ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

FONTAINEBLEAU/CG N-4/86/G

LA SEPARATION DANS LES TREILLIS

G. MATHERON

Mars 1986

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE : 35, RUE SAINT-HONORÉ — 77305 FONTAINEBLEAU (FRANCE)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

LA SEPARATION DANS LES TREILLIS

Par

G. MATHERON

TABLE DES MATIERES

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE : 35, RUE SAINT-HONORÉ — 77305 FONTAINEBLEAU (FRANCE)

LA SEPARATION DANS LES TREILLIS

0 - INTRODUCTION

Dans ce qui suit, je considérerai des treillis T, non nécessairement complets, mais possédant cependant un plus petit élément o et un plus grand élément ω, et je dirai que deux éléments a et b de T

∿ sont étrangers l'un à l'autre si $a \wedge b = 0$

∿ se rencontrent si $a \wedge b \neq 0$

∿ se transcendent si $a \vee b = \omega$

∿ ne se transcendent pas si $a \vee b \neq \omega$

Corrélativement, à tout élément $a \in T$ j'associerai les quatre domaines suivants :

∿ domaine d'influence (ou, plus souvent, simplement domaine) de a :

$$D_a = \{x : a \wedge x \neq o\}$$

∿ domaine d'étrangeté de a, complémentaire de D_a, i.e.

$$E_a = \{x : a \wedge x = 0\}$$

∿ horizon de a, dual de D_a :

$$H_a = \{x : a \vee x \neq \omega\}$$

∿ domaine de transcendance de a, dual de E_a et complémentaire de H_a :

$$T_a = \{x : a \vee x = \omega\}$$

Il suffit évidemment de remplacer T par le treillis dual T* ($a \overset{*}{<} b$ dans T* si et seulement si $a > b$ dans T) pour échanger le domaine D_a et l'horizon H_a, de sorte que tout énoncé concernant D_a entraine un énoncé dual concernant H_a.

Certains treillis T que nous appellerons ultra séparés possèdent la propriété suivante : un élément a est univoquement déterminé par la donnée de son domaine D_a . Il en est ainsi, comme on le voit facilement, dans un treillis T distributif et complémenté, par exemple un treillis $\mathcal{P}(E)$: le complément a^c est, en effet, unique, et détermine a, puisque $a^{cc} = a$. Or a^c est le plus grand élément du domaine d'étrangeté E_a, de sorte que la donnée de E_a détermine univoquement l'élément a. On note que a^c est également le plus petit élément du domaine de transcendance T_a, de sorte que les treillis distributifs et complémentés sont également, comme nous disons, ultra anti-séparés, (i.e. : T* est ultra séparé, ou tout $a \in T$ est univoquement déterminé par son horizon H_a). Et la relation

$$T_a \cap E_a = \{a^c\}$$

caractérise les treillis T où chaque élément admet un complément unique.

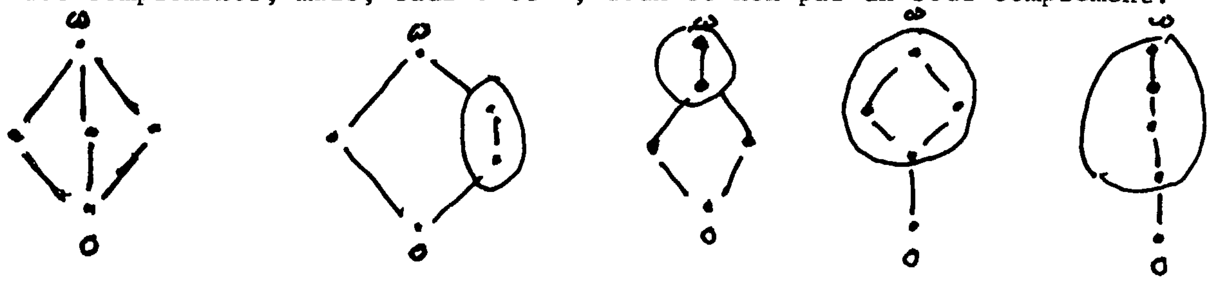
Un autre exemple de treillis T ultra séparé correspond au cas où tout élément $x \in T$ est le sup des points, ou atomes, qu'il majore (un atome, ou point, est un élément $a \in T$ tel que $b < a$ entraine $b = 0$ ou $b = a$). Ainsi, si E est un espace topologique séparé, le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés de E est ultra séparé : car les points $a \in E$ sont associés à des atomes $\{a\}$ dans $\mathcal{F}(E)$, et tout fermé F est le sup des atomes $\{a\} \subset F$. On notera, par contre, que le treillis $\mathcal{G}(E)$ des ouverts de l'espace topologique séparé E n'est pas ultra séparé : car la donnée du domaine dans $\mathcal{G}$ d'un ouvert G détermine seulement l'adhérence $\overline{G}$ de G, et non G lui-même.

Ces conditions (existence d'un complément unique, ou d'une famille d'atomes engendrant chaque élément de T) sont suffisantes, mais non nécessaires. Par exemple, si nous définissons sur le treillis $\mathcal{G}(E)$ des ouverts d'un espace topologique séparé E, la relation d'équivalence

$$G \equiv G' \quad \text{si} \quad \overline{G} = \overline{G}'$$

(nous l'appellerons équivalence d'influence), on voit facilement que l'espace quotient $\mathcal{G}/\equiv$ est un treillis homomorphe à $\mathcal{G}$ et ultra séparé. Mais il ne contient aucun atome (par contre, il est complémenté, la classe des G admettant l'adhérence $\overline{G}_o$ ayant pour complément la classe des G d'adhérence $\complement \overline{G}_o$). De même, le treillis $\mathcal{F}(E)$, qui est ultra séparé, admet des atomes mais il n'est pas complémenté.

On sait qu'il n'existe que cinq treillis T à cinq éléments (dont un plus petit o et un plus grand ω). Un seul d'entre eux est ultra séparé : il n'est pas distributif, mais seulement modulaire ; chaque élément admet bien des compléments, mais, sauf o et ω, deux et non pas un seul complément.



ultra séparé
modulaire
non distributif

complémenté,
mais non
univoquement

non ultra séparé
ni modulaire
ni distributif

complémenté,
mais non
univoquement

non ultra séparés,
distributifs,
non complémentés

En tant que treillis finis, ces treillis admettent tous des atomes, mais seul le premier (qui est ultra séparé) en admet suffisamment. Chacun des 4 autres contient au moins un élément qui n'est pas le sup des atomes qu'il majore. Sur chacun des 4 treillis non séparés, on a entouré d'un rond les éléments admettant le même domaine d'influence. Le passage au quotient (par l'équivalence d'influence) donne un treillis à 4 éléments dans les deux premiers cas, à 2 éléments dans les deux derniers. Ces treillis quotient sont donc tous distributifs et complémentés (et ultra séparés bien entendu).

On peut aussi considérer dans $\mathbb{R}^n$ des treillis d'ensembles convexes :

∿ les convexes de $\mathbb{R}^n$

∿ les fermés convexes (ou les compacts convexes plus $\mathbb{R}^n$ lui-même)

∿ les ouverts convexes

Ils sont tous les trois ultra séparés (les deux premiers parce qu'ils contiennent suffisamment d'atomes, les derniers parce qu'un ouvert convexe est déterminé par son adhérence : $G = \overset{\circ}{\overline{G}}$ pour tout ouvert convexe G), aucun d'eux n'est distributif. Aucun d'eux, non plus, n'est complémenté (car si B est convexe et borné, il n'existe pas de convexe A disjoint de B tel que l'enveloppe convexe de $A \cup B$ soit $\mathbb{R}^n$).

En particulier, avec le treillis des ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$, nous tenons un exemple de treillis ultra séparé qui n'admet aucun atome et n'est ni complémenté ni distributif.

On peut aussi considérer des treillis de fonctions. Pour toute fonction positive f sur un ensemble E, on désignera par S_f l'ensemble

$$S_f = \{x : x \in E,\ f(x) > 0\}$$

Alors, dans le treillis des fonctions $\geqq 0$ sur E, le domaine d'étrangeté d'une fonction $\geqq 0$ f est constitué des fonctions $g \geqq 0$ dont le support est disjoint de S_f :

$$E_f = \{g : S_f \cap S_g = \emptyset\}$$

Ce treillis n'est donc pas séparé, mais le treillis quotient s'identifie à $\mathcal{P}(E)$, puisque $f \equiv g$ si et seulement si $S_f = S_g$. Il est donc ultra séparé. Même circonstance dans le cas du treillis des fonctions positives et semi continues inférieurement sur un espace topologique séparé E : la classe d'équivalence de f est constituée des fonctions g s.c.i. telles que $\overline{S_g} = \overline{S_f}$, et le treillis quotient s'identifie à $\mathcal{G}/\equiv$: il est comme lui ultra séparé, distributif et complémenté, mais n'admet pas d'atomes.

1 - EXEMPLE DU TREILLIS DES FONCTIONS S.C.S.

Le cas du treillis des fonctions semi-continues supérieurement sur un espace topologique séparé est assez remarquable. L'équivalence d'influence $f \equiv g$ s'écrit ici $S_f = S_g$ (car il existe des fonctions s.c.s. à support ponctuel), et le treillis quotient est ultra séparé, car tout S_f est le sup des points qu'il contient. Il est distributif, comme le treillis d'origine. Mais; alors que le treillis des fonctions s.c.s. est un treillis complet, le treillis quotient n'est pas complet : de fait, les supports S_f possibles pour les fonctions s.c.s. constituent la classe $\mathcal{F}_\sigma$ des ensembles du type F_σ , c'est-à-dire réunion dénombrable de fermés, et le treillis quotient s'identifie au treillis $\mathcal{F}_\sigma$: mais $\mathcal{F}_\sigma$ n'est pas en général un treillis complet.

* Voici une démonstration rapide de ces propriétés. Si f est $\geqq 0$ et s.c.s. sur E, posons :

$$A_n = \{x : f(x) \geqq \frac{1}{n}\}$$

A_n est fermé, puisque f est s.c.s., et on a :

$$S_f = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

Donc S_f est du type F_σ.

Inversement, soit S un ensemble du type F_σ , c'est-à-dire :

$$S = \bigcup_{n \geq 1} A_n \qquad (A_n \in \mathcal{F})$$

Quitte à remplacer A_n par $\bigcup_{k \leq n} A_k$, on peut supposer la suite des <u>fermés A_n croissante</u> dans $\mathcal{F}(E)$. Pour chaque $x \in S$, il existe un plus petit entier $n = N(x)$ tel que $x \in A_n$. Posant

$$f(x) = 1/N(x) \qquad \text{pour } x \in S$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{pour } x \notin S$$

nous obtenons une fonction s.c.s. dont le support S_f coïncide avec S. On a ainsi montré qu'une partie S de E est le support d'une fonction s.c.s. si et seulement si S est du type F_σ.

Les relations

$$S_{f \vee g} = S_f \cup S_g \quad ; \quad S_{f \wedge g} = S_f \cap S_g$$

(f, g : fonctions s.c.s. positives) montrent ensuite que la classe $\mathcal{F}_\sigma$ constitue un treillis isomorphe au treillis quotient des fonctions s.c.s. par l'équivalence d'influence. Mais $\mathcal{F}_\sigma$ ne peut pas être un treillis complet en général.

En effet, supposons que $\mathcal{F}_\sigma$ soit un treillis complet. Comme les points appartiennent à $\mathcal{F}_\sigma$, tout ensemble $A \subset E$ (borélien ou non) constitue une famille d'éléments de $\mathcal{F}_\sigma$; à savoir les $\{a\}$ pour $a \in A$. Cette famille admet donc un sup dans le treillis complet $\mathcal{F}_\sigma$, qui est le plus petit élément $\hat{A}$ de $\mathcal{F}_\sigma$ contenant A :

$$\hat{A} = \bigcap \{ F_\sigma, F_\sigma \in \mathcal{F}_\sigma, F_\sigma \supset A \}$$

Comme A peut être un sous-ensemble quelconque de E, on peut déjà prendre pour

A une intersection d'éléments de $\mathcal{F}_\sigma$. Dans ce cas, on a $\hat{A} = A$, et cela signifie que $\mathcal{F}_\sigma$ est stable pour l'intersection infinie (dénombrable ou non), propriété fausse en général.

