ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

FONTAINEBLEAU/CG N/2/86/G.

LE COVARIOGRAMME GEOMETRIQUE DES COMPACTS CONVEXES DE R^2

G. MATHERON

Février 1986

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE : 35, RUE SAINT-HONORÉ — 77305 FONTAINEBLEAU (FRANCE)

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

LE COVARIOGRAMME GEOMETRIQUE DES COMPACTS CONVEXES DE $\mathbb{R}^2$

Par

G. MATHERON

CENTRE DE GEOSTATISTIQUE

Février 1986

LE COVARIOGRAMME GEOMETRIQUE DES COMPACTS CONVEXES DE $\mathbb{R}^2$

Pour tout borélien borné A dans $\mathbb{R}^n$, on définit son covariogramme g_A ou simplement g comme la fonction

$$g(h) = \int 1_A(x)\ 1_A(x+h)\ dx \qquad (h \in \mathbb{R}^n)$$

<u>Une inégalité</u> : Pour h, h' $\in \mathbb{R}^n$, on a :

$$(1) \qquad |g(h) - g(h')| \leqq 2\ [g(o) - g(h-h')]$$

En effet, d'après la définition de g, on trouve d'abord :

$$|g(h) - g(h')| \leqq \int 1_A(x)\ |1_A(x+h) - 1_A(x+h')|\, dx$$
$$\leqq \int |1_A(x+h) - 1_A(x+h')|\, dx$$

Comme $|1_A(y) - 1_A(z)| = (1_A(y) - 1_A(z))^2$, puisque les seules valeurs possibles de cette différence sont 0 et ± 1, il vient encore

$$|g(h) - g(h')| \leqq \int (1_A(x+h) - 1_A(x+h'))^2\ dx = 2\,[g(o) - g(h-h')]$$

Si A est un compact convexe d'intérieur non vide, pour tout vecteur unité u, la fonction $r \to g(ru)$ est convexe et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Si nous désignons par g'(u) la dérivée à droite de cette fonction convexe en r = o, il en résulte l'inégalité :

$$g(o) - g(ru) \leqq - r\ g'(u)$$

on sait que -g'(u) représente la mesure du contour apparent de A dans la direction u, i.e. le n-1 volume de la projection de A sur un hyperplan orthogonal à u. C'est une fonction continue de u, en particulier une fonction bornée. Si l'on pose :

$$D = \sup_{u \in S} (-g'(u)) \qquad (S : \text{sphère unité})$$

il vient donc pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$g(o) - g(h) \leqq D|h|$$

et l'inégalité (1) devient :

$$(2) \qquad |g(h) - g(h')| \leqq 2\, D\, |h-h'|$$

Ainsi, le covariogramme d'un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne.

Il en résulte, en particulier, que g(h) est différentiable en moyenne quadratique, et aussi différentiable (au sens usuel) presque partout dans $\mathbb{R}^n$. Noter que g(h) n'est jamais différentiable en h = 0 puisque en ce point les dérivées directionnelles g'(u), qui existent pour tout vecteur unité u, ont toutes des valeurs strictement négatives.

Nous désignerons par ∂g le gradient de g, qui existe presque partout, et par

$$g_i = \partial_i\, g = \frac{\partial\, g}{\partial h_i}$$

ses composantes dans un système orthonormé d'axes de coordonnées. La première tâche consiste à identifier (une version de) ce gradient.

Une version de grad g.

Sous forme faible, les composantes du vecteur ∂g peuvent être définies par la relation :

$$\int \partial_i\, g\, \varphi = -\int g\, \partial_i \varphi$$

valable pour toute fonction φ différentiable à support compact (ou même, simplement, différentiable puisque le support de g est compact).

Explicitement, compte tenu de la définition de g(h), cela s'écrit :

$$(3) \qquad \int \varphi\, \partial_i\, g = -\iint 1_A(x)\; 1_A(x+h)\; \frac{\partial}{\partial h_i}\; \varphi(h)\; dx\; dh$$

Pour x fixé, considérons d'abord l'intégrale :

$$\int 1_A(x+h) \frac{\partial}{\partial h_i} \varphi(h)\, dh = \int_A \frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(y-x)\, dy = \int_{\partial A} n_i(y)\, \varphi(y-x)\, dS$$

où $n_i(y)$ est la coordonnée i de la normale unité n (orientée vers l'extérieur) au point $y \in \partial A$, et dS l'élément de surface sur ∂A. En fait, n(y) n'est pas nécessairement définie en tout point de ∂A, mais seulement presque partout. Une écriture plus rigoureuse consiste à introduire la mesure de surface G_A du convexe A (mesure dont le support est ∂A) et dans ces conditions :

$$\int 1_A(x+h)\, \partial\varphi(h)\, dh = \int n(y)\, \varphi(y-x)\, G_A(dy)$$

la normale extérieure n(y) étant définie G_A presque partout. Reportant cela dans (3), nous trouvons :

$$\begin{aligned}\int \varphi\, \partial g &= - \iint 1_A(x)\, n(y)\, \varphi(y-x)\, dx\, G_A(dy) \\ &= - \int \varphi(z)\, dz \int 1_A(y-z)\, n(y)\, G_A(dy)\end{aligned}$$

D'où, par identification, la version cherchée du gradient :

$$\partial g(z) = - \int 1_A(y-z)\, n(y)\, G_A(dy)$$

En notation moins abstraite : si ∂A est la frontière de A et A_h son translaté par h, on a

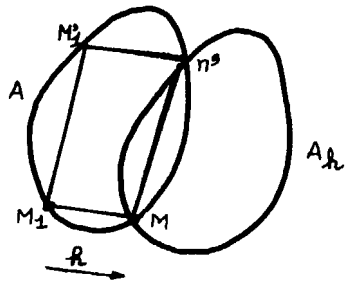
$$\partial g(h) = -\int_{\partial A \cap A_h} \bar{n}\, dS \tag{4}$$

Au signe près, le gradient est l'intégrale de la normale extérieure prise sur la portion de la surface de A qui reste incluse dans le translaté A_h.

Ce gradient, qui est le gradient faible, se trouve défini en tout h. En particulier, il est nul en h = 0, bien que g ne soit pas différentiable au sens usuel en ce point. Mais, naturellement, en tout h où le gradient usuel existe (c'est-à-dire presque partout), il coïncide avec le gradient faible (4).

A partir de maintenant, nous nous restreignons au cas de l'espace $\mathbb{R}^2$ à <u>deux dimensions</u>.

