

FONTAINEBLEAU/CGMM

N-950

REMARQUES SUR LES FILTRES-PARTITIONS

G. MATHERON

Février 1985

REMARQUES SUR LES FILTRES-PARTITIONS

par G. MATHERON

Ce qui suit n'est qu'un commentaire sur le paragraphe 5-5 de la note de J. Serra intitulée "Semi-groupes morphologiques" et plus précisément du théorème 5-2 de cette note. Ce théorème, en effet, devrait être réénoncé dans le langage de l'induction transfinie, la simple limite séquentielle ne suffisant pas en général. En fait, j'utiliserai ici la technique, plus simple, qui consiste à considérer les classes stables pour telle ou telle opération engendrée, par un élément donné.

1 - CLASSE CONNEXE, COMPOSANTES CONVEXES.

Pour plus de généralité, je me placerai dans le cadre purement algébrique suivant :

E sera un ensemble quelconque. $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , est alors un treillis complet pour $\cup$ et $\cap$.

$\mathcal{C}$ désignera ce que l'on pourrait appeler une "classe connexe", c'est-à-dire par définition une classe de parties de E vérifiant les axiomes suivants :

- i/ $\emptyset \in \mathcal{C}$ et $\forall x \in E, \{x\} \in \mathcal{C}$
- ii/ Pour toute famille C_i dans $\mathcal{C}$, $\cap C_i \neq \emptyset \Rightarrow \cup C_i \in \mathcal{C}$

En général, la classe $\mathcal{C}$ elle-même ne sera pas stable pour $\cup$. Mais, si nous désignons par β_x la sous-classe des $C \in \mathcal{C}$ qui contiennent un point donné $x \in E$, soit

$$\mathcal{C}_x = \{C : x \in C \in \mathcal{C}\}$$

la réunion de toute famille non vide d'éléments de $\mathcal{C}_x$ est encore dans $\mathcal{C}_x$, à cause de l'axiome ii/. Autrement dit, la classe

$$\mathcal{B}_x = \beta_x \cup \{\emptyset\}$$

est stable pour la réunion et définit donc une ouverture γ_x que l'on peut appeler composante connexe de $x \in E$ (relativement à la classe connexe $\mathcal{C}$). Explicitement, pour tout $A \subset E$:

$$\gamma_x(A) = \cup \{C : C \in \mathcal{C}, x \in C \subset A\}$$

En particulier, $\gamma_x(A)$ est vide si $x \notin A$. Si, au contraire; $x \in A$, on aura toujours $x \in \gamma_x(A)$, et donc $\gamma_x(A) \neq \emptyset$, puisque $\{x\} \in \mathcal{C}$. Ainsi :

$$\gamma_x(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in \gamma_x(A)$$

Cette famille d'ouvertures vérifie les axiomes suivants :

iii/ Pour tout $x \in E$, on a $\gamma_x(x) = \{x\}$.

iv/ Pour tout $A \subset E$, $x, y \in E$, $\gamma_x(A)$ et $\gamma_y(A)$ sont égales ou disjointes, soit :

$$\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) \neq \emptyset \Rightarrow \gamma_x(A) = \gamma_y(A)$$

$$v/ \bigcup_{x \in E} \gamma_x = I$$

En effet, iii/ résulte de $\{x\} \in \mathcal{C}_x$ (axiome i/) et v/ est une conséquence immédiate de iii/. Pour montrer iv/, on note que $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A) \neq \emptyset$ entraîne

$$C = \gamma_x(A) \cup \gamma_y(A) \in \mathcal{C}$$

D'autre part, $\gamma_x(A)$ n'étant pas vide, on a $x \in \gamma_x(A)$, donc $x \in C$. Donc $C \in \mathcal{C}_x$ et cela entraîne $C \subset \gamma_x(A)$. Par suite, $\gamma_y(A)$ est contenu dans $\gamma_x(A)$. On montre de même l'inclusion inverse, et l'égalité en résulte.

Ces axiomes sont d'ailleurs caractéristiques d'une classe connexe. En effet, supposons donnée, pour chaque $x \in E$, une ouverture γ_x satisfaisant à iii/, iv/ et v/. On définira la classe $\mathcal{C}$ comme la réunion des domaines d'invariance des γ_x :

$$\mathcal{C} = \{\gamma_x(A) : x \in E, A \subset E\}$$

Pour $A = \emptyset$, on trouve $\gamma_x(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{C}$. Pour $A = \{x\}$, il vient, d'après iii/, $\gamma_x(x) = \{x\} \in \mathcal{C}$. Donc i/ est vérifié.

Soit maintenant C_i une famille d'intersection non vide dans $\mathcal{C}$, et $x \in \bigcap C_i$. Comme $C_i \in \mathcal{C}$, on peut trouver pour chaque i un point y_i tel que $C_i = \gamma_{y_i}(C_i)$. Mais $x \in C_i$, donc, d'après iii/, $\{x\} = \gamma_x(x) \subset \gamma_x(C_i)$. Ainsi $\gamma_{y_i}(C_i)$ et $\gamma_x(C_i)$ contiennent toutes deux le point x : elles sont donc égales d'après iv/, et on a $C_i = \gamma_{y_i}(C_i) = \gamma_x(C_i)$.