Limitons-nous au cas où E est un espace localement compact de type dénombrable. Dans ce cas, tout ouvert G est réunion dénombrable de compacts, et donc appartient à $\mathcal{F}_\sigma$. Comme $\mathcal{F}_\sigma$ est stable pour l'intersection infinie, les ensembles du type G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) sont dans $\mathcal{F}_\sigma$. Mais tout G_δ est le complémentaire d'un F_σ, et réciproquement. Il en résulte que $\mathcal{F}_\sigma$ est stable pour la complémentation. Autrement dit, $\mathcal{F}_\sigma$, stable pour $\cup$, $\cap$ et $\complement$ contenant $\mathcal{G}$ contient aussi la classe des boréliens. Comme tout F_σ , inversement, est un borélien, il en résulte :

$$\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{B}$$

où $\mathcal{B}$ est la classe des boréliens. Mais on a vu que $\mathcal{F}_\sigma$ était stable pour l'intersection infinie même non dénombrable. Comme $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{B}$ est stable aussi pour la complémentation, on conclut que $\mathcal{B}$ est stable aussi pour la réunion non dénombrable. Tout sous-ensemble $A \subset E$ étant réunion de points, qui appartiennent à $\mathcal{B}$, appartient alors lui-même à $\mathcal{B}$, et on a donc

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$$

Mais cette propriété est fausse en général (à moins que E ne soit un ensemble dénombrable). On conclut donc que $\mathcal{F}_\sigma$ <u>ne peut pas être un treillis complet</u>, et cela bien qu'il soit le quotient d'un treillis complet par une équivalence propre (i.e. préservant la structure de treillis)

<u>2 - LES EQUIVALENCES PROPRES</u>

Voici maintenant quelques préliminaires algébriques simples, qui seront utilisés dans tout ce qui suit.

Si T et T' sont deux treillis (avec chacun un plus petit et un plus grand élément) une application h sera un homomorphisme de T dans T' si h respecte la structure de treillis, i.e. :

(2-1) $$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) \quad ; \quad h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

Cela implique donc que l'espace image $h(T) \subset T'$ est un sous-treillis de T', c'est-à-dire un sous-ensemble de T' stable pour $\vee$ et $\wedge$ (finis). C'est là une propriété assez forte. Nous utiliserons, en général, une propriété plus faible, qui est la suivante :

DEFINITION - Une application h d'un treillis T dans un ensemble ordonné E est dite propre si h est croissante et si l'espace image h(T) constitue (pour l'ordre induit par l'ordre de E) un treillis homomorphe à T.

(Si E est lui-même un treillis T', un application propre de T dans T' n'est pas nécessairement un homomorphisme de treillis : car l'espace image, bien que réticulé, n'est pas nécessairement un sous-treillis de T, i.e. une partie de T stable pour $\vee$ et $\wedge$ au sens de T'. En particulier, le Sup et l'Inf dans h(T') ne coïncident pas nécessairement avec le Sup et l'Inf au sens de T').

Autrement dit, au lieu de (2-1), une application propre de T dans E doit vérifier :

i) $a < b \Rightarrow h(a) < h(b)$

ii) $h(a) < h(b)$ et $h(a) < h(b') \Rightarrow h(a) < h(b \wedge b')$

iii) $h(a) > h(b)$ et $h(a) > h(b') \Rightarrow h(a) > h(b \vee b')$

Compte tenu de i), qui implique $h(b \wedge b') < h(b)$ et $< h(b')$ et de même $h(b \vee b') > h(b)$ et $> h(b')$ dans E, les relations ii) et iii) expriment, en effet, que l'ensemble h(T) est réticulé pour l'ordre induit par E avec un Sup et un Inf donnés par :

$$\text{Sup } (h(b), h(b')) = h(b \vee b')$$

$$\text{Inf } (h(b), h(b')) = h(b \wedge b')$$

Un critère plus simple est le suivant :

CRITERE 2-1 - Une application h d'un treillis T dans un ensemble ordonné E est propre si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) $a < b$ dans T entraine $h(a) < h(b)$ dans E

iv) $h(a) < h(b)$ dans E entraine $h(a) = h(a \wedge b)$ et $h(b) = h(a \vee b)$

En effet, compte tenu de i), ii) et iii) entrainent iv) : on le voit en prenant $b' = a$. ii) donne alors $h(a) < h(a \wedge b)$, et donc l'égalité puisque i) entraine $h(a) > h(a \wedge b)$.

Réciproquement, si i) et iv) sont vérifiés , soient a, b, b' dans T avec $h(a) < h(b)$ et $h(a) < h(b')$. D'après iv), il en résulte :

$$h(a) = h(a \wedge b) = h(a \wedge b')$$

Puis $h(a \wedge b) = h(a \wedge b')$ (donc à la fois > et <) entraine $h(a \wedge b) = h(a \wedge b \wedge b')$. D'où finalement, d'après i)

$$h(a) = h(a \wedge b \wedge b') < h(b \wedge b')$$

et ii) est vérifié. Démonstration duale pour iii).

On peut aussi, plus généralement, considérer des applications de T dans un ensemble E non ordonné quelconque. Dans ce cas :

<u>DEFINITION</u> - Une application h d'un treillis T dans un ensemble quelconque E non ordonné sera dite propre si l'on peut munir l'espace image h(T) d'une relation d'ordre qui en fait un treillis homomorphe à T.

Cette relation d'ordre, si elle existe, est nécessairement unique. D'après iv), en effet, cette relation d'ordre est obligatoirement :

$$h(a) < h(b) \quad \text{si et seulement si} \quad h(a) = h(a \wedge b)$$

$$\text{ou encore} \quad \text{si et seulement si} \quad h(b) = h(a \vee b)$$

Encore faut-il que ces deux conditions soient équivalentes. Cherchons une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi. Pour cela, considérons deux éléments a et a' tels que

$$h(a) = h(a')$$

Pour tout $b \in T$, on a $a < a \vee b$, ce qui doit entrainer $h(a') = h(a) < h(a \vee b)$, et donc, d'après la seconde des conditions ci-dessus : $h(a \vee b) = h(a' \vee a \vee b)$. En échangeant les rôles de a et a', il vient aussi $h(a' \vee b) = h(a \vee a' \vee b)$, d'où l'égalité $h(a \vee b) = h(a' \vee b)$, et de même par dualité $h(a \wedge b) = h(a' \wedge b)$. Nous allons voir que cette condition nécessaire est aussi suffisante:

CRITERE 2-2 - Une application h d'un treillis T dans un ensemble non ordonné E est propre si et seulement si elle vérifie la condition

(2-2) $h(a) = h(a') \Rightarrow h(a \vee b) = h(a' \vee b)$ et $h(a \wedge b) = h(a' \wedge b)$

pour tout $b \in T$.

Les conditions :

$$h(a) = h(a \wedge b) \quad \text{et } h(b) = h(a \vee b)$$

sont alors équivalentes et définissent l'unique relation d'ordre $h(a) < h(b)$ pour laquelle l'espace image devient un treillis homomorphe à T, i.e.

$$h(a) \vee h(b) = h(a \vee b) \quad \text{et} \quad h(a) \wedge h(b) = h(a \wedge b)$$

Nous venons de voir que la condition (2-2) est nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée. Si deux éléments a et b vérifient $h(a) = h(a \wedge b)$, la condition (2-2) implique $h(a \vee b) = h((a \wedge b) \vee b) = h(b)$. De la même manière, on voit que $h(b) = h(a \vee b)$ entraine $h(a) = h(a \wedge b)$.

Posons donc, dans h(T) :

$$h(a) < h(b) \quad \text{si} \quad h(a) = h(a \wedge b)$$

ou, ce qui revient au même : $h(b) = h(a \vee b)$.

C'est une relation d'ordre. En effet, si

$$h(a) < h(b) < h(c)$$

on a, d'après la définition de < sur h(T) : $h(b) = h(b \wedge c)$, puis, comme $h(a) < h(b) = h(b \wedge c)$, $h(a) = h(a \wedge b \wedge c)$. On a évidemment aussi $h(a) = h(a \wedge b)$. Mais, d'après (2-2), cela entraine encore $h(a \wedge c) = h(a \wedge b \wedge c)$. Finalement, on a bien $h(a) = h(a \wedge c)$, c'est-à-dire $h(a) < h(c)$ dans h(T).

On a évidemment $h(a) = h(a \wedge a)$, donc $h(a) < h(a)$. Enfin $h(a) < h(b)$ et $h(b) < h(a)$ entrainent $h(a) = h(a \wedge b)$ et $h(b) = h(a \wedge b)$, donc $h(a) = h(b)$: il s'agit bien d'une relation d'ordre. Enfin, comme les conditions i) et iv) du critère 2-1 sont vérifiées, h est bien un homomorphisme de T sur h(T).

C'est surtout aux relations d'équivalence que nous appliquerons ces résultats. Si $\equiv$ est une équivalence sur l'espace T, prenons pour ensemble E (non ordonné) l'espace quotient $T/\equiv$, i.e. l'espace des classes d'équivalence modulo $\equiv$, et pour h l'application canonique associant à tout $a \in T$ sa classe $\tilde{a} = h(a)$ modulo $\equiv$. Nous dirons que l'équivalence $\equiv$ est propre si l'application canonique h est propre, c'est-à-dire si l'espace quotient $T/\equiv$ peut être muni d'une relation d'ordre qui en fait un treillis homomorphe à T. D'après le critère 2-2, nous trouvons ainsi :

CRITERE 2-3 - Pour qu'une relation d'équivalence $\equiv$ sur un treillis T soit propre, il faut et il suffit qu'elle vérifie pour a, a', b $\in$ T, la condition suivante :

(2-3) $$a \equiv a' \Rightarrow a \vee b \equiv a' \vee b \quad \text{et} \quad a \wedge b \equiv a' \wedge b$$

L'unique relation d'ordre entre classes $\tilde{a}$ modulo $\equiv$ qui fasse de l'espace quotient $T/\equiv$ un treillis homomorphe à T est alors définie par l'une ou l'autre des conditions équivalentes :

$$\tilde{a} < \tilde{b} \quad \text{si} \quad a \equiv a \wedge b \quad \text{ou si} \quad b \equiv a \vee b$$

Il est immédiat que (2-3) entraine plus généralement :

(2-4) $$a \equiv a' \text{ et } b \equiv b' \Rightarrow a \vee b \equiv a' \vee b' \quad \text{et} \quad a \wedge b \equiv a' \wedge b'$$

et aussi (avec b = a')

(2-5) $$a \equiv a' \Rightarrow a \equiv a \wedge a' \equiv a \vee a' \equiv a'$$

3 - FILTRES ET ANTI-FILTRES

Le mot filtre sera utilisé ici dans son sens usuel en topologie et en algèbre (aucune confusion n'est à craindre avec les filtres morphologiques, i.e. les applications croissantes et idempotentes de T dans T), i.e. : si T est un treillis, non nécessairement complet, mais muni d'un plus petit élément 0 et d'un plus grand élément ω, un filtre F sur T est un sous-ensemble $F \subset T$ vérifiant les trois axiomes suivants :

(F_1) $0 \notin F$

(F_2) $f, f' \in F \Rightarrow f \wedge f' \in F$

(F_3) $f \in F$ et $a > f \Rightarrow a \in F$

Autrement dit, un filtre F est une partie de T stable pour $\wedge$ (fini), permise pour $\vee$, et on ajoute de plus la condition $0 \notin F$, puisque pour $0 \in F$, (F_3) entrainerait F = T. Nous dirons parfois que T est le pseudo-filtre trivial (contenant 0).