CAS DE L'ESPACE A DEUX DIMENSIONS



Dans ce cas, le gradient se déduit par une rotation de $\pm \pi/2$ du segment $D(h) = MM'$ joignant les deux extrémités M et M' à l'arc $\partial A \cap A_h$.

Comme la dérivée directionnelle de g(h) dans la direction du vecteur h existe toujours et a une valeur $\leqq 0$, on peut toujours orienter le segment D(h) de manière à obtenir un vecteur (que nous désignerons encore par) D(h) dont ∂g se déduit par une rotation de $+ \pi/2$. Sur la figure ci-jointe, on a $D(h) = \overrightarrow{MM'}$. Les coordonnées (D_1, D_2) de D(h) et ∂g sont donc reliées par les équations :

(5) $$g_1(h) = - D_2(h) \quad ; \quad g_2(h) = D_1(h)$$

FORMULE DE RECIPROCITE.

Désignons par M_1 et M'_1 les points dont les extrémités M et M' du segment D(h) se déduisent par la translation h. Ce sont des points de la frontière ∂A de A, et le parallèlogramme $M_1 M M'_1 M'$ est donc contenu dans le convexe A. Mais il est clair alors que les segments MM' et MM_1 jouent des rôles symétriques : si la translation h est remplacée par la translation $\tilde{h} = D(h) = MM'$, le vecteur D devient $D(\tilde{h}) = M'M'_1 = - h$. Compte tenu de (5), cela s'écrit :

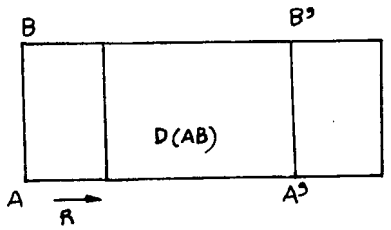
(6) $$g_1(g_2; - g_1) = h_2 \quad ; \quad g_2(g_2; - g_1) = - h_1$$

Autrement dit, la transformation :

$$\tilde{h}_1 = g_2(h) \quad ; \quad \tilde{h}_2 = - g_1(h) \qquad (\text{i.e. } \tilde{h} = D(h))$$

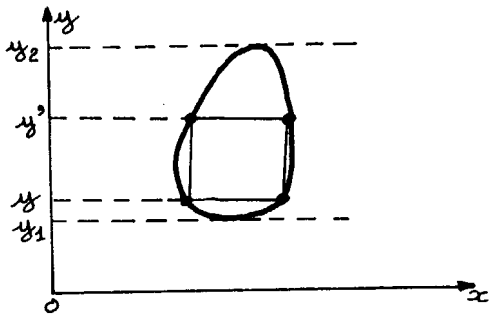
est une involution (au signe près).

Cependant, cette involution est mise en défaut lorsque le contour de A contient un segment de droite parallèle à h (ou à D(h) de longueur $\geqq |h|$ ($\geqq |D(h)|$). L'exemple du rectangle le montre bien : si h est parallèle au



côté AA', mais de longueur $\leq$ |AA'|, D(h) est toujours égale à AB, et à la translation AB est associée D(AB) = A'A et non -h.

Par contre, si le contour de A ne contient pas de segments de droite de longueur > 0, cette circonstance ne se produit pas, et les relations (4) s'appliquent en tout $h \neq 0$ tel que $g(h) > 0$.

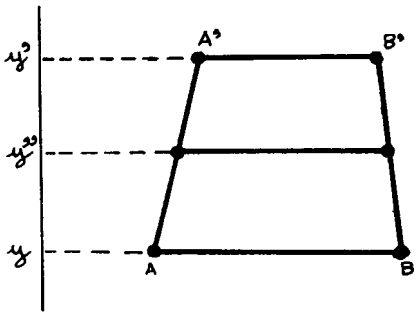


Pour le voir, considérons les longueurs traversées dans A par des droites parallèles à une direction fixe (que nous prenons comme axe des x). On définit ainsi une fonction L(y) sur le segment y_1, y_2), y_1 et y_2 désignant les ordonnées des 2 droites d'appui parallèle à l'axe des x.

Cette fonction L(y) possède la propriété suivante :

Si $L(y) = L(y') > 0$ pour $y \neq y'$, alors on a $L(y'') \geqq L(y)$ pour tout y'' compris entre y et y' : cela résulte du fait que le parallèlogramme construit sur les deux segments L(y) et L(y') est nécessairement contenu dans le convexe A.

On le voit plus simplement encore en remarquant que la fonction L(y) est <u>concave</u> sur (y_1, y_2).



En effet, si on désigne par AB (A'B') les deux extrémités des traverses L(y) L(y'), le quadrilatère AB A'B' est contenu dans le convexe A, et cela implique :

$$L(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \geqq \alpha L(y_1) + (1-\alpha)\, L(y_2)$$

pour $\alpha \in (0,1)$, puisque $\alpha L(y_1) + (1-\alpha)L(y_2)$ représente la traversée du quadrilatère au point de cote $y'' = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$.

Si le contour A ne contient aucun segment de longueur > 0, la fonction L(y) s'annule aux deux extrémités y_1 et y_2, et passe par un maximum L_o en un point <u>unique</u> y_o correspondant à la translation $h = (o, y_o)$ qui annule g(h).

Alors pour toute valeur de L strictement comprise entre 0 et L_o il existe deux et seulement deux valeurs de y telles que $L(y) = L$. Comme ceci est vrai pour toutes les directions, puisque l'axe des x a été choisi arbitrairement, il en résulte :

> Si le contour de A ne contient pas de segment de longueur > 0, pour tout vecteur $h \neq 0$ tel que $g(h) > 0$, il existe deux et seulement deux points M tels que M et M+h appartiennent au contour de A. Dans ces conditions, l'application $h \rightarrow D(h)$ est injective, et la formule de réciprocité
>
> $$D(D(h)) = -h$$
>
> est valable.

CONVEXITE DES ISOGEES.

