y_n)$. K étant compact, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer $y_n \rightarrow y \in K$. Au total, on a :

$$x_n \in \Gamma(y_n) \quad ; \quad y_n \in K \quad ; \quad y_n \rightarrow y \in K$$

$$\{x_n\} \rightarrow A_0 \text{ dans } \mathfrak{F} \quad ; \quad A_0 \cap \Gamma(y) = \emptyset$$

Considérons la suite décroissante de fermés :

$$F_N = A_0 \cup \{x_n, n \geq N\}$$

On a $x_n \in F_N$ pour $n \geq N$ et donc $y_n \in \check{\Gamma}(F_N)$. Comme $\check{\Gamma}(F_N)$ est fermé par hypothèse, cela entraîne $y \in \check{\Gamma}(F_N)$ pour tout N . Alors $\Gamma(y)$ n'est pas compact. En effet, supposons que $\Gamma(y)$ soit compact. D'après le lemme 1, l'ensemble

$$\mathfrak{F}_{\Gamma(y)} = \{F : y \in \check{\Gamma}(F)\}$$

est alors fermé dans $\mathfrak{F}$. Comme $F_N \in \mathfrak{F}_{\Gamma(y)}$ et $F_N \rightarrow A_0$ dans $\mathfrak{F}$, il en résulte $A_0 \in \mathfrak{F}_{\Gamma(y)}$, c'est-à-dire $A_0 \cap \Gamma(y) \neq \emptyset$, contrairement à l'hypothèse. Donc $\Gamma(y)$ n'est pas compact.

2. SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE

Les propriétés de semi-continuité inférieure donnent lieu à des résultats analogues. Posons d'abord un lemme :

LEMME 3 - $\mathcal{K}_A$ est ouvert dans $\mathcal{K}$ si et seulement si $A \in \mathcal{G}$. De même, $\mathfrak{F}_A$ est ouvert dans $\mathfrak{F}$ si et seulement si $A \in \mathcal{G}$.

Ces conditions sont suffisantes, d'après la définition même des topologies de $\mathcal{K}$ et de $\mathfrak{F}$. Inversement, supposons par exemple $\mathcal{K}_A$ ouvert dans $\mathcal{K}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{K}^A = \{K : K \in \mathcal{K}, K \subset A^c\} \text{ fermé dans } \mathcal{K}.$$

Si $A^c = \emptyset$, $A = E$ est ouvert. Si A^c n'est pas vide, soit $x_n \in A^c$ une suite dans A^c convergeant vers une limite x dans E . Il faut montrer $x \in A^c$. De fait, la suite $\{x_n\}$ converge vers $\{x\}$ dans $\mathcal{K}$ et $\{x_n\}$ appartient au fermé $\mathcal{K}^A$: donc $\{x\} \in \mathcal{K}^A$, c'est-à-dire $x \in A^c$: A^c est donc fermé, et A ouvert.

LEMME 4 - Pour toute application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ et tout ouvert $G \in \mathcal{G}$,

les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- i/ $\bigvee \Gamma(G)$ est ouvert dans E
- ii/ $\{x : x \in E, \Gamma(x) \cap G \neq \emptyset\}$ est ouvert dans E
- iii/ $\{F : F \in \mathcal{F}, \Gamma(F) \cap G \neq \emptyset\}$ est ouvert dans $\mathcal{F}$
- iv/ $\{K : K \in \mathcal{K}, \Gamma(K) \cap G \neq \emptyset\}$ est ouvert dans $\mathcal{K}$.

L'équivalence de i/ et ii/ est une conséquence immédiate de la relation (4). D'après le lemme 3, $\bigvee \Gamma(G)$ est ouvert si et seulement si $\mathcal{K}_{\bigvee \Gamma(G)}$ est ouvert dans $\mathcal{K}$. Mais d'après la relation (4) on a

$$\mathcal{K}_{\bigvee \Gamma(G)} = \{K : K \in \mathcal{K}, \Gamma(K) \cap G \neq \emptyset\}$$

Donc i/ et iv/ sont équivalentes. On montre de même l'équivalence de i/ et iii/.