On désignera par Φ la classe des filtres sur T, et par $\tilde{\Phi}$ la classe obtenue en adjoignant à Φ le pseudo-filtre trivial T. Il est immédiat que la classe $\Phi \subset \mathcal{P}(T)$ est stable pour l'intersection, finie ou non, et contient un plus petit élément (le filtre vide, ou, si l'on préfère travailler sur la classe des filtres non vides, le filtre $\{\omega\}$ réduit à l'unique élément ω). Φ n'admet pas de plus grand élément, mais, par construction, $\tilde{\Phi}$ en admet un, à savoir le pseudo-filtre trivial T. En particulier $\tilde{\Phi}$ constitue un treillis complet. De même encore, $\tilde{\Phi}$ étant stable pour l'intersection, il existe pour toute partie B du treillis T un plus petit filtre (éventuellement, le pseudo-filtre T) $\hat{B}$ contenant B, qui sera l'intersection des filtres $F \supset B$, ou, s'il n'en existe pas, T lui-même. Il est clair que $B \to \hat{B}$ constitue une fermeture sur T.

Par dualité, on appellera antifiltre sur T un sous-ensemble A de T stable pour $\vee$ (fini), permis pour $\wedge$ et ne contenant pas le plus grand élément ω (sauf à considérer le pseudo-antifiltre trivial T) : explicitement, donc, les axiomes des antifiltres sont :

(A_1) $\omega \notin A$

(A_2) $a, a' \in A \Rightarrow a \vee a' \in A$

(A_3) $a \in A$ et $b < a \Rightarrow b \in A$

Il sera commode de désigner par $\mathcal{A}$ la classe des antifiltres, et par $\tilde{\mathcal{A}}$ la classe obtenue en adjoignant à $\mathcal{A}$ le pseudo-antifiltre trivial T. Cette classe $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(T)$, étant stable pour l'intersection, définit elle aussi une fermeture, associant à chaque partie B de T le plus petit antifiltre contenant B (ou T s'il n'en existe pas).

ULTRA-FILTRES

Il est plus intéressant de remarquer que ces deux classes Φ et $\mathcal{A}$ (T étant exclu) sont inductives pour l'union croissante $\uparrow$ (vérification immédiate), de sorte que le théorème de Zorn nous garantit l'existence de filtres (ou d'antifiltres) maximaux contenant un filtre (ou un antifiltre) donné. Les filtres maximaux sont appelés ultra-filtres. Nous dirons de même qu'un antifiltre maximal est un ultra-antifiltre (et non un anti-ultra-filtre, terminologie douteuse, qui évoquerait plutôt le complémentaire d'un ultrafiltre, qui n'est pas, en général, un ultra-antifiltre).

Il est facile de voir que, si un élément $a \in T$ n'appartient pas à un filtre F, on peut trouver un filtre F' contenant F et cet élément a si et seulement si a rencontre tous les éléments de f, i.e.

$$a \in D_f \quad \forall f \in F, \text{ ou encore } F \subset D_a$$

Le plus petit filtre F' contenant a et F est alors constitué des éléments qui majorent $a \wedge f$ pour un $f \in F$. Il sera commode, dans ce qui suit, de désigner par M_x la classe des majorants de x dans T, et de même par M^x la classe de ses minorants.

$$M_x = \{ y : y \in T, y > x \} \quad ; \quad M^x = \{ y : y \in T, y < x \}$$

Le plus petit filtre F' engendré par F et $a \notin F$, sous la condition $F \subset D_a$, est donc défini par :

$$F' = \bigcup \{ M_{a \wedge f} \text{ , } f \in F \}$$

Il est clair alors qu'un filtre F est un ultrafiltre si et seulement si tout élément a tel que $F \subset D_a$ (i.e. rencontrant tous les $f \in F$) appartient à F. Noter que l'on a $F \subset D_f$ pour tout filtre F, non nécessairement maximal, et tout $f \in F$, puisque F est stable pour $\wedge$ et ne contient pas l'élément minimum 0. Ainsi, un filtre F est un ultrafiltre si et seulement si il vérifie l'axiome supplémentaire :

(F_u) $\quad F \subset D_a \Leftrightarrow a \in F$

ou, sous une forme plus analytique mais équivalente :

(F'_u) Pour tout $a \in T$ n'appartenant pas au filtre F, il existe un élément $f \in F$ tel que $a \wedge f = 0$.

Par dualité, l'axiome des ultra-antifiltres fait intervenir l'horizon H_a au lieu du domaine d'influence D_a : un antifiltre A est un ultra-antifiltre si et seulement si

(A_u) $A \subset H_a \Leftrightarrow a \in A$

ou encore, ce qui revient au même, si et seulement si

(A'_u) Pour tout $b \in T$ n'appartenant pas à l'antifiltre A, il existe un élément $a \in A$ qui transcende b, i.e. $a \vee b = \omega$.

FILTRES PARFAITS

Dans le cas d'un treillis distributif et complémenté T, pour tout $a \in T$, il existe un élément (nécessairement unique) $a' \in E_a \cap T_a$, i.e. $a \vee a' = \omega$ et $a \wedge a' = 0$, dit complémentaire de a. Un filtre F ne peut pas contenir à la fois a et a' (il contiendrait alors $a \wedge a' = 0$, contrairement à l'axiome F_1). Mais il peut ne contenir ni l'un ni l'autre. Par contre, un ultra-filtre F_u contiendra toujours soit a, soit a'. En effet, si a, par exemple, n'appartient pas à F_u, il existe $f \in F_u$ étranger à a (axiome F'_u ci-dessus), soit $f \in E_a$. Comme a' est le plus grand élément de E_a, on a $a' > f$ et donc $a' \in F_u$ par l'axiome A_3.

Réciproquement, d'ailleurs, si un filtre F sur un treillis distributif et complémenté vérifie la propriété :

$\forall a \in T$, a ou son complémentaire $a' \in F$

alors F est un ultra-filtre, puisque l'axiome (F'_u) est vérifié avec $f = a'$. Toujours dans un treillis distributif et complémenté, un filtre F est un ultra-filtre si et seulement si il vérifie l'axiome suivant, pour a, b quelconques dans T :

(F_p) $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ou $b \in F$

La condition est nécessaire : supposons $a \notin F$ et $b \notin F$. Si F est un ultra-filtre, on peut, d'après l'axiome (F_u), trouver f et $f' \in F$ avec $f \wedge a = f' \wedge b = 0$. Comme $f'' = f \wedge f' \in F$, d'après (F_2), on a encore $f'' \wedge a = f'' \wedge b = 0$ et, le treillis étant distributif :

$$(a \vee b) \wedge f'' = (a \wedge f'') \vee (b \wedge f'') = 0$$

Mais cela entraine $a \vee b \notin F$, puisque F est stable pour $\wedge$ et ne contient pas 0. Donc tout ultra-filtre vérifie F_p.

Inversement, si a' est le complémentaire de a, on a $a \vee a' = \omega$ et cet élément appartient à tout filtre F. Donc, si F vérifie l'axiome (F_p), on aura soit $a \in F$ soit $a' \in F$, ce qui caractérise les ultra-filtres, comme on l'a vu, sous les hypothèses faites (treillis distributif et complémenté).

Mais dans le cas général d'un treillis quelconque (non nécessairement distributif et complémenté), les axiomes F_u et F_p cessent d'être équivalents. Plus précisément, nous démontrerons même plus loin qu'un treillis T est distributif et complémenté si et seulement si les axiomes F_u et F_p sont équivalents. Il convient donc de créer une terminologie :

DEFINITION - Nous dirons qu'un filtre F non vide est un filtre parfait si il vérifie l'axiome (F_p) ci-dessus, c'est-à-dire si son complémentaire est un antifiltre.

La seconde affirmation de cette définition se justifie immédiatement. En effet, le complémentaire d'une partie permise pour $\vee$ est toujours une partie permise pour $\wedge$, et $\complement F$ vérifie (A_3) pour tout filtre F. Si F vérifie (F_p), $a \in \complement F$ et $b \in \complement F$ entrainent $a \vee b \in \complement F$, de sorte que (A_2) est vérifié. Enfin, F étant non vide contient ω, de sorte que (A_1) est également satisfait par $\complement F$.

Il en résulte, en particulier, que la notion de filtre parfait est auto-duale : F est un filtre parfait si et seulement si son complémentaire $A = \complement F$ est un antifiltre parfait, i.e. un antifiltre vérifiant l'axiome :

$$(A_p) \qquad a \wedge b \in A \Rightarrow a \in A \text{ ou } b \in A$$

Au contraire, on l'a vu, la notion d'ultra-filtre n'est pas autoduale, et il n'y a nullement identité, dans le cas général, entre ultra-antifiltres et complémentaires d'ultra-filtres : cette identité apparaîtra, en fait, comme une condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis T soit distributif et complémenté.

SEPARATION PAR LES FILTRES

Dans un treillis T quelconque, la classe M_a des majorants d'un élément $a \neq 0$ de T est toujours un filtre, et la classe M^a des minorants d'un élément $a \neq \omega$ est un antifiltre. Il en résulte :

THEOREME 3 - Tout treillis T est séparé par les filtres qu'il contient (et aussi par ses antifiltres), i.e. : pour $a, a' \in T$ et $a \neq a'$, on peut trouver un filtre F avec $a \in F$ et $a' \notin F$, ou $a \notin F$ et $a' \in F$.

Cela résulte des équivalences :

$$M^a \subset M^{a'} \Leftrightarrow a < a'$$
$$M^{a'} \subset M^a \Leftrightarrow a > a'$$

Donc, si $a \neq a'$, l'une des inclusions de gauche est fausse. Si, par exemple, $M^a \not\subset M^{a'}$, soit $b \in M^a$, $b \notin M^{a'}$. Noter que $b \notin M^{a'}$ entraine $b \neq 0$ et donc que M_b est un filtre. On a alors $a > b$ et $a' \not> b$, c'est-à-dire : a appartient au filtre M_b, mais a' ne lui appartient pas.

Dans la suite de cette étude, nous examinerons deux autres modes de séparation possibles : séparation par les ultrafiltres, ou ultra-séparation, et séparation par les filtres parfaits, ou séparation parfaite, avec comme objectif de montrer les théorèmes suivants :

- Un treillis T est ultra-séparé si et seulement si l'équivalence d'influence se réduit à l'égalité (i.e. si un élément est univoquement déterminé par son domaine d'influence).
- Un treillis T est parfaitement séparé si et seulement si il est distributif.

Il sera commode de désigner par :

Φ_u la classe des ultra-filtres, et $\tilde{\Phi}_u = \Phi_u \cup \{T\}$

$\mathcal{A}_u$ la classe des ultra-antifiltres , et $\tilde{\mathcal{A}}_u = \mathcal{A}_u \cup \{T\}$

Φ_p la classe des filtres parfaits , et $\tilde{\Phi}_p = \Phi_p \cup \{T\}$

$\mathcal{A}_p$ la classe des antifiltres parfaits, et $\tilde{\mathcal{A}}_p = \mathcal{A}_p \cup \{T\}$

4 - L'EQUIVALENCE D'INFLUENCE ET L'ULTRA-SEPARATION

L'équivalence d'influence, ou, comme nous dirons pour abréger, l'équivalence D, est définie par :

$$a \equiv a' \quad \text{si} \quad D_a = D_{a'}$$

On peut lui associer le préordre D défini sur T par

$$a \rhd a' \quad \text{si} \quad D_a \supset D_{a'}$$

Ce préordre passe, par construction, au quotient et devient un ordre dans le treillis quotient T/D : si l'on note $\tilde{a} = \{a' : D_{a'} = D_a\}$ la classe modulo D d'un élément $a \in T$, l'ordre D sur T/D est défini par :

$$\tilde{a} > \tilde{a}' \text{ dans } T/D \quad \text{si} \quad D_a \supset D_{a'}$$

En général, l'application $a \to D_a$ et l'équivalence D ne sont pas propres. Cependant, nous allons voir que cette application et cette équivalence respectent toujours la structure d'Inf demi-treillis (mais non, en général, celle de Sup demi-treillis).

Pour le voir, partons de l'axiome (F_u) qui caractérise les ultra-filtres F_u comme des filtres respectant la condition supplémentaire :

$$(F_u) \qquad a \in F_u \Leftrightarrow F_u \subset D_a$$

Il en résulte :

<u>THEOREME 4-1</u> - Pour tout $a \neq 0$, <u>le domaine d'influence D_a est l'union des ultra-filtres contenant a.</u>

En effet, posant $D'_a = \bigcup \{F_u : F_u \in \Phi_u , a \in F_u\}$, l'axiome ci-dessus donne déjà $D'_a \subset D_a$. Inversement, soit $a' \in D_a$, i.e. $a' \wedge a \neq 0$. Il existe alors, comme on l'a vu, un filtre F et donc aussi un ultra-filtre F_u contenant a et a'. Par suite, on a $a' \in D'_a$ et $D_a \subset D'_a$. D'où l'égalité.