Alors $\bigcup C_i = \bigcup \gamma_x(C_i)$ est un invariant de γ_x , donc appartient à la classe $\mathcal{C}$.
Donc ii/ est vérifié, $\mathcal{C}$ est bien une classe connexe, et γ_x est l'ouverture connexe associée à $\mathcal{C}$.

Notons encore la propriété suivante, utile dans toute la suite :

vi/ Pour tout $A \subset E$ et $x, y \in E$, on a :

$$y \in \gamma_x(A) \text{ si et seulement si } \gamma_x(A) = \gamma_y(A) \neq \emptyset$$

et, en particulier

$$y \in \gamma_x(A) \Leftrightarrow x \in \gamma_y(A)$$

De fait, si $y \in \gamma_x(A)$, on a aussi $y \in A$ et donc $y \in \gamma_y(A)$: comme $\gamma_x(A) \cap \gamma_y(A)$ n'est pas vide, il en résulte l'égalité. Inversement, si $\gamma_x(A) = \gamma_y(A) \neq \emptyset$, on a $y \in \gamma_y(A) = \gamma_x(A)$.

2 - FERMETURES RESPECTANT LA CONNEXITE.

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{C}$ désignera une classe connexe fixée, et γ_x la famille des ouvertures associées.

Nous dirons qu'une fermeture φ respecte la connexité, ou, plus brièvement, que φ est une fermeture connexe si l'image de tout connexe est un connexe, et si de plus l'image de l'ensemble vide est l'ensemble vide :

$$\varphi \text{ connexe} \Leftrightarrow \varphi(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \text{ et } \emptyset \in \mathcal{B}_\varphi$$

CRITERE 1 - Soit φ une fermeture laissant l'ensemble vide invariant. Alors φ respecte la connexité $\mathcal{C}$ si et seulement si l'une des 5 propriétés équivalentes suivantes est vérifiée pour tout $x \in E$:

a/ $\varphi \gamma_x \varphi = \gamma_x \varphi$

b/ $\gamma_x \varphi \gamma_x = \varphi \gamma_x$

c/ $\mathcal{B}_{\gamma_x \varphi} = \mathcal{B}_{\gamma_x} \cap \mathcal{B}_\varphi$

d/ $\mathcal{B}_{\varphi \gamma_x} = \mathcal{B}_{\gamma_x} \cap \mathcal{B}_\varphi$

e/ $\gamma_x \varphi \supset \varphi \gamma_x$

On sait que ces cinq propriétés sont équivalentes, [] critère 6. Supposons φ connexe. Pour tout A , $\gamma_x(A)$ est connexe. Si $x \notin \gamma_x(A)$, on a $\gamma_x(A) = \varphi \gamma_x(A) = \gamma_x \varphi \gamma_x(A) = \emptyset$. Si $x \in \gamma_x(A)$, $\varphi \gamma_x(A)$ est connexe, puisque φ respecte $\mathcal{C}$, et contient x , donc $\gamma_x \varphi \gamma_x(A) = \varphi \gamma_x(A)$. Inversement, si b/ est vrai, pour tout connexe C non vide et $x \in C$ on a $\gamma_x(C) = C$, et b/ donne $\varphi(C) = \gamma_x \varphi(C) \in \mathcal{C}$. ■

Soit φ_i une famille de fermetures. On désignera par $\vee \varphi_i$ la plus petite fermeture majorant $\bigcup \varphi_i$, dont le domaine d'invariance est $\bigcap \mathcal{B}_{\varphi_i}$. Alors :

THEOREME 1 - La classe des fermetures connexes est stable pour $\vee$. En particulier, toute fermeture φ admet une plus grande minorante par une fermeture connexe.

On le voit en remarquant que la classe des surpotentes $\psi \supset I$ respectant $\mathcal{C}$ est stable pour $\bigcup$ et pour l'autocomposition. En particulier, pour un élément $\psi \supset I$ donné respectant $\mathcal{C}$, la classe stable pour $\bigcup$ et l'autocomposition engendrée par ψ est une sous-classe de la précédente, et son plus grand élément respecte donc $\mathcal{C}$. Mais ce plus grand élément est la plus petite fermeture $\hat{\psi}$ majorant ψ : donc $\hat{\psi}$ est une fermeture connexe.

En particulier, pour une famille φ_i de fermetures connexes, en posant $\psi = \bigcup \varphi_i$, on a $\hat{\psi} = \vee \varphi_i$, et $\vee \varphi_i$ est donc une fermeture connexe.

Etant stable pour $\vee$, la classe des fermetures connexes constitue le domaine d'invariance d'une ouverture G_c sur le treillis complet des fermetures : pour toute fermeture φ , $G_c \varphi$ est la plus grande minorante de φ respectant la connexité.

