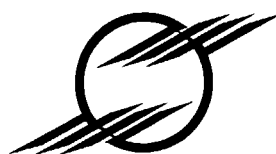


MF-5/96 G
Avril 1996

TREILLIS COMPACTS ET TREILLIS COPRIMAIRES

par

G. MATHERON



Ecole des Mines de Paris

1996

Table des Matières

PREMIÈRE PARTIE : LES TREILLIS COMPACTS

Introduction	1
Chapitre 1. Préliminaires algébriques	3
Surgraphes et sous-graphes	7
Compléments	8
Anamorphoses	13
Continuité monotone	14
Les limites monotones supérieure et inférieure	17
Chapitre 2. Les treillis compacts à ordre fermé (COF)	19
<i>Théorème 2-1. (Premier théorème de structure)</i>	19
<i>Théorème 2-5. (Second théorème de structure)</i>	24
Chapitre 3. Applications semi-continues	27
Caractérisation de $\overline{\lim}$ et $\lim$	27
Le corollaire fondamental	30
La semi-continuité	31
Chapitre 4. Les topologies sci minimales et scs maximales	39
<i>Théorème 4-1. (Troisième théorème de structure)</i>	40
<i>Théorème 4-2. (Quatrième théorème de structure)</i>	42
Critère pour la topologie scs maximale	44
<i>Théorème 4-3. (Cinquième théorème de structure)</i>	44
Critères pour la topologie sci minimale	46
Critères pour la topologie sci minimale	46
Compléments	48
Chapitre 5. Les treillis à Sup continu	51
<i>Théorème 5-2. (Sixième théorème de structure)</i>	52
Compléments	56
Chapitre 6. Les treillis à $\vee$ et $\wedge$ continus	60
<i>Théorème 6-1. (Septième théorème de structure)</i>	60
Exemples	62
Chapitre 7. Treillis de fonctions	65
Treillis d'applications croissantes	68

DEUXIÈME PARTIE : TREILLIS DISTRIBUTIFS ET TREILLIS COPRIMAIRES

Chapitre 8. Préliminaires algébriques	75
8-1. La distributivité	75
a/ la distributivité simple	75
b/ la distributivité complète	76
c/ La distributivité totale	77
<i>Théorème 8-2. (Théorème de la distributivité totale)</i>	80
c/ Extensions	80

8-2. Les équivalences propres	83
<i>Théorème 8-3. (Théorème des équivalences propres)</i>	87
Passage au quotient	87
Cas d'une dilatation idempotente quelconque	88
Exemple des treillis de fonctions	89
8-3. Filtroïdes et antifiltroïdes	91
Quelques critères de distributivité	94
Le théorème de séparation	96
<i>Théorème 8-8. (Théorème de la séparation parfaite)</i>	99
8-4. Premiers et copremiers	99
L'application $\hat{H}$	102
<i>Théorème 8-11. (Condition nécessaire de coprimarité)</i>	105
Cas d'un treillis produit	107
Sous-treillis et quasi-sous-treillis	108
Passage au quotient	109
Copremiers forts et déhanchements	110
Quelques exemples	111
Compléments : domaine de coprimarité	113
Chapitre 9. Distributivité totale et monoséparation	115
9-1. Le théorème de monoséparation	115
La dilatation α et l'érosion β	117
La dilatation Γ	119
Un critère de distributivité totale	120
<i>Théorème 9-2. (Théorème de monoséparation)</i>	121
Exemple d'un treillis $\mathcal{G}_\wedge$	122
9-2. Coprimarité des treillis monoséparés	125
Factorisation de l'érosion $M^\wedge \rightarrow \vee A$	125
a) La dilatation Γ_s	125
b) La dilatation $\hat{H} = \bar{\Gamma}$	127
Critère pour les copremiers forts et les déhanchement	127
Critères pour les copremiers	128
Coprimarité des treillis monoséparés	130
<i>Théorème 9-5. (Premier théorème de coprimarité)</i>	130
9-3. Les treillis de type lipschitzien	131
9-4. Les treillis fortement coprimaires	134
<i>Théorème 9-6. (Théorème de la coprimarité forte)</i>	135
9-5. Compléments	136
Plus grande dilatation minorant f	136
L'échelle T_0 d'un treillis T	137
Chapitre 10. Les treillis distributifs à $\vee$ continu	140
10-1. La coprimarité des treillis distributifs à $\vee$ continu	140
<i>Théorème 10-1. (Second théorème de coprimarité)</i>	141
10-2. La condition d'antifiltroïde ouvert	144
<i>Théorème 10-2. (Théorème de l'antifiltroïde ouvert)</i>	148
Le treillis des antifiltroïdes ouverts	150

10–3. La condition du radical fermé	152
La dilatation η et l'érosion ω	154
La dilatation–ouverture radicale u et l'érosion–fermeture v	155
<i>Théorème 10–3. (Théorème du radical fermé)</i>	156
Treillis de type fini	157
Treillis à $\wedge$ fini	158
10–4. Les copremiers faibles	160
<i>Théorème 10–4. (Théorème des copremiers faibles)</i>	163
Quelques classes de treillis	164
Prolongement vers le bas	168
Annexe A. Les treillis des fermés de type $\bar{A}$	175
Annexe B. Les treillis $\mathcal{F}(E)$ sont-ils toujours à $\vee$ continu ?	181
Références	

CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE,
Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris,
35 rue Saint-Honoré, 77305 FONTAINEBLEAU, France

G. MATHERON. *Treillis compacts et treillis coprimaires*. Avril 1996. 183 p.

N-5/96/G

TREILLIS COMPACTS ET TREILLIS COPRIMAIRES

par

G. MATHERON

1996

Première partie

Les treillis compacts

Introduction

Les structures réticulées suscitent un intérêt croissant dans les milieux spécialisés. Il suffit, pour s'en convaincre, d'un coup d'oeil sur le livre de J. Serra, [7], ou sur les comptes rendus du congrès d'Avignon [1]. D'un côté, en effet, les structures de treillis constituent le cadre algébrique le plus naturel pour l'analyse d'image; de l'autre, le recours aux opérations Sup et Inf fournit aux géostatisticiens de nouveaux modèles de fonctions aléatoires et de nouveaux procédés de simulation. Mais les structures topologiques restent irremplaçables: ainsi la semi-continuité, en analyse d'images, ou la compacité, si précieuse pour la construction d'ensembles ou de fonctions aléatoires. Le moment semblait donc venu d'examiner, de manière un peu systématique, les rapports pouvant exister entre ces deux types de structure, avec aussi, en filigrane, des vues sur les structures probabilistes, d'où l'importance attribuée à la compacité. Les théorèmes de structures (au nombre de sept, comme il se doit) que je propose ci-après, n'épuisent pas le sujet. Il sera certainement possible de les améliorer, de les généraliser, d'acquérir une vue plus synthétique *etc.* Mais ils fournissent au moins une base de départ.

Le lecteur s'apercevra vite que le treillis compact des fermés d'un espace localement compact, que j'ai eu l'occasion d'étudier en [9], joue ici un rôle de paradigme ou de fil directeur. Malgré la symétrie apparente des opérations algébriques Sup et Inf, on constate, en effet, dans le cas de ces treillis $\mathcal{F}$, un contraste frappant entre la richesse des structures liées à la semi-continuité supérieure et la relative pauvreté de leurs contreparties sci. Donnons quelques exemples. Sur un treillis $\mathcal{F}$:

- la réunion est continue, mais non l'intersection
- une application croissante de $\mathcal{F}$ dans lui-même est scs dès qu'elle possède la continuité monotone $\downarrow$, mais la continuité monotone $\uparrow$ n'entraîne nullement la semi-continuité inférieure.
- la limite monotone supérieure coïncide avec la limite supérieure topologique, soit (dans le cas d'une suite F_n) :

$$\overline{\lim} F_n = \bigcap_{N>0} \overline{\bigcup_{n \geq N} F_n}$$

Mais la limite inférieure topologique n'est nullement donnée par la formule duale.

Nous verrons, en effet, que les treillis $\mathcal{F}$ constituent un cas limite où la richesse de la topologie scs est maximale, celle de la topologie sci minimale. La recherche des conditions sous lesquelles chacune des trois propriétés ci-dessus est vérifiée constitue un des objectifs de cette étude. L'examen des relations entre les limites monotone et topologique se révélera particulièrement fructueux, ainsi que la comparaison entre semi-continuités et continuités monotones. Nous verrons aussi de nombreux exemples, notamment de treillis de fonctions. J'attire tout particulièrement l'attention du lecteur sur les propriétés exceptionnelles du treillis des fonctions lipschitziennes, qui devraient permettre la construction d'une théorie autonome des fonctions lipschitziennes aléatoires.

Bien des résultats que je présente ci-dessous sont empruntés à Scott et Lawson (et al.) [10], bien que je les établisse en général de façon plus simple. C'est le cas, en particulier, des sept théorèmes de structure (sauf le premier). En particulier, la notion centrale, pour Scott et Lawson, qui est celle des treillis continus (dans leur terminologie) correspond, dans la mienne, aux treillis à Inf continu – la notion duale, qui n'a pas de nom chez Scott et Lawson, étant évidemment celle de treillis à Sup continu. On voit pourquoi je n'ai pu conserver la terminologie de ces auteurs. Je n'ai pas non plus utilisé la relation “way below” notée $x \ll y$ dans [10]. Elle n'est, en effet, vraiment utile que pour les treillis à Inf continu, et s'identifie dans ce cas à $\overset{0}{M}_y \supset M_x$, relation de nature purement topologique.

De manière générale, la terminologie de [10] m'a paru contestable. Par exemple, la topologie sci minimale s'appelle chez ces auteurs “upper topology”, ce qui semble doublement paradoxal. L'ensemble des majorants d'un élément x , que je note M_x , s'écrit chez eux $\uparrow x$ (d'où confusion possible avec la convergence monotone). L'adhérence de l'intérieur de cet ensemble, soit $\overset{0}{M}_x$, s'écrit chez eux $(\text{Int}(\uparrow x))^-$ ou $\text{Cl}(\text{Int}(\uparrow x))$, etc. J'indiquerai, chapitre par chapitre, ce qui provient de [10] et ce qui semble original (en général, le traitement systématique des deux semi-continuités et les critères correspondants).

Chapitre I

Préliminaires algébriques

Dans tout ce qui suit, le mot treillis signifiera toujours (sauf mention explicite du contraire) treillis complet. Un treillis (complet) T possède un plus petit et un plus grand élément, notés généralement 0 et ω respectivement. Toute partie A de T admet dans T un plus petit majorant, ou supremum (Sup) noté $\vee A$ et un plus grand minorant, ou infimum (Inf) noté $\wedge A$. Nous utiliserons aussi les notations :

$$\bigvee_{i \in I} x_i \text{ ou } \vee \{ x_i, i \in I \}; \bigwedge_{i \in I} x_i \text{ ou } \wedge \{ x_i, i \in I \}$$

pour représenter le Sup et l'Inf d'une famille $x_i, i \in I$ d'éléments du treillis T . Le Sup et l'Inf de la famille vide sont, respectivement, le plus petit élément 0 et le plus grand ω .

Nous désignerons par

$$M^x = \{ y ; y \in T, y < x \}; M_x = \{ y ; y \in T, y > x \}$$

respectivement la classe des minorants et des majorants d'un élément $x \in T$. La relation $y < x$ étant une relation d'ordre, on a $x < x$ et, plus précisément

$$M^x \cap M_x = \{ x \}$$

N.B. — La notation $y \leq x$, justifiée dans le cas des nombres réels, ne présente que peu d'intérêt dans le cas général d'une relation d'ordre non totale. Par exemple, dans un treillis $\mathcal{P}(E)$, on écrit $A \subset B$ et non $A \subseteq B$. Dans ce qui suit $y < x$ signifie toujours "y inférieur ou égal à x". De fait, lorsque le treillis T est muni d'une topologie adaptée à sa structure d'espace ordonné, l'ensemble M^x des minorants d'un élément est fermé dans T , mais l'ensemble $M^x \setminus \{x\}$ de ses minorants stricts n'est pas un ensemble ouvert (sauf si l'ordre est total). C'est le complémentaire $\complement M_x$ de l'ensemble des majorants de x qui possède cette bonne propriété. Autrement dit, la relation intéressante n'est pas "y est strictement inférieur à x" mais "y ne majore pas x", soit $y \notin M_x$ ou $y \not\geq x$.

Enfin, pour toute partie A de T , nous poserons :

$$M^A = \bigcup \{ M^x, x \in A \}; M_A = \bigcup \{ M_x, x \in A \}$$

Il est clair que les applications $A \rightarrow M^A$ et $A \rightarrow M_A$ sont des dilatations de $\mathcal{P}(T)$ dans lui-même.

D'une manière générale, une application α d'un treillis T dans un treillis T' est une dilatation si c'est un homomorphisme pour les structures de Sup demi-treillis, i.e. :

$$\alpha (\vee x_i) = \vee \alpha (x_i)$$

pour toute famille x_i (finie ou non) dans T . De même, une application β de T' dans T est une érosion si β est un homomorphisme d'Inf demi-treillis, i.e. :

$$\beta (\wedge x_i) = \wedge \beta (x_i)$$

On rappelle qu'une application $\alpha : T \rightarrow T'$ est une dilatation si et seulement si il existe une application $\beta : T' \rightarrow T$ telle que

$$\alpha (x) < x' \Leftrightarrow x < \beta (x')$$

L'application β , nécessairement unique, est alors une érosion, et l'on dit que la dilatation α et l'érosion β sont adjointes ou associées. Sur tout ceci, voir par exemple [8] et [2].

N.B. — Dans tout treillis, le Sup et l'Inf de la famille vide sont le plus petit et le plus grand élément respectivement. On a donc toujours

$$\alpha (0) = 0' ; \beta (\omega') = \omega$$

pour toute dilatation α et toute érosion β .

Nous dirons aussi qu'une partie B du treillis T est permise pour $\vee$ (resp. pour $\wedge$) ou $\vee$ -héréditaire (resp. $\wedge$ -héréditaire) si $x \in B$ entraîne $M_x \subset B$ (resp. $M^x \subset B$). Les propriétés suivantes sont immédiates :

$B \in \mathcal{P}(T)$ est permise pour $\vee$ si et seulement si son complémentaire B^C est permis pour $\wedge$.

Pour toute famille B_i , finie ou non, de parties de T $\vee$ -héréditaires (resp. $\wedge$ -héréditaires) $\cup B_i$ et $\cap B_i$ sont encore $\vee$ -héréditaires (resp. $\wedge$ -héréditaires). Il existe donc une fermeture $\vee$ -héréditaire associant à toute partie A de T la plus petite partie permise pour $\vee$ contenant A et aussi une ouverture $\vee$ -héréditaire associant à A la plus grande partie permise pour $\vee$ et contenue dans A . Et, de même, il y a une fermeture $\wedge$ -héréditaire et une ouverture $\wedge$ -héréditaire.

Les fermetures $\vee$ et $\wedge$ -héréditaires sont manifestement les dilatations

$$A \rightarrow M_A \text{ et } A \rightarrow M^A$$

que nous avons déjà rencontrées. Les ouvertures $\vee$ et $\wedge$ –héréditaires ne sont autres que les érosions associées. De fait, la plus grande partie permise pour $\vee$ et contenue dans A n'est autre que le complémentaire de la plus petite partie permise pour $\wedge$ et contenant A^C (complémentaire de A), soit $\mathbb{C}M^{A^C}$. Il s'agit donc bien des érosions associées :

$$A \rightarrow \mathbb{C}M^{A^C} = \bigcup \{ M_x \subset A \}; A \rightarrow \mathbb{C}M_{A^C} = \bigcup \{ M^x \subset A \}$$

Le supremum est lui-même une dilatation de $\mathcal{P}(T)$ dans T , et l'érosion associée est la minoration $x \rightarrow M^x$ de T dans $\mathcal{P}(T)$. De fait, on a bien l'équivalence :

$$\vee A < x \Leftrightarrow A \subset M^x$$

Il en résulte :

$$\vee \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \vee_{i \in I} (\vee A_i); M^{\wedge x_i} = \bigcap M^{x_i}$$

L'infimum est, lui aussi, une dilatation, mais de $\mathcal{P}(T)$ dans le treillis dual T^* (i.e. T muni de la relation d'ordre opposée $y < x$ dans T^* signifiant $y > x$), d'où les relations :

$$\wedge A > x \Leftrightarrow A \subset M_x$$

$$\wedge \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \wedge_{i \in I} (\wedge A_i); M_{\vee x_i} = \bigcap M_{x_i}$$

Voici maintenant deux lemmes algébriques qui seront utiles dans un instant. Je ne donne que les énoncés relatifs aux dilatations. On en déduit par dualité les énoncés concernant les érosions.

LEMME 1-1. Soient T et T' deux treillis, α une dilatation de T dans T' , β l'érosion associée, ϕ' une fermeture sur T' et B son domaine d'invariance. Alors $\phi'\alpha$ est une dilatation de T dans le treillis B , et l'érosion associée à $\phi'\alpha$ est la restriction de β à B .

B , stable pour $\wedge$ dans T' , est complètement réticulée. Pour toute famille b_i dans B , l'Inf au sens du treillis B est encore $\wedge b_i$, mais le Sup est $\phi'(\vee b_i)$. Pour toute fermeture ϕ' , d'autre part, on a $\phi'(\vee y_i) = \phi'(\vee \phi'(y_i))$. Donc, pour toute famille x_i dans T et compte tenu du fait que α est une dilatation, il vient :

$$\phi'\alpha(\vee x_i) = \phi'(\vee \alpha(x_i)) = \phi'(\vee \phi'\alpha(x_i))$$

Par suite $\phi'\alpha$ dilate T dans le treillis B . D'autre part, pour tout $b' \in B$, $\phi'\alpha(x) < b'$ équivaut à $\alpha(x) < b'$, donc à $x < \beta(b')$: l'érosion associée à $\phi'\alpha$ est bien la restriction de β à B .

Considérons maintenant une partie A de T complètement réticulée pour l'ordre induit. A est donc un treillis, mais le Sup et l'Inf dans A ne coïncident pas, en général, avec $\wedge$ et $\vee$. Ils sont donnés par les relations :

$$\text{Sup } a_i = \tilde{I}(\vee a_i); \text{ Inf } a_i = \underline{I}(\wedge a_i)$$

où $\tilde{I}$ et $\underline{I}$ représentent la fermeture et l'ouverture associées aux classes stables respectivement pour $\wedge$ et $\vee$ engendrés par A . Voir [5]. A est le domaine d'invariance de l'idempotente $\tilde{I}\underline{I}$ et, en particulier, on a :

$$\underline{I}\tilde{I}\underline{I} = \tilde{I}\underline{I}$$

Si maintenant α est une dilatation de T dans un autre treillis T' , la restriction de α à A n'est pas, en général, une dilatation du treillis A dans T' . Le lemme suivant donne les conditions pour qu'il en soit ainsi.

LEMME 1-2. Soient T, T' deux treillis, α une dilatation de T dans T' , β l'érosion associée, A une partie de T complètement réticulée pour l'ordre induit, $\tilde{I}$ et $\underline{I}$ la fermeture et l'ouverture associées à A comme ci-dessus. Pour que la restriction de α à A soit une dilatation du treillis A dans T' , il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit satisfaite :

- a) $\alpha \underline{I} = \alpha \tilde{I} \underline{I}$
- b) $\beta \alpha > \tilde{I} \underline{I}$
- c) $\underline{I} \beta = \tilde{I} \underline{I} \beta$
- d) $\underline{I}(T') \subset A$

L'érosion associée à la dilatation $\alpha : A \rightarrow T'$ est alors $\underline{I} \beta$.

La condition pour que α dilate le treillis A dans T' est que, pour toute famille a_i dans A , on ait

$$\alpha [\tilde{I}(\vee a_i)] = \vee \alpha(a_i)$$

c'est-à-dire, puisque α est une dilatation $T \rightarrow T'$:

$$\alpha [\tilde{I}(\vee a_i)] = \alpha(\vee a_i)$$

Or $\vee a_i$ est un élément quelconque de $\underline{A}$, partie stable pour $\vee$ engendrée par A . Cette relation équivaut donc à :

$$\alpha \tilde{I} \underline{I} = \alpha \underline{I}$$

c'est-à-dire à la condition a). Il reste à démontrer l'équivalence des quatre conditions de l'énoncé.

a) entraîne b) : car de a), on déduit

$$\beta\alpha > \beta\alpha \underline{I} = \beta\alpha \tilde{I} \underline{I} > \tilde{I} \underline{I}$$

puisque $\beta\alpha$ est toujours une fermeture, donc $> I$.

b) entraîne c) : car de b) résulte :

$$\beta = \beta\alpha\beta > \tilde{I} \underline{I}\beta$$

d'où (puisque $\underline{I} \tilde{I} \underline{I} = \tilde{I} \underline{I}$) $\underline{I}\beta > \tilde{I} \underline{I}\beta$. L'inégalité inverse étant toujours vraie, c) en résulte.

c) entraîne d) : en effet, l'espace image de $\tilde{I} \underline{I}$ est A, d'où $\underline{I}\beta(x) = \tilde{I} \underline{I}\beta(x) \in A$ pour tout $x \in T'$.

d) entraîne a) : Pour $z \in T'$ et $a \in A$, l'inégalité $a < \underline{I}\beta(z)$ équivaut à $a < \beta(z)$, puisque $a \in A$, donc aussi à $\alpha(a) < z$ (puisque β est l'érosion associée à α). Si d) est vrai, c'est-à-dire si $\underline{I}\beta$ applique T' dans A, cette équivalence signifie que $\underline{I}\beta$ est une érosion de T' dans A, la dilatation associée étant la restriction de α à A. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE. Soit E un espace topologique accessible, α une dilatation de $\mathcal{P}(E)$ dans un treillis T, β l'érosion associée. Pour que α soit une dilatation du treillis $\mathcal{F}$ des fermés de E dans T, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

- a') Pour toute partie A de E, $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.
- c') L'érosion β applique T dans $\mathcal{F}$.

Dans un espace accessible, ([3], p. 150), les points sont des ensembles fermés, de sorte qu'ici l'ouverture $\underline{I}$ est l'identité. On a donc pour tout $A \subset E$:

$$\underline{I}(A) = A ; \tilde{I}(A) = \overline{A}$$

d'où le corollaire.

Surgraphes et sous-graphes

Soit f une application d'un ensemble E dans un treillis T. Le surgraphe (resp. sous-graphe) Γ de f est, par définition, le sous-ensemble de l'espace produit $E \times T$ constitué des couples (x, z) , $x \in E$, $z \in T$ tels que $z > f(x)$ (resp. $z < f(x)$), i.e. :

$$\Gamma = \bigcup_{x \in E} \{ x \} \times M_{f(x)}$$

Pour un $x \in E$ donné, l'ensemble des $z \in T$ tels que (x, z) appartienne au surgraphe Γ est $M_{f(x)}$. En sens inverse, pour un $z \in T$ donné, l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x, z) \in \Gamma$ (section du surgraphe) est :

$$S(z) = f^{-1}(M^z)$$

Des relations évidentes

$$S(\bigwedge z_i) = f^{-1}(\bigcap M^{z_i}) = \bigcap f^{-1}(M^{z_i}) = \bigcap S(z_i)$$

résulte que l'application $z \rightarrow S(z)$ est une érosion de T dans $\mathcal{P}(E)$. La dilatation $\alpha : \mathcal{P}(E) \rightarrow T$ associée est définie par

$$\alpha(A) = \bigvee f(A) = \bigvee \{ f(x), x \in A \}$$

Inversement, d'ailleurs, toute érosion $z \rightarrow S(z)$ de T dans $\mathcal{P}(E)$ est de cette forme $S(z) = f^{-1}(M^z)$ avec

$$f(x) = \alpha(\{ x \})$$

α étant la dilatation $\mathcal{P}(E) \rightarrow T$ associée à S . Ainsi :

THÉORÈME 1-1. Une application $z \rightarrow S(z)$ de T dans $\mathcal{P}(E)$ est la section du surgraphe (sous-graphe) G d'une application f de E dans T si et seulement si S est une érosion de T (du treillis dual T^*) dans $\mathcal{P}(E)$.

Le cas d'une dilatation α d'un treillis T dans un treillis T' et de l'érosion $\beta : T' \rightarrow T$ associée mérite une mention : l'équivalence

$$\alpha(x) < x' \Leftrightarrow x < \beta(x')$$

montre que le couple $(x, x') \in T \times T'$ appartient au surgraphe Γ_α de la dilatation α si et seulement si (x', x) appartient au sous-graphe Γ'_β de l'érosion β . Autrement dit, à une permutation près des coordonnées, le surgraphe d'une dilatation s'identifie au sous-graphe de l'érosion associée.

Compléments

Soient T et T' deux treillis. Une application f de T dans T' est dite croissante si f est un homomorphisme pour la relation d'ordre, c'est-à-dire si

$$y < x \Rightarrow f(y) < f(x)$$

Les dilatations et les érosions sont des applications croissantes, mais il en existe bien d'autres. Une particularité des dilatations α est la suivante : Pour tout $x \in T$, la classe des $y \in T$ telle que $\alpha(y) < \alpha(x)$ admet un plus grand élément (ou, ce qui revient ici au même, est stable pour $\vee$ infini). Comme $\alpha(y) < \alpha(x)$ équivaut à $y < \beta\alpha(x)$, où β est l'érosion associée, on voit que ce plus grand élément est la valeur en x de la fermeture $\beta\alpha$. Mais il existe d'autres applications croissantes que les dilatations qui possèdent cette propriété. Le théorème suivant donne leur caractérisation :

THÉOREME 1-2. Soit f une application croissante d'un treillis T dans un treillis T' . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Pour tout $x \in T$, il existe un plus grand $y \in T$ tel que $f(y) < f(x)$
- b) Il existe une fermeture u sur T telle que

$$f(y) < f(x) \Leftrightarrow u(y) < u(x) \quad (x, y \in T)$$

- c) L'espace image $B' = f(T)$ est complètement réticulé pour l'ordre induit par T' , et f est une dilatation de T sur le treillis B' .

Pour tout $x \in T$, posons

$$u(x) = \vee \{ y ; y \in T, f(y) < f(x) \}$$

Cette application u de T dans lui-même est extensive, car $f(x) < f(x)$ entraîne $u(x) > x$, et, manifestement, croissante.

Montrons que a) entraîne b). La propriété a) équivaut à :

$$f u = f$$

et entraîne $f u u = f u = f$. Pour tout $x \in T$, on a donc $f[u u(x)] < f(x)$, ce qui entraîne $u u(x) < u(x)$, et l'égalité $u u = u$ puisque u est extensive : u est donc une fermeture. D'après a), $f(y) < f(x)$ équivaut à $y < u(x)$, donc aussi à $u(y) < u(x)$ puisque u est une fermeture. Donc a) entraîne b).

Montrons que b) entraîne c). Soit $x_i, i \in I$ une famille d'éléments de T et $z = \vee x_i$. Si b) est vrai, la relation :

$$\vee f(x_i) < f(y) \text{ c'est-à-dire } f(x_i) < f(y) \text{ pour tout } i \in I$$

entraîne $x_i < u(x_i) < u(y) \quad \forall i \in I$, donc $\vee x_i < u(y)$ et

$$u(\vee x_i) < u(y)$$

puisque u est une fermeture. D'après b), cela équivaut à:

$$f(z) = f(\vee x_i) < f(y)$$

On a donc :

$$f(\vee x_i) = \wedge \{ b' : b' \in B', b' > \vee f(x_i) \} = \tilde{I}_{B'}(\vee f(x_i))$$

Cette relation signifie que toute famille $b'_i = f(x_i)$ dans B' admet un plus petit majorant dans B' . Comme, d'autre part, B' possède un plus petit élément $f(0)$ et un plus grand $f(\omega)$, il en résulte que B' est complètement réticulé pour l'ordre induit. Le Sup dans B' d'une famille b'_i d'éléments de B' est ainsi l'élément $\tilde{I}_{B'}(\vee b'_i)$ qui appartient à B' : la relation ci-dessus exprime donc que f est une dilatation de T dans B' .

Montrons que c) entraîne a). Soit β l'érosion $B' \rightarrow T$ associée à la dilatation $f : T \rightarrow f(T) = B'$. Pour $y \in T$ et $b' \in B'$, on a donc :

$$f(y) < b' \Leftrightarrow y < \beta(b')$$

Comme les $b' \in B'$ sont les éléments de la forme $b' = f(x)$ pour un $x \in T$, ceci équivaut à:

$$f(y) < f(x) \Leftrightarrow y < \beta f(x)$$

$\beta f(x)$ est donc le plus grand élément $z \in T$ tel que $f(z) < f(x)$, d'où a) et aussi le corollaire:

COROLLAIRE 1. Sous les conditions de l'énoncé, l'érosion $\beta : B' \rightarrow T$ associée à la dilatation $f : T \rightarrow B'$ vérifie la relation

$$u = \beta f$$

COROLLAIRE 2. Une application croissante ϕ d'un treillis T dans lui-même est une fermeture si et seulement si, pour x et y dans T , on a l'équivalence:

$$y < \phi(x) \Leftrightarrow \phi(y) < \phi(x)$$

Cette condition exprime, en effet, que $\phi(x)$ est le plus grand y tel que $\phi(y) < \phi(x)$. D'après le théorème, ϕ est donc égale à la fermeture u .

COROLLAIRE 3. Soit α une dilatation d'un treillis T dans lui-même, et β l'érosion associée. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

- a) la dilatation α est une fermeture
- b) l'érosion β est une ouverture
- c) $\alpha = \beta\alpha$; d) $\beta = \alpha\beta$

et impliquent que les espaces-images $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ coïncident et constituent un sous-treillis de T (i.e. une partie stable pour $\vee$ et $\wedge$).

En effet, $\alpha(y) < \alpha(x)$ équivaut à $y < \beta\alpha(x)$. D'après le corollaire 2, α est une fermeture si et seulement si $y < \alpha(x)$ équivaut à $y < \beta\alpha(x)$, ce qui équivaut encore à $\alpha = \beta\alpha$. Donc a) équivaut à c) et, par dualité, b) équivaut à d). Maintenant $\alpha = \beta\alpha$ entraîne $\alpha\beta = \beta\alpha\beta = \beta$ et $\beta = \alpha\beta$ entraîne $\beta\alpha = \alpha\beta\alpha = \alpha$. Ces relations entraînent $\alpha(T) = \beta(T)$ et cet ensemble est donc stable pour $\vee$ et $\wedge$.