Considérons alors l'application $a \to D_a$. Il est clair que c'est une application <u>croissante</u> :

$$a < b \Rightarrow D_a \subset D_b \quad \text{i.e.} \quad a \lhd b \quad \text{ou} \quad \tilde{a} < \tilde{b}$$

D'autre part, d'après le théorème 4-1, la relation

$$D_a \subset D_b$$

équivaut à : tout ultra-filtre F_u contenant a contient aussi b. Contenant a et b, F_u, stable pour $\wedge$, contient alors aussi $a \wedge b$, et on a donc $D_a \subset D_{a \wedge b}$. L'inclusion inverse étant vraie, puisque l'application D est croissante, il en résulte $D_a = D_{a \wedge b}$. Inversement, cette dernière égalité implique $D_a \subset D_b$, et on a donc l'équivalence :

$$D_a \subset D_b \Leftrightarrow D_a = D_{a \wedge b}$$

Ainsi, dans les critères 2-2 et 2-3, les conditions relatives à l'Inf (mais non au Sup) sont respectées. Il en résulte :

<u>THEOREME 4-2</u> - L'application D et l'équivalence d'influence respectent la structure d'Inf demi-treillis. En particulier, pour $a, a', b \in T$:

$$D_a = D_{a'} \Rightarrow D_{a \wedge b} = D_{a' \wedge b}$$

$$D_b \subset D_a \cap D_{a'} \Leftrightarrow D_b \subset D_{a \wedge a'}$$

<u>COROLLAIRE 1</u> - Les classes modulo D sont stables pour $\wedge$, et pour tout $a \neq 0$ dans T la classe F_a des <u>D-majorants</u> de a :

$$F_a = \{ x : D_x \supset D_a \}$$

<u>est un filtre sur T.</u>

Rn effet, $a \equiv a'$ entrainant $a \wedge b \equiv a' \wedge b$, on trouve $a \equiv a' \wedge a$ avec $b = a'$. D'autre part, F_a est permis pour $\vee$, puisque l'application D est croissante, ne contient pas 0, puisque $D_o = \emptyset$ et $a \in D_a$ pour $a \neq 0$. Enfin $D_a \subset D_x \cap D_y$ entrainant $D_a \subset D_{x \wedge y}$, F_a est stable pour $\wedge$.

On peut considérer aussi la classe F^a des <u>D-minorants</u> de a :

$$F^a = \{x : D_x \subset D_a\}$$

D'après la seconde relation du Théorème 4-2, on voit que :

<u>COROLLAIRE 2</u> - Pour $a, a' \in T$, on a $F^a \cap F^{a'} = F^{a \wedge a'}$

Noter que l'on n'a pas, en général, l'égalité $F_a \cap F_{a'} = F_{a \vee a'}$, mais seulement l'inclusion $\supset$. En fait :

<u>CRITERE 4-1</u> - Pour que l'application D et l'équivalence d'influence soient propres, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

i) $D_a = D_{a'} \Rightarrow D_{a \vee b} = D_{a' \vee b}$ $(a, a', b \in T)$

ii) Pour tout $a \not\equiv \omega$, l'ensemble F^a des D-minorants de a est un antifiltre

iii) $F_a \cap F_{a'} = F_{a \vee a'}$ $(a, a' \in T)$

Compte tenu du théorème 4-2, la condition i) ne fait que compléter la condition des critères 2-2 et 2-3. Pour tout $a \in T$, F^a est permis pour $\wedge$ et ne contient pas ω si $D_a \neq D_\omega$ (D_ω est toujours $T \setminus 0$). F^a sera stable pour $\vee$, et donc un antifiltre si et seulement si $D_a \supset D_b \cup D_{b'}$ entraine $D_a \supset D_{b \vee b'}$ c.a.d. si et seulement si l'application D est propre. Cette condition équivaut encore à : $a \in F_b$ et $a \in F_{b'}$ entrainant $a \in F_{b \vee b'}$, i.e. $F_b \cap F_{b'} \subset F_{b \vee b'}$: comme l'inclusion inverse est toujours vraie, cela équivaut à iii).

<u>THEOREME 4-3</u> - Pour tout $a \in T$, $a \neq 0$, l'ensemble F_a des D-majorants de a est <u>l'intersection des ultra-filtres</u> qui le contiennent :

$$F_a = \cap \{F_u : F_u \in \Phi_u , a \in F_u\}$$

En effet, désignons par F'_a cette intersection. Si $x \in F'_a$, on a pour tout ultra-filtre F_u : $a \in F_u \Rightarrow x \in F_u$, c'est-à-dire, d'après l'axiome (F_u) : $F_u \subset D_a \Rightarrow F_u \subset D_x$. D'après le théorème 4-1, cela équivaut à $D_a \subset D_x$, c'est-à-dire à $x \in F_a$. Ainsi $F'_a = F_a$.

L'ULTRA-SEPARATION

Par définition, le treillis T est dit ultra-séparé, si, pour tout $a \neq a'$ dans T, on peut trouver un ultra-filtre séparant a et a' (i.e. $a \in F_u$ et $a' \notin F_u$, ou $a' \in F_u$, $a \notin F_u$). Si l'un des éléments, par exemple a', est nul, $a' = 0$, et non l'autre, il existe toujours un ultra-filtre F_u contenant a et non $a' = 0$. Nous pouvons donc nous limiter au cas $a \neq 0$ et $a' \neq 0$. Dire que ces éléments ne sont séparés par aucun ultra-filtre équivaut à dire qu'ils appartiennent aux mêmes ultra-filtres, donc, d'après le théorème 4-3, cela équivaut encore à $F_a = F_{a'}$.

Ainsi, le treillis T est ultra séparé si et seulement si $a \neq a'$ dans T entraine (et donc équivaut à) $F_a \neq F_{a'}$. Mais l'égalité $F_a = F_{a'}$ équivaut à son tour à $a \in F_{a'}$ et $a' \in F_a$, i.e. $D_a \supset D_{a'}$ et $D_{a'} \supset D_a$, soit encore à $a \equiv a'$ modulo D. Par suite, le treillis est ultra séparé si et seulement si $a \equiv a'$ modulo D équivaut à $a = a'$. Ainsi :

THEOREME 4-4 - (Ultra-séparation). Le treillis T est ultra-séparé si et seulement si l'équivalence modulo D se réduit à l'égalité (i.e. si tout $a \in T$ est univoquement déterminé par la donnée de son domaine D_a .)

CONDITION POUR QUE LE TREILLIS QUOTIENT T/D SOIT DISTRIBUTIF

Comme l'élément minimum 0 est le seul dont le domaine soit vide, $D_a = \emptyset$ équivaut à $a = 0$ et par suite la classe de 0 modulo D se réduit à 0, soit $\gamma = \{0\}$. Il en résulte que, si l'équivalence D est propre, le treillis quotient sera ultra-séparé. Nous allons maintenant chercher une condition pour que le treillis T/D soit de plus distributif. Pour abréger le langage, posons une définition :

DEFINITION - Une équivalence $\equiv$ sur un treillis T est dite distribuante si elle est propre, et si le treillis quotient est distributif.

Supposons donc que l'équivalence D soit distribuante. Cela implique pour a, a' et b quelconque dans T, la propriété suivante :

$$(A_0) \qquad a \wedge b = a' \wedge b = 0 \Rightarrow (a \vee a') \wedge b = 0$$

Cette propriété exprime que le <u>domaine d'étrangeté</u> E_b de l'élément $b \in T$ est stable pour $\vee$ (donc est un <u>antifiltre</u> si $b \neq \omega$: pour $b = \omega$, le domaine d'étrangeté $E_\omega = T$ est toujours stable pour $\vee$). Elle équivaut encore à $E_a \cap E_{a'} \subset E_{a \vee a'}$, donc à l'égalité, puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. En passant aux complémentaires, on voit donc que (A_0) équivaut à :

$$(A'_0) \qquad D_a \cup D_{a'} = D_{a \vee a'} \qquad (a, a' \in T)$$

Si l'équivalence D est distribuante, on a modulo D :

$$(a \vee a') \wedge b \equiv (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$$

et donc $a \wedge b = a' \wedge b = 0$ entraine $(a \vee a') \wedge b \equiv 0$, i.e. $(a \vee a') \wedge b = 0$ puisque la classe γ modulo D se réduit à $\{0\}$. La condition (A_0), ou, ce qui revient au même, (A'_0) est donc nécessaire pour que l'équivalence soit distribuante.

Inversement, supposons la condition (A'_0) vérifiée. Soient a, a', $b \in T$ avec $D_a = D_{a'}$. On a, d'après (A'_0) :

$$D_{a \vee b} = D_a \cup D_b = D_{a'} \cup D_b = D_{a' \vee b}$$

Donc, la condition i) du critère 4-1 est satisfaite, et l'équivalence D <u>est propre</u>.

Montrons maintenant que le treillis quotient T/D est distributif. Soient a, a', b et c dans T. D'après (A_0), écrit avec $b \wedge c$ au lieu de b, on a :

$$(a \vee a') \wedge b \wedge c \neq 0 \Rightarrow a \wedge b \wedge c \neq 0 \text{ ou } a' \wedge b \wedge c \neq 0$$

c'est-à-dire, compte tenu de (A'_0) :

$$D_{(a \vee a') \wedge b} \subset D_{a \wedge b} \cup D_{a' \wedge b} = D_{(a \wedge b) \vee (a' \wedge b)}$$

Cette inclusion est en fait une égalité, car on a toujours $(a \vee a') \wedge b > (a \wedge b) \vee (a' \wedge b)$ et donc l'inclusion inverse. Mais cette égalité exprime justement que T/D est distributif. D'où :

THEOREME 4-5 - Pour que l'équivalence d'influence D soit distribuante (i.e. qu'elle soit propre et que le treillis quotient soit distributif), il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit remplie dans T :

A_o $\quad a \wedge b = a' \wedge b = 0 \Rightarrow (a \vee a') \wedge b = 0$

A'_o $\quad D_a \cup D_{a'} = D_{a \vee a'}$

A''_o $\quad$ Pour tout $b \neq 0$, le domaine d'étrangeté E_b est un antifiltre.

Voici maintenant une quatrième condition qu'en raison de son intérêt nous énonçons sous forme de théorème indépendant.

THEOREME 4-6 - L'équivalence d'influence est distribuante si et seulement si tout ultra-filtre F_u est un filtre parfait, i.e. vérifie :

$$a \vee a' \in F_u \Rightarrow a \in F_u \quad \text{ou} \quad a' \in F_u$$

En effet, soit F_u un ultra-filtre. Si ni a, ni a' ne sont dans F_u, on peut trouver f et f' dans F_u avec $a \wedge f = a' \wedge f' = 0$ (axiome F'_u). Mais l'élément $f'' = f \wedge f'$ appartient à F_u, qui est stable pour $\wedge$, et on a a fortiori $a \wedge f'' = a' \wedge f'' = 0$. Si A_o est vrai, il en résulte $(a \vee a') \wedge f'' = 0$ et cela entraine $a \vee a' \notin F_u$. Donc A_o entraine la condition de l'énoncé.

Inversement, si $(a \vee a') \wedge b \neq 0$, il existe un ultra-filtre F_u contenant cet élément, et donc contenant aussi $a \vee a'$ et b. Si la condition de l'énoncé est satisfaite, cela entraine, par exemple, $a \in F_u$. Comme on a aussi $b \in F_u$, il vient $a \wedge b \in F_u$. Donc, $a \wedge b \neq 0$ et l'axiome A_o est vérifié.

L'APPLICATION α

Il sera commode dans la suite de désigner par $\alpha(B)$ la classe des éléments de T qui rencontrent tous les éléments $b \in B$ d'une partie B de T, soit :

<u>DEFINITION</u> - $$\alpha(B) = \bigcap_{b \in B} D_b = \{x : D_x \supset B\}$$

$\alpha(B)$ peut être vide : par exemple, si $0 \in B$, on a $D_o = \emptyset$ et $\alpha(B)$ est vide. Si $B = \emptyset$, au contraire, $\alpha(B) = T$.