Construction explicite de l'ouverture G_c .

Pour construire cette plus grande minorante connexe $G_c \varphi$, construisons d'abord la fermeture φ' définie comme la plus grande fermeture connexe minorant φ sur la classe $\mathcal{C}$. Il est facile de voir que φ' est définie par :

$$\varphi'(A) = \bigcap \{ \gamma_c \varphi(C), C \in \mathcal{C}, C \supset A \}$$

où $\gamma_c \varphi(C)$ désigne, pour tout $C \in \mathcal{C}$, la composante connexe de $\varphi(C)$ qui contient C (évidemment, $\gamma_c \varphi(C) = \emptyset$ si $C = \emptyset$).

De fait, $C \supset A$ entraîne $\gamma_C \varphi(C) \supset C \supset A$, et donc $\varphi' \supset I$ et $\varphi' \varphi' \supset \varphi'$.
 Mais $C \supset A$ entraîne $\gamma_C \varphi(C) \supset \varphi'(A)$. Comme $\gamma_C \varphi(C) \in \mathcal{C}$ et $\gamma_C \varphi(\gamma_C \varphi(C)) = \gamma_C \varphi(C)$, il vient aussi $\varphi'(\varphi'(A)) \subset \varphi'(A)$ et donc l'égalité $\varphi' \varphi' = \varphi'$.
 Comme toute fermeture connexe minorant φ sur $\mathcal{C}$ est $\subset \varphi'$, φ' est bien la plus grande fermeture connexe minorant φ sur $\mathcal{C}$.

Cet élément φ' n'est pas encore $G_C \varphi$, mais on a :

$$G_C \varphi = \varphi' \cap \varphi$$

De fait, $\varphi' \cap \varphi$ est une fermeture, comme intersection de fermeture, et pour tout $C \in \mathcal{C}$ on a $\varphi'(C) \cap \varphi(C) = \varphi'(C) \in \mathcal{C}$, puisque φ' minore φ sur $\mathcal{C}$ et respecte $\mathcal{C}$. Comme toute fermeture connexe minorant φ est majorée par φ' , et donc par $\varphi' \cap \varphi$, on a bien $G_C \varphi = \varphi' \cap \varphi$.

Fermetures ne créant pas de composantes connexes.

Dans les applications, il y aura sans doute intérêt à remplacer l'élément $G_C \varphi = \varphi' \cap \varphi$, difficile à former, par un élément plus simple. Nous dirons, avec J. Serra, qu'une fermeture φ ne crée pas de composantes connexes si :

$$A \subset E \text{ et } x \in \varphi(A) \Rightarrow A \cap \gamma_x \varphi(A) \neq \emptyset$$

Noter que cela entraîne que φ est une fermeture connexe. De fait, pour $A = \emptyset$, on a $A \cap \gamma_x \varphi(A) = \emptyset$ pour tout x , et donc $x \notin \varphi(A)$ c'est-à-dire $\varphi(A) = \emptyset$: l'ensemble vide est invariant par φ . Si $C \in \mathcal{C}$ est non vide, on aura $C \cap \gamma_x \varphi(C) \neq \emptyset$ pour tout $x \in \varphi(C)$, et donc $\gamma_x \varphi(C) = \gamma_C \varphi(C)$. Mais, $x \in \varphi(C)$ entraînant $x \in \gamma_x \varphi(C)$, il en résulte $\varphi(C) \subset \gamma_C \varphi(C)$ et donc l'égalité : par suite $\varphi(C)$ est connexe.

Mais la réciproque est fausse : il existe des fermetures connexes qui créent des composantes connexes. On obtient un exemple simple en prenant pour $\mathcal{C}$ la classe des connexes topologiques de $\mathbb{R}^1$ (i.e. les segments de $\mathbb{R}^1$) et pour φ la fermeture $A \rightarrow A^B$ où B est constitué de deux points.

THEOREME 2 - La classe des fermetures qui ne créent pas de composantes connexes est stable pour $\vee$. En particulier, toute fermeture φ admet une plus grande minorante φ' ne créant pas de composantes connexes.

De fait, cela résulte aussitôt de l'idempotence de l'élément φ' défini par :

$$\varphi'(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma_x \varphi(A)$$

(Voir la démonstration dans J. Serra).

Fermatures connexes égales à φ_0 sur $\mathcal{C}$.

Dans tout ce qui suit, φ_0 désignera une fermeture connexe donnée, et on désignera par :

$\sim \Phi$, la classe des fermatures égales à φ_0 sur $\mathcal{C}$

$\sim \Phi_0$, la sous-classe des $\varphi \in \Phi$ telles que $\varphi \subset \varphi_0$.

Comme φ_0 est une fermeture connexe, il est clair que les éléments de Φ et Φ_0 sont encore des fermatures connexes. Notons aussi que Φ et Φ_0 sont stables pour $\cap$ et pour $\vee$, et constituent donc des treillis complets.

