FONTAINEBLEAU/CGMM N-935

DEUX NORMES ET QUELQUES INEGALITES

G. MATHERON

Décembre 1984

DEUX NORMES ET QUELQUES INEGALITES

G. Matheron

-=-=-=

Décembre 1984

DEUX NORMES ET QUELQUES INEGALITES

0 - DEFINITIONS ET RAPPELS

Dans ce qui suit, je me propose d'étudier deux distances entre lois de probabilité monovariables, ainsi que les relations que ces distances présentent avec la notion de sélectivité. La plupart des résultats ci-dessous se généralisent sans peine au cas des variables quelconques, mais, pour simplifier, je me limite ici au cas le plus intéressant, qui est celui des V.A. positives, donc des lois sur $\mathbb{R}^+$.

A toute probabilité $F(dx)$ sur $\mathbb{R}^+$, on associe la fonction non croissante $T_F(z)$ (ou simplement $T(z)$ s'il n'y a pas ambiguité) définie presque partout sur $\mathbb{R}^+$? Cette fonction admet une version T^- continue à gauche et s.c.s., et une version T^+ continue à droite et s.c.i. :

$$T^-(z) = P(Z \geq z) \quad ; \quad T^+(z) = P(Z > z)$$

De même, si U est une V.A. uniforme sur (0,1), on désignera par z_F (ou simplement z) la fonction non croissante définie presque partout sur (0,1) et telle que la V.A. $Z = z(U)$ admette la loi F. Ici encore, on peut compléter pour tout u la définition de la fonction non croissante z_F en introduisant la version z_F^+, s.c.i. et continue à droite, ou la version z_F^- , s.c.s. et continue à gauche.

La moyenne m_F, finie ou non, est donnée par

$$(1) \qquad m_F = \int_0^\infty T_F(z)\, dz = \int_0^1 z_F(u)\, du$$

Si $m_F < \infty$, nous utiliserons souvent le paramètre S_F appelé sélectivité (ou dispersion), ainsi que l'indice de délectivité

$$S_F/m_F \leq 1$$

qui lui est associé. Ce paramètre S_F est donné par :

(2)
$$\begin{cases} S_F = \int_0^{\infty} T_F(z)\ [1 - T_F(z)]\ dz \\ S_F = \int_0^{1} z_F(u)\ [1 - 2\ u]\ du \end{cases}$$

Ainsi, S_F est le double de la covariance des variables $z_F(U)$ et $1-U$, U uniforme sur (0,1). D'où l'inégalité de Schwarz :

(3)
$$S_F \leqq \sigma_F / \sqrt{3}$$

avec égalité si et seulement si F est elle-même une loi uniforme (sur un intervalle positif quelconque).

En somme, $S_F/2$ représente, en gros, <u>la covariance de la variable et de son rang</u>. Plus précisément, si l'on définit le rang d'une valeur z vis-à-vis de la loi F par $\frac{1}{2}\ (F_+(z) + F_-(z))$, on trouve en effet exactement :

(2')
$$S_F = \int_0^{\infty} z\,[\,F_+(z) + F_-(z)\,]\ F(dz) - m_F$$

Dans le cas d'une loi non continue, il est indispensable, dans les calculs pratiques, de prendre effectivement la somme des termes $F_+(z) = P(Z \leq z)$ et $F_-(z) = P(Z < z)$. Noter que l'on a dans tous les cas :

$$\int_0^{\infty} [F_+(z) + F_-(z)]\ F(dz) = 1$$

On utilisera aussi les fonctionnelles usuelles $Q_F(T)$ et $B_F(z)$, avec les relations habituelles.

$$\begin{cases} B_F(z) = \sup\limits_{T \in (0,1)} \{ Q_F(T) - zT \} \\ Q_F(T) = \inf\limits_{z \in R_+} \{ B_F(z) + zT \} \end{cases}$$

Rappelons aussi les definitions

(4)
$$\begin{cases} B_F(z) = E\ [\,(Z-z)_+\,] = \int_z^{\infty} T_F(u)\ du \\ Q_F(T) = \int_0^{T} z_F(u)\ du \end{cases}$$

et les rapports de la sélectivité S_F avec ces deux fonctions :

$$(2'') \quad \begin{cases} S_F = E\left[B_F(Z)\right] = \int_0^\infty B_F(z)\, F(dz) \\ \frac{1}{2} S_F = \int_0^1 \left[\, Q_F(T) - m_F\, T \,\right] dT \end{cases}$$