On peut <u>itérer</u> l'opération α. Il vient :

(4-1) $$\alpha\alpha(B) = \bigcap_{x \in \alpha(B)} D_x = \bigcap \{D_x : D_x \supset B\}$$

Cette application itérée $\alpha\alpha$ est donc <u>une fermeture</u> sur $\mathcal{P}(T)$. En particulier $\alpha\alpha(B) \supset B$. Il est clair que l'on a :

$$B \subset B' \Rightarrow \alpha(B) \supset \alpha(B')$$

et, plus généralement, pour toute famille B_i finie ou non dans $\mathcal{P}(T)$:

(4-2) $$\alpha(\bigcup B_i) = \bigcap \alpha(B_i)$$

Autrement dit, $\beta\alpha$ est une <u>dilatation</u> sur $\mathcal{P}(T)$.

En particulier, $\alpha\alpha(B) \supset B$ entraine $\alpha\alpha\alpha(B) \subset \alpha(B)$. Mais l'inclusion inverse est vraie : avec $B' = \alpha(B)$, on a aussi $\alpha\alpha(B') \supset B'$. On a donc en fait l'égalité :

(4-3) $$\alpha \circ \alpha \circ \alpha = \alpha$$

Dans le cas où $B = F$ est <u>un filtre F</u>, chaque élément de F rencontre tous les autres, et on a donc $F \subset \alpha(F)$, ce qui implique aussi $\alpha(F) \supset \alpha\alpha(F)$. Donc, pour <u>tout filtre F</u>, on a

(4-4) $$F \subset \alpha\alpha(F) \subset \alpha(F)$$

En fait, $\alpha\alpha(F)$ est encore un filtre et, plus précisément, c'est <u>l'intersection de tous les ultra-filtres qui contiennent le filtre F</u>.

(4-5) $$\alpha\alpha(F) = \bigcap \{F_u : F_u \supset F\}$$

En effet, désignons par F' cette intersection et comparons-la avec l'ensemble

$$\alpha\alpha(F) = \bigcap \{D_x : D_x \supset F\}$$

On a vu à plusieurs reprises que $D_x \supset F$ si et seulement si il existe un ultra-filtre F_u contenant F et x, i.e. $F \subset F_u \subset D_x$ d'après (F_u). On a donc $F' \subset \alpha\alpha(F)$. Mais, inversement, si $F \subset F_u$ pour un ultra-filtre F_u, cela entraine $\alpha(F) \supset \alpha(F_u)$. Or :

Pour tout ultra-filtre F_u, on a :

$$F_u = \alpha(F_u)$$

et c'est là d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre F_u soit un ultra-filtre. En effet, d'après l'axiome (F_u), le filtre F_u est un ultra-filtre si et seulement si $x \in F_u$ équivaut à $D_x \supset F_u$, i.e. à $x \in \alpha(F_u)$.

Ainsi $F \subset F_u$ entraine $\alpha(F) \supset F_u$ et, à nouveau, $\alpha\alpha(F) \subset \alpha(F_u) = F_u$. Mais cela entraine $\alpha\alpha(F) \subset F'$.

En résumé :

THEOREME 4-7 - L'application α est décroissante sur $\mathcal{P}(T)$, $\beta\alpha$ est une dilatation, et $\alpha\alpha$ une fermeture. Pour tout filtre F, on a les inclusions :

$$F \subset \alpha\alpha(F) \subset \alpha(F)$$

et $\alpha\alpha(F)$ est l'intersection des ultra-filtres contenant F. Enfin, un filtre F_u est un ultra-filtre si et seulement si on a

$$F_u = \alpha(F_u)$$

REMARQUE : La fermeture $\alpha\alpha$ sur $\mathcal{P}(T)$ est le produit d'une dilatation par l'érosion duale. Car à la dilatation $\beta\alpha$ est associée par dualité l'érosion $\alpha\beta$ et $\alpha\alpha = \alpha\beta \circ \beta\alpha$.

Si $F = F_a$ est le filtre des D-majorants d'un élément $a \neq 0$ de T, on a par définition :

$$F_a = \{ x : D_x \supset D_a \} = \alpha(D_a)$$

Mais D_a est déjà lui-même de la forme :

$$D_a = \{ y : D_y \ni a \} = \alpha(\{ a \})$$

Donc $\alpha(F_a) = \alpha\alpha\alpha(\{a\}) = \alpha(\{a\}) = D_a$. Ainsi :

COROLLAIRE - Pour tout $a \in T$ on a :

(4-6) $$F_a = \alpha(D_a) \quad ; \quad D_a = \alpha(F_a)$$

En particulier, ce corollaire entraine $\alpha\alpha(F_a) = \alpha(D_a) = F_a$: on retrouve ainsi le théorème 4-3 comme conséquence du théorème précédent.

Voici encore un résultat utile :

THEOREME 4-8 - Pour tout filtre F dans un treillis T quelconque, on a :

$$F \subset D_a \cup D_{a'} \text{ si et seulement si } F \subset D_a \text{ ou } F \subset D_{a'}$$

En effet, si $F \not\subset D_a$ et $F \not\subset D_{a'}$, on peut trouver f et f' dans F avec $a \wedge f = a' \wedge f' = 0$. Mais; F étant un filtre, on a encore $f'' = f \wedge f' \in F$ et $a \wedge f'' = a' \wedge f'' = 0$, soit $f'' \notin D_a$ et $f'' \notin D_{a'}$, et donc $F \not\subset D_a \cup D_{a'}$.

COROLLAIRE 1 - Pour tout ultra-filtre F_u, on a :

$$F_u \subset D_a \cup D_{a'} \text{ si et seulement si } a \in F_u \text{ ou } a' \in F_u$$

car $F_u \subset D_a$ équivaut à $a \in F_u$.

Ces résultats ont d'ailleurs déjà été utilisés pour démontrer les théorèmes 4-5 et 4-6. On peut d'ailleurs réénoncer ces théorèmes sous la forme :

COROLLAIRE 2 - L'équivalence D est distribuante si et seulement si pour tout filtre F le complémentaire de $\alpha(F)$ est un antifiltre.

Si l'équivalence D est distribuante, on a $D_a \cup D_{a'} = D_{a \vee a'}$ et donc, d'après le théorème :

$$F \subset D_{a \vee a'} \Leftrightarrow F \subset D_a \text{ ou } F \subset D_{a'}$$

ce qui se réécrit $a \vee a' \in \alpha(F) \Leftrightarrow a \in \alpha(F)$ ou $a' \in \alpha(F)$: autrement dit, $\complement\,\alpha(F)$ est stable pour $\vee$. Comme il est toujours permis pour $\wedge$ et ne contient pas ω (qui appartient à $\alpha(F)$), c'est donc un antifiltre.

Réciproquement, si $\complement\,\alpha(F)$ est un antifiltre pour tout filtre F, on trouve, dans le cas d'un ultra-filtre F_u, que $\complement\,\alpha(F_u) = \complement\, F_u$ (Théorème 4-7) est un antifiltre, et donc F_u un filtre parfait. D'après le théorème 4-6, l'équivalence D est donc distribuante.

Appliquons ce corollaire au filtre F_a des D-majorants d'un élément $a \neq 0$ de T. Comme $\alpha(F_a) = D_a$, d'après (4-6), nous voyons que, si l'équivalence D est distribuante; E_a est un antifiltre : on retrouve ainsi la propriété A''_o du Théorème 4-5.

Examinons maintenant ce que devient $\alpha(A)$ lorsque $A \subset T$ est un antifiltre, ou, plus généralement, une partie permise pour $\wedge$. Comme $0 \in A$, $\alpha(A)$ est vide, et c'est plutôt $\alpha(A \setminus 0)$ qui présente de l'intérêt.

Pour tout $y \in T$, on désigne par M_y et M^y les classes des majorants et des minorants de y dans T. Comme un élément z rencontre un $x \in T$ si et seulement si il majore un minorant non nul de x (par exemple $x \wedge z$), on a toujours

$$D_x = \bigcup \{M_y,\ y \in M^x \setminus 0\}$$

Donc, d'après (4-2) et (4-6) :

$$F_x = \alpha(D_x) = \bigcap \{ \alpha(M_y) \ ;\ y \in M^x \setminus 0 \}$$

Mais $y \in M_y \subset F_y$ donne $\alpha(y) = D_y \supset \alpha(M_y) \supset \alpha(F_y) = D_y$, et donc

(4-7) $$\alpha(M_y) = D_y$$

et par suite :

$$F_x = \bigcap \{ D_y \ ;\ y \in M^x \setminus 0 \}$$

D'après la définition même de l'application α , cela veut dire :

(4-8) $$F_x = \alpha(M^x \setminus 0)$$

Ainsi la classe des éléments qui rencontrent tous les minorants non nuls de x s'identifie à la classe des D-majorants de x.

Si maintenant A est une partie permise quelconque de T, on a manifestement :

$$A \setminus 0 = \bigcup \{ M^x \setminus 0,\ x \in A \}$$

et donc, d'après (4-2) et (4-8) :

$$\alpha(A\setminus 0) = \bigcap \{ F_x \ : x \in A \}$$

$\alpha(A\setminus 0)$ coïncide donc avec la classe des éléments qui majorent modulo D tous les éléments de A. En particulier, si A admet modulo D un plus petit D-majorant x_o, $\alpha(A\setminus 0) = F_{x_o}$. De plus, comme F_x est un filtre pour $x \neq 0$, on voit que $\alpha(A\setminus 0)$ est un filtre dès que A contient au moins un élément non nul :

<u>THEOREME 4-9</u> - Pour toute partie $A \subset T$ permise pour $\wedge$ et contenant au moins un élément $\neq 0$, $\alpha(A\setminus 0)$ est un filtre, et, plus précisément, on a :

(4-9) $$\alpha(A\setminus 0) = \bigcap \{ F_x : x \in A\}$$

i.e. $\alpha(A\setminus 0)$ est la classe des D-majorants de l'ensemble A. En particulier, pour tout $x \in T$, on a :

(4-10) $$\alpha(M^x/0) = F_x$$

LE TREILLIS QUOTIENT T/D

Nous supposons maintenant que l'équivalence d'influence D est <u>propre</u> de sorte que le treillis quotient T/D est homomorphe à T. Les ultra-filtres F_u sur T, étant saturés pour l'équivalence D, passent au quotient. Dans un langage précis : si nous désignons par

(4-11) $$\tilde{F}_u = \{ \tilde{a} : a \in F_u \}$$

la famille des classes d'équivalence modulo D des éléments de F_u , $\tilde{F}_u$ est un ultra-filtre sur T/D.

Pour le montrer, on remarque d'abord que l'application $F \to \tilde{F}$, où

$$\tilde{F} = \{\tilde{x} : x \in F \}$$

fait se correspondre biunivoquement les filtres sur T/D et les filtres sur T saturés pour D (vérification immédiate). Donc $\tilde{F} \supset \tilde{F}_u$ entraine $F \supset F_u$ et par suite $F = F_u$, si F_u est un ultra-filtre sur T, et donc $\tilde{F} = \tilde{F}_u$: $\tilde{F}_u$ est un ultra-filtre sur T/D.

Inversement, d'ailleurs, tout ultra-filtre sur T/D est de la forme (4-11) pour un ultra-filtre F_u sur T. En effet, F_u est donné par :

$$F_u = \{x : x \in \tilde{x} \text{ pour un } \tilde{x} \in \tilde{F}_u\}$$

L'équivalence D étant propre, il est immédiat que F_u est permis pour $\vee$ et stable pour $\wedge$ et ne contient pas 0 (car $\tilde{0} \notin \tilde{F}_u$). C'est donc un filtre sur T et, par construction, un filtre saturé pour D. Si un filtre F sur T contient F_u, l'ensemble F', saturé de F par D, i.e. :

$$F' = \{ y : y \equiv x \text{ pour un } x \in F\}$$

est encore un filtre (elle est stable pour $\wedge$ et permise pour $\vee$, car l'équivalence D est propre, et ne contient pas 0, car $x \equiv 0$ modulo D entraine $x = 0 \in F$) et majore F_u. Il en résulte $\tilde{F}' \supset \tilde{F}_u$, et donc $\tilde{F}' = \tilde{F}_u$, puisque $\tilde{F}_u$ est ultra-filtre sur D, puis, F' étant saturé, $F' = F_u$: donc F_u est bien un ultra-filtre sur T.