Les courbes isogées sont les courbes $g(h) = C^{ste}$. Nous nous intéresserons plutôt aux ensembles compacts

$$K_a = \{h : g(h) \geqq a\} \qquad (0 < a \leqq g(0)$$

dont les frontières sont les isogées > 0 :

$$\partial K_a = \{h : g(h) = a\}$$

pour $a \downarrow 0$ on trouve :

$$\bigcup_{a>o} K_a = \{g(h) > 0\}$$

et le compact $K_o = \overline{\bigcup K_a}$ coïncide, comme on sait, avec $A \oplus \check{A}$:

$$K_o = A \oplus \check{A}$$

Pour a voisin de g(o), soit $a = g(o) - \varepsilon$, à une homothétie et une rotation de $\pi/2$ près, K_a coïncide avec le dual de $A \oplus \check{A}$: car, avec $h = ru$ (u, vecteur unitaire, r petit), on a $g(h) = g(o) + r\, g'(u) + O(r)$, et l'équation de l'isogée se réduit à $r = -\varepsilon/g'(u)$. Mais $-g'(u)$ coïncide, à une rotation

près de $\pi/2$, avec la fonction d'appui de $A \oplus \check{A}$, de sorte que $r = -1/g'(u)$ est l'équation en coordonnée polaire du contour du convexe déduit du dual de $A \oplus \check{A}$ par une rotation de $\pi/2$.

Plus généralement, pour $0 < a < g(o)$, <u>le compact K_a est convexe</u>, de sorte que les isogées délimitent des convexes inclus les uns dans les autres depuis le germe (identique au dual de $A \oplus \check{A}$ à une homothétie et une rotation de $\pi/2$ près) en $a = g(o)$ jusqu'à $A \oplus \check{A}$ lui-même en $a = 0$.

Pour démontrer cela, partons de la fonction

$$a(r,u) = -\frac{\partial}{\partial r} g(ru)$$

qui représente le diamètre apparent, dans la direction du vecteur unitaire u, de l'intersection $A \cap A_{ru}$: $a(r,u)$ est la mesure de la projection de $D(ru)$ sur la direction perpendiculaire à u. Si l'on désigne par $r_o(u)$ la plus petite valeur de r annulant $g(ru)$, il est facile de voir que $a(r,u)$ est strictement décroissante en r, à u fixé, pour $0 < r < r_o(u)$. Cela se déduit des propriétés de la fonction concave $L(y)$ définie ci-dessus : en prenant l'axe des x parallèle à la direction u, il est clair, en effet, que l'on a :

$$a(r,u) = \text{Mes}\,\{ y : L(y) > r \}$$

$a(r,u)$ décroit donc avec r, et, de plus, décroit strictement si $L(y_1)$ ou $L(y_2)$ est nul (y_1 et y_2 sont les extrémités du segment $\{L(y) > 0\}$). Ainsi :

Pour un vecteur unitaire u donné, la fonction

$$r \to a(r,u) = -\frac{\partial}{\partial r} g(ru)$$

est strictement décroissante sur $(0, r_o(u))$ pourvu seulement que le contour ∂A ne comporte pas plus d'un seul segment de longueur > 0 parallèle à u. En particulier :

<u>LEMME 1</u> - Si le contour de A ne comporte pas de segments de longueur non nulle, la fonction $r \to a(r,u)$ est strictement décroissante, pour tout vecteur unitaire u, et en tout $r > 0$ tel que $g(ru) > 0$.

Revenons à la convexité des isogées. Supposons d'abord que le contour de A ne comporte pas d'éléments linéaires de longueur > 0, de sorte que le lemme 1 s'applique, ainsi que la formule de réciprocité (5), i.e.

$$D(D(h)) = - h$$

Prenons h fixé, u unitaire orthogonal à h et étudions la variation de g sur la droite $h + \lambda u$, i.e. la fonction

$$\lambda \to g(h + \lambda u) = f(\lambda) \qquad (- \infty < \lambda < \infty)$$

De la formule

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} g(h + \lambda u) = \sum_i u^i \partial_i g(h + \lambda u)$$

résulte que la fonction continue f atteint ses extrema aux points λ pour lesquels $\partial g(h + \lambda u)$ est orthogonal à u, c'est-à-dire aux points où $D(h + \lambda u) = cu$. Supposons qu'il y ait deux valeurs distinctes λ_1 et λ_2 avec

$$D(h + \lambda_1 u) = c_1 u \quad ; \quad D(h + \lambda_2 u) = c_2 u$$

Par la formule de réciprocité, on trouve donc aussi

$$D(c_1 u) = - (h + \lambda_1 u) \quad ; \quad D(c_2 u) = - (h + \lambda_2 u)$$

Or, au point ru, on a

$$a(r,u) = - \frac{\partial}{\partial r} g(ru) = |D(ru) \wedge u|$$

Donc, en $r = c_1$ ou c_2, il vient :

$$a(c_1,u) = |h| \quad ; \quad a(c_2,u) = |h|$$

D'après le lemme 1, cela entraine $c_1 = c_2$, et donc $D(h + \lambda_1 u) = D(h + \lambda_2 u)$. Mais l'application $h \to D(h)$ étant injective, puisque ∂A est sans élément linéaire, il en résulte encore $\lambda_1 = \lambda_2$: la fonction f n'a qu'un seul extremum, qui est nécessairement au maximum, puisque $f(\lambda) = 0$ pour $\lambda \to \pm \infty$.

Par conséquent encore, si l'on a $f(\lambda') = f(\lambda'')$ pour $\lambda' \neq \lambda''$, on aura $f(\alpha\lambda' + (1-\lambda)\lambda'') > f(\lambda')$ pour $0 < \alpha < 1$. Autrement dit si $h_1 = h + \lambda' u$ et $h_2 = h + \lambda'' u$ vérifient $g(h_1) = g(h_2) \geqq a$ on aura encore $g(h) \geqq a$ en tout point h appartenant au segment (h_1, h_2) : donc l'ensemble $K_a = \{g : g(h) \geqq a\}$ est bien convexe.

Si maintenant le contour de A comporte des éléments linéaires, il est facile de voir que l'on peut construire une suite décroissante de compacts convexes en A_n dont les contours sont sans éléments linéaires et telle que $\bigcap A_n = A$. On a alors aussi $A_h = \bigcap A_{n,h}$ pour toute translation h, et, en utilisant la semi-continuité supérieure :

$$A \cap A_h = \bigcap (A_n \cap A_{n,h})$$

Comme le volume est une fonctionnelle s.c.s. sur $\mathcal{K}$, on en déduit

$$g_A(h) = \lim \downarrow g_{A_n}(h)$$

et les K_a sont convexes comme limite des convexes $K_{n,a}$.

<u>Conséquences de la Convexité des Isogées</u>.