1 - LES NORMES EN Z ET EN T

Dans ce contexte, il semble naturel de munir l'espace des lois F de l'une ou l'autre des distances associées aux normes hilbertiennes pour les fonctions $z_F(u)$ ou $T_F(z)$. Nous poserons donc par définition :

$$(5) \quad \begin{cases} \| F \|_T^2 = \| T_F \|^2 = \int_0^\infty T_F^2(z)\, dz \\ \| F \|_z^2 = \| z_F \|^2 = \int_0^1 z_F^2(u)\, du \end{cases}$$

La norme en Z n'est autre que $E(Z^2) = m_F^2 + \sigma_F^2$. En écrivant $T_F^2 = T_F - T_F(1-T_F)$, on voit aussi, d'après (1), que $\| T_F \|^2$ est liée à S_F (dans le cas $m_F < \infty$) par :

$$(6) \quad \begin{cases} \| T_F \|^2 = m_F - S_F = 2 \int_0^1 z_F(u)\, u\, du \\ \| z_F \|^2 = m_F^2 + \sigma_F^2 = 2 \int_0^\infty T_F(z)\, z\, dz \end{cases}$$

On notera surtout que :

$\|T_F\|^2$ est une fonctionnelle <u>linéaire</u> en $z_F(T)$

$\| z_F \|^2$ est une fonctionnelle linéaire en $T_F(z)$

Les produits scalaires associés à ces normes :

$$\begin{cases} \langle\, F\ G\, \rangle_T = \langle\, T_F\ T_G\, \rangle = \int_0^\infty T_F(z)\, T_G(z)\, dz \\ \langle\, F\ G\, \rangle_Z = \langle\, z_F\ z_G\, \rangle = \int_0^1 z_F(u)\, z_G(u)\, du \end{cases}$$

admettent des interprétations intéressantes.

Le Produit Scalaire en T

Si X_F et X_G sont deux V.A. indépendantes, admettant respectivement les lois F et G, la variable

$$Z = X_F \wedge X_G = \mathrm{Min}(X_F, X_G)$$

admet la loi H définie par $T_H = T_F\, T_G$. On voit ainsi que le produit scalaire en T peut s'écrire :

$$(8) \qquad < T_F\, T_G > = E(X_F \wedge X_G)$$

Si les moyennes m_F et m_G sont finies, les relations

$$X_F \vee X_G + X_F \wedge X_G = X_F + X_G$$

$$X_F \vee X_G - X_F \wedge X_G = |X_F - X_G|$$

donnent alors, compte tenu de (8) :

$$(8') \qquad < T_F\, T_G > = \frac{1}{2}\left[m_F + m_G - E(|X_F - X_G|)\right]$$

Pour F = G, en comparant avec (6), cela donne :

$$(2''') \qquad S_F = \frac{1}{2} E(|X_F - X'_F|)$$

où X_F et X'_F sont indépendantes avec la même loi F. Enfin, d'après (4), on trouve en intégrant par parties :

$$(8'') \qquad < T_F\, T_G > = m_F - \int_0^\infty B_F(z)\, G(dz) = m_G - \int_0^\infty B_G(z)\, F(dz)$$

En norme T, la distance entre deux lois F et G s'écrit :

$$\| F-G\|_T^2 = \|T_F\|^2 + \|T_G\|^2 - 2 < T_G\, T_F >$$

Compte tenu de (8'), on trouve sans peine :

$$\|T_F - T_G\|^2 = -\frac{1}{2}\int\int [F(dx) - G(dx)]\ |x-y|\ [F(dy) - G(dy)]$$

Bien noter le signe moins : comme $-|h|$ est de type positif conditionnel, la positivité est garantie.

Le Produit Scalaire en Z

Son interprétation est donnée par le

THEOREME 1 - Pour toute loi à deux variables (X,Y) admettant les marginales F et G, on a

$$< X\ Y > \leqq < z_F\ z_G >$$

et l'égalité est atteinte pour $X = z_F(U)$, $Y = z_G(U)$ où U est une V.A. uniforme sur $(0,1)$.

Ce théorème exprime donc que $< z_F\ z_G > - m_F\, m_G$ est la plus grande valeur possible de la covariance de deux variables X et Y admettant les marginales F et G.

Pour démontrer ceci, partons de la relation simple

$$Z = \int_0^\infty 1_{Z \geqq z}\, dz$$

Pour tout couple (X,Y), il en résulte :

$$< X\ Y > = \int_0^\infty\int_0^\infty P(X \geqq x \text{ et } Y \geqq y)\, dx\, dy$$

Mais on a toujours :

$$P(X \geqq x \text{ et } Y \geqq y) \leqq T_F(x) \wedge T_G(y)$$

De plus, cette inégalité devient une égalité dans le cas $X = z_F(U)$, $Y = z_G(U)$, puisque $z_F(U) \geqq x$, par exemple, équivaut à $U \leqq T_F(x)$. En intégrant, on trouve ainsi :

$$< X\ Y > \leqq \int\int T_F(x) \wedge T_G(y)\, dx\, dy = < z_F\ z_G >$$

d'où le théorème.