COROLLAIRE 4. Soit f une fonction croissante d'un treillis T dans lui-même et α la dilatation de $\mathcal{P}(T)$ dans lui-même définie par $\alpha(A) = M^{f(A)}$ pour $A \subset T$. Alors f est une fermeture si et seulement si α est une fermeture. L'érosion-ouverture β associée à α est alors définie par :

$$\beta(B) = \cup \{ M^{f(x)} \subset B \}$$

En effet, l'érosion β associée à cette dilatation α est définie par :

$$\beta(B) = f^{-1}(\mathbb{C} M_{Bc})$$

Pour $B = M^{f(A)} = \alpha(A)$, partie permise pour $\wedge$, on a $\mathbb{C} M_{Bc} = B = M^{f(A)}$, et par conséquent :

$$\beta\alpha(A) = f^{-1}(M^{f(A)})$$

Avec $A = \{ x \}$, on trouve :

$$\beta\alpha(x) = f^{-1}(M^{f(x)}) = \{ y : f(y) < f(x) \}$$

Si α est une fermeture, on a $\alpha = \beta\alpha$ d'après le corollaire 3. Comme $\alpha(x) = M^{f(x)}$, cela entraîne l'équivalence $y < f(x) \Leftrightarrow f(y) < f(x)$. Donc f est une fermeture (corollaire 2).

Inversement, si f est une fermeture, cette même équivalence entraîne à son tour:

$$f(z) \in M^{f(A)} \Leftrightarrow z \in M^{f(A)}$$

soit $M^{f(A)} = f^{-1}(M^{f(A)})$, i.e. $\beta\alpha = \alpha$: α est donc une fermeture (corollaire 3).

COROLLAIRE 5. Soit f une application croissante d'un treillis T dans un treillis T' . Soit g l'application de T dans $\mathcal{P}(T)$ définie en posant pour tout $x \in T$:

$$g(x) = f^{-1}(M^{f(x)})$$

Alors l'espace-image $f(T)$ est complètement réticulé pour l'ordre induit par T' si et seulement si $g(T)$ est stable pour l'intersection.

Comme $f(T)$ a un plus petit élément $f(0)$ et un plus grand $f(\omega)$, cet ensemble sera réticulé si et seulement si pour toute famille x_i dans T on peut trouver $y \in T$ tel que $f(z) < \bigwedge f(x_i) \Leftrightarrow f(z) < f(y)$. Or $f(z) < \bigwedge f(x_i)$ équivaut à $z \in \bigcap g(x_i)$ et $f(z) < f(y)$ à $z \in g(y)$. Notre condition s'énonce donc : il existe y tel que $g(y) = \bigcap g(x_i)$, ce qui équivaut à : $g(T)$ est stable pour l'intersection.

On sait qu'une partie B d'un treillis T est complètement réticulée pour l'ordre induit si et seulement si B est le domaine d'invariance (et aussi l'espace-image) d'une application croissante et idempotente ψ de T dans lui-même ([5], théorème 6-1). Mais, en général, ψ n'est pas une dilatation de T sur B . On sait que la fermeture $\tilde{I}_B$ associée à $\tilde{B}$ coïncide avec ψ sur $\tilde{B}$, de sorte que pour toute famille b_i dans B le Sup au sens du treillis B est donné par :

$$\tilde{I}_B (\vee b_i) = \psi(\vee b_i)$$

Autrement dit, l'idempotente ψ vérifiera la condition c) du théorème 1-2, i.e. dilatera T dans B si et seulement si pour toute famille x_i dans T on a :

$$\psi(\vee x_i) = \psi(\vee \psi(x_i))$$

Les fermetures ne sont pas les seules idempotentes à vérifier cette relation.

THÉOREME 1-3. Soit ψ une application croissante idempotente d'un treillis T dans lui-même, et B son domaine d'invariance. ψ est une dilatation de T sur le treillis B si et seulement si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

a) Pour toute famille x_i dans T on a

$$\psi(\vee x_i) = \psi(\vee \psi(x_i))$$

b) Pour tout $x \in T$, il existe un plus grand $y \in T$ tel que

$$\psi(y) < \psi(x)$$

c) ψ est de la forme $\psi = \gamma\phi$ pour une ouverture γ et une fermeture ϕ telles que l'on ait :

$$\phi \gamma \phi = \phi$$

Pour tout $x \in T$, ϕx est alors le plus grand y tel que $\psi(y) < \psi(x)$, et l'érosion $\beta: B \rightarrow T$ associée à la dilatation $\psi: T \rightarrow B$ est la restriction à B de la fermeture ϕ .

On a déjà vu que la condition a) est nécessaire et suffisante pour que ψ dilate T sur B . L'équivalence de a) et b) résulte du théorème 1-2.

Montrons $b) \Rightarrow c)$. Soit u la fermeture sur T telle que $\psi(y) < \psi(x)$ soit équivalent à $y < u(x)$ (théorème 1-2). On a

$$\psi u = \psi ; u \psi = u$$

(la première relation découle du théorème 1-2, la seconde de l'idempotence : $\psi(y) < \psi(x)$ équivaut à $\psi(y) < \psi\psi(x)$, d'où $u(x) = u\psi(x)$).

Comme u est une fermeture, $u > I$ et $u = u\psi$ entraînent $u > \psi$. Donc aussi $u > \hat{\psi}$ (plus petite fermeture majorant ψ). Par suite :

$$u \hat{\psi} = \hat{\psi} u = u$$

D'où $\psi = \psi u = \psi \hat{\psi} u$. Mais $\psi \hat{\psi} u > \psi \hat{\psi} > \psi$ entraîne alors $\psi = \psi \hat{\psi} : \psi$ est un $\vee$ -filtre, donc de la forme $\psi = \gamma \phi$ pour une ouverture γ et une fermeture ϕ . Voir [5]. Montrons que l'on a en fait :

$$\psi = \underline{I} u$$

($\underline{I}$ est l'ouverture associée à B). De fait, $\underline{I} < \psi$ donne $\underline{I} u < \psi u = \psi$. Mais $u > \hat{\psi}$ donne $\underline{I} u > \underline{I} \hat{\psi} = \psi \hat{\psi} = \psi$, d'où l'égalité $\psi = \underline{I} u$. (Pour la relation $\underline{I} \hat{\psi} = \psi \hat{\phi}$, se reporter à [5]).

La relation $u\psi = u$ donne ensuite $u \underline{I} u = u$, ce qui achève de démontrer c).

Montrons $c) \Rightarrow b)$. Soit $\psi = \gamma \phi$ avec $\phi \gamma \phi = \phi$. Pour tout $y, x \in T$, $y < \phi(x)$ entraîne $\gamma \phi(y) < \gamma \phi(x)$, i.e. $\psi(y) < \psi(x)$. Inversement $\psi(y) < \psi(x)$ entraîne $\phi \gamma \phi(y) < \phi \gamma \phi(x)$, donc $\phi(y) < \phi(x)$ et $y < \phi(x)$. Par suite $\phi(x)$ est le plus grand y tel que $\psi(y) < \psi(x)$. Pour $b \in B$, $\psi(y) < b = \psi(b)$ équivaut donc à $y < \phi(b)$, ce qui montre que la restriction à B de la fermeture $\phi = u$ est bien l'érosion $\beta: B \rightarrow T$ associée à la dilatation $\psi: T \rightarrow B$.

Anamorphoses

Nous dirons qu'une application α d'un treillis T dans un treillis T' est une anamorphose si c'est un isomorphisme pour la structure de treillis complet, ce qui signifie deux choses : 1) α est une bijection de T sur T' et 2) α et α^{-1} sont à la fois des érosions et des dilatations. L'application inverse $\beta = \alpha^{-1}$ de T' sur T est, évidemment, elle aussi une anamorphose et, plus précisément : β est l'érosion associée à la dilatation α , et, aussi bien, la dilatation associée à l'érosion α .

CRITÈRE 1-1. Une application $\alpha: T \rightarrow T'$ est une anamorphose si et seulement si elle est surjective et vérifie la condition :

$$x < y \Leftrightarrow \alpha(x) < \alpha(y) \quad (x, y \in T)$$

Ces conditions sont manifestement nécessaires. Inversement, supposons les vérifiées. Si $\alpha(x) = \alpha(y)$, la seconde condition implique $x < y$ et $y < x$, donc $x = y$. Donc α est injective. C'est donc une bijection d'après la première condition.

Maintenant, la condition b) du théorème 1-2 est vérifiée, avec l'identité comme fermeture u . Donc α est une dilatation de T sur le treillis $\alpha(T) = T'$. Le même raisonnement appliqué aux treillis duaux T^* et T'^* montre que α est également une érosion. Même démonstration pour α^{-1} . C'est donc une anamorphose.

Exemple. — Soient (a,b) , (a',b') deux intervalles fermés, finis ou non, de la droite réelle achevée. Une application α de (a,b) sur (a',b') est une anamorphose (pour la relation d'ordre usuelle) si et seulement si elle est strictement croissante. Cela entraîne qu'elle est continue ainsi que l'application inverse, comme on le vérifie sans peine.

Continuité monotone

Dans ce qui va suivre, nous munirons nos treillis de topologies qui, en général, ne seront pas de type dénombrable, de sorte que les propriétés de convergence séquentielle ne suffiront pas pour caractériser la continuité ou la semi-continuité d'une fonction. Il sera donc nécessaire d'utiliser des familles filtrées plus générales que les suites. Rappelons quelques définitions et propriétés classiques, [3].

Si I est un ensemble, on appelle base de filtre sur I une famille $\mathcal{B}$ de parties de I vérifiant les deux conditions suivantes :

- 1 - $\emptyset \notin \mathcal{B}$
- 2 - Si B et B' appartiennent à $\mathcal{B}$, il existe $B'' \in \mathcal{B}$ avec $B'' \subset B \cap B'$

Si E est un ensemble, une famille filtrée d'éléments de E est une famille x_i , $i \in I$ dans E dont l'ensemble d'indices I est muni d'une base de filtre $\mathcal{B}$ (une suite x_n est une famille filtrée, la base $\mathcal{B}$ étant constituée des $B_N = \{N, N + 1, \dots\}$ pour $N = 1, 2, \dots$).

Si E est un espace topologique, la famille filtrée x_i admet une limite x si, pour tout voisinage G de x , il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x(B) \subset G$. On a ici posé

$$x(B) = \{x_i, i \in B\}$$

Dans le cas séquentiel, cela signifie simplement : il existe N tel que pour $n \geq N$ tous les x_n sont dans G . Noter que cette limite x n'est pas nécessairement unique, sauf si l'espace topologique E est séparé (i.e. si deux points distincts admettent toujours deux voisinages disjoints).

Un point y est une valeur d'adhérence pour la famille filtrée x_i si tout voisinage de x rencontre $x(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. L'ensemble A_{dh} des valeurs d'adhérence est donc

$$A_{dh} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{x(B)}$$

Rappelons que y est valeur d'adhérence si et seulement si on peut trouver sur I un filtre $\mathcal{B}'$ plus fin que $\mathcal{B}$ (i.e. : tout $B \in \mathcal{B}$ contient un $B' \in \mathcal{B}'$) tel que la famille x_i filtrée par $\mathcal{B}'$ converge vers y [cas séquentiel : on peut trouver une suite partielle x_{n_i} convergeant vers y].

Si l'espace E est compact :

- toute famille filtrée a des valeurs d'adhérence
- une famille filtrée x_i converge vers la limite x (nécessairement unique) si et seulement si x est l'unique valeur d'adhérence de la famille x_i .

Examinons maintenant le cas d'un treillis T purement algébrique (pour le moment). En l'absence de structure topologique, on peut cependant introduire des notions de convergence monotone et de continuité monotone. Rappelons d'abord une définition :

On dit qu'une famille $x_i, i \in I$ dans le treillis T est filtrante croissante (resp. décroissante) si l'ensemble des indices I est muni d'une relation d'ordre (non nécessairement totale) vérifiant les deux propriétés :

- $i > j \Rightarrow x_i > x_j$ (resp. $x_i < x_j$)
- pour tout $i, j \in I$, il existe $k \in I$ plus grand que i et j .

On appelle alors limite monotone de la famille filtrante x_i l'élément x défini par

$$x = \bigvee_{i \in I} x_i \quad (\text{resp. } x = \bigwedge_{i \in I} x_i)$$

et on écrit en général $x_i \uparrow x$ (resp. $x_i \downarrow x$), notation condensée signifiant : $x_i, i \in I$ est une famille filtrante croissante (resp. décroissante) dans T dont le Sup (resp. l'Inf) est l'élément x .

Il en résulte une notion (non topologique) de continuité monotone : soit f une fonction croissante d'un treillis T dans un treillis T' . Nous dirons que f possède la propriété de continuité monotone croissante (resp. décroissante) ou, plus brièvement, que f est $\uparrow$ -continue (resp. $\downarrow$ -continue) si :

$$\begin{aligned} x_i \uparrow x \text{ dans } T &\text{ entraîne } f(x_i) \uparrow f(x) \text{ dans } T' \\ (\text{resp. : } x_i \downarrow x \text{ dans } T &\text{ entraîne } f(x_i) \downarrow f(x) \text{ dans } T'). \end{aligned}$$

N.B. — Il faut bien voir que la continuité monotone ainsi définie constitue une propriété beaucoup plus forte que la continuité monotone séquentielle habituelle, comme le montre l'exemple suivant :

Prenons comme treillis T l'espace des sous-ensembles dénombrables de l'intervalle $(0,1)$ coiffé d'un plus grand élément ω , qui est l'intervalle $(0,1)$ lui-même. La mesure de Lebesgue λ vaut 0 sur T , sauf au point ω où on a : $\lambda(\omega) = 1$. Cette application λ du treillis T sur le treillis $\{0,1\}$ possède la continuité monotone séquentielle $\uparrow$ (puisque toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est elle-même dénombrable). Mais elle n'est pas $\uparrow$ -continue au sens de la définition précédente. En effet, si I désigne l'ensemble des parties finies de $(0,1)$, ordonné par l'inclusion, et si l'on pose $x_i = i$ pour toute partie finie $i \in I$, cette famille est manifestement filtrante croissante et vérifie $x_i \uparrow \omega$ dans T . Mais on a $\lambda(x_i) = 0$ pour tout $i \in I$ et $\lambda(x_i) \uparrow 0$, alors que $\lambda(\omega) = 1$.

Pour caractériser cette continuité monotone, nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

LEMME 1-4. Soit f une application d'un treillis T dans un treillis T' . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) f est croissante
- b) pour tout $z \in T'$, $f^{-1}(M_z)$ est permis pour $\wedge$
- c) pour tout $z \in T'$, $f^{-1}(M_z)$ est permis pour $\vee$

Caractérisons maintenant la $\downarrow$ -continuité (les énoncés relatifs à la $\uparrow$ -continuité s'en déduisent (par dualité). Nous dirons qu'une partie A d'un treillis T est stable pour $\downarrow$ si, pour toute famille filtrante décroissante a_i dans A , $a_i \downarrow x$ entraîne $x \in A$. En fait, la classe intéressante est ici celle des parties de T stables pour $\downarrow$ et permises pour $\vee$.

THÉOREME 1-4. Soit f une application d'un treillis T dans un treillis T' . Les trois énoncés suivants sont équivalents :

- a) f est croissante et $\downarrow$ -continue
- b) L'image inverse par f de toute partie de T' stable pour $\downarrow$ et permise pour $\vee$ est stable pour $\downarrow$ et permise pour $\vee$ dans T .
- c) Pour tout $z' \in T'$, $f^{-1}(M_{z'})$ est stable pour $\downarrow$ et permis pour $\vee$ dans T .

a) entraîne b) : Supposons f croissante et $\downarrow$ -continue, et soit A' une partie stable pour $\downarrow$ et permise pour $\vee$ dans T' . On a $A' = \bigcup \{M_{z'}, z' \in A'\}$, puisque A' est $\vee$ -héréditaire, donc :

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{z' \in A'} f^{-1}(M_{z'})$$

D'après le lemme 1-4, $f^{-1}(M_{z'})$ est $\vee$ -héréditaire pour chaque z' . Donc $f^{-1}(A')$ est permis pour $\vee$ comme union de parties permises pour $\vee$.

Soit maintenant $x_i \downarrow x$ dans T avec $x_i \in f^{-1}(A')$ pour chaque indice i . On a $f(x_i) \in A'$, $f(x_i) \downarrow f(x)$, puisque f est $\downarrow$ -continue, et donc $f(x) \in A'$ (stable pour $\downarrow$), c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A')$. Ainsi $f^{-1}(A')$ est stable $\downarrow$, et b) est vérifiée.

b) entraîne c) : trivial.

c) entraîne a) : Supposons c) vérifiée. D'après le lemme 1-4, f est croissante. Soit $x_i \downarrow x$ dans T . On a $f(x_i) \downarrow a$ dans T' avec $a = \bigwedge f(x_i)$. De $f(x_i) > a$ résulte $x_i \in f^{-1}(M_a)$, et donc $x \in f^{-1}(M_a)$ d'après c), soit $f(x) > a$. Mais $x < x_i$ donne $f(x) < f(x_i)$, f étant croissante, et $f(x) < \bigwedge f(x_i) = a$. Donc $f(x) = a$, i.e. $f(x_i) \downarrow f(x)$, ce qui achève la démonstration.

On note que ce théorème 1-4, bien que purement algébrique, n'est pas sans annoncer certaines propriétés topologiques sur lesquelles nous reviendrons.

Les limites monotones supérieure et inférieure

Dans un treillis purement ensembliste $\mathcal{P}(E)$, on définit classiquement, pour toute famille filtrée A_i dans $\mathcal{P}(E)$ une limite supérieure et une limite inférieure, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \text{Sup } A_i = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \bigcup_{i \in B} A_i \\ \lim \text{Inf } A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \bigcap_{i \in B} A_i \end{array} \right.$$

Nous verrons plus loin que, dans le cas $\mathcal{P}(E)$, ces limites supérieure et inférieure ont aussi une signification topologique en plus de leur signification ensembliste.

Dans le cas d'un treillis T quelconque, nous définirons de même une limite monotone supérieure (LMS) et inférieure (LMI) en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{LMS } x_i = \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \bigvee_{i \in B} x_i \\ \text{LMI } x_i = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \bigwedge_{i \in B} x_i \end{array} \right.$$

On a toujours :

$$\text{LMI } x_i < \text{LMS } x_i$$

En effet, soient B et B' dans $\mathfrak{B}$. D'après les axiomes des bases de filtre, il existe $B'' \in \mathfrak{B}$ non vide contenu dans l'intersection $B \cap B'$. On a donc :

$$\bigwedge x(B') < \bigwedge x(B'') < \bigvee x(B'') < \bigvee x(B)$$

A $B \in \mathfrak{B}$ fixé, on en déduit

$$\text{LMI } x_i = \bigvee_{B' \in \mathfrak{B}} \bigwedge x(B') < \bigvee x(B)$$

puis

$$\text{LMI } x_i < \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \bigvee x(B) = \text{LMS } x_i$$

Mais, en général, ces limites n'auront pas de signification topologique (cf. le 7ème Théorème de Structure ci-dessous). Dans ce qui suit, nous munirons nos treillis T de topologies qui permettront de définir des limites supérieures et inférieures topologiques, $\overline{\lim} x_i$ et $\underline{\lim} x_i$, et nous examinerons les relations entre les limites topologiques et monotones.

Note sur le chapitre 1

Le matériel passé en revue dans ce premier chapitre est, dans l'ensemble, classique, et se trouve dans [10], à l'exception du lemme 1-2 et des théorèmes 1-2 et 1-3.

Le théorème 1-4, qui caractérise les fonctions continues pour la topologie des maximales ($\mathcal{C}M_A$) du chapitre IV, i.e. la topologie de Scott du treillis dual dans la terminologie de [10], correspond à la proposition 2-1 de [10].

Chapitre II

Les treillis compacts à ordre fermé (COF)

Le premier théorème de structure

Nous considérons maintenant un treillis T muni d'une topologie définie par la famille $\mathcal{G}(T) = \mathcal{G}$ des ensembles ouverts dans T , ou par la famille $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}$ des fermés de T , et nous nous proposons d'examiner les relations possibles entre cette topologie et la structure d'ensemble ordonné ou réticulé. Posons d'abord une définition :

Soit T un treillis topologique. On appelle limite supérieure d'une famille filtrée x_i dans T et on note $\overline{\lim} x_i$ le Sup de ses valeurs d'adhérence, et de même limite inférieure, $\underline{\lim} x_i$, l'Inf de ses valeurs d'adhérence, soit :

$$\overline{\lim} x_i = \vee A_{dh} ; \quad \underline{\lim} x_i = \wedge A_{dh}$$

$$(A_{dh} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{x(B)})$$

Une propriété souhaitable pour la topologie d'un treillis T serait que l'ensemble des majorants ou des minorants de chaque élément de T soit un ensemble fermé. Voici les conditions pour qu'il en soit ainsi :

THÉORÈME 2-1. (PREMIER THÉORÈME DE STRUCTURE). Dans un treillis topologique T séparé (ou même simplement accessible), les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Pour tout $x \in T$, M^x (resp. M_x) est fermé dans T .
- b) Pour toute partie A de T , $\vee A = \vee \overline{A}$ (resp. $\wedge A = \wedge \overline{A}$).
- c) L'application $F \rightarrow \vee F$ (resp. $F \rightarrow \wedge F$) est une dilatation du treillis $\mathcal{F}(T)$ dans T (resp. dans le treillis dual T^*).
- d) Pour toute famille x_i filtrée dans T , la limite monotone supérieure (resp. inférieure) majore (resp. minore) la limite topologique supérieure (resp. inférieure).

L'équivalence des trois premières conditions résulte immédiatement du corollaire du lemme 1-2 appliqué à la dilatation $A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}(T)$ dans T .

Montrons que b) entraîne d). Soit x_i une famille filtrée dans B . Si la famille x_i n'a pas de valeur d'adhérence, on a, par définition, $\overline{\lim} x_i = \vee \phi = 0$, et l'inégalité $\overline{\lim} x_i < \text{LMS } x_i$ est trivialement vérifiée. Soit, au contraire, y une valeur d'adhérence de la famille x_i , c'est-à-dire :

$$y \in \bigcap \{ \overline{x(B)}, B \in \mathfrak{B} \}$$

Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, on a $y \in \overline{x(B)}$, et donc $y < \vee \overline{x(B)} = \vee x(B)$ (d'après la condition b)), et donc aussi :

$$y < \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \vee x(B) = \text{LMS } x_i$$

Il en résulte bien

$$\overline{\lim} x_i < \text{LMS } x_i$$

Montrons que d) entraîne a). Soit $x \in T$ et x_i une famille filtrée contenue dans M^x convergeant vers un $y \in T$. Si la condition d) est vérifiée, on a :

$$y < \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \vee x(B)$$

et donc, pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, $y < \vee x(B) < x$. Donc $y \in M^x$ et M^x est fermé.

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis topologique T est à ordre partiellement fermé si M^x et M_x sont fermés pour tout $x \in T$.

D'après le théorème 2-1, cette structure est caractérisée par le fait que les deux limites monotones encadrent les deux limites topologiques, i.e. pour toute famille filtrée x_i (admettant des valeurs d'adhérence) on a :

$$\text{LMI } x_i < \underline{\lim} x_i < \overline{\lim} x_i < \text{LMS } x_i$$

N.B. — Pour une famille x_i sans valeur d'adhérence, les inégalités

$$\overline{\lim} x_i < \text{LMS } x_i \text{ et } \underline{\lim} x_i > \text{LMI } x_i$$

sont trivialement vérifiées, puisque $\overline{\lim} x_i = 0$ et $\underline{\lim} x_i = \omega$. Mais on n'a plus $\underline{\lim} x_i < \overline{\lim} x_i$.

Nous verrons plus loin les conditions (très fortes) moyennant lesquelles on aura, par exemple, l'égalité $\overline{\lim} = \text{LMS}$.

Examinons maintenant les relations entre la convergence monotone $x_i \uparrow x$ ou $x_i \downarrow x$ et la convergence topologique. C'est seulement dans le cas compact que

l'on trouve un résultat simple (dans le cas non compact, une famille filtrante croissante pourrait très bien ne pas avoir de valeur d'adhérence). Je rappelle que le mot français *compact* ([3]) caractérise un espace topologique E vérifiant deux propriétés :

1 – E est un espace séparé (deux points distincts admettent deux voisinages disjoints).

2 – E possède la propriété dite du recouvrement fini (de tout recouvrement de E par une famille d'ouverts, on peut extraire un recouvrement fini).

Un espace non séparé possédant la propriété de recouvrement fini est dit quasi-compact. (Le mot français *compact* se traduit en anglais par *compact and Hausdorff*, et le mot anglais *compact* se traduit en français par *quasi-compact*).

|| **THÉOREME 2-2.** Soit T un treillis compact à ordre partiellement fermé. La convergence monotone $x_i \uparrow x$ ou $x_i \downarrow x$ entraîne la convergence topologique $x_i \rightarrow x$ dans T .

Soit x_i une famille filtrante croissante dans T , $x = \vee x_i$ sa limite monotone. T étant compact, la famille x_i admet au moins une valeur d'adhérence y , et on a donc :

$$y \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad (A_i = \bigcup_{j > i} \{x_j\})$$

Pour chaque indice i , on a $A_i \subset M_{x_i}$, puisque la famille x_i est croissante, donc $\overline{A_i} \subset M_{x_i}$, puisque M_{x_i} est fermé. Comme $y \in \overline{A_i}$, cela entraîne $y > x_i$, pour tout i , donc aussi $y > x = \vee x_i$. Mais, inversement, la famille x_i , étant contenue dans le fermé M^x , a toutes ses valeurs d'adhérence dans M^x , d'où $y < x$ et l'égalité $y = x$. Mais l'unicité de cette valeur d'adhérence $y = x$, dans l'espace compact T , entraîne que la famille x_i converge vers x dans T .

Dans ce qui suit, nous définirons des applications scs ou sci d'un espace topologique E dans un treillis compact T . Il serait souhaitable de les caractériser par un théorème du sous-graphe ou du surgraphe fermé, analogue au théorème classique relatif aux fonctions numériques. Cela suppose, évidemment que ce théorème s'applique déjà à l'application identique de T dans lui-même. Ceci correspond à une propriété plus forte que l'ordre partiellement fermé :

|| **DÉFINITION.** Nous dirons qu'un treillis topologique T est à ordre fermé (OF) si le graphe de la relation d'ordre, i.e. l'ensemble $\{(x, y) : x < y\}$ est fermé dans l'espace produit $T \times T$.

Un critère simple est le suivant : si deux familles $x_i, y_i \ i \in I$ sont filtrées par la même base de filtre $\mathcal{B}$ et vérifient $x_i < y_i$, $x_i \rightarrow x$ et $y_i \rightarrow y$ dans T , alors $x < y$.

Nous allons surtout nous intéresser, maintenant, aux treillis compacts à ordre fermé, en abrégé : treillis COF. Si un espace T est compact, on sait que tout fermé F de T est compact, soit $\mathcal{F}(T) = \mathcal{K}(T)$, et la topologie myope de $\mathcal{K}(T)$ s'identifie à la topologie usuelle de $\mathcal{F}(T)$.

Cette topologie (topologie de Choquet ou, selon les auteurs de Fell ou de Vietoris) est engendrée par des ouverts scs de la forme :

$$\mathcal{F}^{G^c} = \{ F : F \subset G \} \quad (G \in \mathcal{G})$$

et des ouverts sci du type :

$$\mathcal{F}_G = \{ F : F \cap G \neq \emptyset \} \quad (G \in \mathcal{G})$$

Nous supposons toujours, dans ce qui suit, $\mathcal{F}(T)$ muni de cette topologie. Voici maintenant la caractérisation des treillis COF.

THÉOREME 2-3. Soit T un treillis compact à ordre partiellement fermé. Les 5 conditions suivantes sont équivalentes :

- a) La relation d'ordre est fermée (i.e. : T est un treillis COF).
- b) L'application $x \rightarrow M^x$ est scs de T dans $\mathcal{F}(T)$.
- b') L'application de $x \rightarrow M_x$ est scs de T dans $\mathcal{F}(T)$.
- c) Pour tout $F \in \mathcal{F}(T)$, M_F est fermé.
- c') Pour tout $F \in \mathcal{F}(T)$, M^F est fermé.

De plus, lorsque ces conditions sont remplies, les applications $F \rightarrow M_F$ et $F \rightarrow M^F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans lui-même sont scs.

Par hypothèse, M^x et M_x sont fermés pour tout x . Comme $M^x \subset G$ équivaut à $x \in \bigcap M_{G^c}$, on voit que l'application $x \rightarrow M^x$ est scs si et seulement si $\bigcap M_{G^c}$ est ouvert pour tout ouvert G . Donc b) équivaut à c).

Montrons a) $\Rightarrow$ c). Soit F fermé dans T et x_i une famille filtrée contenue dans M_F et convergeant vers x dans T . Pour chaque indice i , il existe donc un $y_i \in F$ avec $y_i < x_i$. La famille filtrée y_i a une valeur d'adhérence y dans l'espace compact T , et $y \in F$ puisque F est fermé. Si a) est vrai, l'inégalité $y_i < x_i$ entraîne $y < x$ et donc $x \in M_F$: M_F est fermé.

Inversement, b) entraîne a). Car si on a $x_i < y_i$, $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$, pour deux familles filtrées par la même base de filtre, c'est-à-dire $x_i \in M^{y_i}$, il vient $x \in \overline{\lim} M^{y_i} \subset M^y$ si $y \rightarrow M^y$ est scs.

Enfin $M^F \subset G$ équivaut à $F \in \mathcal{C}M_G$, et $\mathcal{C}M_G$ est ouvert pour $G \in \mathcal{G}$ si la condition c) est satisfaite, de sorte que l'application $F \rightarrow M^F$ est scs.

L'application $A \rightarrow M^A$ est une dilatation de $\mathcal{P}(T)$. Sa restriction à $\mathcal{F}$ applique $\mathcal{F}$ dans lui-même, mais n'est pas, en général, une dilatation au sens du treillis $\mathcal{F}$.