Calculons d'abord le rayon de courbure en un point h de l'isogée $g(h) = a$. Désignons pour cela par α l'angle polaire de la normale extérieure à l'isogée. On a $\operatorname{tg} \alpha = g_2/g_1$, et donc

$$d\alpha = \frac{g_1\, dg_2 - g_2\, dg_1}{|D|^2} \qquad (|D|^2 = (g_1)^2 + (g_2)^2 = (D^1)^2 + (D^2)^2)$$

ou, explicitement :

$$d\alpha = -\frac{D^i\, dg_i}{|D|^2} = -\frac{D^i\, g_{ij}\, dh^j}{|D|^2}$$

Si ds désigne l'élément d'arc de l'isogée, la tangente unitaire à cette courbe a, au point h, les composantes

$$\frac{d\, h^j}{ds} = \frac{D^j}{|D|}$$

On trouve donc pour <u>le rayon de courbure de l'isogée</u> :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = - \frac{D^i \, g_{ij} \, D^j}{|D|^3}$$

L'isogée étant convexe, R doit être > 0, et par suite on a nécessairement l'inégalité

$$D^i \, g_{ij} \, D^j < 0$$

D'autre part, la dérivée seconde par rapport au rayon vecteur r :

$$g''_{r^2} = \frac{h^i \, g_{ij} \, h^j}{r^2} \qquad (r = |h|)$$

est positive, comme on l'a vu plus haut, soit

$$h^i \, g_{ij} \, h^j > 0$$

Ainsi, la forme quadratique $u^i \, g_{ij} \, u^j$ prend des valeurs positives et négatives : <u>la matrice des g_{ij} n'est donc jamais de type défini</u>, ou, si l'on préfère, son déterminant est toujours négatif :

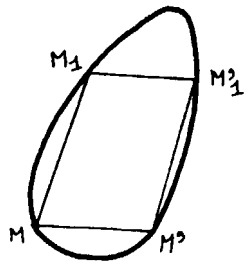
$$\Delta < 0$$

<u>Encore la Formule de Réciprocité</u>.

Plaçons-nous dans le cas où la frontière de A ne comporte pas de segment de droite, de sorte que la formule de réciprocité

$$D \circ D = - I$$

s'applique en tout $h \neq 0$ tel que $g(h) > 0$. Sur la figure ci-jointe, on a par exemple :



$$h = MM' \quad \text{et} \quad D = M' \, M'_1$$

ou aussi bien :

$$h = M' \, M'_1 \quad \text{et} \quad D = M'M$$

L'aire du parallèlogramme $MM' \, M_1 M'_1$ est $- h^i \, \partial_i g$, et on lit directement sur la figure :

(6) $$g(o) = g(h) + g(D) - h^i \partial_i g$$

En effet, l'aire totale de A, qui est g(o), est la somme de l'aire $- h^i \partial_i g$ du parallèlogramme et des 4 lunules associées aux arcs MM', $M'M'_1$, M'_1M_1 et M_1M. Mais g(h) est la somme des aires des lunules MM_1 et $M'M'_1$ et g(D) celle des lunules MM' et $M_1M'_1$, d'où la relation.

Admettons maintenant l'existence des dérivées partielles secondes, que nous noterons :

$$g_{ij} = \partial_{ij} g = \frac{\partial^2 g}{\partial h_i \partial h_j}$$

(nous verrons dans un instant que cette hypothèse n'est pas très contraignante). En différentiant (6), il vient alors :

$$g_i(D)\ dD^i = h^i\ g_{ij}\ dh^j$$

Comme on a $D^1 = g_2 = \partial_2 g$ et $D^2 = - g_1 = - \partial_1 g$, on trouve

$$dD^1 = g_{2j}\ dh^j \quad ; \quad dD^2 = - g_{1j}\ dh^j$$

et

$$g_i(D)\ dD^i = - D^2(D)\ g_{2j}\ dh^j - D^1(D)\ g_{1j}\ dh^j$$

et la relation

$$g_i(D)\ dD^i = h^i\ g_{ij}\ dh^j$$

donne donc :

$$- D^i(D)\ g_{ij} = h^i\ g_{ij}$$

et cela entraine D(D) = - h pourvu seulement que la matrice g_{ij} soit régulière.

Ainsi, sous les hypothèses d'existence des dérivées partielles secondes g_{ij} et D et $(g_{ij}) \neq 0$, la relation (6) suffit à entrainer la formule de réciprocité D(D) = - h.

La réciproque est d'ailleurs vraie : si D(D) = - h, le calcul précédent montre que la fonction :

$$g(h) + g(D) - h^i g_i(h)$$

est constante sur le domaine défini par $g(h) > 0$ et $h \neq 0$. Si h, dans ce domaine, tend vers un point du contour ∂A, $g(h)$ tend vers 0, ainsi que D et ∂g, et par suite cette constante est égale à $g(o)$.

Nous désignerons par

$$\Delta = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2$$

le déterminant de la matrice g_{ij}. Les relations :

$$d\,D^1 = g_{2j}\, dh^j \quad ; \quad dh^2 = -\, g_{1j}\, dh^j$$

s'inversent sous la forme

$$dh^1 = -\frac{g_{2j}}{\Delta}\, dD^j \quad ; \quad dh^2 = \frac{g_{1j}}{\Delta}\, dD^j$$

Mais d'un autre côté, de $D(D) = -\,h$, on tire

$$dh_1 = -\, g_{2j}(D)\, dD^j \quad ; \quad dh_2 = g_{1j}(D)\, dD^j$$

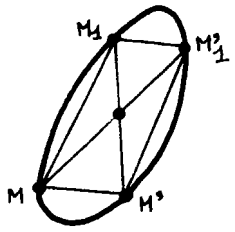
et par suite :

$$g_{ij}(D) = \frac{g_{ij}(h)}{\Delta} \tag{7}$$

CAS OU LE CONVEXE A EST SYMETRIQUE

Le cas où le convexe A admet un centre de symétrie O présente des particularités remarquables. En effet, pour $h = MM'$ et $D = M'M_1'$, O est encore centre de symétrie du parallèmogramme $MM'\,M_1M_1'$. Autrement dit, les vecteurs :

$$h + D = MM_1' \quad \text{et} \quad h - D = M_1\, M'$$



sont des <u>diamètres</u> de A. Mais cela signifie que les points $h + D(h)$ et $h - D(h)$ <u>décrivent la frontière</u> de l'homothétique $2\,A = A \oplus \check{A}$, i.e. la

frontière ∂K_o de $\{g(h) > 0\}$. Sous forme différentielle, nous avons

$$dh_1 + dD_1 = (1 + g_{12})\, dh_1 + g_{22}\, dh_2$$

$$dh_2 + dD_2 = -\, g_{11}\, dh_1 + (1 - g_{12})\, dh_2$$

Comme $dh^i + dD^i$ doit rester orthogonale à la normale du contour de 2 A, le déterminant fonctionnel de cette transformation doit s'annuler, et cela donne :

$$1 - g_{12}^2 + g_{11}\, g_{22} = 0$$

c'est-à-dire =

(8) $$\boxed{\Delta = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2 = -1}$$

Cette relation signifie encore que, dans le cas symétrique, la transformation $h \to D(h)$ conserve le volume. Incidemment, notons aussi que les covariogrammes des compacts convexes symétriques constituent une classe assez large de solutions pour l'équation (8) considérée comme une équation (non linéaire!) aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = -1$$

LA DIFFERENTIABILITE DE $g(h)$.