Voici une conséquence pour le problème du changement de support :

Je rappelle qu'une loi F_V est moins sélective qu'une loi F_v si et seulement si on peut trouver une loi bivariable admettant ces marginales et vérifiant la condition de Cartier

$$E(Z_v/Z_V) = Z_V$$

Cette condition entraine l'égalité des moyennes $m_v = m_V = m$ et aussi $<Z_V\ Z_v> = \| Z_V\|^2 = m^2 + \sigma_V^2$. D'après le Théorème 1, on a ainsi :

$$\| Z_V\|^2 = < Z_V\ Z_v > \leqq < z_v\ z_V >$$

et par suite :

$$\|z_v - z_V\|^2 \leqq \|z_v\|^2 + \|z_V\|^2 - 2 < Z_v\ Z_V >$$

c'est-à-dire :

$$\|F_v - F_V\|_Z^2 \leqq \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

L'égalité ne peut d'ailleurs pas être atteinte, sauf si $F_V = F_v$. Car la relation de Cartier, dans le cas $Z_v = z_v(U)$, $Z_V = z_V(u)$, implique $z_v = z_V$, i.e. $F_v = F_V$.

En sens inverse, notons l'inégalité de Schwarz :

$$< z_v\ z_V > \leqq m^2 + \sigma_v\ \sigma_V$$

avec égalité si et seulement si $z_V(u)$ est de la forme :

$$z_V(u) = m + \frac{\sigma_V}{\sigma_v} [\ z_v(u) - m\ ]$$

(Ce modèle correspond à la correction affine). Il en résulte :

$$\|z_v - z_V\|^2 \geqq (\sigma_v - \sigma_V)^2$$

et l'égalité peut cette fois être atteinte. Ainsi :

<u>THEOREME 2</u> - Dans tout changement de support, la distance, en norme Z, des lois F_V et F_v vérifie les inégalités :

$$(\sigma_v-\sigma_V)^2 \leqq \| F_v-F_V\|_Z^2 \leqq \sigma_v^2 - \sigma_V^2$$

La borne supérieure n'est atteinte que pour $F_v = F_V$. La borne inférieure est atteinte si et seulement si le changement de support obéit au modèle de la correction affine.

Ce théorème caractérise donc la correction affine comme le modèle qui minimise la distance $\| F_v-F_V\|$ en norme Z.

<u>EXEMPLE 1</u> - Il existe un cas (unique ?) où la correction affine est rigoureusement vérifiée : c'est celui d'une fonction aléatoire "monochromatique", i.e. une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$Z(x) = m + A \cos (\omega x + \varphi)$$

où m, ω sont des constantes, A et φ des V.A. indépendantes et φ uniforme sur $(0,2\pi)$. En régularisant sur un support ℓ :

$$Z_\ell(x) = \frac{1}{\ell} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} Z(x+u)\, du = m + \frac{2}{\omega\ell} \sin \frac{\omega\ell}{2} \; A \cos(\omega x + \varphi)$$

On a donc en toute rigueur l'égalité :

$$Z_\ell(x) = m + \frac{\sigma_\ell}{\sigma^2} (Z(x)-m)$$

Mais cette relation cesse d'être vérifiée dès que la F.A. comporte au moins deux harmoniques distincts.

2 - LES CONVERGENCES

Grâce aux normes ci-dessus, l'espace des lois F se trouve muni de quatre convergences (les convergences forte et faible associées à chacune de ces deux normes), auxquelles il convient d'ajouter la convergence étroite (ou en loi) et la convergence vague des mesures (probabilités) sur $\mathbb{R}_+$.

La convergence vague $F_n \to G$ a lieu, comme on sait, si $T_{F_n}(z) \to T_G(z)$ en tout point z de continuité de T_G. Mais la mesure G peut être défective i.e. $T_G(\infty) > 0$. La convergence en loi correspond au cas où l'on a de plus $T_G(\infty) = 0$. Voici un premier résultat :

LEMME 1 - Une suite de probabilités F_n sur $\mathbb{R}^+$ converge au sens vague vers une mesure G (éventuellement défective) si et seulement si $z_{F_n}(t) \to z_G(t)$ presque partout sur (0,1). Cette co nvergence a lieu en loi si et seulement si la limite $z_G(t)$ est finie presque partout sur (0,1).