THÉOREME 2-4. Si T est un treillis COF, les 9 conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $F \rightarrow M^F$ est une dilatation du treillis $\mathcal{F}$ dans lui-même.
- b) Pour toute partie A de T , $M^{\bar{A}} = \overline{M^A}$.
- c) Pour tout ouvert G , M_G est ouvert.
- d) L'application $x \rightarrow M^x$ est continue de T dans $\mathcal{F}(T)$.
- d₁) L'application $F \rightarrow M^F$ est continue de $\mathcal{F}(T)$ dans lui-même.
- d₂) La classe des M^x , $x \in T$ est fermée dans $\mathcal{F}$.
- d₃) La classe des fermés $\wedge$ -héréditaires est fermée dans $\mathcal{F}$.
- b₁) L'adhérence d'un ensemble $\wedge$ -héréditaire dans T est $\wedge$ -héréditaire.
- c₁) L'intérieur d'un ensemble $\vee$ -héréditaire dans T est $\vee$ -héréditaire.

D'après le lemme 1-1, l'application $A \rightarrow \overline{M^A}$ est une dilatation de $\mathcal{P}(T)$ dans $\mathcal{F}(T)$, dont la restriction à $\mathcal{F}$ coïncide avec $F \rightarrow M^F$, puisque T est un COF (M^F fermé). Comme $\overline{M^A} \subset F$ équivaut à $M^A \subset F$, pour F fermé, donc aussi à $A \subset \mathcal{C}M_F$, l'érosion associée est $F \rightarrow \mathcal{C}M_F$. L'équivalence des conditions a), b) et c) résulte alors immédiatement du lemme 1-2.

Comme $M^x \in \mathcal{F}_G$ équivaut à $x \in M_G$, on voit que $x \rightarrow M^x$ est sci, et donc continu, si et seulement si M_G est ouvert pour tout $G \in \mathcal{G}$, i.e. c) équivaut à d). De même, $M^F \in \mathcal{F}_G$ équivaut à $F \cap M_G \neq \emptyset$, i.e. $F \in \mathcal{F}_B$ avec $B = M_G$. Mais on sait que $\mathcal{F}_B$ est ouvert dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $B \in \mathcal{G}$ [4]. Donc $F \rightarrow M^F$ est sci (et par suite continue) si et seulement si M_G est ouvert : c) équivaut à d₁).

Montrons d) $\Rightarrow$ d₂). Soit x_i une famille filtrée dans T telle que M^{x_i} converge vers F dans $\mathcal{F}(T)$, et soit y une valeur d'adhérence de x_i dans l'espace compact T . Si d) est vrai, M^y est valeur d'adhérence de M^{x_i} dans $\mathcal{F}$, donc $F = M^y$ et d₂) est vérifiée.

Inversement, supposons d₂) et soit $x_i \rightarrow x$ dans T . La famille filtrée M^{x_i} a des valeurs d'adhérence dans l'espace compact $\mathcal{F}(T)$, de la forme M^y pour un

$y \in T$, d'après d_2). On a $M^y \subset M^x$, puisque $x \rightarrow M^x$ est scs (T est COF). Mais $x_i \in M^{x_i}$ entraîne $x \in M^y$ (d'après les propriétés de la convergence dans $\mathcal{F}$), donc $M^x \subset M^y$. D'où l'égalité $M^y = M^x$. L'unicité de la valeur d'adhérence M^y entraîne alors la convergence $M^{x_i} \rightarrow M^y$ dans l'espace compact $\mathcal{F}$.

L'équivalence de d) et d₃) se démontre, à peu près, de la même façon. Je laisse également à la diligence du lecteur le soin de vérifier l'équivalence de b) et b₁), et celle de c) et c₁).

Le second théorème de structure

Avant de passer au second théorème de structure, rappelons un résultat, classique en topologie (cf. [3]), qui nous sera utile à plusieurs reprises :

|| **LEMME 2-1.** Si E est un espace compact, et $\mathcal{G}$ sa topologie, il n'existe pas sur E de topologie séparée strictement moins fine que $\mathcal{G}$.

En effet, soit $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ une topologie sur E moins fine que $\mathcal{G}$. Il faut montrer l'égalité $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$. Désignons par E' l'espace E muni de la topologie $\mathcal{G}'$. L'application $x \rightarrow x$ de E dans E' est continue, puisque $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. Tout fermé F de E est compact, et son image par cette application continue, qui est F lui-même, est donc compacte dans E' . Si E' est séparé, tout compact de E' est fermé dans E' , et par suite F est fermé pour la topologie $\mathcal{G}'$, soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$ et l'égalité.

Venons en maintenant au théorème de structure. Soit T un treillis COF, $\mathcal{G}$ la classe de ses ouverts, $\mathcal{G}_1$ la classe des ouverts permis pour $\wedge$ et $\mathcal{G}_2$ celle des ouverts permis pour $\vee$.

Désignons par $\mathcal{G}'$ la classe stable pour l'intersection finie et la réunion infinie engendrée par $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, et par T' le même treillis (algébrique) T muni de cette topologie $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ moins fine que $\mathcal{G}$. Montrons que l'espace topologique T' est séparé, d'où résultera, d'après le lemme 2-1, l'égalité $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.

Soient, en effet, x et y deux points distincts dans T , avec (par exemple) $y \prec x$, i.e. :

$$M^x \cap M_y = \phi$$

T étant COF, les ensembles compacts disjoints M^x et M_y admettent des voisinages ouverts disjoints G et G' :

$$M^x \subset G ; M_y \subset G' ; G \cap G' = \phi ; G, G' \in \mathcal{G}$$

Or $M^x \subset G$ équivaut à $x \in G_1 = \bigcap M_{G^c} \subset G$, et $M_y \subset G'$ à $y \in G_2 = \bigcap M_{G'^c} \subset G'$. Or G_1 et G_2 sont ouverts, d'après le théorème 2-3,

condition c) et c'), disjoints et $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_2 \in \mathcal{G}_2$. Il en résulte que l'espace topologique T' est séparé, et par suite $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ d'après le lemme 2-1.

Enonçons ce résultat :

THÉOREME 2-5. (SECOND THÉOREME DE STRUCTURE). Si T est un treillis COF, sa topologie $\mathcal{G}$ est engendrée par la réunion de la classe des ouverts permis pour $\wedge$ et de la classe des ouverts permis pour $\vee$.

Cette condition nécessaire n'est probablement pas suffisante. Mais on a le critère suivant :

CRITÈRE 2-1. Un treillis T compact à ordre partiellement fermé est à ordre fermé (i.e. est COF) si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- a) Pour tout $x \in T$, M^x admet un système fondamental de voisinages ouverts permis pour $\wedge$.
- b) Pour tout $x \in T$, M_x admet un système fondamental de voisinages ouverts permis pour $\vee$.

C'est en fait un simple corollaire du théorème 2-3. En effet, $M^x \subset G$ équivaut à $x \in \mathcal{C}M_{G^c}$, d'où $M^x \subset \mathcal{C}M_{G^c} \subset G$. Pour $G \in \mathcal{G}$, $\mathcal{C}M_{G^c}$ est ouvert, si T est COF, d'après le théorème 2-2, donc la propriété a) est vraie. Inversement, si a) est vraie, pour $M^x \subset G$, il existe $G_1 \in \mathcal{G}_1$ ($\wedge$ -héréditaire) avec

$$M^x \subset G_1 \subset \mathcal{C}M_{G^c} \subset G$$

Donc $\mathcal{C}M_{G^c}$, union des $M^x \subset G$, est réunion d'ouverts $\wedge$ -héréditaires :

$$\mathcal{C}M_{G^c} = \bigcup \{ G_1 : G_1 \in \mathcal{G}_1, M^x \subset G_1 \subset G \}$$

C'est donc un ouvert, et le treillis est COF d'après le théorème 2-2.

COROLLAIRE. Dans un treillis COF, tout fermé permis pour $\vee$ (resp. pour $\wedge$) admet un système fondamental de voisinages fermés permis pour $\vee$ (resp. pour $\wedge$). Tout ouvert permis pour $\vee$ (resp. pour $\wedge$) est réunion des intérieurs des fermés permis pour $\vee$ (resp. pour $\wedge$) qu'il contient.

Cette conséquence simple du théorème précédent et de la compacité se laisse résumer par les relations suivantes (où F et K parcourent l'espace $\mathcal{F}(T)$ des fermés = compacts du treillis COF) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M^F = \bigcap \left\{ M^K : \overset{0}{M}^K \supset M^F \right\} ; \quad M_F = \bigcap \left\{ M_K : \overset{0}{M}_K \supset M_F \right\} \\ \mathcal{C}M_F = \bigcup \left\{ \overset{0}{M}^K : M^K \subset \mathcal{C}M_F \right\} ; \quad \mathcal{C}M^F = \bigcup \left\{ \overset{0}{M}_K : M_K \subset \mathcal{C}M^F \right\} \end{array} \right.$$

Note sur le chapitre 2.

Le second théorème de structure (théorème 2-5) équivaut au corollaire de la Prop. VI-1-8 de [10] : le trait le plus saillant des treillis COF, à savoir que leur topologie est toujours la conjonction d'une topologie sci et d'une topologie scs n'a pas échappé à ses auteurs, mais ne leur a pas semblé spécialement digne d'attention.

Le théorème 2-2 sur la convergence monotone équivaut au théorème VI-1-3 de [10]. Par contre, le théorème 2-1 (premier théorème de structure), la caractérisation des treillis COF (théorème 2-3 et critère 2-1) ainsi que le théorème 2-4 ne sont pas dans [10].

Chapitre III

Applications semi-continues

Avant d'aborder l'étude de la semi-continuité, il convient d'examiner de plus près les notions de limites supérieure et inférieure dans un treillis COF. Pour abréger la terminologie, et pour des raisons qui apparaîtront dans un instant, nous dirons que :

- un ouvert $\mathcal{C}M_F$ (permis pour $\wedge$) est un ouvert scs
- un fermé M_F (permis pour $\vee$) est un fermé scs
- un ouvert $\mathcal{C}M^F$ (permis pour $\vee$) est un ouvert sci
- un fermé M^F (permis pour $\wedge$) est un fermé sci

Ainsi, dans le cas d'un treillis COF du type $\mathcal{F}(E)$, où E est un espace localement compact :

- $\mathcal{F}^K$ est ouvert scs, $\mathcal{F}_K$ fermé scs ($K \in \mathcal{K}$)
- $\mathcal{F}^G$ est ouvert sci, $\mathcal{F}_G$ fermé sci ($G \in \mathcal{G}$)

Les ouverts scs et sci définissent deux topologies, que nous appellerons respectivement topologie scs et topologie sci. D'après le théorème de structure 2-4, leur réunion engendre la topologie $\mathcal{G}$ du treillis COF. Chacune d'elles, prise séparément, est quasi-compacte mais non séparée. L'intersection des voisinages scs (sci) d'un point x est $M^x(M_x)$.

Soit $x_i, i \in I$ une famille filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$ dans un treillis COF. Cette famille admet toujours des limites selon les topologies scs et sci, mais ces limites ne sont plus uniques (puisque ces topologies ne sont pas séparées). Le plus grand élément de T, ω , admet en effet un seul voisinage scs, à savoir $M^\omega = T$ lui-même, qui contient tous les x_i , et donc tous les $x(B)$, $B \in \mathcal{B}$: ω est donc toujours limite scs et 0 limite sci pour toute famille filtrée.

Parmi toutes ces limites au sens scs, il en existe une plus petite, et c'est justement $\overline{\lim} x_i$. De même, $\underline{\lim} x_i$ est la plus grande des limites sci. Plus précisément :

THÉORÈME 3-1. Soit T un treillis COF, et $x_i, i \in I$ une famille dans T filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour tout $z \in T$:

- a) $z > \overline{\lim} x_i$
- b) Pour tout ouvert scs $G \supset M^z$, il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $x(B) \subset G$
- c) Pour tout ouvert scs $G \supset M^z$, il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $\overline{x(B)} \subset G$

De même, sont équivalentes les trois conditions :

- a') $z < \lim x_i$
- b') Pour tout ouvert G sci $\supset M_z$, il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $x(B) \subset G$
- c') Pour tout ouvert G sci $\supset M_z$, il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $\overline{x(B)} \subset G$

Soit $A_{dh} = \bigcap \{\overline{x(B)}, B \in \mathcal{B}\}$ et donc $\overline{\lim x_i} = \vee A_{dh}$. Cet élément vérifie b) et c). Car $\vee A_{dh} \subset G$ ouvert permis pour $\wedge$ entraîne $A_{dh} = \bigcap \overline{x(B)} \subset G$, et, d'après la propriété d'intersection finie, il existe alors $B \in \mathcal{B}$ avec $\overline{x(B)} \subset G$, donc aussi $x(B) \subset G$. Mais si z est un élément $> \overline{\lim x_i}$, $M^z \subset G$ entraîne $\overline{\lim x_i} \subset G$, et z vérifie encore b) et c). Donc a) entraîne c).

Il est clair que c) entraîne b). Il reste à montrer b) entraîne a). Soit z un élément de T vérifiant b), et G un ouvert scs contenant M^z . On a vu (corollaire 2 du théorème 2-4) que M^z admet un système fondamental de voisinages fermés permis pour $\wedge$. Il existe donc un ouvert scs G' , et un fermé F avec :

$$M^z \subset G' \subset M^F \subset G$$

Comme z vérifie b), il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $x(B) \subset G' \subset M^F$, donc aussi $\overline{x(B)} \subset M^F \subset G$. Cela entraîne $A_{dh} = \bigcap \overline{x(B)} \subset G$. Ainsi A_{dh} est contenu dans l'intersection des ouverts scs contenant M^z . Mais cette intersection est M^z lui-même, d'où $A_{dh} \subset M^z$ et $\overline{\lim x_i} = \vee A_{dh} < z$. Ce qui achève la démonstration.

Nous allons avoir besoin de deux lemmes :

LEMME 3-1. Soit T un treillis COF, A une partie de T . Alors l'adhérence sci de A (c'est-à-dire le plus petit fermé sci contenant A) est $M^{\overline{A}}$, et son adhérence scs est $M_{\overline{A}}$.

En effet, tout fermé $\wedge$ -héréditaire contenant A contient aussi $\overline{A}$ (en tant que fermé) et $M^{\overline{A}}$ (en tant que partie $\wedge$ -héréditaire). Mais $M^{\overline{A}}$ est lui-même un fermé $\wedge$ -héréditaire, d'où la conclusion.

LEMME 3-2. Soit A_i une famille filtrante décroissante dans $\mathcal{P}(T)$, T étant un treillis COF. Alors :

$$\vee \bigcap \overline{A_i} = \vee \bigcap \overline{M^{A_i}} = \vee \bigcap M^{\overline{A_i}}$$

Des inclusions $\overline{A_i} \subset \overline{M^{A_i}} \subset M^{\overline{A_i}}$ résulte d'abord :

$$\vee \bigcap \overline{A_i} < \vee \bigcap \overline{M^{A_i}} < \vee \bigcap M^{\overline{A_i}}$$

Mais $\bigcap M^{\bar{A}_i} = M^{\bar{\bigcap A_i}}$. Car la famille filtrante décroissante $\bar{A}_i$ converge dans $\mathcal{F}(T)$ vers $\bar{\bigcap A_i}$, et l'application $F \rightarrow M^F$ est scs de $\mathcal{F}(T)$ dans lui-même (théorème 2-3). Il en résulte :

$$\bigvee \bigcap \bar{A}_i = \bigvee M \bigcap \bar{A}_i = \bigvee \bigcap M^{\bar{A}_i}$$

et les inégalités ci-dessus deviennent des égalités.

Nous avons vu que, pour la topologie sci, la famille x_i admet plusieurs limites, dont la plus grande est $\underline{\lim} x_i$. Examinons maintenant ses valeurs d'adhérence, toujours au sens de la topologie sci. L'adhérence sci d'un ensemble $A \subset T$ est l'intersection des fermés sci qui le contiennent, c'est-à-dire $M^{\bar{A}}$ d'après le lemme 3-1. L'ensemble A_{dh} sci des valeurs d'adhérence sci de la famille x_i est donc :

$$A_{dh} \text{ sci} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} M^{\overline{x(B)}}$$

D'après le lemme 3-2 appliqué à la famille filtrante décroissante $x(B)$, $B \in \mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}(T)$, nous pouvons écrire :

$$\bigvee \bigcap \overline{x(B)} = \bigvee \bigcap \bar{M}^{x(B)} = \bigvee \bigcap M^{\overline{x(B)}}$$

Le premier terme est $\overline{\lim} x_i$, le second est $\bigvee \overline{\lim} M^{x_i}$ ($\overline{\lim}$ au sens de l'espace $\mathcal{F}(T)$), et le troisième est le Sup des valeurs d'adhérence sci :

$$\overline{\lim} x_i = \bigvee \overline{\lim} M^{x_i} = \bigvee A_{dh} \text{ sci}$$

Enonçons :

THÉOREME 3-2. Soit x_i une famille filtrée dans un treillis COF. $\overline{\lim} x_i$ est le Sup des valeurs d'adhérence de x_i pour la topologie sci, $\underline{\lim} x_i$ est l'Inf des valeurs d'adhérence scs, et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim} x_i = \bigvee \overline{\lim} M^{x_i} = \bigvee \bigcap_{B \in \mathcal{B}} M^{\overline{x(B)}} \\ \underline{\lim} x_i = \bigwedge \overline{\lim} M_{x_i} = \bigwedge \bigcap_{B \in \mathcal{B}} M_{\overline{x(B)}} \end{array} \right.$$

(N.B. — $\overline{\lim} M^{x_i}$ et $\overline{\lim} M_{x_i}$ sont prises au sens du treillis $\mathcal{F}(T)$.)

Une conséquence remarquable de ce théorème est la suivante : Pour déterminer $\overline{\lim} x_i$ et $\underline{\lim} x_i$, dans un treillis COF, il suffit de connaître l'une des deux demi-topologies (sci, ou scs). Supposons, par exemple, que nous

connaissions la topologie scs, c'est-à-dire la classe $\mathcal{F}_1$ des fermés M_F ($\vee$ -héréditaires) ou, ce qui revient au même, la classe $\mathcal{G}_1$ des ouverts permis pour $\wedge$. D'après le théorème 3-1, $\overline{\lim} x_i$ est la plus petite des limites de la famille x_i selon la topologie scs $\mathcal{G}_1$. Et, d'après le théorème 3-2, $\underline{\lim} x_i$ est l'Inf dans T des valeurs d'adhérence de la famille x_i selon cette même topologie scs. Ainsi, la connaissance de la seule classe $\mathcal{G}_1$ suffit pour déterminer $\overline{\lim} x_i$ et $\underline{\lim} x_i$.

Or l'espace T est compact, par hypothèse, de sorte qu'une famille x_i converge vers une limite x nécessairement unique si et seulement si x est son unique valeur d'adhérence, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\overline{\lim} x_i = \underline{\lim} x_i (= x)$$

Ainsi, la connaissance d'une seule demi-topologie (scs ou sci) suffit pour diagnostiquer la convergence d'une famille x_i et identifier sa limite x . Un fermé F de T étant caractérisé par le fait qu'il contient la limite de toute famille filtrée x_i contenue dans F et convergeant dans T , il en résulte que la topologie complète $\mathcal{G}$ d'un treillis COF est univoquement déterminée par la donnée d'une seule demi-topologie sci ou scs.

Ce résultat, assez surprenant, sera précisé quelque peu par les prochains théorèmes de structure. Il constitue par lui-même un acquis structural fondamental.

Dans l'énoncé qui suit, on entend par topologie scs (sci) possible sur un treillis T une classe $\mathcal{G}_1$ ($\mathcal{G}_2$) de parties de T permises pour $\wedge$ (pour $\vee$) stable pour l'intersection finie et la réunion infinie :

COROLLAIRE FONDAMENTAL. Soit T un treillis algébrique et $\mathcal{G}_1$ (respectivement $\mathcal{G}_2$) une topologie scs (resp. sci) possible sur T . Alors, il existe au plus une seule topologie COF sur T admettant $\mathcal{G}_1$ (resp. $\mathcal{G}_2$) comme topologie scs (resp. sci).

La semi-continuité

Passons maintenant à la semi-continuité.

DÉFINITION. Soit E un espace topologique et T un treillis COF. On dit qu'une application $f: E \rightarrow T$ est semi-continue supérieurement (scs) (resp. semi-continue inférieurement, sci) si f est une application continue de E dans T muni de sa seule topologie scs (resp. sci).

Le critère de semi-continuité supérieure est donc : $f^{-1}(G)$ ouvert dans E pour tout ouvert scs G , ou, ce qui revient au même :

CRITÈRE 3-1. Soit f une application d'un espace topologique E dans un treillis COF. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est scs (resp. sci)
- b) Pour tout fermé F de T , $f^{-1}(M_F)$ (resp. $f^{-1}(M^F)$) est fermé dans E .
- c) L'application $x \rightarrow M^{f(x)}$ (resp. $x \rightarrow M_{f(x)}$) est scs de E dans $\mathcal{F}(T)$.

En effet, f est sci (par exemple) si et seulement si l'image inverse d'un fermé sci (M^F) est fermée dans E . D'où l'équivalence de a) et b).

L'application $x \rightarrow M_{f(x)}$ de E dans $\mathcal{F}(T)$ est scs si et seulement si, pour tout compact (= fermé) F de T , l'ensemble des $x \in E$ tel que $M_{f(x)} \cap F \neq \emptyset$ est fermé dans E . Mais $M_{f(x)}$ rencontre F si et seulement si $f(x) \in M^F$, i.e. $x \in f^{-1}(M^F)$: d'où l'équivalence de b) et c).

Si E et E' sont deux espaces topologiques (non nécessairement séparés) on démontre, en Topologie Générale, qu'une application $f : E \rightarrow E'$ est continue si et seulement si pour toute famille x_i filtrée dans E et admettant une limite x , la famille $f(x_i)$ admet dans E' la limite $f(x)$. Dans le cas d'une application $f : E \rightarrow T$ les limites, pour la topologie scs, de la famille $f(x_i)$ sont les majorants de $\overline{\lim} f(x_i)$ dans T (théorème 3-1). Il en résulte aussitôt :

THÉORÈME 3-3. Soit f une application d'un espace topologique E dans un treillis COF. Alors f est scs si et seulement si pour toute famille filtrée x_i admettant dans E une limite x , on a :

$$\overline{\lim} f(x_i) < f(x)$$

De même, f est sci si et seulement si on a :

$$\underline{\lim} f(x_i) > f(x)$$

D'où aussi le théorème suivant, ou théorème du sous-graphe et du surgraphe fermé :

THÉORÈME 3-4. Une application f d'un espace topologique E dans un treillis COF T est scs (resp. sci) si et seulement si son sous-graphe (resp. son surgraphe) est fermé dans $E \times T$.

En effet, soit $f : E \rightarrow T$ et $\Gamma = \{(x, z) : z < f(x)\}$ son sous-graphe dans $E \times T$.

Supposons f scs. Soit (x_i, z_i) une famille filtrée contenue dans Γ et convergeant vers (x, z) dans $E \times T$, i.e. $x_i \rightarrow x$ dans E et $z_i \rightarrow z$ dans T . On a $z_i < f(x_i)$

par hypothèse. Le treillis T étant COF, il en résulte $z < \lim f(x_i) < \overline{\lim} f(x_i)$. Donc $z < f(x)$, d'après le théorème 3-3, f étant scs. Donc $(x, z) \in \Gamma$ et Γ est fermé.

Inversement, supposons Γ fermé, et soit x_i une famille filtrée admettant la limite x dans E . On a $(x_i, f(x_i)) \in \Gamma$ pour chaque indice i et, Γ étant fermé, les valeurs d'adhérence de cette famille filtrée dans $E \times T$ sont contenues dans Γ . Si A_{dh} désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence dans T de la famille $f(x_i)$, cela signifie donc $\{x\} \times A_{dh} \subset \Gamma$. Mais cette relation équivaut à $z < f(x)$ pour tout $z \in A_{dh}$, i.e. $\overline{\lim} f(x_i) < f(x)$: f est donc scs d'après le théorème 3-3.

COROLLAIRE 1. Soient T et T' deux treillis COF. Une dilatation α de T dans T' est sci si et seulement si l'érosion $\beta : T' \rightarrow T$ associée est scs.

En effet, on a déjà remarqué que le surgraphe de la dilatation α est identique (à une transposition près) au sous-graphe de l'érosion β associée.

COROLLAIRE 2. Si T est un treillis COF, l'application $F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T est sci et l'application $F \rightarrow \wedge F$ est scs.

En effet, $F \rightarrow \vee F$ est une dilatation (théorème 2-1) et l'érosion associée $z \rightarrow M^z$ est scs (théorème 2-3). Donc $F \rightarrow \vee F$ est sci d'après le corollaire 1.

En général, l'application $F \rightarrow \vee F$ n'est pas scs. Nous verrons au Chapitre 5 que le Sup est scs (et donc continu) si et seulement si les limites supérieures monotone et topologique coïncident dans T .

COROLLAIRE 3. Soit $f_i, i \in I$ une famille, finie ou non, d'applications d'un espace topologique E dans un treillis COF T . Si chaque f_i est scs, $\wedge f_i$ est scs. Si chaque f_i est sci, $\vee f_i$ est sci.

De fait, le sous-graphe de $\wedge f_i$ est l'intersection des sous-graphes des f_i , donc fermé si ces derniers le sont.

Noter que si f et g sont scs, $f \vee g$, en général, ne l'est pas (sauf si l'ordre de T est total, comme dans le cas des fonctions numériques) car le sous-graphe de $f \vee g$ n'est pas la réunion des sous-graphes de f et de g .

COROLLAIRE 4. Avec les mêmes notations, toute application f de E dans T admet une plus petite majorante scs et une plus grande minorante sci.

Si l'espace E est localement compact, le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés de E , muni de sa topologie de Choquet usuelle, est un treillis COF. On obtient dans ce cas les critères suivants (que j'énonce seulement dans le cas sci).

CRITÈRE 3–2. Soit f une application d'un espace E localement compact dans un treillis COF T . Soit α la dilatation de $\mathcal{P}(E)$ dans T définie par :

$$\alpha(A) = \vee f(A) \quad (A \in \mathcal{P}(E))$$

et S l'érosion associée $T \rightarrow \mathcal{P}(E)$, i.e. $S(z) = f^{-1}(M^z)$. Pour que f soit sci, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

- a) L'érosion S est une application scs de T dans $\mathcal{F}(E)$.
- b) $S(z)$ est fermé dans E pour tout $z \in T$ et $M_{f(K)}$ est fermé dans T pour tout compact $K \subset E$.
- c) La restriction de α à $\mathcal{F}(E)$ est une dilatation sci du treillis $\mathcal{F}(E)$ dans T .

S sera scs de T dans $\mathcal{F}(E)$ si $S(z) \in \mathcal{F}(E)$ pour tout $z \in T$ et si $S^{-1}(\mathcal{F}_K) = M_{f(K)}$ est fermé dans T : les conditions a) et b) sont donc équivalentes.

Dire que l'érosion S applique T dans $\mathcal{F}(E)$ équivaut à dire que la restriction de α à $\mathcal{F}(E)$ est une dilatation du treillis $\mathcal{F}(E)$ dans T (corollaire du lemme 1–2). D'après le corollaire 1 du théorème 3–4, cette dilatation $\mathcal{F}(E)$ dans T est alors sci si et seulement si l'érosion S est scs. D'où l'équivalence de a) et c).

On a vu (critère 3–1) que f est sci si et seulement si l'application $x \rightarrow M_{f(x)}$ est scs. Prolongeons cette application par la dilatation $A \rightarrow M_{f(A)}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(T)$.

La dilatation réciproque (de $\mathcal{P}(T)$ dans $\mathcal{P}(E)$) est

$$B \rightarrow S(B) = \bigcup \{ S(z) , z \in B \}$$

Il résulte alors du théorème 3–3 de [4] que $x \rightarrow M_{f(x)}$ est scs de E dans $\mathcal{K}(T)$ (identique ici à $\mathcal{F}(T)$) si et seulement si $S(z)$ est fermé pour tout $z \in T$ et $M_{f(K)}$ compact (i.e., ici, fermé) pour tout compact $K \subset E$. Donc la condition b) est équivalente à la semi-continuité inférieure de f .

(N.B.) — Le théorème cité est démontré, en fait, dans le cas d'une dilatation de $\mathcal{P}$ dans lui-même. Mais la démonstration s'applique aussi bien à une dilatation $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E')$, où E et E' sont deux espaces localement compacts.)

Notons ce corollaire simple :

COROLLAIRE 5. $S(z) = f^{-1}(M^z)$ est fermé pour tout $z \in T$ si et seulement si $\vee f(A) = \vee f(\overline{A})$ pour tout $A \in E$.

C'est, en effet, d'après le corollaire du lemme 1-2, la condition pour que la restriction à $\mathcal{F}(E)$ de la dilatation α soit encore une dilatation.

La propriété énoncée dans le corollaire ne suffit pas en général pour que f soit sci (il faut de plus que S soit scs ou α sci). Mais nous verrons qu'elle est suffisante dans un cas particulier important (treillis COF à topologie scs maximale).

THÉOREME 3-5. Soient T et T' deux treillis COF et f une application croissante de T dans T' . Si f est scs, elle est $\downarrow$ -continue. Si f est sci, elle est $\uparrow$ -continue.

En effet, supposons f scs et soit $x_i \downarrow x = \bigwedge x_i$ dans T . On a $f(x_i) \downarrow a = \bigwedge f(x_i)$, puisque f est croissante, et donc aussi $f(x_i) \rightarrow a$ dans le treillis T' COF. Donc $a < f(x)$, f étant scs. Mais $f(x_i) > f(x)$ entraîne $a = \bigwedge f(x_i) > f(x)$. Donc $a = f(x)$, et $f(x)$ est $\downarrow$ -continue.

En général, la réciproque est fautive : il existe en général des applications $\downarrow$ -continues mais non scs de T dans T' , sauf dans le cas déjà mentionné d'un treillis T COF à topologie scs maximale (par exemple un treillis $\mathcal{F}(E)$).

THÉOREME 3-6. Soit T un treillis COF. Une ouverture (resp. une fermeture) sur T est scs (resp. sci) si et seulement si son domaine d'invariance est fermé.

Soit γ une ouverture sur T , B son domaine d'invariance. Soit b_i une famille filtrée dans B convergeant vers b dans T . Comme $\gamma(b_i) = b_i$, si γ est scs, il vient $b = \overline{\lim} \gamma(b_i) < \gamma(b)$. Donc $b = \gamma(b)$, puisque γ est une ouverture, i.e. $b \in B$: B est fermé.

Inversement, supposons B fermé et soit x_i une famille filtrée avec $x_i \rightarrow x$ dans T . Soit a une valeur d'adhérence de $\gamma(x_i)$. On a $a \in B$, B étant fermé, et $\gamma(x_i) < x_i$ entraîne $a < x$. Il en résulte $a = \gamma(a) < \gamma(x)$ et $\overline{\lim} \gamma(x_i) < \gamma(x)$.