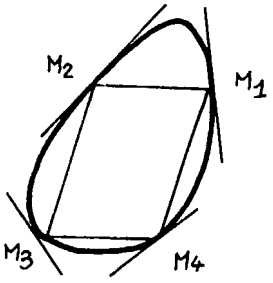
Tout compact convexe A peut être défini par sa fonction d'appui $\varphi_A = \varphi$, que nous considèrerons comme une fonction $\varphi(\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$. On sait que la forme générale de cette fonction d'appui est :

$$\varphi(\theta) = \int_{\theta_o}^{\theta} \sin(\theta - \varphi)\, s(d\varphi) + a \cos\theta + b \sin\theta$$

(les constantes a, b, θ_o peuvent rester indéterminées, dans la mesure où le convexe A n'est défini qu'à une translation près). Dans cette formule, $s(d\varphi)$ est une mesure positive sur le cercle unité vérifiant la condition barycentrique :

$$\int \cos\varphi \; s(d\varphi) = \int \sin\varphi \; s(d\varphi) = 0$$

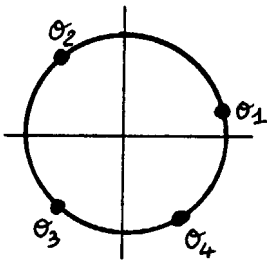
On dit que $s(d\varphi)$ est <u>la mesure périmétrique</u> du convexe A. Nous supposons, pour l'instant, que cette mésure périmétrique admet une densité continue $r(\varphi)$, i.e. $s(d\varphi) = r(\varphi)\, d\varphi$: $r(\varphi)$ représente donc le rayon de courbure. Sous cette hypothèse, nous allons voir que $g(h)$ est effectivement différentiable en tout $h \neq 0$.



Considérons en effet notre parallèlogramme $M_1\, M_2\, M_3\, M_4$ avec, par exemple :

$$h = M_3\, M_4 \quad ; \quad D = M_4\, M_1$$

et désignons par θ_i l'angle de la normale extérieure au point M_i.



Pour abréger les notations, désignons par $n(\theta)$ et $t(\theta)$ les vecteurs définis par leurs coordonnées :

$$n(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$t(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

de sorte que les vecteurs h et D sont donnés par :

$$(9) \qquad \begin{aligned} h &= -\int_{\theta_1}^{\theta_2} t(\theta)\, r(\theta)\, d\theta = \int_{\theta_3}^{\theta_4} t\, r\, d\theta \\ D &= \int_{\theta_4}^{\theta_1} t\, r\, d\theta = -\int_{\theta_2}^{\theta_3} t\, r\, d\theta \end{aligned}$$

Inversement, d'ailleurs, la donnée de $h \neq 0$ détermine les 4 angles θ_i (pourvu que $g(h)$ ne soit pas nul). Sous forme différentielle, il vient par exemple :

$$(10) \qquad d\,h = -\, t_2\, d\, s_2 + t_1 d\, s_1 = t_4\, d\, s_4 - t_3\, d\, s_3$$

(avec $t_i = t(\theta_i)$ et $d\, s_i = r(\theta_i)\, d\, \theta_i$)

Exprimons maintenant $g(h)$. D'une manière générale, si K est un compact

convexe (défini à une translation près), s_K sa mesure périmétrique et φ_K sa fonction d'appui, son volume V(K) est donné par :

$$V(K) = \frac{1}{2} \int \varphi_K(\theta)\ s_K(d\theta)$$

Ici, nous nous intéressons au volume du convexe $A \cap A_h$. Sa mesure périmétrique est nulle sur les arcs (θ_1,θ_2) et (θ_3,θ_4), et admet donc un support constitué des deux arcs (θ_4,θ_1) et (θ_2,θ_3) : sur ce support, elle admet la même densité $r(\theta)$ que la mesure périmétrique $s_A = s$ de A.

D'autre part, on sait (cf ( )) que, pour A et K compact convexes et $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$, le fonction d'appui $\varphi_{A\ominus\check{K}}$ de l'érodé $A \ominus K$ coïncide <u>sur le support de la mesure périmétrique</u> $s_{A\ominus\check{K}}$ avec la différence $\varphi_A - \varphi_K$ des fonctions d'appui de A et de K :

$$\varphi_{A\ominus\check{K}} = \varphi_A - \varphi_K \quad \text{sur} \quad \mathrm{Supp}(s_{A\ominus\check{K}})$$

Ici, K est le segment h, et sa fonction d'appui φ_h est définie par :

$$\varphi_h(\theta) = \frac{1}{2} \left| < h,\ n(\theta) > \right| = \begin{cases} \frac{1}{2} <h\ n> & \text{sur } (\theta_4,\theta_1) \\ -\frac{1}{2} <h\ n> & \text{sur } (\theta_2,\theta_3) \end{cases}$$

Le volume de $A \cap A_h = A \ominus K$ est donc :

$$g(h) = \frac{1}{2} \int_{\theta_4}^{\theta_1} (\varphi - \varphi_h)\ s(d\theta) + \frac{1}{2} \int_{\theta_2}^{\theta_3} (\varphi - \varphi_h)\ s(d\theta)$$

Sous forme différentielle, on tiendra compte de

$$d_h\ \varphi_h = \begin{cases} \frac{1}{2} <dh,n> & \text{pour } \theta \in (\theta_4,\theta_1) \\ -\frac{1}{2} <dh,n> & \text{pour } \theta \in (\theta_2,\theta_3) \end{cases}$$

et on remarquera qu'en $\theta = \theta_1,\theta_2,\theta_3$, ou θ_4, $\varphi(\theta_i) - \varphi_h(\theta_i)$ coïncide avec $\varphi_D(\theta_i)$, si φ_D est la fonction d'appui du segment D :

$$\varphi_D(\theta_i) = \varphi(\theta_i) - \varphi_h(\theta_i) = \frac{1}{2} <D,\ n(\theta_i)> = \begin{cases} \frac{1}{2} <D,\ n_i> & \text{pour } i = 1,2 \\ -\frac{1}{2} <D,\ n_i> & \text{pour } i = 3,4 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$dg = \frac{1}{4}\left[< D\ n_1 > ds_1 + < D\ n_4 > d\ s_4 - < D\ n_3 > d\ s_3 - < D\ n_2 > d\ s_2 \right]$$
$$- \frac{1}{4}\int_{\theta_4}^{\theta_1} < dhn > s(d\theta) + \frac{1}{4}\int_{\theta_2}^{\theta_3} < dh,n > s(d\theta)$$