Pour toute loi F, considérons, par exemple, la version s.c.s. T_F^- de la fonction $T_F(z)$. Etant s.c.s., cette fonction admet un sous-graphe Γ_F fermé dans l'espace produit $(0,1) \times \mathbb{R}^+$:

$$\Gamma_F = \{ t,z \ : \ t \in (0,1), \ z \in \mathbb{R}^+ \ , \ T_F^-(z) \geq t \}$$

Il est facile de voir que, dans l'espace compact des fermés de $(0,1) \times \mathbb{R}^+$, la convergence $\Gamma_{F_n} \to \Gamma_G$ est caractérisée par :

$$\overline{\lim} \ T_{F_n}^-(z) \leq T_G^-(z) \quad ; \quad \underline{\lim} \ T_{F_n}^+(z) \geq T_G^+(z)$$

et équivaut donc à la convergence vague $F_n \to G$.

Mais le sous-graphe fermé de la fonction s.c.s. $z_F^-(t)$ est, par définition :

$$\Gamma_F' = \{ z,t \ : \ z \in \mathbb{R}^+ \ , \ t \in (0,1) \ : \ z_F^-(t) \geq z \}$$

Comme $z_F^-(t) \geq z$ équivaut à $T_F^-(z) \geq t$, les sous-graphes Γ_F et Γ_F', peuvent être identifiés. Or, il est immédiat que la convergence $\Gamma_{F_n} \to \Gamma_G$ équivaut à la convergence presque partout $z_{F_n} \to z_G$. D'où la première partie de l'énoncé. La seconde partie est immédiate, puisque la limite G est non défective si et seulement si la fonction non croissante $z_G^-(t)$ est finie en dehors du point $t = 0$.

THEOREME 3 - La convergence faible $T_{F_n} \to T_G$ pour la norme T entraine la convergence en loi $F_n \to G$.

En effet, supposons $T_{F_n} \to T_G$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^+, dz)$. D'après le théorème de Helly, on peut trouver une suite partielle F_{n_k} convergeant vaguement vers une limite G'. Cela équivaut, comme on l'a vu, à $T_{F_{n_k}} \to T_{G'}$ presque partout sur $\mathbb{R}^+$. Comme $T_{F_{n_k}} \to T_G$ faiblement, on a $T_{G'} = T_G$, d'après un théorème connu, et donc $G' = G$. En particulier, $T_G = T_{G'} \in L^2$, et donc $T_{G'}(\infty) = 0$. Ainsi, la convergence $F_{n_k} \to G' = G$ a lieu en loi, et pas seulement au sens vague. Enfin, l'unicité de la limite $G' = G$ entraine que la suite F_n elle-même converge en loi vers G.

Considérons maintenant la convergence faible pour la norme Z.

<u>LEMME 2</u> - La convergence faible $z_{F_n} \to z_G$ pour la norme Z entraine :

$$m_{F_n} \to m_G \quad \text{et} \quad \| T_{F_n} \| \to \| T_G \|$$

En effet, pour toute loi F, on a

$$m_F = < z_F , 1 > \quad , \quad \| T_F \|^2 = 2 < z_F , T >$$

au sens de la norme Z (voir relations (6)). Donc la convergence faible $z_{F_n} \to z_G$ entraine l'existence des moyennes et les relations de l'énoncé.

<u>THEOREME 4</u> - La convergence faible $z_{F_n} \to z_G$ pour la norme Z entraine la convergence forte $T_{F_n} \to T_G$ pour la norme T (et donc aussi la convergence en loi $F_n \to G$).

En effet, soit $z_{F_n} \to z_G$ faiblement dans $L^2((0,1),dx)$. D'après le lemme 2, la suite $\| T_{F_n} \|$ est bornée par un $B < \infty$ fixe. On peut donc extraire une suite $T_{F_{n_k}}$ convergeant faiblement dans $L^2(R^+,dz)$ (norme T) vers une limite $T_{G'}$. D'après le Théorème 3, on a donc aussi la convergence en loi $F_{n_k} \to G'$. D'après le lemme 1, cela entraine $z_{F_{n_k}} \to z_{G'}$ presque partout sur $(0,1)$. Mais, comme on a aussi $z_{F_{n_k}} \to z_G$ au sens faible dans L^2, un théorème déjà invoqué montre $z_{G'} = z_G$, c'est-à-dire $G' = G$. L'unicité de cette limite $G' = G$ entraine ensuite que la suite T_{F_n} converge elle-même vers T_G au sens faible. Mais, comme on a de plus la convergence des normes $\| T_{F_n} \| \to \| T_G \|$ d'après le lemme 2, la convergence $T_{F_n} \to T_G$ a lieu aussi au sens fort dans $L^2(\mathbb{R}^+, dz)$, ce qui entraine encore $F_n \to G^n$ en loi d'après le Théorème 3.