COROLLAIRE 1 (ALGÈBRIQUE). Soit T un treillis. Une ouverture (resp. fermeture) sur T est $\downarrow$ -continue (resp. $\uparrow$ -continue) si et seulement si son domaine d'invariance est stable pour $\downarrow$ (resp. stable pour $\uparrow$).

La démonstration est à peu près la même.

COROLLAIRE 2. Soit T un treillis COF, et B le domaine d'invariance d'une ouverture scs ou d'une fermeture sci sur T . Alors B est un treillis COF (pour la topologie et l'ordre induits).

D'après le théorème, B est fermé, donc compact. B est donc un espace compact pour la topologie induite. Il est complètement réticulé pour l'ordre

induit, en tant que domaine d'invariance d'une ouverture ou d'une fermeture. Enfin l'ordre induit sur B est fermé, puisqu'une famille filtrée x_i dans B converge vers x dans B si et seulement si elle converge vers x dans T .

Pour les fermetures scs, ou les ouvertures sci, le critère est un peu moins simple :

THÉOREME 3-7. Soit T un treillis COF. Une fermeture ϕ sur T est scs si et seulement si son domaine d'invariance B vérifie la propriété suivante : Tout $b \in B$ admet un système fondamental de voisinage fermé sci de la forme $M^{\phi(F)}$, $F \in \mathcal{F}(T)$, autrement dit : pour tout $b \in B$ et tout ouvert scs G tel que $M^b \subset G$, il existe un fermé F dans T avec :

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$$

En effet, supposons ϕ scs. Soit $b \in B$ et G ouvert scs contenant M^b . Comme $b = \phi(b)$ et que ϕ est scs, il existe un autre ouvert scs G' avec $M^b \subset G'$ et $M^y \subset G' \Rightarrow M^{\phi(y)} \subset G$. Comme M^b admet un système fondamental de voisinages fermés, il existe un fermé F dans T tel que :

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^F \subset M^F \subset G'$$

Comme $M^y \subset G'$ entraîne $M^{\phi(y)} \subset G$, on a $M^{\phi(F)} \subset G$. De plus, $M^F \subset M^{\phi(F)}$ entraînant $\overset{\circ}{M}^F \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)} \subset M^{\phi(F)}$, il vient :

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$$

Réciproquement, soit $x \in T$ et $M^{\phi(x)} \subset G$, ouvert scs. Si la condition de l'énoncé est satisfaite, il existe un fermé F dans T avec $M^{\phi(x)} \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$. Comme M^x est contenu dans $M^{\phi(x)}$, on a $M^x \subset M^{\phi(F)}$. Pour tout $y \in T$, $M^y \subset M^{\phi(F)}$ entraîne $y \in M^{\phi(F)}$, soit $y < \phi(z)$ pour un $z \in F$. Ceci entraîne $\phi(y) < \phi(z)$, et donc $M^{\phi(y)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$: ϕ est bien scs. ■

Noter que, ϕ étant scs, pour tout fermé F , $M^{\phi(F)}$ est un fermé sci (critère 3-2). Comme ϕ est une fermeture, $x \in M^{\phi(F)}$ équivaut à $\phi(x) \in M^{\phi(F)}$. Autrement dit, le fermé sci $M^{\phi(F)}$ est saturé pour ϕ . (Un ensemble A est dit saturé pour une application f si $x \in A$ et $f(y) = f(x)$ entraîne $y \in A$).

Inversement, d'ailleurs, si un fermé sci $F = M^F$ est saturé pour ϕ , il est de cette forme, car $\phi(F) \subset F$ entraîne $M^{\phi(F)} \subset M^F$ et donc l'égalité puisqu'on a toujours $M^F \subset M^{\phi(F)}$.

D'autre part, la condition de l'énoncé du théorème 3-7 entraîne que, pour tout ouvert G , l'ensemble :

$$G_1 = \bigcup \{ M^b : b \in B, M^b \subset G \}$$

est encore ouvert : il s'agit donc d'un ouvert scs, manifestement saturé pour ϕ , i.e. $G_1 = \phi^{-1}(\bigcap M_G)$. Inversement, d'ailleurs, tout ouvert scs saturé pour ϕ est de cette forme.

On peut donc réénoncer le théorème 3-7 sous la forme suivante :

COROLLAIRE 1. Soit T un treillis COF et B le domaine d'invariance d'une fermeture ϕ . Alors ϕ est scs si et seulement si pour tout $b \in B$ et $G \in \mathcal{G}(T)$ tels que $M^b \subset G$, on peut trouver un ouvert G_1 scs et saturé pour ϕ et un fermé $F_1 = M^{F_1}$ sci et saturé pour ϕ tels que :

$$M^b \subset G_1 \subset M^{F_1} \subset G$$

Considérons alors sur T la topologie $\mathcal{G}_1$ constituée des ouverts saturés pour ϕ . Elle est moins fine que $\mathcal{G}(T)$, donc quasi-compacte, et non séparée (sauf si ϕ est l'identité : si elle est séparée, on a $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, d'après le lemme 2-1, et tout point x est un fermé saturé, i.e. $x = \phi(x)$).

Munissons B de la topologie induite par $\mathcal{G}_1$. Alors B est un espace quasi-compact pour cette topologie. Car tout recouvrement de B par des ouverts saturés pour ϕ est nécessairement aussi un recouvrement de T lui-même – et on peut donc en extraire un recouvrement fini.

En fait, B est même compact pour $\mathcal{G}_1$. En effet, si b et b' sont deux éléments distincts dans B , avec par exemple $M^b \cap M^{b'} = \phi$, on a $M^b \subset G = \bigcap M_{b'}$. D'après le corollaire, il existe donc un ouvert scs G_1 et un fermé sci M^{F_1} saturés pour ϕ avec :

$$M^b \subset G_1 \subset M^{F_1} \subset G ; \quad b' \notin M^{F_1}$$

Donc B , muni de $\mathcal{G}_1$ est séparé, donc compact.

Enfin, pour tout $b \in B$, M^b est un fermé saturé, ainsi que :

$$\tilde{M}_b = \{ x : x \in T, \phi(x) > b \} = \phi^{-1}(M_b)$$

Comme on a $M_b \cap B = \tilde{M}_b \cap B$, on voit que l'ordre induit sur B est partiellement fermé. Enfin, d'après le corollaire, le critère 2-1 est satisfait, de sorte que l'ordre de B est même fermé. Finalement, donc, B est un treillis COF. Enonçons :

COROLLAIRE 2. Soit ϕ une fermeture scs sur un treillis COF T et B son domaine d'invariance. Alors B est un treillis COF pour l'ordre induit et pour la topologie induite par la classe $\mathcal{G}_1$ des ouverts de T saturés pour ϕ . (Les fermés scs et sci de la topologie $\mathcal{G}_1$ sont les ensembles $\phi^{-1}(M_F)$ et $M^{\phi(F)}$, $F \in \mathcal{F}(T)$).

Considérons maintenant, plus généralement, sur un treillis COF T une application scs croissante et idempotente $\psi : T \rightarrow T$. Son domaine d'invariance B est complètement réticulé. Désignons par $\check{B}$ son domaine d'extensivité :

$$\check{B} = \{ x : x \in T, x < \psi(x) \}$$

qui est le domaine d'invariance de la plus grande ouverture minorant ψ , habituellement désignée par $\check{\psi}$. Si ψ est scs, on vérifie immédiatement que $\check{B}$ est fermé, i.e. $\check{\psi}$ est elle-même scs (théorème 3-6). D'après le corollaire 2 du théorème 3-6, $\check{B}$ est un treillis COF (pour la topologie et l'ordre induit).

Désignons alors par ϕ la restriction ψ à son domaine d'extensivité $\check{B}$. Par définition, ϕ est une fermeture sur $\check{B}$, son domaine d'invariance est encore B , et ϕ est encore scs sur $\check{B}$ (puisque $\check{B}$ est fermé). D'après le corollaire 2 du théorème 3-7, B est donc un treillis COF pour la topologie induite par les ouverts de $\check{B}$ saturés pour ϕ . Les fermés de cette topologie sont engendrés par les éléments

$$\phi^{-1}(M_F \cap \check{B}) \text{ et } M^{\phi(F \cap \check{B})} \cap \check{B} \quad (F \in \mathcal{F}(T))$$

En fait, on a toujours $\phi^{-1}(M_F \cap \check{B}) = \check{B} \cap \psi^{-1}(M_F)$, de sorte que la topologie COF sur B est induite par :

- les fermés scs $\psi^{-1}(M_F)$, $F \in \mathcal{F}(T)$
- les fermés sci $M^{\psi(F)}$, $F \in \mathcal{F}(T)$, $F \subset \check{B}$.

Notons que $\phi^{-1}(M_F) \cap B = M_F \cap B$, car $x \in B$ équivaut à $\psi(x) = x$. Enonçons :

THÉORÈME 3-8. Soit T un treillis COF, ψ une application scs, croissante et idempotente de T dans lui-même, B son domaine d'invariance et $\check{B}$ son domaine d'extensivité (fermé dans T). Alors B est un treillis COF pour l'ordre induit et la topologie définie par :

- ses fermés scs $M_F \cap B$, $F \in \mathcal{F}(T)$
- ses fermés sci $M^{\psi(F)} \cap B$, $F \in \mathcal{F}(T)$, $F \subset \check{B}$.

Note sur le chapitre 3.

Les limites Sup et Inf topologiques ne sont pas abordées dans [10], qui ne s'intéresse qu'aux limites monotones, non plus que les semi-continuités correspondantes. Le théorème 3-2 leur est étranger, ainsi que son corollaire fondamental, selon lequel la donnée d'une demi-topologie détermine complètement une topologie COF.

Les théorèmes 3-6, 3-7 et 3-8 constituent de larges généralisations des résultats analogues établis dans [10] dans le cas particulier des treillis à $\wedge$ -continu (treillis "continus" dans leur terminologie). Voir Théorème I-2-14, dans [10].

Chapitre IV

Les topologies sci minimale et scs maximale

Soit T un treillis COF et $\mathcal{T}$ la classe des parties finies de T , i.e. tout $I \in \mathcal{T}$ est de la forme $I = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_i \in T$, $i = 1, \dots, n$. Comme M^x est un fermé sci pour chaque $x \in T$, pour tout $I \in \mathcal{T}$, M^I , réunion finie de fermés sci est encore un fermé sci, ainsi que toute intersection (finie ou non) $\bigcap M^{I_i}$, $I_i \in \mathcal{T}$ d'ensembles de cette forme. Les complémentaires de ces ensembles, et, en particulier les $\complement M^I$ sont donc nécessairement des ouverts sci. Autrement dit la topologie engendrée par les $\complement M^I$ est toujours moins fine que la topologie sci du treillis COF. Nous l'appellerons topologie sci minimale, ou encore topologie $\complement M^I$. Par dualité, on voit que les $\complement M_I$ engendrent de même la topologie scs minimale.

En sens inverse, on a vu que, dans un treillis COF T , la convergence monotone $x_i \downarrow x$ entraîne la convergence topologique $x_i \rightarrow x$. Il suit de là que tout fermé F de T est stable pour $\downarrow$ (et naturellement aussi pour $\uparrow$). En particulier, tout fermé scs M_F est stable pour $\downarrow$ et permis pour $\vee$. Nous désignons par $\mathcal{a}$ la classe des parties de T stables pour $\downarrow$ et permises pour $\vee$ et par M_A , en général, plutôt que A , pour rappeler la $\vee$ -hérédité, les éléments de cette classe. Comme la classe $\mathcal{a}$ contient les fermés scs, la topologie engendrée par les complémentaires $\complement M_A$ des éléments de $\mathcal{a}$ est toujours plus fine que la topologie scs du treillis COF. Nous l'appellerons topologie scs maximale, ou topologie $\complement M_A$. Par dualité, évidemment, les complémentaires des parties stables pour $\uparrow$ et permises pour $\wedge$ engendrent la topologie sci maximale, ou topologie $\complement M_A$.

En fait, la classe des $\complement M_A$, $A \in \mathcal{a}$ est stable pour l'intersection finie et la réunion infinie, de sorte que les ouverts de la topologie scs maximale sont, exactement, les $\complement M_A$, $A \in \mathcal{a}$. Cela résulte dans le lemme suivant :

LEMME 4-1. Soit T un treillis, et $\mathcal{a}$ la classe des parties de T stables pour $\downarrow$ et permises pour $\vee$. Cette classe $\mathcal{a}$ est stable pour l'intersection infinie et pour la réunion finie.

Il est immédiat que la classe $\mathcal{a}$ est stable pour l'intersection. Soient A et A' deux éléments de $\mathcal{a}$ et x_i une famille filtrante décroissante contenue dans la réunion $A \cup A'$. Posons $x = \bigwedge x_i$ et montrons $x \in A \cup A'$.

S'il existe un indice i_0 tel que $x_j \notin A'$ (par exemple) pour $j > i_0$, alors $x \in A$, puisque A est stable $\downarrow$ et $x_j \in A$ pour $j > i_0$. Si ce n'est pas le cas, pour tout $i \in I$, il existe $j > i$ avec $x_j \in A'$ et, évidemment $x_j < x_i$. Si l'on désigne par J la classe

des $j \in I$ tels que $x_j \in A'$, nous obtenons ainsi une famille filtrante décroissante dans A' admettant la même limite monotone $\bigwedge_{j \in J} x_j = \bigwedge_{i \in I} x_i = x$ que la famille x_i . D'où $x \in A'$, puisque A' est stable $\downarrow$.

Le troisième théorème de structure

Voici maintenant un important théorème.

THÉORÈME 4-1. (TROISIÈME THÉORÈME DE STRUCTURE). Soit T un treillis algébrique, $\mathcal{J}$ la classe des parties finies de T , $\mathcal{a}$ celle des parties stables pour $\downarrow$ et permises pour $\vee$. La topologie engendrée par les $\mathcal{C}M^I$, $I \in \mathcal{J}$ et les $\mathcal{C}M_A$, $A \in \mathcal{a}$, ou topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ est quasi-compacte. En particulier, elle est compacte si et seulement si elle est séparée. Elle fait alors de T un treillis compact à ordre fermé (COF).

Pour démontrer cela, posons d'abord une définition et deux lemmes.

DÉFINITION. Soit T un treillis algébrique et $\mathcal{J}$ une classe de parties de T stable pour l'intersection infinie. Nous dirons que $\mathcal{J}$ est une classe compacte si, de toute famille S_i dans $\mathcal{J}$ d'intersection vide, on peut extraire une famille finie d'intersection vide :

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \phi, \quad S_i \in \mathcal{J} \quad \text{pour tout } i \in I \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_n \in I$$

$$\text{avec } S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_n} = \phi.$$

Un résultat très important, classique en topologie générale, est le suivant :

LEMME 4-1. Si $\mathcal{J}$ est une classe compacte dans un treillis T , la classe $\mathcal{J}'$ stable pour la réunion finie et l'intersection infinie engendrée par $\mathcal{J}$ est encore une classe compacte. En particulier $\mathcal{J}'$ est la classe des fermés d'une topologie quasi-compacte sur T .

Démonstration, par exemple, dans [6].

On sait que le Sup d'une famille vide dans T est le plus petit élément $0 \in T$. Ainsi toute partie de T stable pour $\vee$ infini contient 0 et ne peut donc être vide. Pour éviter cet inconvénient, il faut introduire la classe des parties stables pour le Sup non vide, i.e. les parties C telles que $B \neq \phi$, $B \subset C$ entraîne $\vee B \in C$. Il revient d'ailleurs au même de dire que C est stable pour le Sup fini et pour $\uparrow$. Avec ces précisions, voici le second lemme :

LEMME 4-2. Soit T un treillis algébrique. La classe $\mathcal{C}$ des parties de T stables pour $\vee$ (infini, non vide) et pour $\downarrow$ (ou, ce qui revient au même, pour $\vee$ fini, $\uparrow$ et $\downarrow$) est une classe compacte.

Tout d'abord, il est immédiat que la classe $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection infinie. Notons aussi que pour chaque $C \in \mathcal{C}$ non vide on a $\vee C \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est stable pour $\vee$ (non vide).

Soit alors $C_i, i \in I$ une famille infinie dans $\mathcal{C}$. Désignons par $\mathcal{J}$ la classe des parties finies J de I , et, pour chaque $J \in \mathcal{J}$, posons :

$$C_J = \bigcap_{i \in J} C_i ; \quad y_J = \vee C_J$$

Supposons qu'aucune intersection finie C_J ne soit vide. On a alors $y_J \in C_J$, d'après ce qui précède, puisque $C_J \in \mathcal{C}$ est stable pour $\vee$ et non vide. La famille $y_J, J \in \mathcal{J}$ est filtrante décroissante dans T . Posons $y = \bigwedge_{J \in \mathcal{J}} y_J$, i.e. $y_J \downarrow y$. D'autre part, pour chaque $J \in \mathcal{J}$, on a :

$$C_{J'} \subset C_J \text{ et } y_{J'} \in C_J \text{ pour } J' \supset J$$

Comme C_J est stable pour $\downarrow$, il en résulte $y \in C_J$. Par suite $y \in \bigcap_{J \in \mathcal{J}} C_J = \bigcap_{i \in I} C_i$, et cette intersection n'est pas vide – ce qui achève la démonstration du lemme.

Revenons à la démonstration du théorème 4-1.

Pour tout $x \in T$ et tout $A \in \mathcal{A}$, M^x et M_A appartiennent à la classe $\mathcal{C}$ du lemme 4-2. La classe stable pour $\cap$ engendrée par ces éléments est donc encore une classe compacte, ainsi, d'après le lemme 4-1, que la classe stable pour $\cup$ finie et $\cap$ infinie qu'elle engendre. Mais cette classe n'est autre que la classe des fermés de la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$. Cette topologie est donc quasi-compacte, et compacte si, de plus, elle est séparée.

Dans ce dernier cas (topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ séparée, donc compacte), le treillis T , muni de cette topologie, est à ordre partiellement fermé : car M^x est du type M^I , donc fermé, pour tout $x \in T$, et M_x est manifestement stable pour $\downarrow$ et $\vee$ -héréditaire, donc fermé du type M_A . Nous verrons qu'en fait T est COF (voir ci-dessous la démonstration du théorème 4-2).

COROLLAIRE. Si la topologie sci d'un treillis COF T est minimale, sa topologie scs est maximale, i.e. sa topologie COF coïncide avec la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$.

De fait, si la topologie sci de T est minimale, la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ est plus fine que la topologie COF de T . Elle est donc séparée, comme celle-ci, donc

elle-même compacte, d'après le théorème. Etant compacte et plus fine que la topologie séparée COF, elle coïncide avec celle-ci, d'après le lemme 2-1.

N.B. — Ce corollaire précise, dans un cas particulier, l'énoncé fondamental du corollaire du théorème 3-2 : la seule topologie COF possible associée à la topologie sci minimale est la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$. J'ignore si la réciproque est vraie, n'ayant trouvé ni démonstration, ni contre-exemple. Je conjecturerais volontiers qu'il en est bien ainsi, à savoir qu'un treillis COF à topologie scs maximale est aussi à topologie sci minimale.

Le quatrième théorème de structure

D'après les lemmes 4-1 et 4-2, la topologie engendrée par les complémentaires des éléments de la classe $\mathcal{C}$ est quasi-compacte. Nous l'appellerons la $\mathcal{C}$ -topologie. Cette $\mathcal{C}$ -topologie est compacte si et seulement si elle est séparée. D'autre part, elle est plus fine que la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ définie ci-dessus (puisque les M^x , $x \in T$ et les M_A , $A \in \mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{C}$). Pour une comparaison plus précise, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 4-3. Avec les notations du lemme 4-2, pour tout $C \in \mathcal{C}$, et non vide, on a :

$$M^C = M^{VC} ; M_C \in \mathcal{A} \quad (\vee\text{-héréditaire et stable } \downarrow)$$

En effet, C étant non vide, on a $\vee C \in \mathcal{C}$ et par suite $M^{VC} \subset M^C$. L'inclusion inverse étant toujours vraie, l'égalité en résulte.

Soit x_i une famille filtrante décroissante dans M_C , et $x = \bigwedge x_i$ sa limite monotone. Pour chaque indice i , il existe $y_i \in C$ avec $x_i > y_i$. La famille x_i étant décroissante, on a aussi $x_i > \bigvee_{j \geq i} y_j = z_i$ avec $z_i \in C$ (stable $\vee$ non vide). Mais les z_i forment une famille filtrante décroissante dans C . Leur limite monotone $z = \bigwedge z_i$ est donc dans C (stable $\downarrow$), et $x_i > z_i$ donne $x_i > z = \bigwedge z_i$ et donc aussi $x = \bigwedge x_i > z$. Donc $x \in M_C$, et M_C est stable pour $\downarrow$.

THÉORÈME 4-2. (QUATRIÈME THÉORÈME DE STRUCTURE). Si l'une des deux topologies $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ d'un treillis T est séparée, l'autre l'est aussi. Elles coïncident alors, sont compactes et font du treillis T un treillis COF.

Supposons séparée la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$. La $\mathcal{C}$ -topologie, plus forte, est séparée elle aussi, donc compacte (puisque déjà quasi-compacte). Etant compacte et plus forte que la topologie séparée $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$, elle coïncide avec celle-ci d'après le lemme 2-1.

Supposons maintenant la $\mathcal{C}$ -topologie séparée, donc compacte. Soient x et y deux points distincts dans T avec, par exemple, $x \prec y$, soit $M_x \cap M^y = \emptyset$. M_x et M^y sont fermés pour la $\mathcal{C}$ -topologie, donc, ici, compacts et admettent donc, dans l'espace T compact pour sa $\mathcal{C}$ -topologie, deux voisinages ouverts disjoints. Or si l'on désigne par $\mathcal{C}_1$ la classe stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{C}$, les complémentaires des éléments de $\mathcal{C}_1$ forment une base de la $\mathcal{C}$ -topologie. Il existe donc B et B' dans $\mathcal{C}_1$ tels que :

$$M_x \subset B^C ; M^y \subset B'^C ; B^C \cap B'^C = \emptyset$$

D'après le lemme 4-3, tout élément $B \in \mathcal{C}_1$, i.e. de la forme $C_1 \cup \dots \cup C_n$ ($C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, \dots, n$) vérifie $M_B = \bigcup M_{C_i} \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion finie (lemme 4-1), et $M^B = \bigcup M^{VC_i}$ est de la forme M^I , $I \in \mathcal{J}$. Les relations

$$M_x \subset \bigcap M^B \subset B^C ; M^y \subset \bigcap M_{B'} \subset B'^C$$

signifient donc que M_x et M^y admettent deux voisinages disjoints, le premier du type $\bigcap M^I$ et le second du type $\bigcap M_A$. Donc la topologie $\bigcap M^I - \bigcap M_A$ est elle-même séparée.

Ces deux topologies coïncident donc et sont compactes, d'après la première partie de la démonstration. Le critère suivant montre de plus qu'il s'agit d'une topologie COF, ce qui achève la démonstration du théorème 4-2 – et aussi celle du théorème 4-1.

CRITÈRE 4-1. Soit T un treillis algébrique. Pour que la topologie $\bigcap M^I - \bigcap M_A$ soit COF sur T , il faut et il suffit que pour x et $y \in T$ avec $y \prec x$, on puisse trouver dans T une partie finie I et une partie M_A permise pour $\vee$ et stable pour $\downarrow$ avec :

$$M^x \in \bigcap M_A \subset M^I ; M_y \subset \bigcap M^I$$

Il résulte immédiatement du critère 2-1 que la condition est nécessaire. Inversement, supposons la vérifiée. Elle entraîne déjà que la topologie $\bigcap M^I - \bigcap M_A$ est séparée, donc compacte et à ordre partiellement fermé. Montrons qu'elle vérifie le critère 2-1 (donc est COF).

Soit G un ouvert, $x \in T$ et $M^x \subset G$. Pour chaque $y \in G^C$, il existe une partie finie I_y et une partie A_y stable $\downarrow$ et permise pour $\vee$ avec

$$M^x \subset \bigcap A_y \subset M^{I_y} ; y \in \bigcap M^{I_y}$$

Le fermé G^C , compact dans T , est couvert par un nombre fini de tels ouverts $\bigcap M^{I_{y_i}}$, et on a donc

$$M^x \subset \bigcap \bigcap A_{y_i} \subset \bigcap M^{I_{y_i}} \subset G$$

Or, la classe $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion finie (lemme 4-1), donc $\bigcap \mathcal{A}_{y_i}$ est encore du type $\mathcal{C}M_A$. De même, la classe des M^I est manifestement stable pour l'intersection finie, et $\bigcap M^{I_{y_i}}$ est encore du type M^I . Donc le critère 2-1 est satisfait, et le treillis est COF.

Remarque. — L'identité des classes stables pour $\bigcup$ finie et $\bigcap$ infinie engendrées par la classe $\mathcal{C}$ et la classe $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ est une propriété combinatoire très surprenante. Mais nous ne l'avons établie que moyennant une hypothèse de séparation (théorème 4-2). J'ignore si elle subsiste dans le cas général.

Notons aussi qu'il existe certainement des treillis COF qui ne sont ni $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$, ni $\mathcal{C}M_I - \mathcal{C}M^A$. Il suffit, par exemple, de considérer le treillis $T \times T'$ produit de deux treillis COF T et T' (il est lui-même COF, voir plus loin). Si T est $\mathcal{C}M^I$ et T' $\mathcal{C}M_I$, le treillis $T \times T'$ ne peut pas appartenir à l'un de ces types simples.

Exemple simple : le treillis $\mathcal{H}$ des couples $(F, G) = (\overline{A}, \overset{\circ}{A})$ $F \in \mathcal{F}(E)$, $G \in \mathcal{G}(E)$ avec $F \supset G$, où E est un espace localement compact, voir [9], pages 11-12.

Critère pour la topologie scs maximale ($\mathcal{C}M_A$)

THÉORÈME 4-3. (CINQUIÈME THÉORÈME DE STRUCTURE). Soit T un treillis COF. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) La topologie scs de T est maximale ($\mathcal{C}M_A$)
- b) Toute application f croissante et $\downarrow$ -continue de T dans un autre treillis COF T' est scs.

Soit f croissante de T dans T' . D'après le théorème 1-4, elle est $\downarrow$ -continue si et seulement si l'image inverse d'un fermé scs maximal de T' est un fermé scs maximal de T . Ainsi, quelle que soit la topologie COF de T' , tout fermé scs $M_{F'}$, étant du type M_A , a pour image inverse $f^{-1}(M_{F'})$ une partie de type M_A , $A \in \mathcal{A}$ dans T , donc fermée si T a la topologie scs maximale. Ainsi a) entraîne b).

Inversement, supposons remplie la condition b), et soit A une partie de T stable pour $\downarrow$ et permise pour $\vee$. Il est immédiat que l'indicatrice $\mathbf{1}_A$ constitue une application croissante et $\downarrow$ -continue de T dans le treillis COF $T' = \{0, 1\}$. D'après la condition b), cette indicatrice est scs. En particulier, A est fermée, comme image inverse du fermé scs de $T' = \{1\}$. Ainsi b) entraîne a).

Voici maintenant quelques importants corollaires. On notera que le corollaire 2, notamment, suggère fortement la conjecture selon laquelle tout

treillis COF admettant la topologie scs maximale a nécessairement aussi la topologie sci minimale.

COROLLAIRE 1. Soient T et T' deux treillis COF. Si T a la topologie scs maximale, toute érosion de T dans T' est scs et toute dilatation de T' dans T est sci.

En effet, toute érosion est $\downarrow$ -continue et croissante. Si T a la topologie scs maximale, toute érosion de T dans un treillis COF quelconque est donc scs d'après la condition b) du théorème. D'après le corollaire 1 du théorème 3-4, toute dilatation de T' dans T est alors sci, puisque l'érosion associée est scs.

COROLLAIRE 2. Si E est un espace localement compact et T un treillis COF admettant la topologie scs maximale $\mathcal{C}M_A$, une application f de E dans T est sci si et seulement si pour tout $z \in T$ l'image inverse $f^{-1}(M^z)$ est fermée dans E .

La condition est nécessaire puisque M^z est toujours un fermé sci dans T . Inversement, si T a la topologie scs maximale et si l'érosion $z \rightarrow s(z) = f^{-1}(M^z)$ applique T dans le treillis COF $\mathcal{F}(E)$, cette érosion est scs, d'après le corollaire 1, et f est sci d'après la condition a) du critère 3-2.

COROLLAIRE 3. Soient T et T' deux treillis COF. Si T a la topologie scs maximale, une application f croissante de T dans T' est scs si et seulement si pour tout $z' \in T'$ l'image inverse $f^{-1}(M_{z'})$ est fermée dans T .

Cette condition, évidemment nécessaire, est suffisante, car elle entraîne que f est $\downarrow$ -continue (condition c) du théorème 1-4) donc scs d'après la condition b) du théorème 4-3.

COROLLAIRE 4. Soient T et T' deux treillis COF, admettant l'un et l'autre leur topologie scs maximale $\mathcal{C}M_A$. Alors, toute anamorphose α de T sur T' est continue, ainsi que l'anamorphose inverse.

C'est là une conséquence immédiate du corollaire 1 : en tant qu'érosion, α est scs, puisque T a sa topologie scs maximale, et sci, en tant que dilatation, puisque, cette fois, T' a, lui aussi, la topologie $\mathcal{C}M_A$. Même raisonnement pour l'anamorphose inverse.

Critères pour la topologie sci minimale ($\mathbb{C}M^I$)

Ces critères sont moins spectaculaires. Enonçons les pourtant.

CRITÈRE 4-2. Un treillis COF T admet la topologie sci minimale si et seulement si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- a) Pour tout $z \in T$, $M^z = \bigcap \{ M^I, I \in \mathcal{J}, \overset{0}{M}^I \supset M^z \}$
- b) Tout ouvert scs $G = \mathbb{C}M_F$ est de la forme :

$$G = \left\{ \overset{0}{M}^I, I \in \mathcal{J}, M^I \subset G \right\}$$

- c) Pour tout fermé F , $M^F = \bigcap \{ M^I, I \in \mathcal{J}, \overset{0}{M}^I \supset M^F \}$
- d) Pour tout fermé F , $M^F = \bigcap \{ M^I, I \in \mathcal{J}, M^I \supset M^F \}$

La condition d) exprime exactement que la topologie sci de T est engendrée par les $M^I, I \in \mathcal{J}$ (ensemble des parties finies de T). Il reste à vérifier l'équivalence des quatre propriétés énoncées. C'est un simple exercice sur la propriété d'intersection finie dont je laisse le soin au lecteur.