D'après (10), le terme entre crochets vaut $\frac{1}{2}$ $(D_1\ dh_2 - D_2\ dh_1)$, et d'après (9) chacun des deux autres termes vaut $\frac{1}{4}$ $(D_1\ dh_2 - D_2\ dh_1)$. Donc, on trouve :

$$dg = D_1\ dh_2 - D_2\ dh_1$$

et, posant $g_1 = - D_2$, $g_2 = D_1$, il vient :

$$dg = g_1\ dh_1 + g_2\ dh_2$$

avec

$$g_1 = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \cos\theta\ s(d\theta) = - \int_{\theta_4}^{\theta_1} \cos\theta\ s(d\theta)$$

(11)

$$g_2 = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \sin\theta\ s(d\theta) = - \int_{\theta_4}^{\theta_2} \cos\theta\ s(d\theta)$$

Il en résulte d'ailleurs aussitôt l'existence des dérivées partielles secondes (toujours en $h \neq 0$ tel que $g(h) > 0$). Différentiant (11), par exemple, nous trouvons :

$$dg_1 = \cos\theta_3\ ds_3 - \cos\theta_2\ ds_2$$

$$dg_2 = \sin\theta_3\ ds_3 - \sin\theta_2\ ds_2$$

Pour évaluer ds_2 et ds_3 , partons des relations (10) :

$$dh_1 = \sin\theta_2\ ds_2 - \sin\theta_1\ ds_1 = \sin\theta_3\ ds_3 - \sin\theta_4\ ds_4$$

$$dh_2 = - \cos\theta_2\ ds_2 + \cos\theta_1\ ds_1 = - \cos\theta_3\ ds_3 + \cos\theta_4\ ds_4$$

d'où :

$$\sin(\theta_2 - \theta_1)\ ds_2 = \cos\theta_1\ dh_1 + \sin\theta_1\ dh_2$$

$$\sin(\theta_3 - \theta_4)\ ds_3 = \cos\theta_4\ dh_1 + \sin\theta_4\ dh_2$$

Du fait que $h \neq 0$ et $g(h) > 0$, $\sin(\theta_2 - \theta_1)$ et $\sin(\theta_3 - \theta_4)$ sont non nuls. On peut donc exprimer ds_2 et ds_3 en fonction de dh_1 et dh_2 et substituer dans les expressions de dg_1 et dg_2 . Il vient ainsi :

$$dg_1 = \left[\frac{\cos\theta_4 \cos\theta_3}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right] dh_1 + \left[\frac{\cos\theta_3 \sin\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right] dh_2$$

$$dg_2 = \left[\frac{\sin\theta_3 \cos\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right] dh_1 + \left[\frac{\sin\theta_3 \sin\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right] dh_2$$

d'où l'expression cherchée des dérivées partielles :

$$g_{11} = \frac{\cos\theta_3 \cos\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\cos\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

$$g_{21} = g_{12} = \frac{\sin\theta_3 \cos\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)} = \frac{\cos\theta_3 \sin\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\cos\theta_2 \sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

$$g_{22} = \frac{\sin\theta_3 \sin\theta_4}{\sin(\theta_3-\theta_4)} - \frac{\sin\theta_2 \sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

En particulier, pour le déterminant Δ, il vient :

$$\Delta = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2 = \frac{\sin(\theta_3-\theta_2)\ \sin(\theta_1-\theta_4)}{\sin(\theta_3-\theta_4)\ \sin(\theta_2-\theta_1)}$$

Dans le cas symétrique, on a $\theta_3 = \theta_1 + \pi$ et $\theta_4 = \theta_2 + \pi$, et on retrouve bien la relation $\Delta = -1$.

On notera surtout que ces dérivées seconde g_{ij} ne dépendent que des 4 angles θ_i, à l'exclusion de tout terme de courbure. Posant, pour abréger :

$$t_g\, \theta_i = t_i \qquad (i = 1,3,3,4)$$

on obtient les expressions :

$$(12) \qquad \begin{cases} g_{11} = \dfrac{1}{t_3-t_4} - \dfrac{1}{t_2-t_1} \\[2ex] g_{12} = g_{21} = \dfrac{t_3}{t_3-t_4} - \dfrac{t_2}{t_2-t_1} = \dfrac{t_4}{t_3-t_4} - \dfrac{t_1}{t_2-t_1} \\[2ex] g_{22} = \dfrac{t_3\, t_4}{t_3-t_4} - \dfrac{t_1\, t_2}{t_2-t_1} \end{cases}$$

et pour le déterminant :

$$\Delta = \frac{(t_2-t_3)\ (t_4-t_1)}{(t_3-t_4)\ (t_2-t_1)} \tag{13}$$

Relations Auxiliaires.

Entre les 3 relations (12), nous pouvons éliminer deux variables adjacentes (par exemple t_1 et t_2 , ou t_2 et t_3, ou t_3 et t_4, ou t_4 et t_1). On obtient ainsi quatre relations, qui d'ailleurs se déduisent aussi les unes des autres en remplaçant la variable h par D(h) et en tenant compte de (7) :

$$\begin{cases} \Delta(t_2-t_1) + g_{22} + g_{11}\ t_1\ t_2 - g_{12}(t_1+t_2) = 0 \\ t_3-t_2 + g_{22} + g_{11}\ t_2\ t_3 - g_{12}(t_2+t_3) = 0 \\ \Delta(t_4-t_3) + g_{22} + g_{11}\ t_3\ t_4 - g_{12}(t_3+t_4) = 0 \\ t_1-t_4 + g_{22} + g_{11}\ t_4\ t_1 - g_{12}(t_4+t_1) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