Ainsi, la hiérarchie de nos convergences est la suivante :

- Convergence forte pour $\|F\|_Z \Rightarrow$ convergence faible pour $\|F\|_Z$

$\Rightarrow$ convergence forte pour $\|F\|_T \Rightarrow$ convergence faible pour $\|F\|_T$

$\Rightarrow$ convergence en loi $\Rightarrow$ convergence vague.

Mais les réciproques sont fausses, et cette hiérarchie est stricte. Voici un <u>contre-exemple</u> : la suite

$$F_n = (1 - \frac{1}{n})\ \delta + \frac{1}{n}\ \delta_{n^3}$$

converge en loi vers le Dirac δ placé en 0. Mais on a

$$T_{F_n}(z) = \frac{1}{n}\ 1_{z \leqq n^3}$$

et donc

$$\|T_{F_n}\|^2 = \frac{n^3}{n^2} = n \rightarrow \infty$$

Donc la suite T_{F_n} ne peut pas converger faiblement pour la norme T.

Cependant, ces réciproques deviennent vraies si l'on se restreint à l'espace des lois F concentrées sur un <u>intervalle borné fixe</u> (soit $0 \leqq z \leqq z_n$). Dans ce cas, en effet, on sait que la convergence vague $F_n \rightarrow G$ équivaut à la convergence en loi. Comme les normes en Z sont bornées par z_n^2 , il est ensuite facile de voir que la convergence en loi $F_n \rightarrow G$ entraine alors la convergence forte $z_{F_n} \rightarrow z_G$.

<u>3 - UNE INEGALITE</u>

On sait, d'après l'inégalité de Schwarz (3) que, parmi toutes les lois F sur $(-\infty, +\infty)$ admettant une moyenne m donnée et une variance $\sigma_F^2 \leqq \sigma^2$, celle qui maximise la sélectivité S_F est la loi uniforme de moyenne m et de varaince σ^2. Soit (a, a+L) le support de cette loi optimale : on a donc

$$\begin{cases} m = a + \frac{L}{2} \\ \sigma^2 = L^2/12 \end{cases}$$

d'où résulte : $$a = m - \sigma\sqrt{3}$$

En particulier, on aura $a < 0$ pour $\sigma^2/m^2 > 1/3$, et dans ce cas, la loi optimale n'est pas concentrée sur $\mathbb{R}^+$. Donc, dans le cas

$$\frac{\sigma^2}{m^2} > \frac{1}{3}$$

il doit exister, pour les lois sur $\mathbb{R}^+$, une majoration plus forte que (3)

Montrons que cette majoration plus forte que (3) est effectivement atteinte par une loi F_o. De fait, considérons l'ensemble $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ des lois F sur $\mathbb{R}^+$ admettant la moyenne $m_F = m$ et une variance $\sigma_F^2 \leq \sigma^2$ donnée.

$\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ est fermé (au sens fort comme au sens faible) pour la norme Z comme on le voit immédiatement. De plus, $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ est faiblement et fortement fermé pour la norme T, et sur $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ les convergences forte et faible pour la norme T sont équivalentes. Plus précisément, $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ est faiblement et fortement compact pour la norme T.

De fait, soit F_n une suite dans $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$. Comme on a $\| z_{F_n} \|^2 \leq m^2 + \sigma^2$, on peut extraire une suite partielle $z_{F_{n_k}}$ convergeant vers une limite z_F faiblement pour la norme Z. Donc $T_{F_{n_k}}$ converge fortement vers T_F pour la norme T (Théorème 4). De plus, on a $m = m_{F_n} \to m_F$ (lemme 2), donc $m_F = m$, et $\| z_F \|^2 \leq \underline{\lim} \| z_{F_n} \|^2 \leq m^2 + \sigma^2$ d'après la convergence faible. Par suite $F \in \mathscr{L}(m,\sigma^2)$, ce qui prouve la compacité et entraine que $\mathscr{L}(m,\sigma)$ est fortement et faiblement fermé pour la norme T, et l'équivalence sur $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ des topologies forte et faible définie par la norme $\| T \|$.