En particulier, le treillis quotient est ultra-séparé : on a vu en effet que deux éléments a et a' de T sont non équivalents si et seulement si ils sont séparés par un ultra-filtre F_u sur T, donc si et seulement si les classes $\tilde{a}$ et $\tilde{a}' \in T/D$ sont séparées par un ultra-filtre $\tilde{F}_u$ sur T/D. En résumé :

<u>THEOREME 4-10</u> - Pour tout treillis T, la classe $\tilde{0}$ modulo D de l'élément minimum 0 est réduite à l'élément 0 : $\tilde{0} = \{0\}$. Si l'équivalence D est <u>propre</u>, le treillis quotient T/D est <u>ultra-séparé</u>, et de plus les formules :

$$\tilde{F} = \{ \tilde{x} : x \in F\} \quad ; \quad F = \{x : x \in \tilde{x} \text{ pour un } \tilde{x} \in \tilde{F}\}$$

établissent une correspondance biunivoque entre les filtres F saturés pour D sur T et les filtres $\tilde{F}$ sur T/D, et aussi entre les ultra-filtres F_u sur T et $\tilde{F}_u$ sur T/D.

En général, nous omettrons le signe $\sim$, et nous identifierons les filtres F saturés sur T avec leurs homologues $\tilde{F}$ sur T/D.

<u>L'HORIZON MODULO D</u>

Tous les résultats de ce chapitre ont leurs corollaires dans le treillis dual T* : il suffit, pour les obtenir, de renverser l'ordre < et de remplacer le domaine D_a par l'horizon H_a. Nous ne le ferons pas explicitement. Par contre, nous obtiendrons des résultats nouveaux en considérant l'horizon $H_{\tilde{a}}$ dans le treillis quotient T/D d'un élément $\tilde{a}$ de ce treillis. Il sera plus commode de considérer la contre-partie de $H_{\tilde{a}}$ dans T lui-même, qui est l'ensemble des b tels que la classe $\tilde{b}$ appartienne à $H_{\tilde{a}}$. Nous désignerons par U_a cet ensemble (qui ne dépend en réalité que de la classe $\tilde{a}$ modulo D) et nous dirons que U_a est <u>l'horizon modulo D</u> de l'élément $a \in T$. Explicitement :

$$U_a = \{ x : x \in T,\ x \vee a \not\equiv \omega \text{ modulo } D \}$$

Par définition $x \in U_a$ équivaut à $D_{x \vee a} \neq T \setminus 0$ (car $D_\omega = T \setminus 0$. Nous allons supposer que l'équivalence D est <u>distribuante</u>. D'après le théorème 4-5, on a $D_{x \vee a} = D_x \cup D_a$. Donc $x \notin U_a$ équivaut à $D_x \cup D_a = T \setminus 0$, ou $E_x \cap E_a = \{0\}$, ou encore $E_a \setminus 0 \subset D_x$. Mais cela équivaut à $x \in \alpha(E_a \setminus 0)$.

Ainsi le complémentaire de U_a, ou <u>Transcendance de a modulo D</u> est $\alpha(E_a \setminus 0)$. Nous le désignerons par V_a :

$$V_a = \alpha(E_a \setminus 0)$$

D'après le théorème 4-9, V_a est un filtre et, plus précisément, on a :

$$V_a = \bigcap \{ F_x : x \in E_a \}$$

On a vu (Théorème 4-3) que pour $x \neq 0$, F_x est l'intersection des ultra-filtres F_u qui le contiennent. Or $F_u \supset F_x$ et $x \in E_a$, c'est-à-dire $a \notin D_x$ entrainent $a \notin F_u$ (car $x \in F_x$ donc $x \in F_u$ donne $F_u \subset D_x$). Inversement, $a \notin F_u$ c'est-à-dire $F_u \not\subset D_a$ entraine qu'il existe un élément $x \in F_u \cap E_a$, c'est-à-dire $x \in E_a$ et $F_x \subset F_u$. On conclut donc :

$$V_a = \bigcap \{ F_u : F_u \in \Phi_u,\ a \notin F_u \}$$

Alors que F_a est l'intersection des ultra-filtres qui contiennent l'élément a, la transcendance modulo D est l'intersection des ultra-filtres qui ne le contiennent pas. En résumé :

THEOREME 4-11 - Soit T un treillis dans lequel l'équivalence d'influence D est distribuante. Pour tout $a \in T$, la transcendance de a modulo D, i.e. l'ensemble

$$V_a = \{ x : x \vee a \equiv \omega \text{ modulo } D \}$$

est un filtre sur T (ou le pseudo-filtre trivial T si $a \equiv \omega$). Plus précisément, on a :

$$V_a = \cap \{ F_x, x \in E_a \} = \alpha(E_a \setminus 0)$$

et de plus V_a est l'intersection des ultra-filtres qui ne contiennent pas a :

$$V_a = \cap \{ F_u : F_u \in \Phi_u, a \notin F_u \}$$

TREILLIS BOOLEENS

On a déjà remarqué qu'un treillis booléen (i.e. distributif et complémenté) est nécessairement ultra-séparé. Nous cherchons maintenant une condition pour qu' un treillis ultra-séparé soit booléen, ou, plus généralament, pour que le treillis quotient T/D soit booléen. T/D devant être distributif, nous pouvons utiliser le théorème 4-11. On note que, par construction, le domaine d'étrangeté $E_{\tilde{a}}$ d'un élément $\tilde{a} \in T/D$ est identique à l'ensemble des classes d'équivalences $\tilde{b}$ des $b \in E_a$ où a est un élément quelconque de la classe $\tilde{a}$. On peut donc identifier $E_{\tilde{a}}$ et E_a , et travailler dans T modulo D plutôt que dans T/D. En particulier, il en résulte aussitôt que T/D sera complémenté si et seulement si pour tout $a \in T$ le domaine d'étrangeté E_a et la transcendance modulo D, soit V_a de cet élément ont une intersection non vide - cette intersection étant alors réduite à une classe unique modulo D, à cause de la distributivité du treillis quotient :

$$T/D \text{ complémenté} \Leftrightarrow E_a \cap V_a \neq \emptyset, \quad \forall a \in T$$

Si cette condition est remplie, soit :

$$E_a \cap V_a = \tilde{a}' \neq \emptyset$$

où $\tilde{a}'$ est la classe unique complémentaire de $\tilde{a}$ dans T/D, $\tilde{a}'$ est la classe des plus grands éléments modulo D de E_a, et aussi la classe des plus petits éléments modulo D de V_a.

Inversement, d'ailleurs, si E_a admet une plus grande classe $\tilde{a}'$ modulo D; $\tilde{a}'$ est complémentaire de a dans T/D. Car, pour un $a' \in \tilde{a}'$, on a alors $V_a = F_{a'}$, et donc $a' \in V_a \cap E_a$.

On peut encore formuler cela autrement. Si T/D n'est pas complémenté, il existe au moins un $a \in T$ avec $V_a \cap E_a = \emptyset$, soit $V_a \subset D_a$. Mais, V_a étant un filtre, le fait que a rencontre tous les éléments de V_a entraine l'existence d'un ultra-filtre F_u contenant a et V_a, c'est-à-dire :

$$V_a \subset F_u \subset D_a$$

Comme $F_u \subset D_a$ équivaut à $a \in F_u$, nous voyons qu'inversement on aura $V_a \cap E_a \neq \emptyset$ (i.e. : a admet un complément modulo D) si et seulement si pour tout ultra-filtre F_u :

$$V_a \subset F_u \Rightarrow a \notin F_u$$

Cette implication est alors d'ailleurs, en fait, une équivalence, puisque, d'après la dernière formule du Théorème 4-11, V_a est l'intersection des ultra-filtres qui ne contiennent pas a. D'où un premier résultat :

<u>LEMME 4-1</u> - L'équivalence D étant distribuante, un élément $a \in T$ admet un complément modulo T, i.e. $E_a \cap V_a \neq \emptyset$, si et seulement si pour tout ultra-filtre F_u on a l'équivalence :

$$F_u \supset V_a \Leftrightarrow a \notin F_u$$

Pour toute partie B de T, posons :

$$R(B) = \bigcup \{ V_a : a \notin B \} \qquad (4\text{-}12)$$

On a $y \notin R(B)$ si et seulement si $a \notin B$ entraine $y \notin V_a$, i.e. $a \notin V_y$ (la relation $y \in V_a$ signifiant $a \vee y \equiv \omega$ est symétrique). Mais cela équivaut à $V_y \subset B$. Ainsi

$$V_y \subset B \Leftrightarrow y \notin R(B)$$

Si nous prenons pour B un ultra-filtre F_u , nous trouvons :

$$F_u \supset V_a \Leftrightarrow a \notin R(F_u)$$

Ainsi, d'après le lemme, T/D est <u>complémenté si et seulement si $F_u = R(F_u)$</u> pour tout ultra-filtre F_u. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

<u>THEOREME 4-12</u> - L'équivalence D étant distribuante, le treillis quotient T/D est booléen (i.e. distributif et complémenté) si et seulement si le complémentaire de tout ultra-filtre est un ultra-antifiltre modulo D.

En effet, soit F_u un ultra-filtre, et $A_u = \complement F_u$ son complémentaire. Nous savons, d'après le Théorème 4-6, que A_u est un antifiltre, puisque D est distribuante. A_u est d'ailleurs saturé pour D, comme son complémentaire F_u , et s'identifie à un antifiltre sur T/D.

Pour que cet antifiltre saturé A_u soit un ultra-antifiltre modulo D, il faut et il suffit que l'on ait :

$$b \notin A_u \Rightarrow \nexists\, a \in A_u : a \vee b \equiv \omega$$

c'est-à-dire :

$$b \in F_u \Rightarrow b \in \bigcup \{V_a \ , a \notin F_u\} = R(F_u)$$

donc enfin, avec la notation (4-12)

$$F_u \subset R(F_u)$$

Mais, d'après la dernière relation du Théorème 4-11, $a \notin F_u$ entraine $F_u \supset V_a$ et donc $F_u \supset R(F_u)$. Par suite, l'inclusion $F_u \subset R(F_u)$ équivaut à l'égalité $F_u = R(F_u)$ et nous avons vu que cela équivaut à T/D complémenté.

5 - LA SEPARATION PARFAITE

Rappelons qu'un filtre F est parfait s'il vérifie l'axiome

$$(F_p) \qquad a \vee a' \in F \Rightarrow a \text{ ou } a' \in F$$

c'est-à-dire si son complémentaire dans T est un antifiltre.

DEFINITION - Nous dirons qu'un treillis T est parfaitement séparé si pour a, a' $\in$ T et a $\neq$ a', il existe un filtre parfait F séparant a et a' (i.e. a $\in$ F et a' $\notin$ F, ou a $\notin$ F et a' $\in$ F)

Notre objectif est d'établir le théorème suivant :

THEOREME 5-1 (séparation parfaite) - Un treillis T est distributif si et seulement si il est parfaitement séparé.

Nous allons pour cela poser d'abord quelques lemmes. On sait que la classe Φ des filtres, et aussi la classe $\mathcal{A}$ des antifiltres sont inductives pour $\uparrow$. Plus généralement, d'ailleurs, pour un filtre F et un antifiltre A disjoints ($A \cap F = \emptyset$) la classe des filtres contenant F et disjoints de A, et aussi celle des antifiltres contenant A et disjoints de F, sont inductives pour $\uparrow$. Ces classes contiennent donc des éléments maximaux (Théorème de Zorn).