On peut aussi éliminer deux variables opposées (t_2 et t_4 ou t_1 et t_3). Cela donne :

$$\begin{cases} g_{11}\ t_1\ t_3 - g_{12}(t_1+t_3) + g_{22} = 0 \\ g_{11}\ t_2\ t_4 - g_{12}(t_2+t_4) + g_{22} = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Nous nous plaçons ici dans le cas général (non symétrique) où le déterminant n'est pas égalà -1 pour tout h. Mais l'équation $\Delta(h) = -1$ admet des solutions : de fait, on a toujours

$$\Delta(D(h)) = 1/\Delta(h)$$

de sorte que $1 + \Delta(h)$ s'annule en un point au moins sur toute courbe continue joignant les points h_o et $D(h_o)$. D'après (13), on a :

$$1 + \Delta = \frac{(t_1-t_3)\ (t_4-t_2)}{(t_3-t_4)\ (t_2-t_1)}$$

de sorte que l'on aura $\Delta = -1$ si et seulement si :

$$t_1 = t_3 \quad \text{ou} \quad t_2 = t_4$$

(ou les deux à la fois évidemment). Géométriquement, il est clair que :

$t_1 = t_3$ équivaut à $g(h+D) = 0$

$t_2 = t_4$ équivaut à $g(h-D) = 0$

Cette relation $\Delta = -1$ correspond au cas de dégénérescence des relations (14). En effet, la première d'entre elles, par exemple, peut s'écrire :

$$t_2(\Delta + g_{11}\, t_1 - g_{12}) + g_{22} - (\Delta + g_{12})\, t_1 = 0$$

Le premier membre se factorise lorsque la condition :

$$\frac{\Delta - g_{12}}{g_{22}} = \frac{-g_{11}}{\Delta + g_{12}}$$

est réalisée. Mais cette condition se ramène à $\Delta(1+\Delta) = 0$, et, comme Δ ne s'annule pas sur le domaine d'intérêt, la condition devient $1 + \Delta = 0$.

Dans le cas $\Delta = -1$, notre première relation (14) se factorise et devient :

$$\left(t_2 + \frac{1 - g_{12}}{g_{11}}\right)\left(t_1 - \frac{1 + g_{12}}{g_{11}}\right) = 0$$

Cette dégénérescence entraine donc que l'on a :

$$t_1 = \frac{1 + g_{12}}{g_{11}} \quad \underline{\text{ou}} \quad t_2 = \frac{g_{12} - 1}{g_{11}}$$

Ces deux valeurs sont les racines de l'équation du second degré :

$$g_{11}\, x^2 - 2\, g_{12}\, x + g_{22} = 0$$

Nous reportant aux relations auxiliaires (15), nous voyons donc que le premier cas correspond à $t_1 = t_3$ et le second à $t_2 = t_4$. Au total, nous trouvons ceci : pour $\Delta = -1$, deux cas sont possibles :

- ou bien on a

$$t_1 = t_3 = \frac{1 + g_{12}}{g_{11}} \qquad (\text{et } g(h+D) = 0$$

et dans ce cas t_2 et t_4 sont liés par la seconde relation (15) :

$$g_{11}\ t_2\ t_4 - g_{12}(t_2+t_4) + g_{22} = 0$$

- ou bien on a

$$t_2 = t_4 = \frac{g_{12} - 1}{g_{11}} \qquad (\text{et } g(h-D) = 0)$$

avec la relation complémentaire :

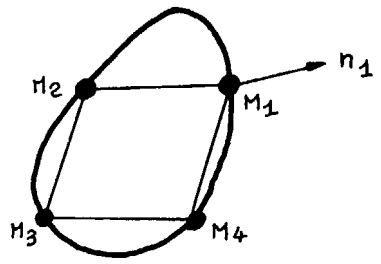
$$g_{11}\ t_1\ t_3 - g_{12}(t_1 + t_3) + g_{22} = 0$$

Au contraire, pour $\Delta \neq -1$, $g(h+D)$ et $g(h-D)$ sont strictement positifs, et les relations (14) ne sont pas dégénérées : il est alors possible d'exprimer trois des variables, par exemple t_2, t_3 et t_4 en fonction de la quatrième, par exemple t_1. Mais on ne peut pas, en général, reconstituer les quatre valeurs t_1, t_2, t_3 et t_4 en un point h à partir des trois seules quantités g_{11}, g_{12} et g_{22} : il reste, apparemment, un degré de liberté.

Pourtant, la conjecture suivante semble plausible :

<u>CONJECTURE</u> : La donnée du covariogramme g(h) détermine le compact convexe A à une translation et une symétrie près.

Pour reconstituer A, il faudrait connaitre les quatre fonctions $t_i(h)$ en tout h, ce que les seules relations (12), ou (14) et (13) ne permettent pas de faire. Mais on peut obtenir des relations supplémentaires de la manière suivante : si l'on veut faire varier h de manière à ce que t_2 , par exemple, reste constante (i.e. $\delta\ h^i\ \partial_i\ t_2 = 0$), le point M_2 doit rester fixe sur la figure ci-jointe où $h = M_2\ M_1$ tandis que M_1 se déplace orthogonalement à la normale n_1 en ce point : mais cela signifie que les vecteurs grad t_2 et n_1 sont parallèles, soit



$$\partial_2\ t_2 = t_1\ \partial_1\ t_2$$

puisque $t_1 = \text{tg}\ \theta_1$ est la tangente de l'angle polaire de cette normale n_1 . On obtient ainsi quatre relations différentielles :

$$(16) \qquad \begin{array}{lll} \partial_2\ t_2 = t_1\ \partial_1\ t_2 & ; & \partial_2\ t_1 = t_2\ \partial_1\ t_1 \\ \partial_2\ t_4 = t_3\ \partial_1\ t_4 & ; & \partial_2\ t_3 = t_4\ \partial_1\ t_3 \end{array}$$

Ces quatre relations ne sont d'ailleurs pas réellement indépendantes. On peut, en particulier, vérifier que les deux dernières se déduisent des deux premières compte tenu des conditions d'intégrabilité de la matrice des g_{ij}, i.e.

$$\partial_2 g_{11} = \partial_1 g_{12} \quad \text{et} \quad \partial_2 g_{12} = \partial_1 g_{22}$$

Mais les deux premières semblent bien apporter une information supplémentaire. En leur adjoignant les deux équations obtenues en dérivant en h_1 et h_2 la première relation (14), on obtient un système différentiel du type :

$$\partial_i t_j = f_{ij}(t_1, t_2) \quad (i,j = 1,2) \tag{17}$$

valable au voisinage de tout h tel que $\Delta(h) \neq -1$. Ce système implique des conditions d'intégrabilité :

$$\partial_1 f_{2j} = \partial_2 f_{1j}$$

qui doivent être automatiquement vérifiées par les fonctions f_{ij}. Si l'on connait les valeurs de t_1 et t_2 en un point h_o où $\Delta \neq -1$, on peut donc, en intégrant (17) le long de droites passant par h_o, déterminer les fonctions $t_1(h)$ et $t_2(h)$ au moins sur un voisinage de h_o.