D'autre part, $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$, considéré comme un ensemble de fonctions T_F (point de vue de la norme T), est convexe. En effet, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, si T_{F_o} et T_{F_1} sont dans $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$, en posant

$$T_{F_\lambda} = (1-\lambda)\, T_{F_o} + \lambda\, T_{F_1}$$

on a encore $T_{F_\lambda} \in \mathscr{L}(m,\sigma^2)$: car $m_{F_\lambda} = (1-\lambda)\, m_{F_o} + \lambda\, m_{F_1} = m$ et :

$$m^2 + \sigma^2_{F_\lambda} = 2\int_o^\infty z\, T_{F_\lambda}(z)\, dz = m^2 + (1-\lambda)\,\sigma^2_{F_o} + \lambda\,\sigma^2_{F_1} \leq m^2 + \sigma^2$$

Ainsi, $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ est <u>convexe et fermé</u> (et même compact) pour la norme T. Il existe donc dans $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ un élément unique T_{F_o} qui <u>réalise le minimum</u> de la norme $\|T\|$. D'après le théorème des projections, cet élément est caractérisé par la relation

$$(10) \qquad < T_F \, T_{F_o} > \ \geq \|T_{F_o}\|^2 \qquad \forall \ T_F \in \mathscr{L}(m,\sigma^2)$$

D'après la relation $\|T_F\|^2 = m - S_F$, cet élément unique est aussi celui qui réalise <u>le maximum de la sélectivité</u> S_F.

Pour $\sigma^2/m^2 \leqq 1/3$, nous savons déjà que F_o est une loi uniforme sur un segment $\geqq 0$. Dans le cas $\sigma^2/m^2 > 1/3$, nous allons voir que F_o comporte un atome en 0 et une partie uniforme sur un segment (0,L) :

$$F_o = \alpha\ \delta + (1-\alpha)\ 1_{o\leqq z\leqq L} \frac{dz}{L}$$

c'est-à-dire

$$T_{F_o} = (1-\alpha)\ \left[1 - \frac{z}{L} \right]_+$$

En effet, choisissons α et L de manière à avoir la moyenne et la variance correcte . De

$$m = (1-\alpha)\ \frac{L}{2} \quad ; \quad m^2 + \sigma^2 = (1-\alpha)\ \frac{L^2}{3}$$

on déduit qu'il faut prendre

$$L = \frac{3}{2}\ \frac{m^2 + \sigma^2}{m} \quad ; \quad 1 - \alpha = \frac{4}{3}\ \frac{m^2}{m^2 + \sigma^2}$$

et la condition $\sigma^2 > m^2/3$ nous garantit $\alpha > 0$. On a donc bien $T_{F_o} \in \mathscr{L}(m,\sigma^2)$ pour ces valeurs de L et de α . Soit alors T_F un autre élément de $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$. Calculons le produit scalaire $< T_F\, T_{F_o} >$. D'après la définition de T_{F_o} , il vient :

$$< T_F \, T_{F_o} > = (1-\alpha) \int_o^L T_F(z)\ (1 - \frac{z}{L})\ dz \geq (1-\alpha) \int_o^\infty T_F(z)\ (1 - \frac{z}{L})\ dz$$

Donc :

$$< T_F \, T_{F_o} > \ \geq (1-\alpha) \left[m - \frac{1}{2} \frac{m^2 + \sigma^2}{L} \right]$$

puisque $$\int T_F(z)\,dz = m_F = m \quad , \text{ et}$$

$$\int z\,T_F(z)\,dz = \frac{1}{2}\,(m_F^2 + \sigma_F^2) \leqq \frac{m^2 + \sigma^2}{2}$$

D'autre part, on a aussi

$$\| T_{F_o} \|^2 = (1-\alpha) \int_o^L T_{F_o}(z)\,(1 - \frac{z}{L})\,dz = (1-\alpha) \int_o^\infty T_{F_o}\,(1 - \frac{z}{L})\,dz$$

puisque $T_{F_o}(z) = 0$ pour $z > L$. Donc

$$\| T_{F_o} \|^2 = (1-\alpha)\left[m - \frac{m^2 + \sigma^2}{2\,L} \right]$$

Il en résulte $< T_F\, T_{F_o} > \geqq \| T_{F_o} \|^2$, c'est-à-dire la relation (6) : T_{F_o} est bien l'élément extrémal cherché. D'après les valeurs calculées ci-dessus pour L et $(1-\alpha)$, on trouve explicitement

$$\| T_{F_o} \|^2 = \frac{8}{9}\,\frac{m^3}{m^2 + \sigma^2}$$

On note que l'on a

$$1 - \frac{8}{9}\,\frac{m^2}{m^2 + \sigma^2} < \frac{\sigma}{m\sqrt{3}}$$

si et seulement si $\sigma > m/\sqrt{3}$. Ainsi :

<u>THEOREME 5</u> - Pour toute loi F sur $\mathbb{R}^+$, on a l'inégalité

$$\frac{S}{m} \leqq \frac{\sigma}{m\sqrt{3}} \wedge \left(1 - \frac{8}{9}\,\frac{m^2}{m^2 + \sigma^2}\right)$$

Pour $\sigma^2 \leqq m^2/3$, le maximum est atteint pour une loi uniforme, et vaut $\sigma/m\sqrt{3}$. Pour $\sigma^2 > m^2/3$, le maximum vaut $1 - \frac{8}{9}\,\frac{m^2}{m^2 + \sigma^2}$, et il est atteint pour une loi uniforme sur un segment (O,L) muni d'un atome à l'origine.