THEOREME 4 - Soit $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$. Pour que Γ soit une application sci de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ il faut et il suffit que l'on ait :

$$\bigvee \Gamma(G) \in \mathcal{G} \quad \forall G \in \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \Gamma(K) \in \mathcal{K} \quad \forall K \in \mathcal{K}$$

De même, Γ est une application sci de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\bigvee \Gamma(G) \in \mathcal{G} \quad \forall G \in \mathcal{G} \quad \text{et} \quad \Gamma(F) \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}$$

En effet, soit $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ une application telle que $\Gamma(K) \in \mathcal{K}$ pour tout compact K . Cette application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ sera sci si et seulement si $\{K : K \in \mathcal{K}, \Gamma(K) \cap G \neq \emptyset\}$ est ouvert dans $\mathcal{K}$ pour tout ouvert G . Mais, d'après le lemme 4, cela équivaut à $\bigvee \Gamma(G)$ ouvert : d'où le premier énoncé. Démonstration analogue pour le second énoncé.

Corollaire 1 - Pour toute application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i/ L'application $x \rightarrow \Gamma(x)$ est continue de E dans $\mathcal{K}$
- ii/ L'application $K \rightarrow \Gamma(K)$ est continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$
- iii/ $\Gamma(x) \in \mathcal{K}$ pour tout $x \in E$, $\check{\Gamma}(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G et $\check{\Gamma}(F) \in \mathcal{F}$ pour tout fermé F .

Il est clair que ii/ entraîne i/. Inversement, supposons $x \rightarrow \Gamma(x)$ continue de E dans $\mathcal{K}$. Comme cette application est scs, le théorème 3 montre que $K \rightarrow \Gamma(K)$ est scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Comme l'application $x \rightarrow \Gamma(x)$ est sci, le lemme 4 montre que $\check{\Gamma}(G)$ est ouvert pour tout $G \in \mathcal{G}$. D'après le théorème 4, il en résulte que $K \rightarrow \Gamma(K)$ est sci de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Etant scs et sci, cette application est continue. De la même manière, les théorèmes 2 et 4 entraînent l'équivalence de ii/ et iii/. De même encore :

Corollaire 2 - $\check{\Gamma}$ est continue de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $x \rightarrow \Gamma(x)$ est scs de E dans $\mathcal{K}$ et $\Gamma(G)$ ouvert pour tout $G \in \mathcal{G}$.

3. APPLICATIONS OUVERTES

Nous dirons qu'une application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ est ouverte si $\Gamma(G)$ est ouvert pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$. En vue de trouver un critère, posons d'abord un lemme.

LEMME 5 - Une partie H de E est ouverte dans E si et seulement si :

$$\bar{A} \cap H = \emptyset \Leftrightarrow A \cap H = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée. Avec $A = H^c$, on a $H \cap H^c = \emptyset$, donc $H \cap \bar{H}^c = \emptyset$, c'est-à-dire $H \subset H$. Par suite $H = \overset{\circ}{H}$ est ouverte dans E .

Critère 1: Pour toute application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- i/ $\Gamma(\bar{A}) \subset \overline{\Gamma(A)} \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$
- ii/ $\overline{\Gamma(\bar{A})} = \overline{\Gamma(A)} \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$
- iii/ $\check{\Gamma}$ est ouverte, i.e. $\check{\Gamma}(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G
- iv/ $x \rightarrow \bar{\Gamma}(x)$ est sci de E dans $\mathfrak{F}$

Comme on a toujours $\Gamma(A) \subset \Gamma(\bar{A})$, i/ entraîne $\Gamma(A) \subset \Gamma(\bar{A}) \subset \overline{\Gamma(A)}$ et donc $\overline{\Gamma(\bar{A})} = \overline{\Gamma(A)}$, c'est-à-dire ii/. Inversement, ii/ entraîne i/ trivialement. De son côté, ii/ équivaut à :

$$G \cap \Gamma(\bar{A}) \neq \emptyset \Leftrightarrow G \cap \Gamma(A) \neq \emptyset, \quad \forall G \in \mathcal{G}, \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

c'est-à-dire, d'après la relation (4), à :

$$\bar{A} \cap \check{\Gamma}(G) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap \check{\Gamma}(G) = \emptyset, \quad \forall G \in \mathcal{G}, \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

Mais d'après le lemme 5, cette dernière relation équivaut à $\check{\Gamma}(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G , c'est-à-dire à iii/. L'équivalence de iii/ et iv/ est immédiate.