En effet, il est immédiat que ces classes sont stables pour l'intersection. D'autre part, la classe $\mathcal{S}$ des surpotentes $\supset I$ qui coïncident avec φ_0 sur $\mathcal{C}$ est stable pour $\cup$ et pour l'autocomposition. En particulier, si φ_i , $i \in I$ est une famille de fermatures égales à φ_0 sur $\mathcal{C}$, l'élément $\psi = \bigcup \varphi_i$ est dans $\mathcal{S}$, et par suite $\mathcal{S}$ contient la classe stable pour $\cup$ et l'autocomposition engendrée par ψ , et, en particulier, son plus grand élément qui est la fermeture $\psi = \bigvee \varphi_i$. Donc $\bigvee \varphi_i$ coïncide avec φ_0 sur $\mathcal{C}$.

En particulier, donc, Φ admet un plus grand élément $\tilde{\varphi} = \bigvee \Phi$. Ce plus grand élément est défini par :

$$\tilde{\varphi}(A) = \bigcap \{ \varphi_0(C) : C \in \mathcal{C}, \varphi_0(C) \supset A \}$$

i.e. $\mathcal{B}_{\tilde{\varphi}} = \widetilde{\varphi_0(\mathcal{C})}$ (classe stable pour $\cap$ engendrée par $\varphi_0(\mathcal{C})$)

De fait, désignons par $\tilde{\varphi}_0$ le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ de la restriction de φ_0 à $\mathcal{C}$, soit :

$$\tilde{\varphi}_0(A) = \bigcap \{ \varphi_0(C), C \in \mathcal{C}, C \supset A \}$$

On a $\tilde{\varphi} \subset \tilde{\varphi}_0$, puisque $\tilde{\varphi}$ prolonge la restriction de φ_0 à $\mathcal{C}$. Mais $C \supset A$

entraîne $\varphi_0(C) \supset A$, et, comme $\varphi_0(C) \in \mathcal{C}$ et $\varphi_0 \varphi_0(C) = \varphi_0(C)$, on a aussi

$$\tilde{\varphi}_0(A) = \bigcap \{ \varphi_0(C), C \in \mathcal{C}, \varphi_0(C) \supset A \}$$

Ainsi $\tilde{\varphi}_0$ est une fermeture, et son domaine d'invariance est $\widetilde{\varphi_0(\mathcal{C})}$. Comme $\tilde{\varphi}_0$ est égal à φ_0 sur $\mathcal{C}$, cela entraîne $\tilde{\varphi}_0 \subset \tilde{\varphi}$, et donc l'égalité.

Notons aussi que Φ et Φ_0 sont stables pour l'opération de nettoyage $\varphi \rightarrow v(\varphi)$ où $v(\varphi)$ est la plus grande minorante de φ ne créant pas de composantes connexes, définie par

$$v(\varphi)(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma_x \varphi(A)$$

En effet, cette fermeture coïncide manifestement avec φ sur $\mathcal{C}$. Ainsi, le nettoyage v définit une ouverture sur le treillis complet Φ ou Φ_0 .

Nous allons maintenant examiner deux autres opérations α et α_0 sur Φ ou Φ_0 . Donnons auparavant un critère d'appartenance $\varphi \in \Phi$.

CRITERE 2 - Deux fermetures connexes φ et φ_0 coïncident sur $\mathcal{C}$ si et seulement si pour tout $x \in E$ on a

$$\varphi_0 \gamma_x \varphi = \gamma_x \varphi ; \quad \varphi \gamma_x \varphi_0 = \gamma_x \varphi_0$$

Notons que, φ et φ_0 étant connexes, on a déjà $\gamma_x \varphi = \varphi \gamma_x \varphi$ et $\gamma_x \varphi_0 = \varphi_0 \gamma_x \varphi_0$ (Critère 1). Comme $\gamma_x \varphi$ et $\gamma_x \varphi_0$ prennent leurs valeurs dans $\mathcal{C}$, on a aussi $\varphi \gamma_x \varphi = \varphi_0 \gamma_x \varphi$ et $\varphi_0 \gamma_x \varphi_0 = \varphi \gamma_x \varphi_0$ si φ et φ_0 coïncident sur $\mathcal{C}$, d'où les relations de l'énoncé.

Inversement, supposons vérifiées les relations de l'énoncé. On a donc $\varphi_0 \gamma_x \varphi = \gamma_x \varphi = \varphi \gamma_x \varphi$ (puisque φ est connexe), et, en multipliant à droite par γ_x

$$\varphi_0 \gamma_x \varphi \gamma_x = \varphi \gamma_x$$

Mais $\varphi \supset I$ entraîne $\varphi_0 \gamma_x \varphi \gamma_x \supset \varphi_0 \gamma_x$, et donc $\varphi \gamma_x \supset \varphi_0 \gamma_x$. On démontre de même l'inclusion opposée, d'où l'égalité

$$\varphi \gamma_x = \varphi_o \gamma_x$$

pour tout $x \in E$: par suite φ et φ_o coïncident sur $\mathcal{C}$.