<u>REMARQUE</u> - Dans tous les cas, on a donc

$$\frac{S}{m} \leqq 1 - \frac{8}{9}\,\frac{m^2}{m^2 + \sigma^2} \quad , \text{ i.e. } \quad \| T_F \|^2 \geqq \frac{8}{9}\,\frac{m^3}{m^2 + \sigma^2}$$

Ainsi, les normes en T et en Z d'une même loi F vérifient la très curieuse inégalité :

(11) $$\| T_F \|^2 \; \| z_F \|^2 \geq \frac{8}{9} m_F^3$$

EXEMPLE 2 - Voici maintenant un exemple de changement de support pour lequel l'indice de sélectivité S_V/m peut être égal à sa valeur maximale

$$1 - \frac{8}{9} \frac{m^2}{m^2 + \sigma_V^2}$$

Il s'agit d'une F.A. définie (à une translation aléatoire près) comme une fonction périodique, de période L, égale à 1 sur le segment (o,a), $a \leq \frac{L}{2}$, et à 0 sur (a,L), soit

$$Z(x) = 1_{x \leq a} \qquad (a \leq x < L)$$

Considérons la régularisée

$$Z_\ell(x) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} Z(x+u)\, du$$

Tant que le support ℓ est inférieur à L-a, le loi F_ℓ comporte une partie uniforme sur (o,b) et deux atomes : α en o et β en b, soit

$$F_\ell = \alpha\, \delta + \beta\, \delta_b + (1-\alpha-\beta)\, 1_{z \leq b} \frac{dz}{b}$$

avec
$$\alpha = 1 - \frac{\ell+a}{L} \quad ; \quad \beta = \frac{|\ell-a|}{L} \quad ; \quad b = 1 \wedge \frac{a}{\ell} \qquad (\ell \leq L-a)$$

En particulier, en $\ell = a$, l'atome β en b s'évanouit, et il reste donc un atome en 0 et une partie uniforme sur (0,1) : l'indice de sélectivité S/m prend alors sa valeur maximale

$$\frac{S}{m} = 1 - \frac{8}{9} \frac{m^2}{m^2 + \sigma^2}$$

5 - CAS DES LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES.

Ces lois extrémales (loi uniforme avec ou sans atome en 0) ne sont pas indéfiniment divisibles. Si l'on se limite au cas des lois indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}^+$, la majoration du Théorème 5 doit donc pouvoir être notablement renforcée. Notons d'abord un résultat purement théorique.

THEOREME 6 - Parmi les lois indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}^+$ admettant une moyenne donnée m et une variance $\leq \sigma^2$ donnée, il en existe une qui maximise l'indice de sélectivité.

La démonstration suit toujours la même démarche. On désigne par t l'Inf de $\|T_F\|^2$ lorsque F parcourt l'ensemble des lois indéfiniment divisibles contenues dans $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$. Soit alors F_n une suite de lois indéfiniment divisibles de $\mathscr{L}(m,\sigma^2)$ telles que $\|T_{f_n}\|^2 \to t$. Quitte à remplacer F_n par une suite F_{n_k}, cette suite converge, au sens faible pour la norme Z, vers une limite F_o (puisque les normes en Z sont bornées). Cela entraine la convergence forte $T_{F_n} \to T_{F_o}$, et aussi la convergence en loi $F_n \to F_o$. D'après les Théorèmes 4 et 5, on a donc $m_{F_o} = m$ et $\|T_{F_o}\| = t$, $F_o \in \mathscr{L}(m,\sigma^2)$, et enfin F_o est indéfiniment divisible comme limite en loi de lois indéfiniment divisibles.

L'existence de cette loi indéfiniment divisible F_o est ainsi établie, mais nous ne connaissons pas sa forme explicite. Nous nous contenterons ici d'établir un résultat moins fort, concernant la classe des lois indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}$ entier (variables non nécessairement positives). Nous allons voir que le maximum de la sélectivité à moyenne et variance données correspond alors à <u>la loi de Gauss</u>. Comme la loi de Gauss n'est jamais concentrée sur $\mathbb{R}^+$, l'inégalité isopérimétrique correspondante, qui est :

$$S \leq \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

devrait donc être considérablement renforcée dans le cas des lois indéfiniment divisibles sur $\mathbb{R}^+$.