Plus intéressant, peut-être, est le théorème suivant.

THÉOREME 4-4. Un treillis COF T a la topologie sci minimale si et seulement si pour toute famille filtrante décroissante B_i dans $\mathcal{P}(T)$ on a :

$$(a) \quad \bigwedge \bigcap M_{B_i} = \bigwedge \bigcap M_{\overline{B_i}}$$

ou encore : si et seulement si pour toute famille $x_i, i \in I$ dans T filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$ on a :

$$(b) \quad \bigwedge \bigcap_{B \in \mathcal{B}} M_{x(B)} = \bigwedge \bigcap_{B \in \mathcal{B}} M_{\overline{x(B)}} = \underline{\lim} x_i$$

L'équivalence des relations (a) et (b) est immédiate, puisque les $x(B), B \in \mathcal{B}$ forment une famille filtrante décroissante dans $\mathcal{P}(T)$, et qu'inversement toute famille filtrante décroissante B_i dans $\mathcal{P}(T)$ peut être mise sous cette forme.

Supposons que T a la topologie sci minimale, et montrons la relation (b). Soit x_i une famille filtrée dans T . La topologie de T étant $\mathbb{C}M^I$, on aura

$$x < \underline{\lim} x_i$$

si et seulement si pour tout $z \in T$ tel que $x \in \mathbb{C}M^z$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $x(B) \subset \mathbb{C}M^z$, c'est-à-dire $x(B) \cap M^z = \emptyset$ ou encore $z \notin M_{x(B)}$. Mais ceci équivaut à :

si $z \in M_{x(B)}$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, alors $z \in M_x$, donc à :

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M_{x(B)} \subset M_x$$

ou encore :

$$x < \bigwedge \bigcap M_{x(B)}$$

Par suite, on a bien $\lim x_i = \bigwedge \bigcap M_{x(B)}$.

Inversement, supposons vraies les relations (a) et (b). Pour tout $x \in T$, M_x est l'intersection des $\mathcal{C}M^I$ (I parties finies de T) qui le contiennent. Comme la classe des M^I est stable pour la réunion finie, les $\mathcal{C}M^I$ qui contiennent M_x forment une famille filtrante décroissante dans $\mathcal{P}(T)$. Posons, pour simplifier :

$$B_I = \mathcal{C}M^I$$

$B_I = M_{B_I}$, puisque B_I est $\vee$ -héréditaire, de sorte qu'il vient :

$$B_I \subset \overline{B_I} \subset M_{\overline{B_I}}$$

Or on a $x = \bigwedge \{B_I : B_I \supset M_x\}$. D'après a) il vient donc :

$$x = \bigwedge \bigcap \{\overline{B_I} : B_I \supset M_x\} = \bigwedge \bigcap \{M_{\overline{B_I}} : B_I \supset M_x\}$$

L'ensemble de droite est $\vee$ -héréditaire, comme intersection d'ensembles $\vee$ -héréditaires, et contient M_x . Or, il est clair que $x \in M_A$ et $x = \bigwedge M_A$ entraînent $M_x = M_A$. On trouve donc :

$$M_x = \bigcap \{M_{\overline{B_I}} : \mathcal{C}M^I \supset M_x\}$$

Ainsi, pour deux points distincts x et y dans T , avec par exemple $x \not\leq y$, i.e. $y \notin M_x$, on peut trouver une partie finie I de T avec :

$$M_x \subset \mathcal{C}M^I \subset \mathcal{C}\overset{\circ}{M}^I \subset M_{\overline{B_I}} \text{ et } M^y \subset \mathcal{C}M_{\overline{B_I}}$$

Cela signifie que la topologie engendrée par les $\mathcal{C}M^I$ et les $\mathcal{C}M_{\overline{B_I}}$ est séparée. Or elle est manifestement moins fine que la topologie compacte (COF) de T , puisque les M^I et les $M_{\overline{B_I}}$ sont fermés pour cette dernière. D'après le lemme 2-1, ces deux topologies sont donc identiques. Mais cela revient bien à dire que les $\mathcal{C}M^I$ engendrent la topologie sci de T : T a donc bien la topologie sci minimale.

Compléments

Si B est une partie fermée d'un treillis COF T et complètement réticulée pour l'ordre induit par T , B constitue elle-même un treillis COF (avec un Sup et un Inf qui ne coïncident pas, en général, avec $\vee$ et $\wedge$). Il n'est pas vrai, en général, qu'une propriété d'extrémalité de la topologie de T (sci minimale, scs maximale *etc.*) se transmette à B . Dans le cas particulier cependant où B est le domaine d'invariance d'une ouverture scs sur T , on a les résultats suivants :

THÉORÈME 4-5. Soit T un treillis COF et B une partie fermée de T stable pour $\vee$ (donc $0 \in B$ et B est complètement réticulée). Alors B est un treillis COF. Si la topologie sci de T est minimale ou si sa topologie scs est maximale, B possède la même propriété.

Soit γ l'ouverture admettant B comme domaine d'invariance, ouverture scs puisque B est fermé (théorème 3-6), donc $\downarrow$ -continue (théorème 3-5). Soit T' un treillis COF quelconque, et f une application croissante et $\downarrow$ -continue de B dans T' . B étant stable pour $\downarrow$, l'application $f' = f \circ \gamma$ de T dans T' est encore $\downarrow$ -continue. Si T est $\mathcal{C}M_A$, f' est scs, d'après le théorème 4-3. La restriction f de f' au fermé B est donc elle-même scs. Il en résulte (théorème 4-3) que B a elle-même la topologie scs maximale.

Supposons maintenant que T ait la topologie sci minimale. Nous désignerons par γ l'ouverture scs sur T admettant B comme domaine d'invariance.

Soit F un fermé de B , c'est-à-dire (B étant fermé dans T) un fermé de T contenu dans B , $F \subset B$. Dans T , F est l'intersection des M^I qui le contiennent (I , partie finie de T). Soit $I = \{x_1, \dots, x_k\}$ une partie finie de T avec $F \subset M^I$. Pour $i = 1, \dots, k$ posons $F_i = F \cap M^{x_i}$. On a $\vee F_i \in B$, B étant stable pour $\vee$, et $\vee F_i < x_i$ entraîne donc $\vee F_i < \gamma(x_i)$, soit $F_i \subset M^{\gamma(x_i)}$. Ainsi :

$$F \subset B \cap M^I \text{ équivaut à } F \subset B \cap M^{\gamma(I)}$$

F étant l'intersection des M^I qui le contiennent, on en déduit que F est aussi l'intersection des parties de la forme $B \cap M^{\gamma(I)}$ qui le contiennent (car $M^{\gamma(I)} \subset M^I$). Comme les $\gamma(I)$ sont des parties finies de B , il en résulte bien que le treillis COF B a la topologie sci minimale.

THÉOREME 4-6. Soient T un treillis COF, ϕ une fermeture scs sur T , B son domaine d'invariance, qui est lui-même un treillis COF pour l'ordre induit et la topologie (induite par les ouverts saturés pour ϕ) $\mathcal{G}_1$ (corollaire 2, théorème 3-7). Alors, muni de cette topologie $\mathcal{G}_1$, le treillis B a la topologie sci minimale ou la topologie scs maximale dès que T possède lui-même cette propriété.

D'après le théorème 3-7, pour tout $b \in B$ et tout ouvert $G \supset M^b$, on peut trouver un fermé F avec

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$$

Si T a la topologie $\mathcal{C}M^I$, on peut de plus trouver une partie finie I avec

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^I \subset M^I \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(F)}$$

ce qui entraîne

$$M^b \subset \overset{\circ}{M}^{\phi(I)} \subset M^{\phi(I)} \subset M^{\phi(F)} \subset G$$

Donc M^b admet un système fondamental de voisinages fermés sci de type $M^{\phi(I)}$, c'est-à-dire $M^{I'}$ avec I' fini $\subset B$. Cela signifie que les $M^{\phi(I)} \cap B$ engendrent la topologie sci de B , i.e. que cette dernière est elle-même $\mathcal{C}M^I$.

Supposons maintenant que T ait sa topologie $\mathcal{C}M_A$. Si f est une application croissante et $\downarrow$ -continue du treillis B dans un treillis COF T' , l'application $f' = f \circ \phi$ de T dans T' est encore $\downarrow$ -continue, donc scs (théorème 4-3). Soit $M_{F'}$ un fermé de T' . Pour $x \in B$, i.e. $x \in \phi(x)$, $f(x) = f\phi(x) \in M_{F'}$ équivaut à $x \in B \cap f'^{-1}(M_{F'})$ donc à $\phi(x) \in f'^{-1}(M_{F'})$, fermé scs, puisque f' est scs.

Pour $x \in B$, i.e. $x = \phi(x)$, on a $f(x) = f\phi(x) = f'(x)$, et par suite $f^{-1}(M_{F'}) = f'^{-1}(M_{F'}) \cap B$ pour tout fermé $M_{F'}$ de T' . Comme f' est scs, $f'^{-1}(M_{F'}) = M_F$ est un fermé scs de T . Mais $M_F \cap B = \phi^{-1}(M_F) \cap B$ est un fermé scs de B (théorème 3-7, corollaire 2). Donc f est scs sur B . Par suite B est $\mathcal{C}M_A$ (théorème 4-3) puisque f est une application $\downarrow$ -continue quelconque. ■

Voici un théorème plus général, très utile en pratique :

THÉOREME 4-7. Soit T un treillis COF, ψ une application scs croissante et idempotente de T dans lui-même, et B son domaine d'invariance, qui est un treillis COF pour l'ordre induit et la topologie définie au théorème 3-8. Alors, si T a sa topologie sci minimale, ou sa topologie maximale, le treillis COF B possède la même propriété.

On procède comme pour la démonstration du théorème 3-8 : le domaine $\vee$ B d'extensivité est un treillis COF, $\mathcal{C}M^I$ ou $\mathcal{C}M_A$ en même temps que T (théorème

4–5). La restriction ϕ de ψ à B étant une fermeture scs, le théorème 4–6 permet de conclure.

Note sur le chapitre 4.

Voici l'équivalence de la présente terminologie avec celle de [10].

Présente terminologie	Terminologie Scott et Lawson
Topo $\mathcal{C}M^I$ (sci minimale)	Upper topology
Topo $\mathcal{C}M_I$ (scs minimale)	Lower topology
Topo $\mathcal{C}M^A$ (sci maximale)	Scott topology
Topo $\mathcal{C}M_A$ (scs maximale)	Topo de Scott du treillis dual
Topo $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$	Topo de Lawson du treillis dual
Topo $\mathcal{C}M_I - \mathcal{C}M^A$	Lawson topology
$\mathcal{C}$ -topologie	lim-Inf topology, ou $\mathcal{C}$ -topology

De même :

les lemmes 4–1 et 4–2	équivalent à	Lemme III–3–5 et Prop. III–3–6 dans [10]
les théorèmes 4–1 et 4–2	équivalent à	Théorèmes III–1–9 et III–3–9
le théorème 4–3	équivalent à	Prop. II–2–1

Par contre, les importants corollaires du théorème 4–3 ne figurent pas dans [10], ni les théorèmes suivants (4–4 à 4–7).

Chapitre V

Les treillis à Sup continu

Si T est un treillis COF, nous avons vu (théorème 3-4, corollaire 2) que l'application $F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T est sci et, de même, $F \rightarrow \wedge F$ est scs. Nous allons nous intéresser, dans ce chapitre, aux treillis dans lesquels l'une de ces applications est continue. Quitte à remplacer T par le treillis dual T^* , il suffit d'examiner la continuité du Sup. L'exemple le plus simple de treillis COF à Sup continu est celui du treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace localement compact E . Mais il y en a d'autres. Commençons par quelques résultats simples, et, tout d'abord, rappelons un résultat qui nous sera utile à plusieurs reprises.

LEMME 5-1. Soit E un espace localement compact et $\mathcal{K}(E)$ l'espace des compacts de E muni de la topologie myope. Une fermeture ϕ sur $\mathcal{K}(E)$ est scs si et seulement si son domaine d'invariance $\mathcal{B}$ possède la propriété suivante : Tout compact $B \in \mathcal{B}$ admet un système fondamental de voisinages compacts appartenant à $\mathcal{B}$. Autrement dit : pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout ouvert G contenant B , il existe $B' \in \mathcal{B}$ tel que :

$$B \subset \overset{\circ}{B'} \subset B' \subset G$$

La démonstration, d'ailleurs simple, est donnée dans [9]. On peut aussi utiliser le théorème 3-7.

THÉOREME 5-1. Soit T un treillis COF. Si l'application $F \rightarrow \vee F$ est scs (donc continue) de $\mathcal{F}(T)$ dans T , alors l'application $x \rightarrow M_x$ de T dans $\mathcal{F}(T)$ est continue (et T^* possède les propriétés énoncées au théorème 2-4). En fait, il suffit même de supposer la continuité, pour tout $x \in T$ fixé, de l'application $z \rightarrow z \vee x$ de T dans lui-même.

Il suffit, évidemment, de démontrer la dernière partie de l'énoncé. Soit x_i , $i \in I$ une famille filtrée convergeant vers x dans T . L'application $x \rightarrow M_x$ étant scs, puisque T est COF, on a $\overline{\lim} M_{x_i} \subset M_x$ dans $\mathcal{F}(T)$. Soit $z \in M_x$, i.e. $z > x$. Posons, pour chaque $i \in I$, $z_i = z \vee x_i$, d'où $z_i \in M_{x_i}$. Si l'application $y \rightarrow y \vee z$ est continue, la famille filtrée z_i converge vers $z \vee x = z$. D'après les propriétés de la convergence dans $\mathcal{F}(T)$, cela entraîne $M_x \subset \underline{\lim} M_{x_i}$. Donc $M_{x_i} \rightarrow M_x$ dans $\mathcal{F}(T)$, et l'application $x \rightarrow M_x$ est continue.

CRITÈRE 5-1. Soit T un treillis COF. L'application $F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T est scs, et donc continue, si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée.

- a) L'application $F \rightarrow M^{\vee F}$ de $\mathcal{F}(T)$ dans lui-même est scs
- b) L'application $F \rightarrow M_{\vee F}$ de $\mathcal{F}(T)$ dans lui-même est sci (et donc continue).

D'après le critère 3-1 (condition c)), la condition a) de l'énoncé est nécessaire et suffisante pour que $F \rightarrow \vee F$ soit scs. D'après ce même critère 3-1, l'application $F \rightarrow M_{\vee F}$ est scs, puisque $F \rightarrow \vee F$ est sci. Elle sera donc continue si elle est sci.

Supposons $F \rightarrow \vee F$ continue. D'après le théorème 5-1 (et l'énoncé dual du théorème 2-4), pour tout ouvert G dans T , M^G est un ouvert scs. Or $M_{\vee F} \in \mathcal{F}_G$ équivaut à $\vee F \in M^G$. Comme $F \rightarrow \vee F$ est scs, l'image inverse par cette application de l'ouvert scs M^G est ouverte dans $\mathcal{F}(T)$. Donc $F \rightarrow M_{\vee F}$ est sci.

Inversement, supposons $F \rightarrow M_{\vee F}$ sci, donc continue (d'après ce qui précède). Avec $F = \{x\}$, il en résulte la continuité de l'application $x \rightarrow M_x$ de T dans $\mathcal{F}(T)$. D'après le théorème 2-4, pour tout ouvert G de T , M^G est alors un ouvert scs, et tout ouvert scs est de ce type. Comme $\vee F \in M^G$ équivaut à $M_{\vee F} \in \mathcal{F}_G$ et que l'image inverse de $\mathcal{F}_G$ par l'application $F \rightarrow M_{\vee F}$ est ouverte dans $\mathcal{F}(T)$, il en résulte bien que $F \rightarrow \vee F$ est scs, et donc continue.

Venons en maintenant au résultat principal.

Le sixième théorème de structure

THÉORÈME 5-2. (SIXIÈME THÉORÈME DE STRUCTURE). Dans un treillis COF T , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) L'application $F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T est continue.
- b) Pour tout $x \in T$, M^x admet un système fondamental de voisinages de la forme M^z , $z \in T$, i.e. pour tout ouvert $G \supset M^x$ il existe $z \in T$ tel que :

$$M^x \subset \overset{o}{M}^z \subset M^z \subset G$$

- c) Les limites supérieures monotone et topologique coïncident, autrement dit pour toute famille x_i dans T filtrée par base de filtre $\mathcal{B}$ on a :

$$\overline{\lim} x_i = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \bigvee_{i \in B} x_i = \text{LMS } x_i$$

L'application $F \rightarrow M^{\vee F}$ est une fermeture sur $\mathcal{F}(T)$, dont le domaine d'invariance est constitué des fermés de la forme M^x , $x \in T$. D'après le lemme 5-1 appliqué à l'espace $\mathcal{K}(T) = \mathcal{F}(T)$, cette fermeture est scs si et seulement si la condition b) est remplie. L'équivalence de a) et b) en résulte, par la condition a) du critère 5-1.

Montrons que a) entraîne c). Soit x_i , $i \in I$ une famille dans T filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$. La famille $\overline{x(B)}$, $B \in \mathcal{B}$ est filtrante décroissante dans $\mathcal{F}(T)$ ($\mathcal{B}$ étant muni de l'ordre défini par $B > B'$ si $B \subset B'$) et l'application $F \rightarrow \vee F$ étant scs, il vient

$$\vee \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{x(B)} = \lim \downarrow (\vee \overline{x(B)}) = \lim \downarrow (\vee x(B))$$

(la deuxième égalité résultant de $\vee A = \vee \overline{A}$ pour toute partie A du treillis COF T). Mais cette limite monotone n'est autre que la limite monotone supérieure LMS x_i . Donc c) est vérifiée.

Enfin, montrons que c) entraîne b). Tout x appartenant au treillis cOF T est $\overline{\lim}$ du filtre de ses voisinages fermés (corollaire 2 du théorème 2-4). Si la condition c) est vérifiée, on a donc:

$$x = \wedge \{ \vee M^F : F \in \mathcal{F}(T), \overset{\circ}{M}^F \supset M^x \}$$

Mais $\overset{\circ}{M}^F \supset M^x$ entraîne $M_{\vee F} \supset \overset{\circ}{M}^{\vee F} \supset \overset{\circ}{M}^F \supset M^x$ et $\vee M^F = \vee F = \vee M^{\vee F}$. On en déduit

$$x > \wedge \left\{ z : z \in T, \overset{\circ}{M}^z \supset M^x \right\}$$

Cette inégalité est en fait une égalité, puisque l'inégalité inverse est triviale, et cette égalité peut s'écrire sous la forme:

$$(b') \quad M^x = \bigcap \left\{ M^z : \overset{\circ}{M}^z \supset M^x \right\}$$

Mais cette relation (b') équivaut à la condition b). Soit en effet un ouvert G contenant M^x . Si la relation (b') est vraie, la propriété d'intersection finie montre qu'il existe $z_1, z_2, \dots, z_n$ avec $M^x \subset \bigcap M^{z_i}$ et $\bigcap M^{z_i} \subset G$. Mais, avec $z = \wedge z_i$ ($i = 1, \dots, n$), $\bigcap M^{z_i} = M^z$ et, s'agissant d'une intersection finie, $\bigcap M^{z_i}$ est l'intérieur de $\bigcap M^{z_i} = M^z$. Donc il existe bien un $z \in T$ avec $M^x \subset M^z \subset G$. (Inversement, la condition b) entraîne trivialement la relation (b')). Ceci achève la démonstration, et permet de plus d'énoncer:

COROLLAIRE 1. Un treillis COF T est à $\vee$ continu si et seulement si pour tout $x \in T$ on a :

$$(b') \quad M^x = \bigcap \left\{ M^z : z \in T, \overset{\circ}{M}^z \supset M^x \right\}$$

COROLLAIRE 2. Tout treillis COF T à $\vee$ continu admet la topologie sci minimale $\mathcal{C}M^I$ et la topologie scs maximale $\mathcal{C}M_A$.

Il est clair, en effet, que la relation (b') entraîne la condition a) du critère 4-2, donc un treillis à $\vee$ continu a la topologie sci minimale, et donc aussi la topologie scs maximale, d'après le corollaire du théorème 4-1.

COROLLAIRE 3. Un treillis COF T est à $\vee$ continu si et seulement si pour tout ouvert G de T on a :

$$(b'') \quad M^G = \bigcup \left\{ \overset{\circ}{M}^x, x \in G \right\}$$

En effet, si T est à $\vee$ continu, M^G est ouvert (théorème 5-1). Si $x \in G$, M^x est contenu dans l'ouvert M^G et, par la condition b) du théorème, il existe $z \in T$ avec $M^x \subset \overset{\circ}{M}^z \subset M^z \subset M^G$. D'où (b'').

Inversement, supposons (b'') vérifiée. Cela entraîne d'abord que M^G est ouvert pour tout ouvert G , donc aussi, d'après la forme duale du théorème 2-4, que $\overset{\circ}{M}^x$ est permis pour $\wedge$ pour tout $x \in T$. Soit alors $G = M^G$ un ouvert scs tel que $x \in G$. D'après (b''), on a $x \in \overset{\circ}{M}^y$ pour un $y \in G$, d'où :

$$x \in \overset{\circ}{M}^y \subset M^y \subset M^G = G$$

Comme $\overset{\circ}{M}^y$ est permis pour $\wedge$, on a aussi $M^x \subset \overset{\circ}{M}^y$, et b) est vérifiée.

Exemple. — Si E est un espace localement compact, on sait que le treillis COF $\mathcal{F}(E)$ vérifie la propriété :

$$\overline{\lim} F_i = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{\bigcup_{i \in B} F_i}$$

pour toute famille F_i filtrée dans $\mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}(E)$ est à $\vee$ continu : l'application

$$\mathcal{V} \rightarrow \overline{\bigcup \{ F, F \in \mathcal{V} \}}$$

de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{F}$ est continue (on peut même remplacer l'union fermée $\overline{\bigcup}$ par la réunion $\bigcup$, car on vérifie facilement que l'union d'une famille $\mathcal{V}$ fermée dans $\mathcal{F}$ est elle-même un ensemble fermé dans E).

En ce qui concerne la propriété b), on remarque d'abord que $\overset{\circ}{M}^x$ est vide si x est un fermé F de E dont le complémentaire n'est pas relativement compact. Par contre, si x représente un fermé de la forme $\complement B$ où B est un ouvert de E tel que $\overline{B}$ soit compact, c'est-à-dire $M^x = \mathcal{F}^{\overline{B}}$, on trouve facilement:

$$\overset{\circ}{M}^x = \mathcal{F}^{\overline{B}}$$

Or tout fermé F de E vérifie

$$F = \bigcap \left\{ B^c : \overline{B} \in \mathcal{K}, F \in \mathcal{F}^{\overline{B}} \right\}$$

qui est une simple variante de (b).

Le corollaire 2 permet de retrouver un résultat antérieur, à savoir que tout treillis $\mathcal{F}(E)$ est du type $\complement M^I - \complement M_A$.

Par contre, l'Inf n'est pas continu sur $\mathcal{F}(E)$. On peut voir qu'un ensemble de la forme M_x , c'est-à-dire:

$$\{ F : F \in \mathcal{F}, F \supset F_0 \}$$

est toujours d'intérieur vide (pour $F_0 \neq \emptyset$, et un espace E connexe).

CRITÈRE 5-2. Soit T un treillis algébrique. Pour que la topologie $\complement M^I - \complement M_A$ (sci minimale – scs maximale) fasse de T un treillis COF à $\vee$ continu, il faut et il suffit que pour tous points x et y de T tels que $y \prec x$ on puisse trouver $z \in T$ et $A \subset T$ permis pour $\vee$ et stable pour $\downarrow$ avec:

$$x \in \complement M_A \subset M^z \text{ et } y \notin M^z$$

La condition est nécessaire: Si T est un treillis COF à $\vee$ continu et si $M_y \cap M^x = \emptyset$, le corollaire 1 du théorème 5-2 et la compacité de T montrent qu'il existe $z \in T$ avec $M^x \subset \overset{\circ}{M}^z \subset M^z$ et $y \notin M^z$. De plus $\overset{\circ}{M}^z$ est un ouvert $\wedge$ -héréditaire, d'après le théorème 5-1, donc de la forme $\complement M_A$.

Inversement, si la condition de l'énoncé est satisfaite, elle exprime en premier lieu que la topologie $\complement M^I - \complement M_A$ est séparée. Le treillis T est donc COF pour cette topologie, d'après le théorème 4-2.

De plus, avec cette topologie, la condition de l'énoncé devient: Si $y \notin M^z$, il existe x avec $M^x \subset \overset{\circ}{M}^z \subset M^z$ et $y \notin M^z$. La relation (b') du corollaire 1 du théorème 5-2 est donc remplie, et par suite, d'après ce corollaire, T est à $\vee$ continu.

Compléments

Pour généraliser la propriété b) du théorème 5–2, posons la définition suivante.

DÉFINITION. Nous dirons qu'une partie B d'un treillis COF T possède la propriété de voisinages majorants, (VM), si tout $b \in B$ admet un système fondamental de voisinage scs de la forme $M^{b'}$, $b' \in B$, autrement dit si pour tout ouvert scs $G = M^G$ et tout $b \in B$

$$(VM) \quad M^b \subset G \Rightarrow \exists b' \in B : M^b \subset \overset{\circ}{M}^{b'} \subset M^{b'} \subset G$$

THÉORÈME 5–3. Soit T un treillis COF. Alors:

- a) Si le domaine d'invariance B d'une fermeture ϕ sur T possède la propriété (VM), alors ϕ est scs.
- b) Pour que le domaine d'invariance de toute fermeture scs sur T possède la propriété VM, il faut et il suffit que le treillis T soit à $\vee$ continu.

a) : Simple corollaire du théorème 3–7.

b) : Si toute fermeture scs sur T a un domaine d'invariance possédant la propriété (VM), T , domaine d'invariance de l'application identique, possède lui-même cette propriété. D'après le théorème 5–2, condition b), T est donc à $\vee$ continu.

Inversement, supposons que T soit à $\vee$ continu, et soit ϕ une fermeture scs sur T . Soit $b \in B$. Le Sup étant continu, on a :

$$b = \wedge \left\{ z : \overset{\circ}{M}^z \supset M^b \right\}$$

Ainsi b est limite dans T de la famille filtrante décroissante des $z \in T$ tels que $\overset{\circ}{M}^z \supset M^b$. Comme ϕ est scs, il en résulte :

$$\phi(b) = b = \wedge \left\{ \phi(z) : \overset{\circ}{M}^z \supset M^b \right\}$$

Or $\overset{\circ}{M}^z \supset M^b$ implique $\overset{\circ}{M}^{\phi(z)} \supset M^b$, puisque $\phi(z) > z$. Par suite :

$$b = \wedge \left\{ \phi(z) : \overset{\circ}{M}^{\phi(z)} \supset M^b \right\}$$

Comme T est compact, la propriété (VM) en résulte.

THÉOREME 5-4. Soit T un treillis COF, ϕ une fermeture sur T , B son domaine d'invariance. L'application $F \rightarrow \phi(VF)$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T est scs si et seulement si B possède la propriété VM.

Pour tout $F \in \mathcal{F}(T)$, posons

$$\phi'(F) = M^{\phi(VF)} = \bigcap \{ M^x, x \in B, M^x \supset F \}$$

Cette fermeture ϕ' sur $\mathcal{F}(T)$ est scs si et seulement si l'application $F \rightarrow \phi(VF)$ est elle-même scs (critère 3-1). D'après le lemme 5-1, il en est ainsi si et seulement si B possède la propriété VM, puisque le domaine d'invariance de la fermeture ϕ' est $\mathcal{B} = \{M^b, b \in B\}$.

THÉOREME 5-5. Si une partie $\tilde{B}$ d'un treillis COF T possède la propriété VM, la partie B de T stable pour $\wedge$ engendrée par $\tilde{B}$ possède encore la propriété VM.

En effet, soit $z = \wedge b_i, i \in I, b_i \in \tilde{B}$ un élément de $\tilde{B}$ et $G = M^G$ un voisinage ouvert scs de z . On a $\bigcap M^{b_i} \subset G$. D'après la propriété d'intersection finie, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ avec $M^{b_{i_1}} \cap \dots \cap M^{b_{i_n}} \subset G$. On sait ([9], p. 227) que, dans ce cas on peut trouver des ouverts $G_1, \dots, G_n$ vérifiant:

$$M^{b_{i_\xi}} \subset G_\xi, \xi = 1, \dots, n \text{ et } \bigcap_{\xi=1}^n G_\xi \subset G$$

D'après la propriété VM de $\tilde{B}$, on peut trouver $b'_\xi \in \tilde{B}, \xi = 1, \dots, n$ avec

$$M^{b_{i_\xi}} \subset M^{b'_\xi} \subset M^{G_i}$$

Posons $b' = \wedge b'_\xi$, donc $b' \in \tilde{B}$. S'agissant d'une intersection finie, on a

$$\overset{o}{M}^{b'} = \bigcap \overset{o}{M}^{b'_\xi}$$

et par suite:

$$M^z \subset \bigcap M^{b_{i_\xi}} \subset \overset{o}{M}^{b'} \subset M^{b'} \subset G$$

Donc B possède la propriété VM.

THÉOREME 5-6. Soit T un treillis COF à $\vee$ continu. Si une ouverture est scs sur T , son domaine d'invariance est un treillis COF à $\vee$ continu. Si une fermeture ϕ est scs sur T , son domaine d'invariance est un treillis COF à $\vee$ continu (pour la topologie induite par les ouverts saturés).

Nous savons déjà que ces domaines d'invariance sont des treillis COF du type $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ (théorèmes 4-5 et 4-6). Si B est le domaine d'invariance d'une ouverture scs, il est fermé dans T . Donc, pour toute famille x_i contenue dans B , $\overline{\lim} x_i$ a la même valeur au sens de B et de T . Comme, de plus, B est stable pour $\vee$ et $\downarrow$, LMS x_i a également la même valeur dans les deux treillis. Donc, l'égalité de ces limites dans T subsiste dans B , et la conclusion résulte alors du théorème 5-2.

Si B est le domaine d'invariance d'une fermeture scs, B possède la propriété VM, puisque T est à $\vee$ continu (théorème 5-3). Mais cette propriété VM exprime exactement que tout $b \in B$ admet, dans la topologie COF de B , un système fondamental de voisinages fermés $M^{b'} \cap B$, $b' \in B$. Cette topologie COF vérifie donc la condition b) du théorème 5-2, et B est donc à $\vee$ -continue pour cette topologie.