3 - LES OPERATIONS α ET α_o .

Ces opérations sont définies en posant

$$\alpha_o(\varphi) = \bigcup_{x \in E} \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi) \quad (\varphi \in \Phi_o)$$

$$\alpha(\varphi) = \bigcup_{x \in E} \varphi(I \cap \gamma_x \varphi) \quad (\varphi \in \Phi)$$

En particulier, si $\varphi \in \Phi_o$, i.e. $\varphi \subset \varphi_o$, on aura $\alpha(\varphi) \subset \alpha_o(\varphi)$. Les 3 premiers des lemmes qui suivent sont dûs à J. Serra, op. cit. Je ne donne la démonstration que pour α_o . Le cas de l'opération α s'en déduit en prenant $\varphi_o = \varphi$.

LEMME 1 - α et α_o sont anti-extensives :

$$\alpha(\varphi) \subset \varphi ; \quad \alpha_o(\varphi) \subset \varphi$$

En effet, d'après le critère 2, on a pour tout $x \in E$.

$$(a) \quad \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi) \subset \varphi_o \gamma_x \varphi = \gamma_x \varphi$$

$$\text{et donc } \alpha_o(\varphi) \subset \bigcup_x \gamma_x \varphi = \varphi$$

LEMME 2 - Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{cases} \gamma_x \alpha_o(\varphi) = \gamma_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi) \\ \gamma_x \alpha(\varphi) = \gamma_x \varphi(I \cap \gamma_x \varphi) \end{cases}$$

Posons $\varphi' = \alpha_o(\varphi)$ pour abréger les notations, et partons de l'inclusion (a) du lemme 1. Soit $A \subset E$ et $y \in E$. Si $y \notin \gamma_y \varphi'(A)$, on a $y \notin \varphi'(A)$ et $\gamma_y \varphi'(A) = \emptyset$. Dans ce cas, on a aussi $\gamma_y \varphi_o(A \cap \gamma_y \varphi(A)) = \emptyset$: car sinon y appartiendrait à cet ensemble, et donc aussi à $\varphi'(A)$. Supposons alors $y \in \gamma_y \varphi'(A)$ et donc aussi $y \in \gamma_y \varphi(A)$, et soit $z \in \gamma_y \varphi'(A)$ un autre point de cette composante.

De $z \in \gamma_y \varphi'(A) \subset \gamma_y \varphi(A)$ résulte $\gamma_z \varphi(A) = \gamma_y \varphi(A)$, d'après vi/. D'autre part, on a évidemment aussi $z \in \varphi'(A)$. Donc, d'après la définition de $\varphi' = \alpha_o(\varphi)$, il existe un $x \in E$ tel que

$$z \in \varphi_o(A \cap \gamma_x \varphi(A))$$

D'après (a), cela entraîne $z \in \varphi_o \gamma_x \varphi(A) = \gamma_x \varphi(A)$, et donc, d'après vi/, $\gamma_x \varphi(A) = \gamma_z \varphi(A)$. Par suite aussi, $\gamma_x \varphi(A) = \gamma_y \varphi(A)$. On a donc $z \in \varphi_o(A \cap \gamma_y \varphi(A))$ pour tout $z \in \gamma_y \varphi'(A)$. Par suite :

$$\gamma_y \varphi'(A) \subset \varphi_o(A \cap \gamma_y \varphi(A)) \subset \varphi'(A)$$

Multipliant à gauche par γ_y , il vient :

$$\gamma_y \varphi' = \gamma_y \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi)$$

LEMME 3 - $\alpha_o(\varphi)$ et $\alpha(\varphi)$ sont idempotentes et $\supset I$.

Posons $\varphi' = \alpha_o(\varphi) = \bigcup \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi)$. Comme φ_o est $\supset I$, on trouve $\varphi' \supset \bigcup (I \cap \gamma_x \varphi) = I \cap \varphi = I$. Donc $I \subset \varphi' \subset \varphi$, et par suite $\varphi \varphi' = \varphi' \varphi = \varphi$ et $\varphi' \varphi' \supset \varphi'$. Il reste à montrer $\varphi' \varphi' \subset \varphi'$. Or, on trouve :

$$\varphi' \varphi' = \bigcup_y \varphi_o(\varphi' \cap \gamma_y \varphi \varphi') = \bigcup_y \varphi_o(\varphi' \cap \gamma_y \varphi)$$

puisque $\varphi \varphi' = \varphi$, soit, d'après le lemme 2 :

$$\varphi' \varphi' = \bigcup_y \varphi_o(\gamma_y \varphi \cap (\bigcup_x \gamma_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi)))$$

Mais, pour chaque x , on a

$$\gamma_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi) \subset \varphi_o \gamma_x \varphi = \gamma_x \varphi$$

et l'intersection $\gamma_y \varphi \cap \gamma_x \varphi$ est vide, si $x \notin \gamma_y \varphi$, ou égale à $\gamma_y \varphi$, si $x \in \gamma_y \varphi$. Par suite :

$$\gamma_y \varphi \cap (\bigcup_x \gamma_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi)) = \bigcup_{x \in \gamma_y \varphi} \gamma_x \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) \subset \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi)$$

On en déduit :

$$\varphi' \varphi' \subset \bigcup_y \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \varphi'$$

ce qui achève la démonstration.