Pour achever de justifier (sinon de démontrer) la conjecture, il faut trouver un critère pour choisir les valeurs initiales t_1 et t_2 en h_o.

Pour y parvenir, considérons les valeurs $\tilde{g}_{ij}$ prises par les $g_{ij}(h)$ au point $h = h_o + D(h_o)$, et les valeurs correspondantes $\tilde{t}_i$ des tg θ_i, i = 1,2,3 et 4. Deux de ces variables $\tilde{t}_i$ coïncident avec t_1 et t_3, à savoir :

$$\begin{cases} \tilde{t}_3 = t_3 \\ \tilde{t}_4 = t_1 \end{cases} \quad \underline{\text{ou}} \quad \begin{matrix} \tilde{t}_2 = t_3 \\ \tilde{t}_1 = t_1 \end{matrix}$$

d'où une nouvelle relation entre t_1 et t_3, à savoir la relation (14) écrite en $h_o + D(h_o)$:

$$\varepsilon\, \bar{\Delta}(t_3 - t_1) + \bar{g}_{22} + \bar{g}_{11}\, t_1\, t_3 - \bar{g}_{12}(t_1 + t_3) = 0 \tag{18}$$

(avec $\varepsilon = \pm 1$). On obtiendra une seconde relation du même type en raisonnant au point $h' = h_o - D(h_o)$, cette fois entre les variables t_2 et t_4.

De (15) et de (18) on déduit 4 solutions possibles pour les valeurs de t_1 et t_3, et, de même, on trouve aussi 4 solutions possibles pour (t_2, t_4) : comme le système est maintenant surabondant, on peut penser que, dans la combinatoire des 4 x 4 = 16 solutions possibles, 2 seulement vérifieront les relations (12) : au moins 2, d'ailleurs, car, si t_1, t_2, t_3, t_4 est une solution, il en sera de même de la figure transposée $t_1' = t_3$, $t_3' = t_1$, $t_2' = t_4$, $t_4' = t_2$.

S'il n'y en a que deux, l'indétermination qui subsiste sur le choix des valeurs initiales des $t_i(h_o)$ correspond au fait que le symétrique A est solution en même temps que A. Ayant choisi l'une des deux déterminations possibles en h_o, l'intégration du système (17) donne ensuite les valeurs des $t_i(h)$ au voisinage de h_o. Cette esquisse de démonstration n'est d'ailleurs pas encore suffisante, car il risque de surgir de nouvelles indéterminations à la traversée des lignes de singularité $\Delta(h) = -1$. Cette démarche analytique n'est donc sans doute pas la meilleure, et il devrait être possible de démontrer la conjecture par un raisonnement géométrique plus direct.

Le Cas Symétrique.

Dans le cas symétrique, par contre, la démonstration de la conjecture est immédiate : on a, en effet, $A = \check{A}$ et donc la symétrisée $A \oplus \check{A}$ coïncide avec 2 A : par suite, 2 A est égal à l'adhérence de $\{ g(h) > 0 \}$, et A est bien déterminée par la donnée de g(h).

En fait, toujours dans le cas symétrique, il suffit même pour déterminer A de connaitre g(h) au voisinage d'un diamètre, ou même, simplement, de connaitre le gradient, i.e. les deux fonctions g_1 et g_2 sur une droite passant par l'origine : de fait, pour un vecteur unitaire fixe, les points

$$\lambda u + D(\lambda u) \quad ; \quad \lambda u - D(\lambda u)$$

décrivent la frontière de 2 A lorsque λ varie.

Voici encore une autre façon de résoudre ce problème dans le cas symétrique. Comme on a ici $t_1 = t_3$ et $t_2 = t_4$, les relations (12) deviennent :

$$(19) \qquad \begin{cases} g_{11} = \dfrac{2}{t_1 - t_2} \quad ; \quad g_{22} = \dfrac{2\, t_1\, t_2}{t_1 - t_2} \\ g_{12} = g_{21} = \dfrac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} \end{cases}$$

Notons en passant que les conditions d'intégrabilité :

$$\partial_2 g_{11} = \partial_1 g_{12} \quad ; \quad \partial_2 g_{12} = \partial_1 g_{22}$$

coïncident avec les relations (16), i.e. :

$$\partial_2 t_2 = t_1 \partial_1 t_2 \; ; \partial_2 t_1 = t_2 \partial_1 t_1$$

comme cela résulte facilement d'un calcul élémentaire.

Mais surtout on note qu'ici les trois quantités g_{ij}, liées d'ailleurs par la relation $\Delta = -1$, permettent le calcul explicite de t_1 et t_2. On a, en effet :

$$t_1 - t_2 = \frac{2}{g_{11}} \quad ; \quad t_1 + t_2 = \frac{2\, g_{12}}{g_{11}}$$

et par suite :

(20) $$t_1 = \frac{1 + g_{12}}{g_{11}} \quad ; \quad t_2 = \frac{g_{12} - 1}{g_{11}}$$

Ce sont, comme il se doit, les deux racines de l'équation :

(21) $$g_{11} x^2 - 2\, g_{12}\, x + g_{22} = 0$$

Alors, si l'on impose la condition :

$$t_1(h) = c$$

le point h décrit une moitié du contour de A, et l'autre moitié pour $t_2(h) = c$; les courbes iso-t_1 et iso-t_2 sont des translatées du contour de A. On notera aussi que le gradient de l'iso-t_1 au point h a un angle polaire dont la tangente est égale à t_2 : cela résulte de la relation d'intégrabilité $\partial_2 t_1 = t_2 \partial_1 t_1$, mais cela se voit aussi immédiatement de manière géométrique.

Si l'on désigne par u^i les composantes d'un vecteur tangent à l'iso-t_1 ou à l'iso-t_2, vecteur orthogonal à la direction θ_2 ou θ_1 respectivement, on a encore, d'après (21)

$$u^i g_{ij} u^j = 0$$

Ainsi, les iso-t_1 et les iso-t_2 sont les projections, sur le plan des coordonnées h_1, h_2, des lignes asymptotiques de la surface $z = g(h)$. Ces lignes asymptotiques sont donc des translatées du contour de A.