Si F_M est un filtre maximal disjoint de l'antifiltre A, on a :

$$(5\text{-}1) \qquad b \notin F_M \Rightarrow \exists\, f \in F_M \text{ tel que } b \wedge f \in A$$

En effet, si $b \wedge f = 0$ pour un $f \in F_M$, on a $b \wedge f \in A$ puisque $0 \in A$. Supposons donc $b \wedge f \neq 0$ quel que soit $f \in F_M$, i.e. $b \in \alpha(F_M)$. Il existe alors un plus petit filtre F' contenant b et F_M , i.e. :

$$F' = \bigcup \{ M_{b \wedge f} \ , \ f \in F_M \}$$

Mais, par hypothèse, F_M est un filtre maximal disjoint de A. Donc F' rencontre A. Ainsi, il existe $a_o \in A$ et $f \in F_M$ avec $a_o > b \wedge f$: mais cela entraine $b \wedge f \in A$, puisque A est permis pour $\wedge$.

Réciproquement, la condition (5-1) entraine qu'il ne peut pas exister de filtre F disjoint de A et contenant strictement F_M : elle caractérise donc la maximalité de F_M .

De même, il existe un antifiltre maximal A_M disjoint de F et contenant A. Il sera caractérisé par la condition duale de (5-1) :

(5-2) $$b \notin A_M \Rightarrow \exists\, a \in A_M \text{ tel que } a \vee b \in F$$

On peut aussi construire d'abord un filtre maximal F_M contenant F et disjoint de A, puis un antifiltre maximal A_M contenant A et disjoint de F_M (et non plus de F). Alors F_M est a fortiori maximal parmi les filtres disjoints de A_M. Ainsi :

<u>LEMME 5-1</u> - Pour tout filtre F et tout antifiltre A disjoints dans un treillis quelconque, on peut trouver un filtre $F_M \supset F$ et un antifiltre $A_M \supset A$ <u>disjoints</u> et vérifiant les conditions de maximalité :

$$\begin{cases} b \notin F_M \Rightarrow \exists\, f \in F_M : b \wedge f \in A_M \\ b \notin A_M \Rightarrow \exists\, a \in A_M : b \vee a \in F_M \end{cases}$$

Supposons maintenant le treillis T <u>distributif</u>. Alors le filtre F_M et l'antifiltre A_M maximaux disjoints sont <u>complémentaires</u> dans T : $A_M \cup F_M = T$, $A_M \cap F_M = \emptyset$.

En effet, supposons qu'il existe un élément b n'appartenant ni à F_M ni à A_M. D'après le lemme 5-1, on peut alors trouver un élément $a \in A_M$ et un élément $f \in F_M$ avec :

$$b \wedge f \in A_M \quad \text{et} \quad b \vee a \in F_M$$

A_M étant stable pour $\vee$ et F_M pour $\wedge$, on en déduit :

$$(b \wedge f) \vee a \in A_M \quad \text{et} \quad (b \vee a) \wedge f \in F_M$$

Mais T est distributif par hypothèse, et on a donc :

$$(b \vee a) \wedge f = (b \wedge f) \vee (a \wedge f)$$

et cet élément appartient à A_M , puisque $b \wedge f \in A_M$, $a \wedge f \in A_M$ (permis $\wedge$)

et que A_M est stable pour $\vee$. Mais cela contredit $(b \vee a) \wedge f \in F_M$

On conclut donc $F_M \cup A_M = T$. Ainsi :

<u>LEMME 5-2</u> - Avec les mêmes notations que dans le lemme 5-1, si le treillis T est <u>distributif</u>, alors F_M et A_M sont complémentaires dans T, i.e. : F_M est un <u>filtre parfait</u>.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 5-1.

On a vu (Théorème 3-1) que deux éléments $a \neq a'$ dans un treillis T sont contenus, l'un dans un filtre F, l'autre dans un antifiltre A disjoints : par exemple $a \in M_a$ et $a' \in M^{a'}$ avec $M_a \cap M^{a'} = \emptyset$ si $a \nless a'$, ou au contraire $a \in M^a$ et $a' \in M_{a'}$, avec $M^a \cap M_{a'} = \emptyset$ si $a < a'$. Supposons par exemple

$$a \in F \quad , \quad a' \in A \quad \text{et} \quad A \cap F \text{ disjoints}$$

Si T est distributif, il existe alors d'après le lemme 5-2 un filtre parfait F_M tel que $F_M \supset F$ et $F_M \cap A = \emptyset$: donc le treillis T est parfaitement séparé.

Inversement, supposons maintenant le treillis T parfaitement séparé, et soient a, b, c des éléments de T. On a toujours

$$(a \vee b) \wedge c > (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Supposons l'inégalité stricte : ces deux éléments sont donc séparés par un <u>filtre parfait</u> F, avec nécessairement

$$(a \vee b) \wedge c \in F \quad \text{et} \quad (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \notin F$$

(l'autre combinaison est exclue , car si le plus petit élément appartient à F l'autre est aussi dans F).

Mais $(a \vee b) \wedge c \in F$ entraine $c \in F$ (permis pour $\vee$) et de même $(a \vee b) \in F$. Comme F est parfait, $a \vee b \in F$ implique à son tout a ou $b \in F$ (supposons par exemple, $a \in F$. Comme on a $c \in F$, il vient alors $a \wedge c \in F$ (stable $\wedge$) et par suite $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \in F$ (permis $\vee$). Mais cela contredit le point de départ $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) \notin F$. On conclut donc que l'inégalité stricte est impossible, i.e. :

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

et le treillis T est distributif.

COROLLAIRE - Pour qu'un treillis T soit distributif, il faut et il suffit que tout filtre F et tout antifiltre A disjoints soient séparés par un filtre parfait F_M , i.e. $F_M \supset F$ et $F_M \cap A = \emptyset$.

Cela est nécessaire, d'après le lemme 5-2, et suffisant, d'après le théorème (puisque la condition du corollaire implique la séparation parfaite).

LES TREILLIS BOOLEENS

Les résultats précédents permettent de caractériser les treillis booléens :

THEOREME 5-2 - Un treillis distributif T est complémenté si et seulement si tout filtre parfait est un ultra-filtre, ou encore si et seulement si tout antifiltre parfait est un ultra-antifiltre.

Noter que, T étant distributif, la condition de l'énoncé équivaut à l'identité des classes Φ_p et Φ_u (des filtres parfaits et des ultra-filtres), ou encore à $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_u$: en effet, tout treillis distributif vérifie l'axiome A_0 , et les Théorèmes 4-5 et 4-6 montrent que tout ultra-filtre est un filtre parfait.

Supposons T distributif et complémenté. Soit a un élément de T et a^c son complément. On a $\vee$ $a^c = \omega \in F$ pour tout filtre F. Si F est un filtre parfait, on a donc soit $a \in F$, soit $a^c \in F$. Mais cette relation caractérise les ultra-filtres.

Inversement, si tout filtre parfait est un ultra-filtre, le treillis distributif est ultra-séparé puisqu'il est parfaitement séparé (Théorème 5-1), et on a donc $D_a = D_b$ si et seulement si a = b (Théorème 4-4). En particulier, la transcendance V_a modulo D du Théorème 4-11 ne diffère pas de T_a .

Soit alors a un élément sans complémentaire, c'est-à-dire $a \neq \omega$ (car ω a pour complémentaire 0) et

$$a \notin T_a \ , \quad E_a \cap T_a = \emptyset$$

Pour tout $b \in T$, $a \vee b \in T_a$ équivaut manifestement à $b \in T_a$ (i.e. à $a \vee b = \omega$). Ainsi, pour tout $b \in E_a$ on a $a \vee b \notin T_a$, soit $a \vee b \neq \omega$, puisque $E_a \cap T_a$ est vide. Mais cela signifie qu'il existe un antifiltre A contenant a et E_a et disjoint du filtre T_a ($= V_a$). D'après le corollaire du Théorème 5-1, il existe donc un filtre parfait F contenant T_a et disjoint de A, donc tel que $a \notin F$ et $E_a \cap F = \emptyset$. Mais tout filtre parfait est un ultrafiltre par hypothèse. Comme a n'appartient pas à l'ultrafiltre F, il existe un $b \in F$ avec $b \wedge a = 0$, c'est-à-dire $b \in E_a$. Mais cela contredit $E_a \cap F = \emptyset$.

On conclut donc $E_a \cap T_a \neq \emptyset$, i.e. T est complémenté.

COROLLAIRE - Un treillis T distributif est complémenté si et seulement si le complémentaire de tout ultra-filtre est un ultra-antifiltre, ou encore si et seulement si le complémentaire de tout ultra-antifiltre est un ultra-filtre.

Ce résultat, déjà obtenu plus haut, se redémontre ainsi : si T est distributif, tout ultra-filtre est parfait (Théorèmes 4-5 et 4-6), et par dualité tout ultra-antifiltre est un antifiltre parfait. Mais si T est de plus complémenté, il y a identité entre Φ_p et Φ_u, et aussi entre $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{A}_u$. Comme $F \in \Phi_p$ équivaut à $\complement F \in \mathcal{A}_p$, on a aussi $F \in \Phi_u \Leftrightarrow \complement F \in \mathcal{A}_u$.

Inversement, soit F un filtre parfait et F_u un ultra-filtre contenant F, et donc $A_u = \complement F_u \subset \complement F$. Sous la condition de l'énoncé, Au est un ultra-antifiltre. Mais $\complement F$ est un antifiltre, puisque F est parfait, et $A_u \subset \complement F$ entraine donc $A_u = \complement F$, c'est-à-dire $F_u = F$. Donc tout filtre parfait est un ultra-filtre, et le treillis est complémenté d'après le Théorème 5-2.

LES EQUIVALENCES DISTRIBUANTES

Rappelons qu'une équivalence $\equiv$ sur un treillis T est distribuante si elle est propre et si le treillis quotient est distributif. Nous appellerons <u>noyau</u> d'une équivalence $\equiv$ sur T la classe $\tilde{0}$ de 0 modulo $\equiv$: il est immédiat que le noyau $\tilde{0}$ d'une équivalence distribuante est permis pour $\wedge$ et stable pour $\vee$. Si l'équivalence n'est pas triviale (i.e. réduite à la classe unique T), on a $\omega \notin \tilde{0}$ et <u>le noyau est un antifiltre</u>.

Cherchons donc à quelle condition un antifiltre donné A_o est le noyau d'une (ou plusieurs) équivalence distribuante.

THEOREME 5-3 - Soit T un treillis non nécessairement distributif, et A_o un antifiltre sur T. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) L'antifiltre A_o vérifie l'axiome (A) suivant :

$$\text{(A)} \quad a \wedge x \in A_o \quad \text{et} \quad a' \wedge x \in A_o \Rightarrow (a \vee a') \wedge x \in A_o \quad (a,a',x \in T)$$

ii) A_o est l'intersection des antifiltres parfaits qui le contiennent :

$$A_o = \bigcap \{ A_p : A_p \in \mathcal{A}_p \ , \ A_p \supset A_o \}$$

iii) Il existe au moins une équivalence distribuante sur T admettant le noyau A_o.

Montrons d'abord ii) $\Rightarrow$ i). Soient $a \wedge x \in A_o$ et $a' \wedge x \in A_o$. Pour chaque antifiltre parfait $A_p \supset A_o$, on a $a \wedge x \in A_p$ et donc a ou $x \in A_p$, et de même $a \wedge x \in A_p$ et donc a' ou $x \in A_p$. Si $x \in A_p$, on a $(a \vee a') \wedge x \in A_p$ (permis $\wedge$). Si $x \notin A_p$, il faut alors $a \in A_p$ et $a' \in A_p$, donc $a \vee a' \in A_p$ (stable $\vee$) et à nouveau $(a \vee a') \wedge x \in A_p$. Comme A_o est l'intersection des $A_p \supset A_o$ on a encore $(a \vee a') \wedge x \in A_o$ et i) est vérifié.