LEMME 4 - La classe Φ_o est stable pour α_o , la classe Φ est stable pour α .

En effet, d'après le lemme 3, $\varphi' = \alpha_o(\varphi)$ est une fermeture. Pour $C \in \mathcal{C}$, il vient :

$$\varphi'(C) = \bigcup_x \varphi_o(C \cap \gamma_x \varphi(C))$$

Mais $\gamma_x \varphi(C) = \varphi(C)$ pour $x \in \varphi(C)$, et $\gamma_x \varphi(C) = \emptyset$ pour $x \notin \varphi(C)$. Comme $\varphi(C) \supset C$, il reste $\varphi'(C) = \varphi_o(C)$: φ' coïncide sur $\mathcal{C}$ avec φ_o .

LEMME 5 - Le plus petit élément φ_m de la classe Φ_o est aussi le plus petit élément de la classe Φ . Il vérifie

$$\varphi_m = \alpha_o(\varphi_m) = \alpha(\varphi_m)$$

De plus, φ_m est la plus petite fermeture $\hat{\psi}$ majorant la surpotente

$$\psi = \bigcup_x \varphi_o \gamma_x = \bigcup_x \varphi \gamma_x$$

En effet, Φ_o , étant stable pour $\cap$, admet un plus petit élément φ_m . Mais Φ_o est stable pour α_o (lemme 4). Donc $\alpha_o(\varphi_m) \in \Phi_o$. Comme $\alpha_o(\varphi_m)$ est $\subset$ dans φ_m et que φ_m est le plus petit élément, il en résulte bien $\varphi_m = \alpha_o(\varphi_m)$.

De plus, comme $\varphi_m = \varphi = \varphi_o$ sur $\mathcal{C}$, on a $\varphi_m \gamma_x = \varphi_o \gamma_x$, donc $\varphi_m \supset \varphi_o \gamma_x$ et

$$\varphi_m \supset \psi = \bigcup_x \varphi_o \gamma_x$$

Cet élément ψ majore I , car $\varphi_o \supset I$ donne $\psi \supset \bigcup \gamma_x = I$, donc est surpotent, mais en général il n'est pas idempotent. On note aussi que cette surpotente ψ coïncide avec φ_o sur $\mathcal{C}$. Comme la classe des surpotentes égales à φ_o

sur $\mathcal{C}$ est stable pour $\cup$ et l'autocomposition, un raisonnement déjà utilisé montre que ψ coïncide encore avec φ_0 sur $\mathcal{C}$. L'inclusion $\psi \subset \varphi_m$ entraîne donc l'égalité $\psi = \varphi_m$, puisque φ_m est le plus petit élément de Φ_0 .

Le même raisonnement appliqué avec $\varphi_0 = \tilde{\varphi}$ (plus grand élément de Φ) conduit au même élément minimum $\varphi_m = \psi$, car $\tilde{\varphi}$ coïncide sur $\mathcal{C}$ avec tous les éléments de Φ , soit $\tilde{\varphi} \gamma_x = \varphi \gamma_x$ pour tout x : de sorte que $\psi = \cup \varphi \gamma_x$ ne dépend pas du choix de l'élément particulier $\varphi \in \Phi$.

4 - LES FERMETURES INVARIANTES PAR α_0 ET α .

Raisonnons, par exemple, dans le cas de l'opération α_0 . Cette opération est $\subset I$ donc sous-potente sur le treillis complet Φ_0 , puisque $\alpha_0(\varphi) \in \Phi_0$ et $\alpha_0(\varphi) \subset \varphi$ comme on l'a vu. Il existe donc une plus grande ouverture $\check{\alpha}_0$ minorant α_0 , et $\check{\alpha}_0$ et α_0 admettent le même domaine d'invariance que nous désignerons par Φ'_0 :

$$\Phi'_0 = \{ \varphi, \varphi \in \Phi_0, \alpha_0(\varphi) = \varphi \}$$

Pour tout φ , $\check{\alpha}_0(\varphi)$ est la plus grande fermeture stable pour α_0 minorant φ dans Φ_0 . De la même manière, on désignera par :

$$\Phi' = \{ \varphi, \varphi \in \Phi, \alpha(\varphi) = \varphi \}$$

le domaine d'invariance de l'opération α , qui est aussi celui de l'ouverture $\check{\alpha}$. Pour tout φ , $\check{\alpha}(\varphi)$ est la plus grande fermeture stable pour α et minorant φ dans Φ .