THEOREME 5 - Pour qu'une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ soit sci de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)} \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$

Si Γ est sci de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$, $\check{\Gamma}$ est ouverte, d'après le théorème 4. On a donc $\overline{\Gamma(\bar{A})} = \overline{\Gamma(A)}$ d'après le critère. Mais, Γ appliquant $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$, on a aussi $\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(\bar{A})}$, et donc $\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Inversement, si $\Gamma(\bar{A}) = \overline{\Gamma(A)}$ pour toute partie A de E , $\Gamma(F)$ est fermé pour tout $F \in \mathfrak{F}$, et de plus $\check{\Gamma}$ est ouvert d'après le critère 1. Le Théorème 4 montre alors que Γ est sci de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$.

4. LA CLASSE $\mathcal{S}_0$ DES APPLICATIONS SCS NULLES A L'INFINI

Les énoncés précédents font jouer des rôles dissymétriques aux espaces $\mathcal{S}$ et $\mathfrak{F}$.

Par exemple, Γ est scs de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ si et seulement si

l'application réciproque $\check{\Gamma}$ est scs de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{E}$. On aimerait disposer d'une classe d'application où Γ et $\check{\Gamma}$ possèdent les mêmes propriétés. Or cela est automatiquement réalisé dans le cas où l'espace E est compact. Dans le cas où E n'est pas compact, il est naturel d'introduire son compactifié d'Alexandrov, et la classe $\mathcal{S}_0$ que nous allons maintenant définir s'impose alors d'elle-même. Toutefois, pour éviter toute complication, je donnerai ici une construction directe de cette classe, sans passer par l'intermédiaire du compactifié.

THEOREME 6 - Soit $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ telle que $x \rightarrow \Gamma(x)$ soit scs de E dans $\mathcal{K}$

ou, ce qui revient au même (Th. 3), $K \rightarrow \Gamma(K)$ scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i/ Pour tout compact K , il existe un compact K' tel que $x \notin K'$ entraîne $\Gamma(x) \cap K = \emptyset$.

ii/ $\check{\Gamma}(K)$ est compact pour tout $K \in \mathcal{K}$.

iii/ Pour toute suite x_n sans valeur d'adhérence dans E , la suite $\Gamma(x_n)$ converge dans $\mathfrak{F}$ vers l'ensemble vide $\emptyset$.

D'après la relation (4), la propriété i/ équivaut à $x \notin K' \Leftrightarrow x \notin \check{\Gamma}(K)$ c'est-à-dire $\check{\Gamma}(K) \subset K'$. D'autre part, Γ étant scs de E (ou $\mathcal{K}$) dans $\mathcal{K}$, nous savons d'après le Théorème 3 que $\check{\Gamma}(F)$ est fermé pour tout $F \in \mathfrak{F}$. En particulier, donc, $\check{\Gamma}(K)$ est fermé. Etant fermé et contenu dans le compact K' , $\check{\Gamma}(K)$ est donc compact. Ainsi i/ entraîne ii/. Réciproquement, si ii/ est vrai, en prenant $K' = \check{\Gamma}(K)$, on voit que $x \notin \check{\Gamma}(K)$ entraîne $\Gamma(x) \cap K = \emptyset$ d'après la relation (4). Ainsi ii/ et i/ sont équivalentes.