Montrons i) $\Rightarrow$ ii). Soit A_o un antifiltre vérifiant l'axiome (A) . Pour tout $x \notin A_o$, Il existe un filtre maximal F_M contenant x et disjoint de A_o (lemme 5-1). D'après les conditions de maximalité du lemme 5-1, nous voyons que :

si $a \notin F_M$, il existe $f \in F_M$ tel que $f \wedge a \in A_o$

si $a' \notin F_M$ il existe $f' \in F_M$ tel que $f' \wedge a' \in A_o$

Mais $f'' \in f \wedge f'$ est dans F_M , et a fortiori $f'' \wedge a \in A_o$ et $f'' \wedge a' \in A_o$ (A_o étant permis $\wedge$). D'après l'axiome (A) , cela entraine

$$(a \vee a') \wedge f'' \in A_o$$

et par suite $a \vee a' \notin F_M$ (sinon on aurait $(a \vee a') \wedge f'' \in F_M$, stable $\wedge$, et cela contredirait $F_M \cap A_o = \emptyset$). Par suite F_M est un filtre parfait. Son complémentaire $A_M = \complement F_M$ est donc un antifiltre parfait et contient A_o. On a ainsi montré que pour tout $x \in A_o$ il existe un antifiltre parfait $A_M \supset A_o$ tel que $x \notin A_M$: ii) est donc démontré.

Montrons maintenant qu'i) ou ii) $\Rightarrow$ iii).

Pour cela, nous allons construire effectivement une équivalence distribuante admettant le noyau A_o .

Pour chaque $a \in T$, considérons son domaine modulo A_o défini par :

$$\tilde{D}_a = \{ x : a \wedge x \notin A_o \}$$

et considérons sur T l'équivalence $\tilde{D}$ définie par :

$$a \equiv a' \quad \text{si} \quad \tilde{D}_a = \tilde{D}_{a'}$$

Montrons que cette équivalence $\tilde{D}$ est propre, en utilisant le critère 2-3.

Soit $\tilde{D}_a = \tilde{D}_{a'}$ et $b \in T$. On a $x \notin \tilde{D}_{a\wedge b}$ si $a \wedge b \wedge x \in A_o$, i.e. $b \wedge x \notin \tilde{D}_a = \tilde{D}_{a'}$. Donc $x \notin \tilde{D}_{a\wedge b}$ équivaut à $x \notin \tilde{D}_{a'\wedge b}$, et $\tilde{D}_{a\wedge b} = \tilde{D}_{a'\wedge b}$.

De même $x \in \tilde{D}_{a\vee b}$ signifie $(a \vee b) \wedge x \notin A_o$ et entraine, d'après l'axiome (A) , $a \wedge x \notin A_o$ ou $b \wedge x \notin A_o$, donc soit $x \in \tilde{D}_a = \tilde{D}_{a'}$, soit $x \in \tilde{D}_b$, c'est-à-dire $x \in \tilde{D}_{a'} \cup \tilde{D}_b$. Mais on a manifestement $\tilde{D}_{a'} \cup \tilde{D}_b \subset \tilde{D}_{a'\vee b}$. Par suite, on a $\tilde{D}_{a\vee b} \subset \tilde{D}_{a'\vee b}$. L'inclusion inverse se démontre de la même façon, d'où l'égalité : la relation d'équivalence $\tilde{D}$ est donc propre.

Passant au quotient modulo $\tilde{D}$, nous obtenons un treillis $T/\tilde{D}$ ultra-séparé (car $\tilde{D}_a = \tilde{D}_{a'}$ définit justement l'égalité $\tilde{a} = \tilde{a}'$ dans le treillis quotient, et le Théorème 4-4 montre l'ultra-séparation) et l'axiome (A) du treillis initial entraine l'axiome (A_o) dans le treillis quotient : comme ce treillis quotient est déjà ultra-séparé, le Théorème 4-5 montre que $T/\tilde{D}$ est distributif.

Enfin iii) $\Rightarrow$ i) : en effet, si $\equiv$ est une équivalence distribuante et A_o son noyau, on a

$$(a \vee a') \wedge x \equiv (a \wedge x) \vee (a' \wedge x)$$

Donc, si $a \wedge x \equiv a' \wedge x \equiv 0$, on a aussi $(a \vee a') \wedge x \equiv 0$ et l'axiome (A) est vérifié.

COROLLAIRE 1 - Un treillis T est distributif si et seulement si tous les antifiltres vérifient l'axiome (A) .

Cela est nécessaire, car si T est distributif, $(a \vee a') \wedge x = (a \wedge x) \vee (a' \wedge x)$ appartient à l'antifiltre A (stable pour $\vee$) dès que $a \wedge x$ et $a' \wedge x \in A$. Cela est suffisant : car, pour tout $y \in T$ $(y \neq \omega)$, M^y est un antifiltre, et (A) entraine donc :

$$a \wedge x \in M^y \quad \text{et} \quad a' \wedge x \in M^y \Rightarrow (a \vee a') \wedge x \in M^y$$

pour tout $y \neq \omega$. (Mais pour $y = \omega$, $M^y = T$ et l'implication subsiste). En prenant $y = (a \wedge x) \vee (a' \wedge x)$, cela entraine donc

$$(a \vee a') \wedge x < (a \wedge x) \vee (a' \wedge x)$$

et donc l'égalité : T est distributif.

COROLLAIRE 2 - Un filtre F est l'intersection des filtres parfaits qui le contiennent si et seulement si il vérifie l'axiome

(F) $\quad a \vee x \in F \quad \text{et} \quad a' \vee x \in F \Rightarrow (a \wedge a') \vee x \in F$

se déduit du théorème par dualité.

Nous verrons dans un instant que, parmi les équivalences distribuantes admettant le noyau A_o , il en existe une plus fine et une moins fine que les autres. La moins fine est en fait l'équivalence $\tilde{D}$ que nous avons utilisée dans la démonstration du Théorème 5-3. Dans le cas où T est distributif, la plus fine se laisse caractériser facilement.

THEOREME 5-4 - Si T est distributif, tout antifiltre A_o est le noyau d'une équivalence distribuante, et, parmi les équivalences distribuantes admettant le noyau A_o , il en existe une plus fine que les autres, qui se définit comme suit :

$$a \equiv a' \quad \text{si} \quad a \vee z = a' \vee z' \quad \text{pour un } z \text{ et un } z' \text{ dans } A_o$$

La première affirmation découle du fait que tout antifiltre A_o dans un treillis distributif vérifie l'axiome (A) . Montrons maintenant que la relation $a \equiv a'$ est effectivement une équivalence. Soit en effet $a \equiv a'$ et $a' \equiv a''$ i.e.

$$a \vee z = a' \vee z' \quad \text{et} \quad a' \vee z'_1 = a'' \vee z'' \qquad (z, z', z'_1 \text{ et } z'' \in A_o)$$

On en déduit : $\qquad a \vee z \vee z'_1 = a' \vee z'_1 \vee z' = a'' \vee z'' \vee z'$,

et donc $\qquad a \equiv a''$, car $z \vee z'_1$ et $z'' \vee z' \in A_o$

Montrons que cette équivalence est propre. Soit $a \equiv a'$, i.e. $a \vee z = a' \vee z'$, z et $z' \in A_o$ et $b \in T$.

De $a \vee b \vee z = a' \vee b \vee z'$ résulte $a \vee b \equiv a' \vee b$

Ensuite, avec $z'' = z \vee z' \in A_o$, il vient :

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee z'' &= (a \vee z'') \wedge (b \vee z'') = (a' \vee z'') \wedge (b \vee z'') \\ &= (a' \wedge b) \vee z''\end{aligned}$$

et donc $a \wedge b \equiv a' \wedge b$, et l'équivalence est propre.

Enfin, l'équivalence est distribuante, puisqu'elle est propre et que le treillis T est déjà distributif.

Enfin, pour toute autre équivalence propre de noyau A_o , la classe d'un élément a contient nécessairement les éléments $a \vee z$, $z \in A_o$. Donc, si $b = a \vee z = a' \vee z'$ avec $z, z' \in A_o$, b est équivalent à a et à a', de sorte que a et a' sont eux-mêmes équivalents : par suite l'équivalence définie dans l'énoncé est la plus fine parmi les équivalences propres admettant le noyau A_o.

L'ESPACE Φ_p DES FILTRES PARFAITS

En fait, toute partition distribuante se laisse identifier à un sous-espace de Φ_p. Soit, en effet, $\equiv$ une équivalence distribuante : le treillis quotient $T/\equiv$ est parfaitement séparé, et les filtres parfaits $\tilde{F}_p$ de $T/\equiv$ s'identifient aux filtres parfaits de T saturés pour $\equiv$ (vérification immédiate). Ainsi, la classe $\tilde{x}$ modulo $\equiv$ d'un élément $x \in T$ est exactement égale à l'intersection des filtres parfaits et des antifiltres parfaits saturés pour $\equiv$ qui contiennent l'élément x. Naturellement, un filtre parfait est saturé en même temps que son complémentaire. Si donc on désigne par $\mathcal{E}$ la classe des filtres parfaits saturés par $\equiv$, on aura pour tout $x \in T$:

$$(5\text{-}3) \qquad \tilde{x} = \cap \{ F_p : F_p \in \mathcal{E}, F_p \ni x \} \bigcap \cap \{ \complement F_p : F_p \in \mathcal{E}, F_p \not\ni x \}$$

Inversement, on peut choisir une partie $\mathcal{E} \subset \Phi_p$ arbitraire et définir une équivalence par la formule (5-3) ci-dessus. Cela revient à poser :

$$a \equiv a' \quad \text{si} \quad a \in F_p \Leftrightarrow a' \in F_p \quad \text{pour tout} \quad F_p \in \mathcal{E}$$

et il est très facile de vérifier que cette équivalence est effectivement distribuante.

Noter que l'on pourra obtenir la même équivalence pour deux parties $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ distinctes de Φ_p. Car pour $\mathcal{E} \subset \Phi_p$ donné, les filtres parfaits saturés pour $\equiv$ constituent, en général, une classe $\hat{\mathcal{E}}$ plus grande que le choix $\mathcal{E}$ initial. Mais, en remplaçant $\mathcal{E}$ par $\hat{\mathcal{E}}$, on retrouve évidemment la même équivalence. Autrement dit, l'application

$$\mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}}$$

est une <u>fermeture</u> sur Φ_p.

Ainsi, parmi toutes les équivalences distribuantes, il y en a une qui est <u>plus fine</u> que toutes les autres : elle correspond au choix $\mathcal{E} = \Phi_p$ entier. On peut alors, sans changer Φ_p, remplacer le treillis T initial par le <u>treillis T' distributif</u> obtenu en passant au quotient par cette équivalence, la plus fine. Le Théorème 5-4 montre alors que, pour un antifiltre A'_o quelconque sur T' (qui correspond à un antifiltre A_o sur T vérifiant la condition (A) du Théorème 5-3), il existe une plus fine équivalence admettant ce noyau A'_o sur T' (ou aussi bien A_o sur T).

Plaçons-nous maintenant dans le cas où T est <u>distributif</u>, donc parfaitement séparé. On peut alors identifier chaque élément $a \in T$ à la famille

$$\mathcal{E}_a = \{ F_p \quad F_p \in \Phi_p , a \in F_p \}$$

des filtres parfaits qui le contiennent : réciproquement, on aura :

$$M_a = \cap \{ F_p : F_p \in \mathcal{E}_a \}$$

de sorte que a est bien déterminé par la donnée de $\mathcal{E}_a$.

Pour $a, a' \in T$, on aura $F_p \in \mathcal{E}_{a \vee a'}$, c'est-à-dire $a \vee a' \in F_p$ si et seulement si $a \in F_p$ ou $a' \in F_p$, puisqu'il s'agit de filtres parfaits. On a donc $\mathcal{E}_{a \vee a'} = \mathcal{E}_a \cup \mathcal{E}_{a'}$. De même $a \wedge a' \in F_p$ équivaut à $a \in F_p$ et $a' \in F_p$, puisque F_p est un filtre. Donc $\mathcal{E}_{a \wedge a'} = \mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_{a'}$.

Au total, nous voyons que l'application

$$a \to \mathcal{E}_a$$

est un <u>isomorphisme</u> du treillis distributif sur un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Phi_p)$, avec en particulier :

$$\mathcal{E}_{a \vee a'} = \mathcal{E}_a \cup \mathcal{E}_{a'} \quad ; \quad \mathcal{E}_{a \wedge a'} = \mathcal{E}_a \cap \mathcal{E}_{a'}$$

On voit ainsi que <u>tout treillis distributif est isomorphe à un sous-treillis d'un treillis $\mathcal{P}(E)$</u>.