En particulier $\check{\alpha}_0(\varphi_0)$ est le plus grand élément de Φ'_0 , et $\check{\alpha}(\tilde{\varphi})$ est le plus grand élément de Φ' .

Nous allons maintenant montrer que ces deux ouvertures coïncident sur Φ_0 : autrement dit, pour tout $\varphi \in \Phi_0$ (ce qui implique $\varphi \subset \varphi_0$), on a

$$\check{\alpha}(\varphi) = \check{\alpha}_0(\varphi)$$

On a déjà vu $\alpha \subset \alpha_0$ sur Φ_0 , et cela implique

$$\alpha \subset \alpha_o \text{ sur } \Phi_o, \text{ i.e. } \Phi' \cap \Phi_o \subset \Phi_o'$$

et il faut donc montrer l'inclusion inverse.

LEMME 6 - Les éléments de Φ_o' ou de Φ' ne créent pas de composantes connexes.

En effet, si $\varphi \in \Phi_o'$, on a pour tout $A \subset E$

$$\varphi(A) = \bigcup_x \varphi_o(A \cap \gamma_x \varphi(A))$$

Supposons que, pour un point x , on ait $A \cap \gamma_x \varphi(A) = \emptyset$, donc aussi

$$\varphi_o(A \cap \gamma_x \varphi(A)) = \emptyset$$

Cela entraîne $x \notin \gamma_x \varphi_o(A \cap \gamma_x \varphi(A)) = \gamma_x \varphi'(A)$ d'après le lemme 2, avec $\varphi' = \alpha_o(\varphi)$. Donc $x \notin \gamma_x \varphi(A)$, puisque $\varphi = \varphi'$, et par suite $\gamma_x \varphi(A) = \emptyset$. Ainsi toute composante $\gamma_x \varphi(A)$ non vide rencontre A .

LEMME 7 - Une fermeture $\varphi \in \Phi$ est invariante pour α si et seulement si

$\gamma_y \varphi$ est C i $\cap$ pour tout $y \in E$.

Une fermeture $\varphi \in \Phi_o$ est invariante pour α_o si et seulement si

$$\gamma_y \varphi = \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) \quad (y \in E)$$

Posons $\varphi' = \alpha_o(\varphi)$. Si $\varphi = \varphi'$, i.e. $\varphi \in \Phi_o'$, on trouve (Critère 2)

$$\varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) \subset \varphi_o \gamma_y \varphi' = \gamma_y \varphi = \gamma_y \varphi'$$

et $\gamma_y \varphi' = \gamma_y \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi)$ d'après le lemme 2. Cela entraîne

$$\varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi$$

Inversement, si $\varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi$, il vient $\varphi' = \bigcup_y \gamma_y \varphi = \varphi$.

LEMME 8 - Si une fermeture $\varphi \in \Phi_o$ est invariante pour α_o , on a

$$\varphi(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi(I \cap \gamma_y \varphi) \quad (y \in E)$$

Avec $\varphi' = \alpha_o \varphi$, si $\varphi = \varphi'$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(I \cap \gamma_y \varphi) &= \varphi'(I \cap \gamma_y \varphi) = \bigcup_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi)(I \cap \gamma_y \varphi) \\ &= \bigcup_x \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi \cap \gamma_x \varphi)(I \cap \gamma_y \varphi)\end{aligned}$$

D'après un calcul déjà fait, ceci se réduit à :

$$\varphi(I \cap \gamma_y \varphi) = \varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi)(I \cap \gamma_y \varphi)$$

et donc, en utilisant le lemme 7 :

$$\varphi(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi(I \cap \gamma_y \varphi)$$

COROLLAIRE 1 - Pour tout $\varphi \in \Phi_o$ invariant par α_o , on a

$$\varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \varphi(I \cap \gamma_y \varphi) \quad (y \in E)$$

En effet, $\varphi \subset \varphi_o$ entraîne $\varphi_o \varphi = \varphi_o$, et d'autre part $\varphi_o \gamma_y \varphi = \gamma_y \varphi$ (critère 2). En multipliant par φ_o la relation du lemme 8, il vient donc

$$\varphi_o(I \cap \gamma_y \varphi) = \gamma_y \varphi(I \cap \gamma_y \varphi) = \varphi(I \cap \gamma_y \varphi)$$

En termes de domaines d'invariance, ce corollaire implique

$$\Phi'_o \subset \Phi' \cap \Phi_o, \text{ i.e. } \check{\alpha}_o \subset \check{\alpha} \text{ sur } \Phi_o$$

En effet, si $\varphi \in \Phi'_o$, on trouve d'après le corollaire 1 :

$$\alpha(\varphi) = \bigcup_x \varphi(I \cap \gamma_x \varphi) = \bigcup_x \varphi_o(I \cap \gamma_x \varphi) = \alpha_o(\varphi) = \varphi$$

Or, nous avons déjà vu l'inclusion inverse. Concluons :

COROLLAIRE 2 - $\check{\alpha}$ et $\check{\alpha}_o$ coïncident sur Φ_o , soit $\Phi'_o = \Phi' \cap \Phi_o$.