THÉORÈME 5-7. Si T est un treillis COF à $\vee$ continu, et ψ une application scs croissante et idempotente, et B son domaine d'invariance, alors B est à $\vee$ -continu (pour la topologie COF du théorème 3-8).

Démonstration analogue à celle du théorème 4-7.

Exemples. — Sur l'espace $\mathcal{F}$ des fermés de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, l'ouverture $F \rightarrow F_K$, avec:

$$F_K = (F \ominus \overset{\vee}{K}) \oplus K$$

(K compact non vide donné) est scs. De même, la classe des fermés complémentaires d'un ouvert convexe est stable pour $\bar{\cup}$ et $\downarrow$, donc fermée dans $\mathcal{F}$ et associée à une ouverture scs. Ainsi:

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, le treillis des fermés ouverts selon un compact non vide donné, et celui des fermés complémentaires d'ouverts convexes sont tous deux COF et à $\vee$ continu.

La fermeture convexe sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ est sci, mais non scs. L'espace des fermés convexes forme encore un treillis COF, mais il n'est plus à $\vee$ continu (par exemple: si x_0 est un point fixe et $x_n \rightarrow \infty$, soit $\{x_n\} \rightarrow \emptyset$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$, le Sup de $\{x_0\}$ et $\{x_n\}$, au sens du treillis des convexes fermés, est le segment $(x_0 x_n)$. Or, la suite $(x_0 x_n)$ a des valeurs d'adhérence, qui sont des demi-droites d'origine x_0 , tandis que le Sup de $\{x_0\}$ et de la limite $\emptyset$ des $\{x_n\}$ est $\{x_0\}$ lui-même: le Sup n'est donc pas continu.

Par contre, la fermeture convexe est continue sur $\mathcal{K}$. Donc, d'après le théorème 5–6, la classe des compacts convexes contenus dans un compact convexe fixe forme un treillis COF à Sup continu.

Note sur le chapitre 5.

La notion de treillis COF à $\wedge$ continu correspond exactement au *continuous lattice* de [10]. Je n'ai pas conservé la terminologie de [10], car *treillis à $\vee$ –continu* m'a paru préférable à *treillis dual d'un treillis continu*, et beaucoup plus explicite.

Le théorème 5–2 (6ème théorème de structure) résume dans un énoncé unique divers résultats de [10], voir notamment théorèmes III–3–11 et VI–3–4.

Les théorèmes 5–3 et 5–4 sont nouveaux. Les suivants (5–5 à 5–7) équivalent au théorème I–2–14 de [10], mais sont introduits ici comme conséquence d'un résultat plus général (le théorème 3–8).

Chapitre VI

Treillis à $\vee$ et $\wedge$ continus

Il existe des treillis COF T pour lesquels les applications $F \rightarrow \vee F$ et $F \rightarrow \wedge F$ de $\mathcal{F}(T)$ dans T sont toutes deux continues. Ils sont caractérisés, d'après le théorème 5-2 et son énoncé dual, par l'égalité des limites monotones et topologiques: pour toute famille x_i dans T filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$, on a:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim} x_i = \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \bigvee_{i \in B} x_i \\ \underline{\lim} x_i = \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \bigwedge_{i \in B} x_i \end{array} \right.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 5-2, un tel treillis T admet la topologie sci minimale et la topologie scs maximale, puisque le Sup est continu. Mais, l'Inf étant lui aussi continu, l'énoncé dual du même corollaire montre aussi que la topologie sci de T est maximale et sa topologie scs est minimale. Ainsi, chacune des deux topologies sci et scs est à la fois minimale et maximale. Cette unicité des topologies sci et scs entraîne, pour le treillis T , une structure algébrique assez particulière. Ainsi, toute partie de T de type M^A (permise pour $\wedge$ et stable pour $\uparrow$) est intersection des parties de type M^I ($I \in \mathcal{J}$, parties finies de T) qui la contiennent, et, de même, toute partie de type M_A est intersection des parties de type M_I .

Le septième théorème de structure

On vient de voir que, pour les treillis COF, la continuité de $\vee$ et de $\wedge$ équivaut à l'égalité des limites montones et topologiques, c'est-à-dire aux relations (a) ci-dessus. On peut se demander s'il peut exister d'autres topologies (non COF) satisfaisant à ces relations. Si on se limite aux topologies séparées, la réponse est négative.

THÉORÈME 6-1. (SEPTIÈME THÉORÈME DE STRUCTURE). Soit T un treillis algébrique. Pour qu'il existe sur T une topologie séparée réalisant la coïncidence des limites monotones et topologiques (c'est-à-dire satisfaisant aux relations (a) ci-dessus) il faut et il suffit que T satisfasse au critère 6-1 ci-dessous. Cette topologie séparée, nécessairement unique, fait alors de T un treillis COF à $\vee$ et $\wedge$ continus.

(N.B. — Je laisse ouverte la question de savoir s'il existe des topologies non séparées vérifiant les relation (a) ci-dessus).

Si T est réduit à un point ($0 = \omega$), le résultat est trivial. Supposons $0 \neq \omega$. Pour toute famille filtrée x_i dans T , on a toujours $\text{LMI } x_i < \text{LMS } x_i$, donc, si (a) est vraie :

$$\underline{\lim} x_i < \overline{\lim} x_i$$

Il en résulte que toute famille x_i a des valeurs d'adhérence (sinon $\overline{\lim} x_i = 0$ et $\underline{\lim} x_i = \omega$, ce qui contredit l'égalité ci-dessus). Il en résulte, classiquement, que la topologie de T est quasi-compacte, et donc compacte si elle est séparée. D'autre part, il est immédiat que les relations (a) font de T un treillis à ordre fermé. T est donc COF, et par suite à $\vee$ et $\wedge$ continus, à cause des relations (a). En combinant ensuite le critère 5-2 et son énoncé dual, on obtient le critère 6-1 ci-après :

CRITÈRE 6-1. Un treillis algébrique T admet une topologie COF, nécessairement unique, assurant la continuité de $\vee$ et de $\wedge$ si pour tout x et tout y dans T tels que $y \prec x$ on peut trouver deux éléments x' et y' dans T tels que :

$$x \notin M_{y'}, \quad y \notin M_{x'}, \quad M_{x'} \cup M_{y'} = T$$

Si E est un espace localement compact, on sait que le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés de E est à $\vee$ continu. Peut-il être aussi à $\wedge$ continu ? Il faut, pour cela, que toute partie $\mathcal{F}_K$ (K compact) de $\mathcal{F}$ soit intersection des parties M_I qui la contiennent, avec $I = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ partie finie de $\mathcal{F}$. Considérons l'inclusion $\mathcal{F}_K \in M_I$. Si $x \in K$, le fermé $F = \{x\}$ est dans $\mathcal{F}_K$, donc dans M_I . Il contient l'un des fermés F_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ces fermés F_i sont donc nécessairement eux-même des ensembles ponctuels $F_i = \{x_i\}$, et le compact K est alors un sous-ensemble de la famille finie x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Autrement dit, tout compact K de l'espace E est une partie finie de E . Comme deux points distincts, dans l'espace localement compact E , admettent des voisinages compacts disjoints, il en résulte aussitôt que $\{x\}$ est un voisinage de x pour tout $x \in E$. Autrement dit, la topologie de E est nécessairement la topologie discrète.

Inversement, d'ailleurs, si E est un ensemble quelconque, nous pouvons le munir de sa topologie discrète, c'est-à-dire de la topologie pour laquelle tout sous-ensemble de E est ouvert (et, aussi bien, fermé) : $\mathcal{G}(E) = \mathcal{F}(E) = \mathcal{P}(E)$. Comme chaque point de E est un ensemble ouvert, une partie K de E ne peut vérifier la propriété du recouvrement fini que si elle est elle-même une partie

finie de E : les compacts de E sont donc les parties finies. Chaque point étant voisinage compact de lui-même, E est localement compact. La topologie de $\mathcal{F}(E)$ est alors engendrée par les $\mathcal{F}^x$ (parties de E ne contenant pas le point $x \in E$, *i.e.* disjointes du compact $\{x\}$) et les $\mathcal{F}_x$ (parties de E contenant x , *i.e.* rencontrant l'ouvert $\{x\}$). Celle de $\mathcal{G}(E)$ est engendrée par les $\mathcal{G}_x$ (parties de E contenant le compact $\{x\}$) et les $\mathcal{G}^x$ (parties de E ne contenant pas l'ouvert $\{x\}$). Autrement dit, ces deux topologies coïncident, et font de $\mathcal{P}(E)$ un treillis COF à $\vee$ continu (en tant qu'espace $\mathcal{F}$) et à $\wedge$ continu (en tant qu'espace $\mathcal{G}$). Ainsi:

THÉOREME 6-2. Soit E un espace localement compact. Pour que le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés de E soit à $\wedge$ continu, il faut et il suffit que la topologie de E soit la topologie discrète. Les parties compactes de E sont alors les parties finies, toute partie de E est ouverte et fermée, les topologies $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont identiques et font de $\mathcal{P}(E)$ un treillis COF dans lequel on a pour toute famille filtrée A_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\lim} A_i = \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} \bigcup_{i \in B} A_i \\ \underline{\lim} A_i = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \bigcap_{i \in B} A_i \end{array} \right.$$

Exemples. — Voyons quelques autres exemples.

THÉOREME 6-3. Soit T un treillis COF totalelement ordonné. Alors le treillis T est à $\vee$ et à $\wedge$ continus, et, pour tout ensemble E , le treillis T^E des applications de E dans T est un treillis COF à $\vee$ et à $\wedge$ continus.

En effet, soit T un treillis COF dans lequel la relation d'ordre est totale. Soient x et y deux points distincts dans T , avec, par exemple, $y \prec x$, et montrons que le critère 6-1 est vérifié. L'ordre étant total, on a $x < y$ strictement (*i.e.* $x \neq y$). Deux cas sont possibles:

- ou bien il n'existe aucun élément $a \in T$ strictement compris entre x et y . Dans ce cas, on a

$$x \notin M_y, y \notin M^x \text{ et } M_y \cup M^x = T$$

- ou bien il existe $a \in T$ avec $x < a < y$, $a \neq x$ et $a \neq y$. Dans ce cas:

$$x \notin M_a, y \notin M^a \text{ et } M_a \cup M^a = T$$

Dans les deux cas, le critère 6-1 est vérifié, de sorte que T est un treillis COF à $\vee$ et à $\wedge$ continus (pour la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_I$).

En ce qui concerne la seconde partie de l'énoncé, rappelons les définitions usuelles:

Si $T_e, e \in E$ est une famille de treillis, l'espace produit:

$$T = \prod_{e \in E} T_e$$

est l'espace des éléments $f \in T$ de la forme $f = (f_e)_{e \in E}$ avec $f_e \in T_e$ pour chaque $e \in E$. Muni de l'ordre $f < f'$ si $f_e < f'_e$ pour chaque $e \in E$, T est un treillis où le Sup et l'Inf de toute famille f_i

$$f = \vee f_i \quad f' = \wedge f_i$$

sont définis par $f(e) = \vee f_i(e), f'(e) = \wedge f_i(e)$ pour tout $e \in E$. Si, pour chaque $e \in E$, T_e est muni d'une topologie, le treillis produit sera toujours (sauf mention explicite du contraire) considéré comme muni de la topologie produit (pour laquelle $f_i \rightarrow f$ équivaut à $f_i(e) \rightarrow f(e)$ pour chaque $e \in E$). Si chacun des treillis topologiques T_e est compact, le treillis topologique produit T est compact, d'après le théorème classique de Tychonoff. De même, si chacun des treillis T_e est à ordre partiellement fermé (resp. à ordre fermé), le treillis produit possède la même propriété. Et encore:

THÉOREME 6-4. Soient $T_e, e \in E$ des treillis COF. Alors le treillis produit T est COF. De plus, si chaque $T_e, e \in E$ a la topologie sci minimale, ou si chaque T_e a la topologie scs maximale, ou si chaque T_e est à $\vee$ continu, ou si chaque T_e est à $\wedge$ continu, le treillis produit possède encore la même propriété.

Démonstration immédiate.

La démonstration de la seconde partie du théorème 6-3 en résulte, en prenant $T_e = T$ pour chaque $e \in E$, le treillis produit étant alors le treillis T^E des applications de E dans T , muni de l'ordre et de la topologie produit.

Un autre exemple intéressant est celui des fonctions lipschitziennes sur un espace métrique E . Soit E un espace métrique, d la distance sur E (avec $d(x,y) < \infty$ pour $x, y \in E$). Une fonction f sur E , à valeurs dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, est dite lipschitzienne, de module $\lambda > 0$, si, pour $x, y \in E$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda d(x,y)$$

Quitte à remplacer d par λd , on peut supposer $\lambda = 1$, et nous appellerons lipschitzienne (sous-entendu: de module $\lambda = 1$) une fonction f vérifiant $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$.

On vérifie sans peine que le Sup et l'Inf (au sens ordinaire) de toute famille f_i de lipschitziennes sur un espace métrique E sont encore des lipschitziennes, de sorte qu'il s'agit bien d'un treillis. Le plus grand élément (plus petit élément) est la fonction f définie par $f(x) = +\infty$ ($f(x) = -\infty$) pour tout $x \in E$.

Notons, d'ailleurs, qu'en dehors de ce plus grand et de ce plus petit élément, toute lipschitzienne f est à valeur finie. En effet, si, par exemple, on a $f(x_0) = +\infty$ pour un $x_0 \in E$, l'inégalité $f(y) \geq f(x_0) - d(x_0, y)$ entraîne $f(y) = +\infty$ pour tout $y \in E$, puisque la distance $d(x_0, y)$ est finie.

THÉOREME 6-5. Si E est un espace métrique, le treillis T des fonctions lipschitziennes sur E est un treillis COF à $\vee$ et $\wedge$ continus (pour la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_I$).

En effet, soient f et g deux lipschitziennes distinctes. Il existe donc un point $x \in E$ et un nombre réel a avec (par exemple) les inégalités strictes :

$$g(x) < a < f(x)$$

Considérons les deux lipschitziennes f_0 et g_0 définies en posant pour tout $y \in E$:

$$f_0(y) = a - d(x, y) \quad ; \quad g_0(y) = a + d(x, y)$$

On a $f \notin M^{g_0}$, $g \notin M_{f_0}$ et $M^{g_0} \cup M_{f_0} = T$.

D'après le critère 6-1, T est donc COF à $\vee$ et $\wedge$ continus.

Remarque. — Ce théorème ne suppose aucune hypothèse spéciale sur l'espace métrique E , qui peut très bien n'être pas compact ni même complet (il est vrai que toute lipschitzienne sur E se prolongeant, par continuité, sur le complété de E , on obtient le même treillis en partant de E ou de son complété).

On notera aussi que l'unique topologie COF sur le treillis des lipschitziennes est celle de la convergence ponctuelle : $f_i \rightarrow f$ si $f_i(x) \rightarrow f(x)$ pour chaque $x \in T$, la limite f étant alors nécessairement lipschitzienne si $f_i \in T$ pour chaque indice i . Ce treillis des lipschitziennes est, en fait, un sous-treillis (= partie stable pour $\vee$ et $\wedge$) fermé du treillis $\mathbb{R}^E$.

Note sur le chapitre 6.

Le théorème 6-1 (7ème théorème de structure) et le critère 6-1 correspondent aux théorèmes VII 2-2 et 2-3 de [10]. Les théorèmes 6-2 à 6-4 sont également dans [10], mais non le théorème 6-5 (le treillis COF des lipschitziennes).

Chapitre VII

Treillis de fonctions

Considérons d'abord le point de vue algébrique. Soit E un ensemble, T un treillis et T^E l'ensemble des applications de E dans T . Muni de l'ordre produit ($g < f$ si $g(x) < f(x)$ dans T pour tout $x \in E$), T^E devient lui-même un treillis algébrique, où le Sup et l'Inf, que nous noterons encore $\vee$ et $\wedge$ sont définis par :

$$(\vee f_i)(x) = \vee f_i(x) ; (\wedge f_i)(x) = \wedge f_i(x)$$

Si le treillis est muni d'une topologie COF, et E étant muni de la topologie discrète, on a vu (théorème 6-3) que le treillis T^E des applications de E dans T , muni de la topologie produit, est lui-même COF. De plus, si T est $\mathcal{C}M^I$, ou $\mathcal{C}M_A$, ou à $\vee$ continu etc., T^E possède lui-même cette propriété. La convergence dans T^E est toujours la convergence ponctuelle : $f_i \rightarrow f$ si $f_i(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in E$.

On peut aussi représenter ces applications de E dans T par leurs sous-graphes, ou leurs surgraphes. Supposons que T soit un treillis COF, et munissons l'ensemble E de sa topologie discrète. L'espace E est alors localement compact, les parties compactes de E n'étant autres que les parties finies. Comme tout sous-ensemble de E est ouvert, toute application f de E dans T est continue. En particulier, le sous-graphe et le surgraphe de f sont tous deux fermés dans l'espace produit $E \times T$. (Il n'y a d'ailleurs pas grand mérite à cela : si une suite x_n converge vers x dans E , on a $x_n = x$ pour n assez grand, et donc aussi $f(x_n) = f(x)$).

L'ensemble E étant toujours muni de sa topologie discrète, T désignant un treillis COF, on peut se demander si la classe des sous-graphes (ou des surgraphes) des applications $f \in T^E$ constitue un sous-ensemble fermé de l'espace $\mathcal{F}(E \times T)$. En fait, cela n'est vrai que moyennant une hypothèse supplémentaire sur le treillis T .

THÉORÈME 7-1. Soit un ensemble muni de sa topologie discrète, et T un treillis COF. Si l'application $z \rightarrow M^z$ (resp. $z \rightarrow M_z$) de T dans $\mathcal{F}(T)$ est continue, alors la classe des sous-graphes (resp. des surgraphes) des applications de E dans T constitue un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F}(E \times T)$ et un treillis COF (pour l'ordre induit par l'inclusion et la topologie induite). Si l'on identifie les applications $f \in T^E$ à leurs sous-graphes (resp. leurs surgraphes), cette structure COF coïncide avec celle de l'espace produit T^E .

En effet, soit $f_i, i \in I$ une famille dans T^E , filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$. Soit, pour chaque indice $i \in I$, Γ_i le sous-graphe de f_i , et supposons que la famille filtrée Γ_i converge vers une limite Γ dans $\mathcal{F}(E \times T)$. Il faut montrer que Γ est encore un sous-graphe, autrement dit que, pour chaque $x \in E$, l'ensemble Γ_x des $z \in T$ tels que $(x, z) \in \Gamma$ est permis pour $\wedge$ et stable pour $\vee$ (Γ sera alors le graphe de l'application f définie par $f(x) = \vee \Gamma_x$).

Soit $z \in \Gamma_x$ et $z' < z$. Montrons $z' \in \Gamma_x$, d'où résultera que Γ_x est permis pour $\wedge$. Comme $(x, z) \in \Gamma$, d'après les règles de la convergence dans $\mathcal{F}(E \times T)$, on peut trouver, pour chaque $i \in I$, un couple $(x_i, z_i) \in \Gamma_i$ avec les convergences $x_i \rightarrow x$ dans E et $z_i \rightarrow z$ dans T . On a aussi $M^{z_i} \rightarrow M^z$ dans $\mathcal{F}(T)$, puisque l'application $z \rightarrow M^z$ est continue. Cette convergence dans $\mathcal{F}(T)$ entraîne l'existence de $z'_i < z_i$ tels que $z'_i \rightarrow z'$ dans T . Comme (x_i, z'_i) appartient à Γ_i , cela implique $(x, z') \in \Gamma$, et Γ_x est donc permis pour $\wedge$. (**N.B.** : Dans cette démonstration, on n'a pas utilisé le fait que la topologie de E est discrète. La conclusion (Γ_x permis pour $\wedge$) subsistera donc si E est un espace topologique quelconque).

Montrons maintenant que Γ_x est stable pour $\vee$. Comme Γ_x est fermé dans T (en tant que section du fermé Γ de $E \times T$), il suffit de montrer qu'il est stable pour le Sup fini. Soient donc z et z' deux éléments de Γ_x , et montrons $z \vee z' \in \Gamma_x$. A nouveau, il existe $(x_i, z_i) \in \Gamma_i$ et $(x'_i, z'_i) \in \Gamma_i$ avec $x_i \rightarrow x$ et $x'_i \rightarrow x$ dans E et $z_i \rightarrow z, z'_i \rightarrow z'$ dans T . La topologie de E étant discrète, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $x_i = x'_i = x$ pour tout $i \in B$, donc aussi $(x, z_i) \in \Gamma_i, (x, z'_i) \in \Gamma_i$ et par suite encore $(x, z_i \vee z'_i) \in \Gamma_i$, puisque Γ_i est un sous-graphe. On a ainsi $z_i \vee z'_i \in \Gamma_x$ pour tout $i \in B$. Cette famille filtrée admet des valeurs d'adhérence, T étant compact, toutes contenues dans le fermé Γ_x . Comme Γ_x est permis pour $\wedge$, il contient aussi $\underline{\lim} z_i \vee z'_i$, qui est l'Inf de ces valeurs d'adhérence, et aussi $z \vee z'$: car, le Sup étant sci dans T , on a $z \vee z' < \underline{\lim} z_i \vee z'_i$. Donc Γ_x est stable pour $\vee$.

Enfin, dans l'espace T^E compact (pour la topologie produit), la famille filtrée f_i admet une valeur d'adhérence f . Donc $f(x)$ est valeur d'adhérence de $f_i(x)$ dans T (puisque la convergence dans T^E est la convergence ponctuelle). Comme $(x, f_i(x)) \in \Gamma_i$, cela entraîne $f(x) \in \Gamma_x$, et $f(x) < \vee \Gamma_x$. En sens inverse, soit $z \in \Gamma_x$ et, comme ci-dessus, pour tout i appartenant à un $B \in \mathcal{B}$, $(x, z_i) \in \Gamma_i$ et $z_i \rightarrow z$. Comme $(x, z_i) \in \Gamma_i$ signifie $z_i < f_i(x)$, on en déduit (l'ordre étant fermé) $z < f(x)$ et $\vee \Gamma_x < f(x)$. On a donc bien $f(x) = \vee \Gamma_x$. L'unicité de cette valeur d'adhérence, dans l'espace compact T , montre qu'en fait on a la

convergence $f_i(x) \rightarrow f(x)$. Ceci ayant lieu pour tout $x \in E$ entraîne $f_i \rightarrow f$ pour la topologie de T^E .

On a ainsi montré que l'application $\Gamma \rightarrow f$ de l'espace compact des sous-graphes dans l'espace compact T^E est continue. Comme cette application est bijective, l'application inverse $f \rightarrow \Gamma$ est, elle aussi, continue (Lemme 2-1), ce qui achève la démonstration.

N.B. — Le fait que la topologie de E soit la topologie discrète a joué un rôle essentiel dans la seconde partie de la démonstration (Γ_x est stable pour $\vee$). Si E est un espace topologique quelconque, même localement compact, il n'est pas vrai, en général, que la classe des sous-graphes des applications scs de E dans T constitue un sous-espace fermé de $\mathcal{F}(E \times T)$.

Notons aussi un point important: pour toute famille f_i dans T^E , le sous-graphe de $\bigwedge f_i$ est l'intersection des sous-graphes T_i des f_i . Mais le sous-graphe de $\bigvee f_i$ n'est nullement, en général, l'union fermée $\overline{\bigcup T_i}$ des sous-graphes, mais seulement l'intersection des sous-graphes contenant la réunion $\bigcup T_i$. Il y a, toutefois, une heureuse exception lorsque l'ordre du treillis T est total.

THÉOREME 7-2. Soit E un espace localement compact et T un treillis COF. Si l'ordre de T est total, la classe des sous-graphes des applications scs de E dans T , et celle des surgraphes des applications sci sont fermées dans $\mathcal{F}(E \times T)$.

En effet, si une famille T_i de sous-graphes fermés converge vers une limite Γ dans $\mathcal{F}(E \times T)$, la première partie de la démonstration du théorème 7-1 s'applique sans modification (en effet, l'ordre de T étant total, T est à $\wedge$ continu, d'après le théorème 6-2, et l'application $z \rightarrow M^z$ est alors continue, d'après l'énoncé dual du théorème 5-1). Pour tout $x \in E$, Γ_x est donc permis pour $\wedge$. L'ordre étant total, toute partie de T est stable pour le $\vee$ fini, et Γ_x , étant de plus fermée, est stable pour $\vee$ infini. Γ est donc bien un sous-graphe.

Lorsque l'ordre de T est total, il est immédiat que la réunion de deux sous-graphes (ou de deux surgraphes) est encore un sous-graphe (un surgraphe) à savoir le sous-graphe du Sup (le surgraphe de l'Inf) des deux fonctions correspondantes. La classe des sous-graphes des applications scs étant, de plus, fermée dans $\mathcal{F}(E \times T)$ est donc stable pour l'union fermée. Comme elle est stable, aussi, pour l'intersection, elle constitue, au sens propre, un sous-treillis de $\mathcal{F}(E \times T)$, et non pas seulement un sous-ensemble complètement réticulé pour l'ordre induit par l'inclusion (le Sup et l'Inf sont les

mêmes dans la classe des sous-graphes et dans $\mathcal{F}(E \times T)$. Il d'agit donc d'un sous-treillis COF à $\vee$ continu:

COROLLAIRE. L'ordre du treillis COF T étant total, l'espace des sous-graphes des applications scs (resp. des surgraphes des applications sci) constitue un sous-treillis fermé, donc COF et à $\vee$ continu (resp. à $\wedge$ continu) de $\mathcal{F}(E \times T)$. En particulier, le sous-graphe du Sup d'une famille d'applications scs (resp. le surgraphe de l'Inf d'une famille d'applications sci) est l'union fermée des sous-graphes (resp. des surgraphes).

Mais on notera bien que ces conclusions ne subsistent pas si l'ordre du treillis T n'est pas total. La classe des fonctions scs constitue encore un treillis, puisque l'Inf d'une famille scs est encore scs ou, en termes de sous-graphes, puisqu'une intersection de sous-graphes fermés est encore un sous-graphe fermé. Mais, la classe de ces sous-graphes n'étant pas, en général, fermée dans $\mathcal{F}(E \times T)$ n'est pas compacte pour la topologie induite, et ne constitue pas non plus un sous-treillis (le Sup ne correspond plus à l'union fermée des sous-graphes). Je n'aborderai pas l'étude de ces treillis non COF dans le cas général, mais considérerai seulement le cas particulier des applications croissantes d'un treillis COF dans un autre.

Treillis d'applications croissantes

Pour l'étude des applications croissantes, il sera intéressant d'introduire la définition suivante, qui correspond, pour un treillis COF, à une propriété plus faible que la continuité du Sup:

DÉFINITION. Soit T un treillis COF. On dira que le Sup est simplement continu sur T , ou que T est à $\vee$ simplement continu si l'application $(x, y) \rightarrow x \vee y$ de $T \times T$ dans T est continue. De même, l'Inf est simplement continu si l'application $(x, y) \rightarrow x \wedge y$ est continue de $T \times T$ dans T .

LEMME 7-1. Si un treillis COF est à $\vee$ simplement continu (resp. à $\wedge$ simplement continu), l'application $x \rightarrow M_x$ (resp. $x \rightarrow M^x$) est continue de T dans $\mathcal{F}(T)$.

Simple corollaire du théorème 5-1.

Nous allons maintenant considérer des applications croissantes d'un treillis T dans un treillis T' , et les caractériser, par exemple, par leurs

sous-graphes (nous laisserons au lecteur le soin de formuler les énoncés duaux relatifs aux surgraphes: il suffit de remplacer les treillis T et T' par les treillis duaux).

LEMME 7-2. Un sous-ensemble Γ de $T \times T'$ est le sous-graphe d'une application croissante f de T dans T' si et seulement si il vérifie les deux conditions ci-après:

- a) Pour tout $x \in T$, la section Γ_x de Γ , c'est-à-dire l'ensemble des $z \in T'$ tels que $(x, z) \in \Gamma$ est un ensemble permis pour $\wedge$ et stable pour $\vee$ dans T' .
- b) Pour tout $(x, z) \in T \times T'$, et $y > x$ dans T , $(x, z) \in \Gamma$ entraîne $(y, z) \in \Gamma$.

En effet, la condition a) exprime que Γ est le sous-graphe de l'application f de T dans T' défini par $f(x) = \vee \Gamma_x$, et la condition b) exprime que cette application f est croissante.

Moyennant certaines restrictions sur les topologies COF de T et T' , nous sommes maintenant en mesure de caractériser la structure du treillis des applications croissantes scs (et, par dualité, sci) d'un treillis COF dans un autre.

THÉOREME 7-3. Soient T et T' deux treillis COF. Si l'application $z \rightarrow M^z$ de T' dans $\mathcal{F}(T')$ est continue, et si le treillis COF T est à $\vee$ simplement continu, alors la classe des sous-graphes des applications croissantes scs de T dans T' est fermée dans $\mathcal{F}(T \times T')$.

Soient, en effet, f_i une famille filtrée d'applications croissantes scs de T dans T' , Γ_i leurs sous-graphes fermés dans $T \times T'$, et supposons que Γ_i converge vers Γ dans $\mathcal{F}(T \times T')$.

Soit Γ_x la section de Γ en un point $x \in T$. Comme l'application $z \rightarrow M^z$ est continue, Γ_x est $\wedge$ -héréditaire (même démonstration que dans le cas du théorème 7-1).

Montrons que Γ_x est stable pour $\vee$. Comme Γ_x est fermé dans T' , il suffit de vérifier que $z \vee z' \in \Gamma_x$ si z et z' sont dans Γ_x . D'après la convergence $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$, si z et z' appartiennent à Γ_x , on peut trouver pour chaque indice i $(x_i, z_i) \in \Gamma_i$ et $(x'_i, z'_i) \in \Gamma_i$ avec les convergences $x_i \rightarrow x$, $x'_i \rightarrow x'$ dans T et $z_i \rightarrow z$, $z'_i \rightarrow z'$ dans T' . Comme Γ_i est le sous-graphe d'une application croissante f_i , les inégalités $f_i(x_i) > z_i$ et $f_i(x'_i) > z'_i$ entraînent $f_i(x_i \vee x'_i) > z_i \vee z'_i$, c'est-à-dire $(x_i \vee x'_i, z_i \vee z'_i) \in \Gamma_i$. Comme le treillis T est à $\vee$ simplement continu, on a la convergence $x_i \vee x'_i \rightarrow x$ dans T , de sorte que pour toute valeur d'adhérence a de la famille filtrée $z_i \vee z'_i$ dans T' , on a $(x, a) \in \Gamma$, soit $a \in \Gamma_x$. Il en résulte

$\lim z_i \vee z'_i \in \Gamma_x$, puisque Γ_x est $\wedge$ -héréditaire (d'après la première partie de la démonstration). Le $\vee$ étant sci, on a $z \vee z' < \lim z_i \vee z'_i$, et donc à nouveau $z \vee z' \in \Gamma_x$ ($\wedge$ -héréditaire). On a ainsi vérifié la condition a) du lemme 7-2.