Commençons par deux lemmes, d'ailleurs intéressants par eux-mêmes.

LEMME 3 - Soit Z une V.A. quelconque et $\Phi(u) = E(e^{iuZ})$ sa fonction caractéristique. Alors, on a pour tout $\lambda > 0$:

$$E[e^{-\lambda|Z|}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u)\,\frac{\lambda\, du}{\lambda^2 + u^2}$$

et de plus $E(|Z|)$, finie ou non, est donnée par :

$$E(|Z|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} [1 - R\ \Phi(u)]\ \frac{du}{u^2}$$

Soit, en effet, Y une variable de Cauchy, de densité $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2}$, et donc $E[e^{iuY}] = e^{-|u|}$. Pour $\lambda > 0$, on a :

$$E[e^{i\lambda YZ}/Y] = \Phi(\lambda Y)$$

et donc :

$$E[e^{i\lambda YZ}] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u) \frac{\lambda \, du}{\lambda^2 + u^2}$$

Mais d'autre part :

$$E[e^{i\lambda YZ}/Z] = e^{-\lambda|Z|}$$

et par suite

$$E[e^{i\lambda YZ}] = E[e^{-\lambda|Z|}]$$

D'où la première relation de l'énoncé. On a toujours

$$E(|Z|) = \lim_{\lambda \downarrow o} \frac{1 - E[e^{-\lambda|Z|}]}{\lambda}$$

que cette limite soit finie ou non. Cela donne ici :

$$E(|Z|) = \lim_{\lambda \downarrow o} \frac{2}{\pi} \int_o^\infty [1 - R\,\Phi(u)] \frac{du}{\lambda^2 + u^2}$$

Comme la fonction $1 - R\,\Phi(u)$ est ≥ 0, la continuité monotone de l'intégrale entraine la seconde relation de l'énoncé.

<u>LEMME 4</u> - Avec les mêmes notations, le paramètre de sélectivité S est :

$$S = \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \frac{1 - |\Phi(u)|^2}{u^2} \, du$$

En effet, on a $S = \frac{1}{2} E(|Z-Z'|)$, où Z et Z' sont deux V.A. indépendantes admettant la même fonction caractéristique Φ. Il suffit donc d'appliquer la seconde relation du lemme 3 à la variable Z-Z', dont la fonction caractéristique est $|\Phi|^2$.

Soit maintenant Z une V.A. <u>indéfiniment divisible</u> admettant une moyenne m et une variance σ^2 finies. Sa fonction caractéristique est donc de la forme

$$\Phi(u) = e^{ium + \psi(u)}$$

avec $$\psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} H(dx)$$

pour une mesure positive H telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(dx = \sigma^2$$

Il vient donc :

$$|\Phi(u)|^2 = e^{-2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos u x}{x^2} H(dx)}$$

Or l'inégalité stricte

$$\frac{1 - \cos u x}{x^2} < \frac{u^2}{2}$$

est vraie pour tout $x \neq 0$. On a donc

$$|\Phi(u)|^2 \geqq e^{-u^2 \sigma^2}$$

avec égalité si et seulement si H est concentrée en 0, i.e. si et seulement si Z est gaussienne. D'après le Lemme 4, on trouve donc $S \leqq \sigma/\sqrt{\pi}$, avec égalité seulement dans le cas gaussien. Ainsi :

THEOREME 7 - Pour toute loi indéfiniment divisible sur R, de variance σ^2, la sélectivité S vérifie

$$S \leqq \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

avec égalité si et seulement si la loi est gaussienne.

REMARQUE - Dans le cas des lois indéfiniment divisibles, il sera commode d'utiliser un indice de normalité I_n, défini par

$$I_n = \sqrt{\pi} \frac{S}{\sigma}$$

D'après le théorème, cet indice est compris entre 0 et 1 (pour les lois indéfiniment divisibles) et ne vaut 1 que dans le cas gaussien. (pour des lois quelconques, on aurait seulement $I_n \leqq \sqrt{\pi}/3 = 1,02333\ldots$, avec égalité pour la loi uniforme). Dans un modèle de changement de support, la croissance de cet indice I_n avec la taille du support V reflète bien la plus ou moins grande <u>rapidité de la convergence de F_V vers la normalité</u>. Dans le cas extrême d'une correction affine, l'indice I_n reste constant. Dans tous les autres modèles, il augmente avec V, ce qui signifie que S_V <u>décroit moins vite que σ_V</u>, ce que l'on observe toujours expérimentalement.