Il nous reste maintenant à caractériser le plus grand élément de Φ'_o ,

que nous désignerons pour abréger par φ_M , soit, d'après le corollaire 2 :

$$\varphi_M = \check{\alpha}(\varphi_0) = \check{\alpha}_0(\varphi_0)$$

Comme φ_0 peut être choisi arbitrairement dans Φ , nous aurons par là même caractérisé l'ouverture $\check{\alpha}$ sur Φ .

Pour chaque $x \in E$, nous poserons

$$\psi_x = \gamma_x \varphi_0$$

et nous désignerons par $\check{\psi}_x$ la plus grande ouverture minorant ψ_x . On sait que $\psi_x \check{\psi}_x$ est alors la plus grande minorante $C \cap$ de ψ_x . Noter que $\gamma_x \varphi_M$ est $C \cap$ (lemme 7) et minore $\psi_x = \gamma_x \varphi_0$. Par suite

$$\gamma_x \varphi_M \subset \psi_x \check{\psi}_x$$

Prenant l'union en x , et posant $\psi = \bigcup_x \psi_x \check{\psi}_x$, on en tire

$$\varphi_M \subset \psi = \bigcup_x \psi_x \check{\psi}_x$$

Montrons l'inclusion inverse, d'où résultera l'égalité. Pour cela, considérons la classe $\mathcal{H}$ des $\varphi \in \Phi_0$ majorant ψ , classe stable pour l'intersection.

Pour $\varphi \in \mathcal{H}$ et $x \in E$, on a

$$\varphi \supset \psi \supset \psi_x \check{\psi}_x$$

Comme $\psi_x = \gamma_x \varphi_0$, on a $\gamma_x \psi_x = \psi_x$, et donc

$$\gamma_x \varphi \supset \psi_x \check{\psi}_x \supset \check{\psi}_x$$

Par ailleurs, $\check{\psi}_x \subset \gamma_x \varphi$ entraîne :

$$I \cap \gamma_x \varphi \supset \check{\psi}_x$$

puisque $\check{\psi}_x$ est une ouverture. Multipliant membre à membre ces deux inclusions, nous trouvons :

$$\gamma_x \varphi (I \cap \gamma_x \varphi) \supset \psi_x \bigvee \psi_x$$

En prenant l'union en x et utilisant le lemme 2, cela donne

$$\alpha(\varphi) \supset \psi$$

Donc la classe $\mathcal{H}$ est stable pour α , et aussi, comme on l'a vu, pour l'intersection. Donc elle contient la classe $\mathcal{H}_0$, stable pour α et $\cap$ engendrés par φ_0 , et, en particulier le plus petit élément de $\mathcal{H}_0$, soit φ'_0 . D'ailleurs $\varphi'_0 = \alpha(\varphi'_0)$, puisqu'on a toujours $\alpha(\varphi'_0) \subset \varphi'_0$ et que φ'_0 est le plus petit élément de la classe $\mathcal{H}_0$ stable pour α . Il en résulte que φ'_0 est le plus grand minorant de φ_0 invariant pour α , i.e. $\varphi'_0 = \varphi_M$. On a donc $\varphi_M \in \mathcal{H}$, c'est-à-dire

$$\varphi_M \supset \psi$$

Comme on a vu l'inclusion inverse, on a bien l'égalité $\psi = \varphi_M$. En conclusion

THEOREME 3 - Soit Φ une classe de fermetures connexes coïncidant sur $\mathcal{C}$, φ_0 un élément de Φ , α et α_0 les opérations

$$\alpha(\varphi) = \bigcup_{x \in E} \varphi(I \cap \gamma_x \varphi) \quad ; \quad \alpha_0(\varphi) = \bigcup_{x \in E} \varphi_0(I \cap \gamma_x \varphi)$$

$\hookrightarrow \varphi \in \Phi$ $\hookrightarrow \varphi \in \Phi_0$ car $\varphi \subset \varphi_0$

Alors φ_0 admet dans Φ une plus petite minorante φ_m et une plus grande minorante φ_M stables pour α . φ_m et φ_M sont également la plus petite et la plus grande minorante de φ_0 dans Φ qui soient invariantes pour α_0 .

Plus précisément, φ_m est la plus petite fermeture majorant $\bigcup_{x \in E} \varphi_0 \gamma_x$ et φ_M est donnée par

$$\varphi_M = \bigcup_{x \in E} \psi_x \bigvee \psi_x$$

où $\psi_x \bigvee \psi_x$ est, pour chaque x , la plus grande minorante C i $\cap$ de $\psi_x = \gamma_x \varphi_0$. De plus φ_m et φ_M ne créent pas de composantes connexes. Enfin, φ_M est le plus petit élément de la classe stable pour $\cap$ et pour α (ou α_0) engendrée par φ_0 .