Soit maintenant $(x, z) \in T$ et $y > x$ dans T . Nous trouvons, à nouveau, $(x_i, z_i) \in \Gamma_i$ avec $x_i \rightarrow x$ et $z_i \rightarrow z$. D'après la continuité simple de $\vee$ dans T et le lemme 7-1, nous avons aussi $M_{x_i} \rightarrow M_x$ dans $\mathcal{F}(T)$. Comme $y \in M_x$, il existe donc $y_i \in M_{x_i}$ avec $y_i \rightarrow y$. Mais, d'après la condition b) du lemme 7-2, $y_i > x_i$ entraîne $(y_i, z_i) \in \Gamma_i$. Par suite, $(y, z) \in \Gamma$, puisque $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$ dans $\mathcal{F}(T \times T')$. Donc Γ vérifie la condition b) du lemme 7-2 – et cela achève la démonstration.

|| **COROLLAIRE.** Sous les mêmes hypothèses, le treillis des applications croissantes scs de T dans T' est COF pour la topologie induite par $\mathcal{F}(T \times T')$.

En effet, identifiant comme ci-dessus une fonction avec son sous-graphe, la classe des applications croissantes scs de T dans T' est, d'après le théorème, un sous-ensemble compact de $\mathcal{F}(T \times T')$. Comme l'inégalité $f < f'$ entre fonctions équivaut à l'inclusion $\Gamma \subset \Gamma'$ des sous-graphes, ce sous-ensemble compact est complètement réticulé et constitue un COF.

N.B. — Il ne s'agit plus cette fois d'un sous-treillis. Le sous-graphe du Sup (au sens du treillis des applications scs) d'une famille d'applications scs croissantes n'est pas, en général l'union fermée des sous-graphes, mais seulement le plus petit sous-graphe fermé contenant cette union. En particulier, on ne sait pas, a priori, si ce treillis des applications scs croissantes est à $\vee$ continu, à topologie sci minimale *etc.* puisque ces propriétés du treillis $\mathcal{F}(T \times T')$ ne lui sont pas transmises automatiquement.

Nous pouvons aussi considérer le cas des dilatations de T dans T' . On a déjà remarqué que le surgraphe Γ d'une dilatation α de T dans T' et le sous-graphe Γ' de l'érosion associée de T' dans T se déduisent l'une de l'autre par une simple transposition des coordonnées, *i.e.* la bijection

$$(x, z) \rightarrow (z, x) \text{ de } T \times T' \text{ sur } T' \times T$$

Ainsi Γ sera le surgraphe d'une dilatation $T \rightarrow T'$ si et seulement si il vérifie, ainsi que son transposé, les conditions du lemme 7-2, Γ sous la forme duale, le transposé Γ' sous la forme directe.

|| **THÉORÈME 7-4.** Soient T et T' deux treillis COF. Si $\wedge$ est simplement continu sur T et $\vee$ simplement continu sur T' , alors la classe des surgraphes des dilatations sci de T dans T' est fermée dans $\mathcal{F}(T \times T')$, et celle des sous-graphes des érosions scs de T' dans T est fermée dans $\mathcal{F}(T' \times T)$.

Compte tenu des remarques ci-dessus, il suffit d'appliquer deux fois le théorème 7–3: une fois, sous forme duale, au surgraphe Γ et une autre fois, sous forme directe, au sous-graphe Γ' qui s'en déduit par transposition. Les conditions du théorème 7–3 sont en effet remplies: dans le sens $T' \rightarrow T$, la continuité de l'application $z \rightarrow M^z$ de T dans $\mathcal{F}(T)$ résulte de la continuité simple de $\wedge$ (lemme 7–1). Dans le sens $T \rightarrow T'$, la continuité de $z \rightarrow M_z$ de T' dans $\mathcal{F}(T')$ résulte de même de la continuité simple de $\vee$.

COROLLAIRE. Dans les mêmes conditions, le treillis des dilatations sci de T dans T' et celui des érosions scs de T' dans T , munis de la topologie induite, sont des treillis COF et la bijection $\alpha \rightarrow \beta$ associant érosion scs et dilatation sci est bicontinue.

Deuxième partie

Treillis distributifs et treillis coprimaires

Chapitre VIII

Preliminaires algébriques

Dans ce chapitre, je présente un certain nombre de notions et de résultats qui seront d'un emploi constant dans toute la suite. Les notations utilisées seront les mêmes que dans la première partie, à une exception (très importante) près : la relation d'ordre sera désormais notée $x \leq y$, et non plus $x < y$, cette dernière notation signifiant désormais l'inégalité stricte. La notation $x \leq y$, naturelle dans le cas des treillis totalement ordonnés, s'est également révélée plus commode pour les treillis monoséparés, qui joueront un rôle fondamental dans toute la suite, et aussi pour l'étude de la coprimarité. Il était dès lors plus simple de l'utiliser dans le cas général.

Nous utiliserons aussi la notation $\dot{M}^x$ (à ne pas confondre avec $\overset{0}{M}^x$, intérieur de M^x) pour désigner la classe des minorants stricts d'un élément x , et de même $\dot{M}_x$ pour celle de ses majorants stricts. En résumé, désormais :

$$\begin{cases} x \leq y \text{ équivaut à } x \in \dot{M}^y \text{ et à } y \in \dot{M}_x \\ x < y \text{ équivaut à } x \in \dot{M}^y \text{ et à } y \in \dot{M}_x \end{cases}$$

Rappelons aussi que le terme treillis est toujours utilisé ici au sens de treillis complet (sauf mention explicite du contraire). Nous utiliserons aussi la terminologie "treillis simple" pour désigner un treillis, non nécessairement complet, mais possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément ω : il s'agit donc d'un ensemble ordonné dans lequel toute partie finie J (y compris la partie vide $\emptyset$) admet un plus petit majorant $\vee J$ et un plus grand minorant $\wedge J$.

8 – 1. La distributivité

On distingue, classiquement, trois sortes de distributivités, à savoir : la distributivité simple (c'est toujours à celle-ci que l'on se réfère lorsque l'on parle de distributivité sans préciser), puis, par forces croissantes, la distributivité complète et la distributivité totale.

a) La distributivité (simple)

On dit qu'un treillis T (d'ailleurs non nécessairement complet) est (simplement) distributif s'il vérifie l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$(D) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (x, y, z \in T)$$

$$(D') \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (x, y, z \in T)$$

L'équivalence de ces deux relations est un résultat bien connu de la théorie élémentaire des treillis.

b) La distributivité complète

On dit que $\wedge$ distribue complètement $\vee$ dans un treillis T (nécessairement complet, évidemment) s'il vérifie la relation :

$$(D_{\wedge}) \quad x \wedge (\vee A) = \vee_{a \in A} (x \wedge a) \quad (x \in T, A \in \mathcal{P}(T))$$

On dit de même que $\vee$ distribue complètement $\wedge$ si :

$$(D_{\vee}) \quad x \vee (\wedge A) = \wedge_{a \in A} (x \vee a) \quad (x \in T, A \in \mathcal{P}(T))$$

On dit enfin que T est complètement distributif s'il vérifie les deux relations ci-dessus.

On notera bien que les deux relations $(D_{\wedge})$ et $(D_{\vee})$ ne sont pas équivalentes. Voici un contre exemple simple.

Soit $\mathcal{F}(E)$ le treillis des fermés d'un espace topologique E séparé. Dans ce treillis, $\wedge$ coïncide avec l'intersection $\cap$, mais $\vee$ est la réunion fermée $\overline{\cup}$. Toutefois, pour une famille finie, $\vee$ coïncide avec $\cup$. La relation $(D_{\vee})$, qui s'écrit ici

$$F \cup (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} (F \cup F_i)$$

est donc satisfaite, et $\vee$ distribue complètement $\wedge$. Mais, en général, $(D_{\wedge})$ n'est pas vérifiée. On a seulement l'inclusion :

$$F \cap (\overline{\bigcup F_i}) \supset \overline{\bigcup (F \cap F_i)}$$

et cette inclusion peut être stricte (sauf dans le cas de la topologie discrète). En effet, si la topologie n'est pas discrète, il existe dans E un point x et une partie A avec $x \in \overline{A}$ mais $x \notin A$. Avec $F = \{x\}$, et, au lieu de la famille F_i , les fermés $\{a\}$, $a \in A$, on obtient au premier membre de l'inclusion ci-dessus :

$$\{x\} \cap \overline{A} = \{x\}$$

et, au second membre

$$\overline{\{x\} \cap A} = \emptyset.$$

Si, dans la relation $(D_{\wedge})$, nous remplaçons x par $\vee B$ où B est une partie quelconque de T , il vient la relation suivante, qui équivaux à $(D_{\wedge})$:

$$(\vee A) \wedge (\vee B) = \vee \{a \wedge b, a \in A, b \in B\}$$

Si maintenant M^A et M^B sont les parties permises pour $\wedge$ engendrées par A et B , il est immédiat que l'on a

$$M^A \cap M^B = \bigcup \{M^{a \wedge b}, a \in A, b \in B\}$$

et donc

$$\vee (M^A \cap M^B) = \vee \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}.$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉOREME 8-1. Dans un treillis T , $\wedge$ distribue complètement $\vee$ si et seulement si pour toutes parties A et B de T on a :

$$(D'_\wedge) \quad \vee (M^A \cap M^B) = (\vee A) \wedge (\vee B)$$

et de même $\vee$ distribue complètement $\wedge$ si et seulement si on a :

$$(D'_\vee) \quad \wedge (M_A \cap M_B) = (\wedge A) \vee (\wedge B)$$

c) La distributivité totale

Si $\mathcal{a}$ est une famille de parties d'un ensemble E quelconque, nous désignerons par $h(\mathcal{a})$ la classe des parties H de E obtenues en prenant un point dans chacun des $A \in \mathcal{a}$. D'une manière explicite, si la famille $\mathcal{a}$ est indicée par un ensemble I , soit $\mathcal{a} = \{A_i, i \in I\}$, $h(\mathcal{a})$ est la classe des parties H de la forme :

$$H = \{f_i, i \in I\} \text{ avec } f \in \prod_{i \in I} A_i$$

Avec ces notations, on dit qu'un treillis T est totale-ment distributif s'il vérifie l'une ou l'autre des relations équivalentes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (D_T) & \bigwedge_{B \in \mathcal{B}} \vee B = \bigvee_{H \in h(\mathcal{B})} \wedge H \quad (\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(T)) \\ (D_T^*) & \bigvee_{B \in \mathcal{B}} \wedge B = \bigwedge_{H \in h(\mathcal{B})} \vee H \quad (\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(T)) \end{array} \right.$$

Nous verrons dans un instant que ces deux relations sont bien équivalentes. On notera surtout que la distributivité complète n'entraîne nullement la distributivité totale.

CONTRE EXEMPLE. Soit E un espace topologique et $\mathcal{a} \subset \mathcal{F}(E)$ la classe des fermés A de E vérifiant la relation $A = \bar{\bar{A}}$. On voit facilement que $\mathcal{a}$ est un treillis complet (pour l'ordre induit par $\mathcal{F}(E)$), avec un $\vee$ et un $\wedge$ donnés par :

$$\vee A_i = \overline{\bigcup A_i} ; \quad \wedge A_i = \bigcap^{\bar{\bar{}}} A_i$$

On peut montrer (voir Annexe A) que ce treillis vérifie les relations $(D_{\vee})$ et $(D_{\wedge})$, donc est complètement distributif, et qu'il est de plus complémenté. Néanmoins, il n'est pas totalement distributif. En effet, nous montrerons au chapitre suivant que tout treillis totalement distributif est coprimaire (voir définition au paragraphe 8-5 ci-dessous), et il est facile de voir (par exemple dans le cas où E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$) qu'en général ce treillis $\mathcal{a}$ n'est pas coprimaire.

Montrons maintenant l'équivalence de nos deux relations. Il est immédiat que l'on peut, sans modifier le résultat, remplacer dans les expressions qui figurent aux premiers membres des relations (D_T) et (D_T^*) , la classe $\mathcal{B}$ par la classe $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ permise pour U qu'elle engendre dans $\mathcal{P}(T)$.

N.B. — Dans un treillis $\mathcal{P}(T)$, on désigne par $\mathcal{M}_B$ la classe des parties de T qui contiennent B , la notation M_B prêtant à équivoque, et de même par $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ la classe des parties A de T qui contiennent un $B \in \mathcal{B}$.

De même, au second membre de (D_T) et (D_T^*) , on peut remplacer $h(\mathcal{B})$ par $\mathcal{M}_{h(\mathcal{B})}$. Nous poserons, par définition

$$g(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_{h(\mathcal{B})}$$

Cette classe $g(\mathcal{B})$ est constituée des parties A qui contiennent un $H \in h(\mathcal{B})$, c'est-à-dire des parties A qui rencontrent tous les $B \in \mathcal{B}$. C'est ce qu'on appelle classiquement la grille de la classe $\mathcal{B}$, i.e.

$$g(\mathcal{B}) = \{A : \forall B \in \mathcal{B}, A \cap B \neq \emptyset\}$$

Comme $A \cap B \neq \emptyset$ équivaut à $B \not\subset A^c$, on a l'équivalence

$$A \in g(\mathcal{B}) \Leftrightarrow A^c \notin \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$$

Dès lors $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ équivaut à $A^c \notin g(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_{g(\mathcal{B})}$ donc aussi à $A \in g(g(\mathcal{B}))$, soit :

$$g(g(\mathcal{B})) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$$

La grille de la grille redonne, non pas exactement la classe $\mathcal{B}$ de départ, mais la classe $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ permise pour U qu'elle engendre. Mais on a déjà remarqué que, dans la formule (D_T) , rien ne change si l'on remplace $\mathcal{B}$ par $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ et $h(\mathcal{B})$ par $g(\mathcal{B})$.

Supposons donc la relation (D_T) vérifiée, soit pour toute classe $\mathfrak{B}$:

$$(D_T) \quad \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \vee B = \bigvee_{A \in g(\mathfrak{B})} \wedge A$$

Remplaçons la classe $\mathfrak{B}$ par sa grille $g(\mathfrak{B})$: la relation (D_T) donne

$$\bigwedge_{B \in g(\mathfrak{B})} \vee B = \bigvee_{A \in g(g(\mathfrak{B}))} \wedge A$$

Comme $g(g(\mathfrak{B})) = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}$ et $\bigvee_{A \in \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}} \wedge A = \bigvee_{A \in \mathfrak{B}} \wedge A$, on trouve donc

$$\bigwedge_{B \in g(\mathfrak{B})} \vee B = \bigvee_{A \in \mathfrak{B}} \wedge A$$

c'est-à-dire la formule (D_T^*) : on a ainsi montré l'équivalence des deux relations (D_T) et (D_T^*) .

Venons en, maintenant, à la caractéristique principale des treillis totalement distributifs, et pour cela, posons d'abord un lemme.

LEMME 8-1. Toute classe $\mathfrak{B}$ de parties d'un treillis T vérifie les relations :

- (i) $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B = \{ \wedge A, A \in g(\mathfrak{B}) \}$
- (ii) $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M_B = \{ \vee A, A \in g(\mathfrak{B}) \}$

Montrons la première de ces relations (la seconde s'en déduit par dualité). Soit x un point de $\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B$. Cela signifie que pour tout $B \in \mathfrak{B}$ on peut trouver un point $y(B) \in B$ avec $x \leq y(B)$. Considérons alors l'ensemble A constitué du point x et de ces points $y(B)$:

$$A = \{x\} \cup \{y(B), B \in \mathfrak{B}\}$$

On a $A \in g(\mathfrak{B})$, puisque $y(B) \in A \cap B$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$, et $\wedge A = x$, puisque $y(B) \geq x$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$. Donc $x \in \wedge g(\mathfrak{B})$, et par suite :

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B \subset \wedge g(\mathfrak{B})$$

Inversement, soit $A \in g(\mathfrak{B})$, et $y = \wedge A$. Comme $A \in g(\mathfrak{B})$, pour tout $B \in \mathfrak{B}$ il existe un point $a \in A \cap B$ et on a $y \leq a$, puisque $y = \wedge A$. Comme $a \in B$, cela entraîne $y \in M^B$, et on a donc

$$\wedge g(\mathfrak{B}) \subset \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Passant au $\vee$, nous déduisons de la relation (i) du lemme ci-dessus :

$$\vee \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B = \vee_{A \in g(\mathfrak{B})} \wedge A$$

Le second membre de cette relation est identique au second membre de la relation (D_T) : il en résulte que cette relation (D_T) est équivalente à :

$$(\hat{D}_T) \quad \vee \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M^B = \bigwedge_{B \in \mathfrak{B}} \vee B \quad (\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(T))$$

et de même la relation duale (D_T^*) équivaut à :

$$(\check{D}_T) \quad \bigwedge \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} M_B = \bigvee_{B \in \mathfrak{B}} \wedge B \quad (\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(T))$$

L'équivalence des relations (D_T) et (D_T^*) entraîne évidemment celle des deux relations ci-dessus. On note que ces deux relations sont trivialement vérifiées dans le cas de la famille vide $\mathfrak{B} = \emptyset$. Comme de plus on a $\vee B = \vee M^B$, la première relation exprime exactement que l'application $M^B \rightarrow \vee M^B$ est une érosion du treillis $\mathcal{P}_{\wedge}(T)$ (ensemble des parties de T permises pour $\wedge$) dans le treillis T . Nous avons ainsi établi l'important résultat suivant :

THÉORÈME 8-2. (THÉORÈME DE LA DISTRIBUTIVITÉ TOTALE). Dans tout treillis T , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) T est totalement distributif
- b) L'application $M^A \rightarrow \vee A$ est une érosion de $\mathcal{P}_{\wedge}(T)$ dans T
- c) L'application $M_A \rightarrow \wedge A$ est une érosion de $\mathcal{P}_{\vee}(T)$ dans le treillis dual T^* .

Nous étudierons longuement, dans le chapitre suivant, les dilatations associées à ces érosions.

d) Extensions

Considérons d'abord le cas d'un treillis produit $T = \prod_{e \in E} T_e$. Il est immédiat que, si les treillis facteurs T_e , $e \in E$ vérifient tous une même propriété de distributivité, le treillis produit la vérifie encore. Même conclusion dans le cas d'un sous-treillis ou de ce que nous appellerons un quasi-sous-treillis :

DÉFINITION. On dit qu'une partie T_0 d'un treillis T est un quasi-sous-treillis de T si, pour toute partie non vide $A \subset T_0$, on a $\vee A$ et $\wedge A \in T_0$. De même, on dira qu'une partie de T est un fuseau dans T si elle est de la forme $M_a^b = M_a \cap M^b$ pour un a et un $b \in T$.

Il est immédiat que tout fuseau est un quasi-sous-treillis et que tout quasi-sous-treillis T_0 est un sous-treillis du fuseau M_a^b , avec $a = \bigwedge T_0$ et $b = \bigvee T_0$.

Soit maintenant B une partie d'un treillis T , complètement réticulée pour l'ordre induit, sans être nécessairement un quasi-sous-treillis. On sait [5] qu'une partie B de T possède cette propriété si et seulement si elle est le domaine d'invariance d'une application croissante et idempotente ψ de T dans lui-même. Voici un premier résultat simple.

CRITÈRE 8-1. Soit ψ une application idempotente croissante d'un treillis distributif T dans lui-même, et B son domaine d'invariance. Si ψ vérifie la relation :

$$(a) \quad \psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y) \quad (x, y \in T)$$

ou la relation duale :

$$(a^*) \quad \psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y) \quad (x, y \in T)$$

le treillis B est lui-même distributif.

Le Sup et l'Inf d'une famille b_i , $i \in I$ dans B sont donnés par :

$$\tilde{\vee} b_i = \psi(\bigvee b_i) \quad ; \quad \tilde{\wedge} b_i = \psi(\bigwedge b_i)$$

Mais, d'après (a), dans le cas d'une famille finie, on a $\tilde{\vee} b_i = \bigvee b_i$. Dans ces conditions, pour $a, b, c \in B$, il vient :

$$(a \tilde{\vee} b) \tilde{\wedge} c = \psi((a \vee b) \wedge c) = \psi((a \wedge c) \vee (b \wedge c))$$

(compte tenu de la distributivité de T). D'après (a), ceci est encore égal à :

$$\psi(a \wedge c) \vee \psi(b \wedge c) = \psi(a \wedge c) \tilde{\vee} \psi(b \wedge c) = (a \tilde{\wedge} c) \tilde{\vee} (b \tilde{\wedge} c)$$

Donc B est distributif.

Si la relation (a) reste valable pour une famille infinie, l'application ψ est alors une dilatation idempotente. Examinons d'abord le cas général d'une dilatation quelconque a de T dans un autre treillis T' , et soit b l'érosion associée.

L'espace image $B_a = a(T)$, stable pour $\vee$, est aussi le domaine d'invariance de l'ouverture $a b$, et, de même, $B_b = b(T)$, stable pour $\wedge$, est le domaine d'invariance de la fermeture $b a$. De plus, les deux treillis B_a et B_b sont isomorphes, de sorte que si l'un d'eux vérifie une propriété de distributivité, l'autre la vérifie aussi.

En effet, désignons par b' la restriction de b à B_a , et par a' celle de a à B_b . Ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. Car, si par exemple $x \in B_b$,

on a $x = b a(x)$. Par suite $b'a'(x) = ba(x) = x$. Si maintenant $x_i, i \in I$ est une famille dans B_b , son Sup, au sens du treillis B_b , est

$$\tilde{\vee} x_i = ba(\vee x_i) = b(\vee a(x_i))$$

Son image par a' dans B_a est donc

$$ab(\vee a(x_i)) = \tilde{\vee} a(x_i)$$

L'Inf dans B_b de la famille x_i coïncide avec $\wedge x_i$, puisque B_b est stable pour $\wedge$, donc $\tilde{\wedge} x_i = \wedge x_i = \wedge ba(x_i) = b(\wedge a(x_i))$, b étant une érosion et chaque x_i vérifiant $x_i = ba(x_i)$. Il en résulte :

$$a(\tilde{\wedge} x_i) = a b(\wedge a(x_i)) = \tilde{\wedge} a(x_i)$$

Il s'agit donc bien d'un isomorphisme. Enonçons :

CRITÈRE 8-2. Si a est une dilatation d'un treillis T dans un treillis T' , et b l'érosion associée, les espaces images $B_a = a(T)$ dans T' et $B_b = b(T')$ dans T sont isomorphes, et vérifient en particulier les mêmes propriétés de distributivité.

CRITÈRE 8-3. Soit a une dilatation idempotente d'un treillis T dans lui-même, b l'érosion associée. Alors b est idempotente. De plus si $\wedge$ distribue complètement $\vee$ dans T (ou si $\vee$ distribue complètement $\wedge$), les deux treillis images B_a et B_b possèdent cette même propriété.

Si a est idempotente, $a(x) \leq y$ équivaut à $aa(x) \leq y$. Par suite $x \leq b(y)$ équivaut à $x \leq bb(y)$, et b est idempotente.

Supposons, par exemple, que $\wedge$ distribue complètement $\vee$, et soit $x_i, i \in I$ une famille dans B_a , et $y \in B_a$. On trouve, a étant idempotente et B_a stable pour $\vee$:

$$y \tilde{\wedge} (\tilde{\vee} x_i) = y \tilde{\wedge} (\vee x_i) = a(y \wedge (\vee x_i))$$

Comme $\wedge$ distribue $\vee$, ceci est encore égal à :

$$a(\vee_{i \in I} (y \wedge x_i)) = \vee_{i \in I} a(y \wedge x_i) = \tilde{\vee}_{i \in I} (y \tilde{\wedge} x_i)$$

Donc, dans le treillis B_a , $\tilde{\vee}$ distribue complètement $\tilde{\wedge}$. Il en est de même pour le treillis B_b , d'après le critère 8-2.

CRITÈRE 8-4. Avec les mêmes notations que dans le critère précédent, si T est totalement distributif, les deux treillis B_a et B_b sont totalement distributifs.

Il n'est pas impossible de démontrer cela à partir du théorème 8-2. Nous donnerons une démonstration plus simple au paragraphe suivant.

EXEMPLES. On a vu (corollaire 3 du théorème 1-2) que dans le cas d'une dilatation-fermeture a , l'érosion b associée est une ouverture. On a alors $B_a = B_b$, et cette image commune, stable pour $\vee$ et $\wedge$, est un sous-treillis. Dans ce cas, les critères ci-dessus n'apportent rien de nouveau.

Beaucoup plus intéressant va se révéler le cas d'une dilatation-ouverture associée à une érosion-fermeture, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

8-2. Les équivalences propres

Nous partirons de la définition suivante :

DÉFINITION. On dira qu'une relation d'équivalence $\equiv$ sur un treillis T est propre si, pour toute famille (x_i, y_i) , $i \in I$ dans $T \times T$, la relation suivante est vérifiée :

$$(a) \quad x_i \equiv y_i \quad \forall i \in I \Rightarrow \vee x_i \equiv \vee y_i, \wedge x_i \equiv \wedge y_i$$

Nous désignerons par $C(x)$ la classe d'un élément $x \in T$ modulo $\equiv$, et par T_C l'espace quotient, c'est-à-dire l'ensemble de ces classes $C(x)$, $x \in T$. Notre but est de munir T_C d'une structure de treillis pour laquelle l'application $x \rightarrow C(x)$ sera un homomorphisme de T sur T_C , c'est-à-dire à la fois une érosion et une dilatation.

Il faut, pour cela, tout d'abord munir T_C d'une relation d'ordre qui rende l'application C croissante de T dans T_C . Soient C et C' deux éléments de T_C , x et $y \in T$ tels que $C = C(x)$ et $C' = C(y)$. Nous poserons $C \leq C'$ dans T_C si $y \equiv x \vee y$ dans T . La condition (a) nous garantit que cette relation ne dépend pas du choix des représentants x et y des classes C et C' . D'après cette même condition, $y \equiv x \vee y$ entraîne $x \wedge y \equiv (x \vee y) \wedge x = x$, et réciproquement. Ainsi :

$$(b) \quad C(x) \leq C(y) \text{ dans } T_C \Leftrightarrow y \equiv x \vee y \text{ dans } T \Leftrightarrow x \equiv x \wedge y$$

et cela indépendamment du choix des représentants x et y .

On a bien $C(x) \leq C(x)$. Si $C(x) \leq C(y)$ et $C(y) \leq C(x)$, il vient $y \equiv x \vee y$ et $x \equiv x \vee y$, donc $x \equiv y$ et $C(x) = C(y)$. Reste à vérifier la transitivité.

Supposons $C(x) \leq C(y)$ et $C(y) \leq C(z)$, soit

$$y \equiv x \vee y \quad \text{et} \quad z \equiv y \vee z$$

D'après (a), cela entraîne $x \vee z \equiv x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \equiv y \vee z \equiv z$. On a donc $C(x) \leq C(z)$, et il s'agit bien d'une relation d'ordre.

Reste à montrer l'existence de $\vee$ et de $\wedge$ sur T_C . Soit $C_i, i \in I$ une famille dans l'espace quotient T_C et $C_0 \in T_C$ tel que l'on ait $C_i \leq C_0$ dans T_C , au sens de la relation (b), pour tout $i \in I$. Choisissons des représentants $x_i \in C_i, x_0 \in C_0$ de ces diverses classes. Par hypothèse on a :

$$x_0 \equiv x_0 \vee x_i \quad \forall i \in I$$

D'après (a), cela entraîne $x_0 \equiv x_0 \vee (\bigvee_{i \in I} x_i)$, c'est-à-dire $C(\bigvee x_i) \leq C(x_0)$ dans T_C . Mais, pour un $i \in I$ donné, on a $x_i \vee (\bigvee_{j \in I} x_j) = \bigvee x_j$ et donc $C(x_i) \leq C(\bigvee_{j \in I} x_j)$ pour tout $i \in I$. On a donc montré que $C(\bigvee_{j \in I} x_j)$ est le plus petit majorant dans T_C de la famille $C(x_i), i \in I$.

On posera donc :

$$\bigvee C(x_i) = C(\bigvee x_i) \text{ et, de même } \bigwedge C(x_i) = C(\bigwedge x_i)$$

On a donc montré, à la fois, que T_C est un treillis complet, pour la relation d'ordre définie en (b), et que l'application $x \rightarrow C(x)$ est un homomorphisme de T sur T_C .

A cet homomorphisme C qui est à la fois une érosion et une dilatation de T sur T_C , sont donc associées une dilatation a et une érosion b de T_C dans T . Posant :

$$\gamma = a \circ c ; \quad \varphi = b \circ c$$

on obtient donc une ouverture γ et une fermeture φ sur T . Comme $\gamma(x) = a \circ c(x) \leq y$ dans T équivaut à $C(x) \leq C(y)$, on voit que $\gamma(x)$ est le plus petit représentant de la classe $C(x)$, et de même $\varphi(x)$ son plus grand représentant. Si on a $\gamma(x) \leq y \leq \varphi(x)$, cela entraîne à la fois $C(x) \leq C(y)$ et $C(y) \leq C(x)$, c'est-à-dire $C(y) = C(x)$, ou $y \in C(x)$. On a ainsi montré que la classe $C(x)$ est exactement égale au fuseau $M_{\gamma(x)}^{\varphi(x)}$, soit :

$$(c) \quad C(x) = M_{\gamma(x)} \cap M^{\varphi(x)}$$

Comme $\varphi(x)$ appartient à la classe $C(x)$ de l'élément $x \in T$, classe dont le plus petit représentant est $\gamma(x)$, on a $C(x) = C(\varphi(x))$, et $\gamma(x) = \gamma\varphi(x)$, soit $\gamma = \gamma\varphi$, et, de même, $\varphi = \varphi\gamma$.