Montrons i/ entraîne iii/. Les voisinages de $\emptyset$ dans $\mathfrak{F}$ sont les $\mathfrak{F}^K$, $K \in \mathcal{K}$. Soit x_n une suite sans valeur d'adhérence dans E . Il faut montrer $\Gamma(x_n) \rightarrow \emptyset$, c'est-à-dire que pour tout compact K on a $\Gamma(x_n) \cap K = \emptyset$ pour n assez grand. D'après i/, il existe $K' \in \mathcal{K}$ tel que $\Gamma(x) \cap K = \emptyset$ dès que $x \notin K'$. Or, la suite x_n étant par hypothèse sans valeur d'adhérence, on a $x_n \notin K'$ pour n assez grand, et donc aussi $\Gamma(x_n) \cap K = \emptyset$. Ainsi i/ entraîne iii/.

Montrons maintenant que iii/ entraîne ii/. Pour cela,

supposons que ii/ ne soit pas vérifiée : il existe donc un compact K tel que $\check{\Gamma}(K)$ n'est pas compact. Nous savons toutefois que $\check{\Gamma}(K)$ est fermé, puisque Γ est scs de E dans $\mathcal{K}$ (Th. 3). Etant fermé et non compact, $\check{\Gamma}(K)$ contient une suite x_n sans valeur d'adhérence. Comme $x_n \in \check{\Gamma}(K)$, il existe une suite $y_n \in K$ avec $x_n \in \check{\Gamma}(y_n)$, soit $y_n \in \Gamma(x_n)$. Etant contenue dans le compact K , la suite y_n admet une valeur d'adhérence $y \in K$, et, quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer $y_n \rightarrow y$ dans E . Mais, Γ étant scs, et $y_n \in \Gamma(x_n)$, cela implique $y \in \overline{\lim} \Gamma(x_n)$. Donc la suite $\Gamma(x_n)$ ne converge pas vers $\emptyset$ dans $\mathfrak{F}$. Ainsi, la négation en ii/ entraîne la négation de iii/, soit iii/ $\Rightarrow$ ii/, ce qui achève la démonstration.

DEFINITION - Nous dirons qu'une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ est scs et nulle à l'infini si elle est scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et vérifie l'une des trois propriétés équivalentes du théorème 6, et nous désignerons par $\mathcal{S}_0$ la classe des applications scs nulles à l'infini.

Le théorème suivant montre que cette classe $\mathcal{S}_0$ possède les agréables propriétés de symétrie que nous souhaitons.

THEOREME 7 - Une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ est scs et nulle à l'infini si et seulement si l'application réciproque $\check{\Gamma}$ est elle-même scs et nulle à l'infini.

Soit Γ scs de E dans $\mathcal{K}$ et telle que $\check{\Gamma}(K)$ soit compacte pour tout $K \in \mathcal{K}$. Comme $\Gamma(K)$ est compact pour tout $K \in \mathcal{K}$, il faut montrer que $\check{\Gamma}$ est scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. D'après la propriété a) du Théorème 2, appliquée à $\check{\Gamma}$, il suffit même de montrer que $\Gamma(F)$ est fermé pour tout $F \in \mathfrak{F}$.

Soit donc un fermé F et x_n une suite dans $\Gamma(F)$ telle que $x_n \rightarrow x$. Il faut montrer $x \in \Gamma(F)$. Comme $x_n \in \Gamma(F)$, on peut trouver $y_n \in F$ tel que $x_n \in \Gamma(y_n)$, c'est-à-dire $y_n \in \check{\Gamma}(x_n)$. Posons $K = \{x\} \cup \{x_n, n = 1, 2, \dots\}$, de sorte que l'on a $y_n \in \check{\Gamma}(x_n) \subset \check{\Gamma}(K)$. Comme K est compact et Γ scs et nulle à l'infini, $\check{\Gamma}(K)$ est donc compact. La suite y_n , contenue dans le compact $\check{\Gamma}(K)$, admet par

suite une valeur d'adhérence $y \in F$ et, quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer $y_n \rightarrow y$. On a ainsi :

$$x_n \in \Gamma(y_n) \quad ; \quad x_n \rightarrow x \quad ; \quad y_n \rightarrow y \in F$$

Comme $x \rightarrow \Gamma(x)$ est scs, cela implique $x \in \Gamma(y) \subset \Gamma(F)$. Donc $\Gamma(F)$ est fermé, ce qui achève la démonstration.

Notons d'ailleurs que l'application $F \rightarrow \Gamma(F)$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ ainsi établie est nécessairement scs : cela résulte du Théorème 2 appliqué à $\check{\Gamma}$, puisque $\check{\Gamma}(K)$ est compact pour $K \in \mathcal{K}$ et $\Gamma(F)$ fermé pour $F \in \mathfrak{F}$.

Inversement, d'ailleurs, si $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ est scs à la fois de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$, elle est nécessairement nulle à l'infini : D'après le théorème 2, en effet, Γ scs de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ entraîne $\check{\Gamma}(K)$ compact pour tout $K \in \mathcal{K}$. D'où l'important corollaire :

Corollaire - Une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ est scs et nulle à l'infini si et seulement si elle est scs à la fois de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$.

Noter que cela implique $\Gamma(F_n) \rightarrow \emptyset$ dans $\mathfrak{F}$ pour toute suite F_n convergeant vers $\emptyset$ dans $\mathfrak{F}$, puisqu'on a alors $\overline{\lim} \Gamma(F_n) \subset \Gamma(\emptyset) = \emptyset$. C'est pourquoi ces applications peuvent être dites scs (à la fois de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$) et nulles à l'infini.

Les belles propriétés de symétrie qu'expriment le Théorème 7 et son corollaire ne subsistent malheureusement pas dans le cas des applications continues et nulles à l'infini. On obtient seulement le résultat suivant :

THEOREME 8 - Pour une application Γ scs et nulle à l'infini, les

trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- i/ Γ est continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$
- ii/ Γ est continue de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$
- iii/ $\check{\Gamma}$ est ouverte (i.e. $\check{\Gamma}(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G)

Γ étant scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, et aussi bien de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ (corollaire du Th. 6), le théorème 4 montre immédiatement l'équivalence des trois énoncés.

DEFINITION - On dira que $\Gamma \in \mathcal{S}$ est continue et nulle à l'infini si elle est scs et nulle à l'infini et vérifie les propriétés du Théorème 8.

On notera qu'une application Γ continue et nulle à l'infini n'est pas nécessairement ouverte : de sorte que l'application réciproque $\check{\Gamma}$ sera en général seulement scs et nulle à l'infini. Si nous voulons maintenir la symétrie entre Γ et $\check{\Gamma}$, la classe convenable sera celle des applications ouvertes, continues et nulles à l'infini : Γ appartiendra à cette classe si et seulement si $\check{\Gamma}$ en fait partie. D'après les résultats précédents et le corollaire 1 du Théorème 4, le critère est le suivant :

Critère : Une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ est ouverte, continue et nulle à l'infini si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- i/ $x \rightarrow \Gamma(x)$ est continue de E dans $\mathcal{K}$
- ii/ $\check{\Gamma}(K)$ est compact pour tout $K \in \mathcal{K}$
- iii/ $\Gamma(G)$ est ouvert pour tout $G \in \mathcal{G}$

5. OUVERTURE ASSOCIEE.

Comme dans [], à toute application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ nous associerons l'ouverture γ sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\gamma(A) = \bigcup \{ \Gamma(x) : x \in E, \Gamma(x) \subset A \} \quad (A \in \mathcal{P}(E))$$

La classe $\mathcal{B}$ des invariants de γ est constituée des $B \in \mathcal{P}(E)$ de la forme $B = \Gamma(A)$ pour un $A \in \mathcal{P}(E)$, soit $\mathcal{B} = \Gamma(\mathcal{P})$. Si l'on introduit l'application Γ^* duale de $\check{\Gamma}$ pour la complémentation, soit

$$\Gamma^* = \beta \circ \check{\Gamma} \circ \beta$$

alors on a :

$$\gamma = \Gamma \circ \Gamma^*$$

Il n'est pas facile de caractériser les propriétés topologiques de cette ouverture γ dans le cas général. Je n'examine ici que les cas les plus simples. Posons d'abord un lemme.

LEMME 6 - Si une application $\Gamma \in \mathcal{S}$ est ouverte, alors elle est
 | sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$.

En effet, soit $K \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{G}$ avec $K \subset \Gamma(G)$. L'espace E étant LCD, on peut trouver une suite croissante d'ouverts relativement compacts B_n tels que $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$ et $\cup B_n = \cup \bar{B}_n = G$. D'après la relation (2), on a :

$$\Gamma(G) = \cup \Gamma(B_n) \supset K$$

Le compact K , contenu dans la réunion de la suite croissante d'ouverts $\Gamma(B_n)$, est contenu dans l'un d'eux, soit $K \subset \Gamma(B_{n_0})$. On a alors $\bar{B}_{n_0} \subset G$, et, pour tout ouvert G' contenant le compact $\bar{B}_{n_0}$, $K \subset \Gamma(\bar{B}_{n_0}) \subset \Gamma(G')$: donc Γ est sci sur $\mathcal{G}$.

Il résulte du lemme 6 que, si $\check{\Gamma}$ est ouverte, alors $\Gamma^* = \beta \check{\Gamma} \beta$ est scs de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$. Si, de plus, Γ est scs de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$, l'ouverture $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ sera elle-même scs de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$, comme produit d'applications croissantes scs de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$. Comme γ est anti-extensive, γ applique alors $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$: en effet, pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\gamma(K)$ est fermé et contenu dans le compact K , donc $\gamma(K) \in \mathcal{K}$. De plus, $K \rightarrow \gamma(K)$ est alors scs non seulement pour la topologie induite par $\mathfrak{z}$, mais également pour la topologie myope sur $\mathcal{K}$: de fait, si $K_n \rightarrow K$ dans $\mathcal{K}$, les K_n sont contenus dans un compact fixe K_0 . On a alors $\gamma(K_n) \subset \gamma(K_0) \subset K_0$, de sorte que les $\gamma(K_n)$ restent eux-mêmes contenus dans le compact fixe K_0 . Ainsi :

THEOREME 9 - Si une application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ est continue de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$,
 | alors l'ouverture associée $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ est scs de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$ et aussi
 | de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

D'après le Théorème 4, en effet, Γ est continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ si et seulement si elle est scs de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ et $\check{\Gamma}$ ouverte.

De même :

THEOREME 10 - Si une application $\Gamma \in \mathcal{S}(E)$ est ouverte et scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, l'ouverture associée γ est sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$.

D'après le théorème 2, en effet, l'application réciproque $\check{\Gamma}$ est scs de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$, donc $\Gamma^* = \beta \check{\Gamma} \beta$ est sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. D'autre part Γ , étant ouverte, est sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ (lemme 6). Donc $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ est encore sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ comme produit d'applications croissantes sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$.

On rappelle qu'une ouverture γ sur $\mathcal{P}(E)$ est dite compacte si elle vérifie les propriétés suivantes :

- i/ γ est scs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, scs de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, sci de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$.
- ii/ γ est le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ de sa restriction à $\mathcal{K}$.

Nous pouvons alors énoncer un dernier résultat :

Corollaire - Si $\Gamma \in \mathcal{S}$ est ouverte, continue et nulle à l'infini, l'ouverture associée $\gamma = \Gamma\Gamma^*$ est compacte.

En effet, Γ est ici d'une part continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, de l'autre ouverte et scs (et même continue) de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Les théorèmes 9 et 10 montrent donc que γ vérifie les trois propriétés i/.

Maintenant, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a :

$$\gamma(A) = \cup \{ \gamma(x) : x \in E, \Gamma(x) \subset A \}$$

Mais $\Gamma(x)$ est compact pour tout $x \in E$, et $\gamma \Gamma(x) = \Gamma(x)$. Il en résulte :

$$\gamma(A) \subset \cup \{ \gamma(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset A \}$$

Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on en a fait l'égalité, ce qui établit la propriété ii/ : γ est une ouverture compacte.