Ainsi, l'ouverture γ et la fermeture φ vérifient la relation :

$$(d) \quad \gamma\varphi = \gamma ; \quad \varphi\gamma = \varphi$$

Pour toute famille $x_i, i \in I$ dans T , la relation $C(\bigvee x_i) = \bigvee C(x_i)$ signifie que $\bigvee x_i$ est un représentant de la classe $\bigvee C(x_i)$. Comme on a $x_i \equiv \gamma(x_i)$ pour chaque $i \in I$, la relation (a) implique $\bigvee x_i \equiv \bigvee \gamma(x_i)$. Cela signifie que $\bigvee \gamma(x_i)$ est un autre représentant de cette même classe $\bigvee C(x_i)$: son plus petit représentant, qui est $a(\bigvee C(x_i))$ vérifie donc :

$$a(\bigvee C(x_i)) = \gamma(\bigvee \gamma(x_i)) = \gamma(\bigvee x_i)$$

Mais on a évidemment aussi $a(\bigvee C(x_i)) = \bigvee a C(x_i) = \bigvee \gamma(x_i)$, puisque a est une dilatation, et donc finalement $\gamma(\bigvee x_i) = \bigvee \gamma(x_i)$: l'ouverture γ est une dilatation de T dans lui-même, et de même la fermeture φ est une érosion.

Mais $\gamma(x) \leq y$ équivaut à $C(x) \leq C(y)$, donc aussi à $x \leq \varphi(y)$, de sorte que φ est l'érosion associée à la dilatation γ . Quant à la relation d'ordre sur T_C , elle vérifie même l'équivalence :

$$(e) \quad C(x) \leq C(y) \Leftrightarrow \gamma(x) \leq \varphi(y)$$

car, d'après (d), $\gamma(x) \leq \varphi(y)$ entraîne $\gamma(x) = \gamma \gamma(x) \leq \gamma \varphi(y) = \gamma(y)$ donc $\gamma(x) \leq y$ et $C(x) \leq C(y)$. L'implication inverse étant évidente, on a bien l'équivalence (e).

Procédons maintenant à la construction inverse : étant données, sur T , une ouverture γ et une fermeture φ vérifiant les relations (d), montrons qu'il existe effectivement sur T une équivalence propre dont les classes sont les fuseaux $M_{\gamma(x)} \cap M_{\varphi(x)}$.

Notons d'abord que les relations (d) impliquent que l'ouverture γ est aussi une dilatation, et que la fermeture φ est l'érosion associée. En effet $\gamma(x) \leq y$ entraîne, d'après (d), $\varphi(x) = \varphi \gamma(x) \leq \varphi(y)$ et donc $x \leq \varphi(y)$. Inversement $x \leq \varphi(y)$ entraîne $\gamma(x) \leq \gamma \varphi(y) = \gamma(y)$ et donc $\gamma(x) \leq y$. On a donc l'équivalence $\gamma(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varphi(y)$.

On peut aussi se donner comme point de départ une dilatation γ telle que l'érosion associée φ vérifie les relations (d) : ces relations (d) entraînent alors que $\gamma = \gamma \varphi$ est une ouverture et $\varphi = \varphi \gamma$ une fermeture.

On peut aussi (troisième point de départ équivalent possible) se donner une application γ de T dans lui-même qui soit à la fois une dilatation et une ouverture. Il est alors immédiat que l'érosion associée φ est aussi une fermeture.

Montrons que γ et φ vérifient alors les relations (d). Posons

$$g = \gamma \varphi \quad ; \quad f = \varphi \gamma$$

φ étant l'érosion associée à γ , g est une ouverture et f une fermeture. De plus $g f = \gamma \varphi \cdot \varphi \gamma = \gamma \varphi \gamma = \gamma$. Comme f et φ sont des fermetures, cela entraîne :

$$\gamma = g f \geq g = \gamma \varphi \geq \gamma$$

Donc $g = \gamma$ et de même $f = \varphi$: ainsi γ et φ vérifient bien les relations (d).

Ceci étant, posons pour chaque $x \in T$:

$$(c) \quad C(x) = M_{\gamma(x)} \cap M^{\varphi(x)}$$

et montrons que les $C(x)$, $x \in T$ constituent une partition de T . Comme on a $\gamma(x) \leq x \leq \varphi(x)$, il en résulte $x \in C(x)$, et la réunion des $C(x)$ couvre T . Si $y \in C(x)$, c'est-à-dire $\gamma(x) \leq y \leq \varphi(x)$, les relations (d) donnent $\gamma(x) = \gamma\gamma(x) \leq \gamma(y) \leq \gamma\varphi(y) = \gamma(y)$ et donc $\gamma(y) = \gamma(x)$, et, de même, $\varphi(y) = \varphi(x)$. Il en résulte $C(x) = C(y)$. Si, maintenant, pour $x, z \in T$, les deux classes $C(x)$ et $C(z)$ ont une intersection non vide, soit y un élément de cette intersection : $y \in C(x)$ entraîne $C(y) = C(x)$, et de même $y \in C(z)$ donne $C(y) = C(z)$, d'où $C(x) = C(z)$. Il s'agit donc bien d'une partition.

L'équivalence associée $x \equiv y$ se définit par $C(x) = C(y)$ ou, ce qui est équivalent, d'après (c), par $\gamma(x) = \gamma(y)$ ou, aussi bien, par $\varphi(x) = \varphi(y)$ (ces deux relations s'impliquant mutuellement, d'après (d)). Il reste à vérifier que cette équivalence est propre. Supposons donc $x_i \equiv y_i$, c'est-à-dire, par exemple, $\gamma(x_i) = \gamma(y_i)$ pour chaque $i \in I$. Comme γ est une dilatation, on a

$$\gamma(\vee x_i) = \vee \gamma(x_i) = \vee \gamma(y_i) = \gamma(\vee y_i)$$

et par suite $\vee x_i \equiv \vee y_i$. Avec l'érosion φ , on trouve de même $\wedge x_i \equiv \wedge y_i$: il s'agit bien d'une équivalence propre.

Résumons les résultats de cette analyse. Le lemme suivant rappelle l'équivalence des trois points de départ possibles de la construction.

LEMME 8-2. Si une application γ d'un treillis T dans lui-même est à la fois une dilatation et une ouverture, l'érosion associée φ est aussi une fermeture, et on a

$$(d) \quad \gamma\varphi = \gamma \quad ; \quad \varphi\gamma = \varphi$$

Si une ouverture γ et une fermeture φ sur T vérifient ces relations (d), alors γ est aussi une dilatation et φ est l'érosion associée. Enfin, si une dilatation γ et son érosion associée φ vérifient ces relations (d), γ est aussi une ouverture et φ une fermeture.

Nous dirons dans tous les cas que γ est une dilatation-ouverture, et φ l'érosion-fermeture associée. Voici maintenant l'énoncé principal :

THÉOREME 8-3 . (THÉOREME DES ÉQUIVALENCES PROPRES). Une équivalence $\equiv$ sur un treillis T est propre si et seulement si les classes $C(x)$ des $x \in T$ modulo $\equiv$ sont des fuseaux de la forme :

$$(c) \quad C(x) = M_{\gamma(x)} \cap M^{\phi(x)}$$

où γ est une dilatation–ouverture et ϕ l'érosion–fermeture associée. La relation définie par

$$(e) \quad C(x) \leq C(y) \quad \text{si} \quad \gamma(x) \leq \phi(y)$$

est alors une relation d'ordre sur l'espace quotient T_C . Cette relation d'ordre fait de T_C un treillis complet, dont les $\vee$ et $\wedge$ sont donnés par

$$(f) \quad \vee C(x_i) = C(\vee x_i); \wedge C(x_i) = C(\wedge x_i)$$

En particulier, l'application $x \rightarrow C(x)$ est un homomorphisme de T sur T_C .

COROLLAIRE 1. Une équivalence $\equiv$ sur un treillis T est propre si et seulement si il existe un homomorphisme f du treillis T dans un autre treillis T' tel que

$$x \equiv y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (x, y) \in T$$

Il résulte du théorème 8-3 que cette condition est nécessaire : on le voit en prenant $T' = T_C$ et l'homomorphisme $f = C$ de T sur T_C . Inversement, si cette condition est vérifiée, supposons $x_i \equiv y_i$ dans T pour tout $i \in I$, donc aussi $f(x_i) = f(y_i)$. Comme f est un homomorphisme, il vient

$$f(\vee x_i) = \vee f(x_i) = \vee f(y_i) = f(\vee y_i)$$

et donc $\vee x_i \equiv \vee y_i$, et, de même, $\wedge x_i \equiv \wedge y_i$: l'équivalence est propre.

COROLLAIRE 2. Si $\equiv$ est une équivalence propre sur un treillis T , γ la dilatation–ouverture et ϕ l'érosion–fermeture associées définies comme dans le théorème 8-3, alors le treillis quotient est isomorphe aux treillis images $B_\gamma = \gamma(T)$ et $B_\phi = \phi(T)$.

Ceci résulte immédiatement des équivalences

$$C(x) \leq C(y) \Leftrightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y) \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y).$$

Passage au quotient

Nous dirons qu'une propriété possible pour un treillis T passse au quotient si, pour toute équivalence propre sur T , le treillis quotient T_C vérifie cette propriété dès que T la vérifie lui-même.

CRITÈRE 8-5. Pour un treillis T , les propriétés suivantes passent au quotient

- T est COF pour la topologie $\mathcal{C} M^I - \mathcal{C} M_A$ (ou $\mathcal{C} M_I - \mathcal{C} M^A$)
- T est à $\vee$ (ou à $\wedge$) continu
- T est distributif
- $\vee$ distribue complètement $\wedge$ (ou $\wedge$ distribue complètement $\vee$)
- T est totalement distributif

Si T est COF pour la topologie $\mathcal{C} M^I - \mathcal{C} M_A$, pour toute relation d'équivalence propre, l'érosion-fermeture associée φ est scs (théorème 4-3, corollaire 1). Son domaine d'invariance B_φ est donc lui-même COF pour sa topologie $\mathcal{C} M^I - \mathcal{C} M_A$ (théorème 4-6), et le treillis quotient T_C possède la même propriété d'après le corollaire 2 du théorème 8-3. Si, de plus, T est à $\vee$ continu, la conclusion résulte du théorème 5-6.

Enfin, les énoncés relatifs aux diverses formes de distributivité sont des conséquences triviales de la définition des équivalences propres, c'est-à-dire de la relation (a) ci-dessus.

Cas d'une dilatation idempotente quelconque

Examinons maintenant le cas d'une dilatation idempotente quelconque (*i.e.* qui n'est, en général, ni une ouverture ni une fermeture), ce qui nous conduira à une démonstration du critère 8-4 resté en suspens au paragraphe précédent.

Soit donc T un treillis, a une dilatation idempotente de T dans lui-même, et b l'érosion associée. Il est immédiat que b est aussi idempotente. Désignons par I l'application identique, et posons :

$$\hat{a} = I \vee a \quad ; \quad \check{b} = I \wedge b$$

$\hat{a}$ est une dilatation (comme $\vee$ des deux dilatation) et aussi une fermeture car $(I \vee a)(I \vee a) = I \vee a \vee a(I \vee a) = I \vee a \vee aa = I \vee a$ (a étant une dilatation et idempotente), et l'érosion associée $\check{b}$ est aussi une ouverture. Par ailleurs $\hat{a}$ est manifestement la plus petite fermeture majorant a , de sorte que son domaine d'invariance est le domaine d'anti-extensivité de a :

$$\hat{B}_a = \{x = a(x) \leq x\}$$

Comme $a(x) \leq x$ équivaut à $x \leq b(x)$, le domaine d'anti-extensivité de a est identique au domaine d'extensivité $\check{B}_b = \{x = x \leq b(x)\}$, qui est aussi le

domaine d'invariance de l'ouverture $\check{b}$. Ce domaine commun $T_0 = \hat{B}_a = \check{B}_b$ est donc un sous-treillis de T . En particulier, si T est totalement distributif, T_0 l'est aussi.

Maintenant, la restriction a au treillis $\hat{B}_a$ est une ouverture sur $\hat{B}_a$ (car $a(x) \leq x$, pour $x \in \hat{B}_a$ et $aa(x) = a(x)$ donc aussi $a(x) \in \hat{B}_a$) et on a $a(\hat{B}_a) = \hat{B}_a$ à cause de la relation $a\hat{a} = a$. C'est aussi une dilatation de $\hat{B}_a$ dans lui-même. Car, pour toute famille $x_i, i \in I$ dans $\hat{B}_a$, le Sup de cette famille (au sens du treillis $\hat{B}_a$) est $\hat{a}(\bigvee x_i) = \bigvee x_i$ ($\hat{a}$ étant une dilatation), d'où résulte bien $a\hat{a}(\bigvee x_i) = a(\bigvee x_i) = \bigvee a(x_i) = \hat{a}(\bigvee a(x_i))$.

Donc la restriction de a au sous-treillis $\hat{B}_a$, étant une dilatation-ouverture sur $\hat{B}_a$, définit une équivalence propre sur ce sous-treillis. D'après le corollaire 2 du théorème 8-3, son domaine, qui coïncide avec B_a lui-même, comme on l'a vu ci-dessus, est isomorphe au treillis quotient $\hat{B}_a / \equiv$. En particulier, si $\hat{B}_a = T_0$ est totalement distributif, B_a l'est aussi (théorème 8-4).

Ainsi, pour toute dilatation idempotente, la distributivité totale se transmet aux treillis images isomorphes $\hat{B}_a$ et $\hat{B}_b$: le critère 8-4 est démontré.

Exemple des treillis de fonctions

Soit E un ensemble quelconque, $T = \overline{\mathbb{R}}^E$ le treillis de toutes les fonctions de E . Si $A \subset E$ est une partie quelconque de E , on définit une relation d'équivalence dans T en posant :

$$(i) \quad f \equiv g \quad \text{si } f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

Il est immédiat qu'il s'agit d'une équivalence propre. Une classe du treillis quotient T_C est définie par la donnée d'une fonction u quelconque sur A : T_C est isomorphe au treillis $\overline{\mathbb{R}}^A$.

Supposons, maintenant, que E soit un espace topologique séparé, et considérons le treillis T' des fonctions scs sur E . La relation (i) définit encore une relation d'équivalence sur T' , mais, si A est une partie quelconque de E , ce n'est plus, en général, une équivalence propre. En effet, puisqu'il s'agit maintenant de fonctions scs, certaines conditions de raccordement doivent être respectées sur la frontière ∂A de l'ensemble $A \subset E$.

Nous désignerons par $\mathcal{G}_x$ la classe des voisinages ouverts d'un point $x \in E$. Partons d'une fonction u scs sur A pour la topologie induite, et, pour les points de la frontière n'appartenant pas à A , posons

$$\bar{u}(x) = \bigwedge_{G \in \mathcal{G}_x} \bigvee_{y \in G \cap A} u(y) \quad (x \in A^c \cap \partial A)$$

Toute fonction f de la classe définie par A doit respecter la condition :

$$f(x) \geq \bar{u}(x) \quad (x \in A^c \cap \partial A)$$

Cette condition sera respectée, lors d'un passage au $\vee$ dans le treillis T' , et ne pose pas de problème.

Mais, en tout point de la frontière appartenant à A , on doit aussi avoir

$$\bigwedge_{G \in \mathcal{G}_x} \bigvee_{y \in G} f(y) \leq u(x) \quad (x \in A \cap \partial A)$$

et cette condition ne passera pas au Sup. Il faut donc que l'ensemble $A \cap \partial A$ soit vide, c'est-à-dire que A soit ouvert dans E ;

Ainsi, dans le cas des treillis des fonctions scs sur E , la relation d'équivalence définie par (i) est propre si, et seulement si, l'ensemble A est ouvert dans E .

Si u est une fonction scs sur un ouvert A , la classe modulo A définie par u admet un plus petit élément u_0 et un plus grand élément u_1 définis par

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in A \\ \bar{u}(x) & \text{si } x \in \partial A \\ 0 & \text{si } x \in \bar{A} \end{cases} \quad ; \quad u_1(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in A \\ \omega & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

et contient toutes les fonctions scs comprises entre u_0 et u_1 .

Si, maintenant, E est un espace métrique, muni d'une distance d , on peut s'intéresser au treillis L des fonctions lipschitziennes sur E . Comme L est un sous-treillis de $\mathbb{R}^E$, le $\vee$ et le $\wedge$ sont les mêmes dans L et dans $\mathbb{R}^E$, de sorte que l'équivalence définie par la relation E est, à nouveau, toujours une équivalence propre, quel que soit l'ensemble $A \subset E$. En fait, si l'on se donne une lipschitzienne u sur l'espace A muni de la distance induite par d , elle admet un prolongement unique $\bar{u}$ sur l'adhérence $\bar{A}$. On obtiendra donc la même équivalence en remplaçant A par $\bar{A}$.

La classe définie par une lipschitzienne u sur A admet le plus petit élément u_0 et le plus grand élément u_1 définis par :

$$u_0(x) = \bigvee_{y \in A} (u(y) - d(y, x)) \quad ; \quad u_1(x) = \bigwedge_{y \in A} (u(y) + d(y, x))$$

et contient toutes les lipschitziennes comprises entre u_0 et u_1 .

8 – 3. Filtroïdes et antifiltroïdes

Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème (le théorème de séparation) qui jouera un rôle capital dans la suite. Les diverses notions que nous allons introduire à cette fin n'utilisent que la structure de treillis simple, et c'est dans ce cadre plus général que nous allons les définir. On rappelle qu'un treillis simple est un ensemble ordonné T dans lequel toute partie finie $J \in \mathcal{J}(T)$ admet un plus petit majorant $\vee J$ et un plus grand minorant $\wedge J$. Il s'agit donc d'un treillis au sens usuel (non nécessairement complet) mais possédant un plus petit élément 0 et un plus grand élément ω ($0 = \vee \emptyset$, $\omega = \wedge \emptyset$).

N.B. — $\mathcal{J}(T)$ désigne la classe des parties finies de T . Il nous arrivera souvent d'utiliser le symbole I ou J pour désigner un élément de $\mathcal{J}(T)$ en omettant de préciser $J \in \mathcal{J}(T)$, et d'écrire par exemple, par un léger abus de notation :

$$M^{\bar{A}} = \bigcap \{M^J : M^J \supset M^A\} \quad \text{ou même} \quad M^{\bar{A}} = \bigcap \{M^J \supset M^A\}$$

au lieu de la notation explicite :

$$M^{\bar{A}} = \bigcap \{M^J : J \in \mathcal{J}(T), M^J \supset M^A\}$$

Soit donc T un treillis simple. Les notations M^x, M^A etc., définies pour les treillis complets, se généralisent d'elles-mêmes. On désignera encore par $\mathcal{P}_{\wedge}(T)$, ou simplement $\mathcal{P}_{\wedge}$, et par $\mathcal{P}_{\vee}(T)$ ou $\mathcal{P}_{\vee}$ les classes des parties de T permises, respectivement pour $\wedge$ et pour $\vee$. Ce sont des sous-treillis (complets) du treillis complet $\mathcal{P}(T)$, donc totalement distributifs comme ce dernier. On sait que $\mathcal{P}(T)$ est COF à $\vee$ et $\wedge$ continu (pour la topologie de la convergence ensembliste, associée à la topologie discrète sur T), de sorte que les sous-treillis $\mathcal{P}_{\wedge}$ et $\mathcal{P}_{\vee}$, fermés dans $\mathcal{P}$, possèdent les mêmes propriétés.

La notion de famille filtrante croissante (ou décroissante) conserve son sens dans un treillis simple T : il s'agit d'un sous-ensemble non vide A de T tel que, pour tout x et tout y dans A , il existe un $z \in A$ vérifiant $z \geq x \vee y$ (ou $z \leq x \wedge y$).

Si A est une famille filtrante croissante dans T , M^A possède encore la même propriété, et constitue même une famille stable pour le $\vee$ fini : en effet, si $x, y \in M^A$, i.e. il existe x' et $y' \in A$ avec $x \leq x'$, $y \leq y'$, donc aussi $z \in A$ avec $z \geq x' \vee y' \geq x \vee y$, ce qui implique $x \vee y \in M^A$. Nous dirons que M^A est un antifiltroïde.

DÉFINITION. On dit qu'une partie A d'un treillis simple T est un antifiltroïde si elle est permise pour $\wedge$ (i.e. $A = M^A \in \mathcal{P}_\wedge$) et si, pour toute partie finie $J \in \mathcal{J}(T)$, $J \subset A$ entraîne $\vee J \in A$. De même, on dira qu'une partie F de T est un filtroïde si F est un antifiltroïde pour la structure duale. On désignera par

$\Phi_\wedge(T)$ la classe des antifiltroïdes (ou simplement $\Phi_\wedge$)

$\Phi_\vee(T)$ (ou $\Phi_\vee$) celle des filtroïdes.

Cette définition implique qu'un filtroïde F ou un antifiltroïde A est non vide (car $0 = \vee \emptyset \in A$ et $\omega = \wedge \emptyset \in F$). Les classes $\Phi_\wedge$ et $\Phi_\vee$ sont manifestement stables pour l'intersection et constituent donc des treillis complets. On notera que le plus petit élément de $\Phi_\wedge$ est $M^0 = \{0\}$, et non pas $\emptyset$, et celui de $\Phi_\vee$ est $M_\omega = \{\omega\}$. Le plus grand élément est T lui-même, dans $\Phi_\vee$ comme dans $\Phi_\wedge$. On dira parfois qu'un filtroïde ou un antifiltroïde est propre s'il n'est pas égal à T .

Exemple du treillis $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E

Dans le cas d'un treillis $\mathcal{P}(E)$, la notion de filtroïde propre correspond exactement à ce qu'on appelle filtre en topologie générale : une classe de partie de E stable pour l'intersection finie, permise pour la réunion et ne contenant pas l'ensemble vide $\emptyset$. A chaque filtre $\mathcal{B}$, correspond un antifiltre $\mathcal{a} = \{A : \complement A \in \mathcal{B}\}$ constitué des complémentaires des parties de $\mathcal{B}$, et qui est donc un antifiltroïde propre dans le treillis $\mathcal{P}(E)$.

Les filtroïdes parfaits, qui seront introduits un peu plus loin, correspondent exactement, dans le cas d'un treillis $\mathcal{P}(E)$, aux ultrafiltres de la topologie générale. Les ultrafiltres d'intersection non vide sont les parties de $\mathcal{P}(E)$ de la forme $\mathcal{M}_{\{x\}}$, i.e. constituées des majorants d'un atome $\{x\}$ ($x \in E$), mais, dès que l'ensemble E est infini, il en existe aussi beaucoup d'autres (d'intersection vide).

Les classes $\Phi_\wedge$ et $\Phi_\vee$ étant stables pour $\wedge$, nous désignerons par $\hat{S}$ et $\check{S}$, respectivement, les fermetures correspondantes (sur $\mathcal{P}$ ou, aussi bien, sur $\mathcal{P}_\wedge$ et $\mathcal{P}_\vee$ respectivement). Leur expression explicite est :

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{S}(A) = \hat{S}(M^A) = \bigcup \{M^{\vee J} : J \subset M^A\} \\ \check{S}(A) = \check{S}(M_A) = \bigcup \{M_{\wedge J} : J \subset M_A\} \end{array} \right.$$

On note aussi que $\Phi_\wedge$ et $\Phi_\vee$ sont stables pour la réunion croissante (c'est-à-dire pour $\uparrow$ dans $\mathcal{P}$, ou $\mathcal{P}_\wedge$ ou $\mathcal{P}_\vee$).

En effet, supposons $M^{A_i} \uparrow M^A$ pour une famille croissante M^{A_i} , $i \in I$ contenue dans $\Phi_\wedge$. Si x et y appartiennent à M^A , il existe i_1 et i_2 dans I tel que $x \in M^{A_{i_1}}$ pour $i \geq i_1$ et $y \in M^{A_{i_2}}$ pour $i \geq i_2$. Mais on peut trouver $k \in I$ avec $k \geq i_1$, $k \geq i_2$. Pour $i \geq k$ on aura donc à la fois $x \in M^{A_i}$ et $y \in M^{A_i}$, et par suite aussi $x \vee y$ appartient à l'antifiltre M^{A_i} . D'où $x \vee y \in M^A = \bigcup M^{A_i}$.

Comme la limite inférieure dans $\mathcal{P}$ (ou, aussi bien, dans $\mathcal{P}_\vee$ et $\mathcal{P}_\wedge$) d'une famille A_i , $i \in I$ filtrée par un filtre $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\lim A_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \bigcap_{i \in B} A_i$$

toute classe stable dans $\mathcal{P}$ pour $\cap$ et $\uparrow$ est fermée dans $\mathcal{P}$. Donc $\Phi_\wedge$ est fermée dans $\mathcal{P}_\wedge$ et $\Phi_\vee$ fermée dans $\mathcal{P}_\vee$. Il résulte donc du théorème 3-6 que les fermetures $\hat{S}$ et $\check{S}$ sont sci, et donc aussi que les treillis $\Phi_\wedge$ et $\Phi_\vee$ sont COF à $\wedge$ continu (d'après la forme duale du théorème 5-6).

Notons encore ceci : pour $x \in T$, M^x est un antifiltroïde. La classe $\hat{T} = \{M^x, x \in T\}$ image de T par l'application $x \rightarrow M^x$ est contenue dans $\Phi_\wedge$, ainsi que son adhérence, puisque $\Phi_\wedge$ est fermée dans $\mathcal{P}_\wedge$. Mais, inversement, il résulte de la définition même ou de la relation explicite (a), que tout antifiltroïde M^A est limite dans $\mathcal{P}_\wedge$ de la famille filtrante croissante des M^x , $x \in M^A$. Donc $\Phi_\wedge$ est contenu dans l'adhérence de $\hat{T}$. On a donc en fait :

$$\Phi_\wedge = \overline{\hat{T}} ; \quad \Phi_\vee = \overline{\check{T}}$$

Résumons ces diverses conclusions concernant les antifiltroïdes, en laissant au lecteur le soin de former les énoncés duaux :

THÉORÈME 8-4. La classe $\Phi_\wedge(T)$ des antifiltroïdes d'un treillis simple T possède les propriétés suivantes :

- $\Phi_\wedge$ est stable pour $\cap$ et $\uparrow$ et fermée dans $\mathcal{P}_\wedge$
- $\Phi_\wedge$ est un treillis complet, COF à $\wedge$ continu
- $\Phi_\wedge$ est l'adhérence dans $\mathcal{P}_\wedge$ de la classe $\{M^x, x \in T\}$
- $\Phi_\wedge$ est le domaine d'invariance de la fermeture $\hat{S}$ sci sur $\mathcal{P}_\wedge$ définie par :

$$(a) \quad \hat{S}(M^A) = \bigcup \{M^{\vee J}, J \in \mathcal{J}(T), J \subset M^A\}$$

Quelques critères de distributivité

Le Sup et l'Inf du treillis $\Phi_{\wedge}(T)$ des antifiltroïdes d'un treillis simple T sont donnés par :

$$\vee M^{A_i} = \hat{S}\left(\bigcup M^{A_i}\right) ; \quad \wedge M^{A_i} = \bigcap M^{A_i}$$

pour toute famille M^{A_i} , $i \in I$ dans $\Phi_{\wedge}(T)$.

Sur $\mathcal{P}(T)$, on peut aussi définir la fermeture associant à toute partie $B \subset T$ la plus petite classe stable pour $\vee$ fini contenant B , soit

$$S_{\vee}(B) = \{\vee J, J \subset B\}$$

Si $B = M^B$ est permise pour $\wedge$, il résulte de la relation (a) que l'on a

$$S_{\vee}(M^B) \subset \hat{S}(M^B)$$

mais, en général, cette inclusion est stricte.

Critère 8-6. Si T est un treillis simple et $M^B \in \mathcal{P}_{\wedge}(T)$, la plus petite classe stable pour $\vee$ fini engendrée par M^B , soit $S_{\vee}(M^B)$ est contenue dans $\hat{S}(M^B)$. Cette inclusion devient une égalité, soit $S_{\vee} = \hat{S}$ sur $\mathcal{P}_{\wedge}$ si et seulement si T est distributif.

En effet, supposons T distributif. Soit $M^B \in \mathcal{P}_{\wedge}$, J une partie finie contenue dans M^B et $x \leq \vee J$. On a $x = x \wedge (\vee J)$, soit, T étant distributif, $x = \vee \{z \wedge x, z \in J\}$. Comme chaque $z \in J$ appartient à M^B , on a aussi $z \wedge x \in M^B$, et par suite x , réunion finie d'éléments de M^B , est dans $S_{\vee}(M^B)$. D'où $\hat{S} \subset S_{\vee}$ et l'égalité.

Inversement, supposons que l'on ait $\hat{S} = S_{\vee}$ sur $\mathcal{P}_{\wedge}$, et soient a, b, c trois éléments de T . On a

$$(i) \quad (a \vee b) \wedge c \geq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Par ailleurs, on trouve immédiatement :

$$\hat{S}(M^a \cup M^b) = M^{a \vee b} ; \quad S_{\vee}(M^a \cup M^b) = \{x \vee y : x \leq a, y \leq b\}$$

Comme l'élément $z = (a \vee b) \wedge c$ est dans $\hat{S}(M^a \cup M^b)$, l'égalité $\hat{S} = S_{\vee}$ entraîne que l'on peut trouver deux éléments $x, y \in T$ avec

$$z = x \vee y, \quad x \leq a, \quad y \leq b$$

Comme on a $z \leq c$, cela entraîne que x et y sont $\leq c$ et donc

$$x \leq a \wedge c, \quad y \leq b \wedge c \quad \text{et par suite} \quad z \leq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

L'inégalité (i) est donc, en fait, une égalité et T est distributif.

CRITÈRE 8-7. Un treillis simple T est distributif si et seulement si la fermeture $\hat{S}$ sur $\mathcal{P}_\wedge(T)$ vérifie la relation

$$(a) \quad \hat{S}(M^A \cap M^B) = \hat{S}(M^A) \cap \hat{S}(M^B) \quad (M^A, M^B \in \mathcal{P}_\wedge)$$

Supposons la relation (a) vérifiée. Avec $M^A = M^x$, $M^B = M^y \cup M^z$ ($x, y, z \in T$)

$$\hat{S}(M^A \cap M^B) = \hat{S}(M^{x \wedge y} \cup M^{x \wedge z}) = M^{(x \wedge y) \vee (x \wedge z)}$$

$$\hat{S}(M^A) \cap \hat{S}(M^B) = M^x \cap M^{y \vee z} = M^{x \wedge (y \vee z)}$$

La relation (a) entraîne donc l'égalité, soit $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ et T est distributif.

Inversement, supposons T distributif. Comme on a toujours

$$\hat{S}(M^A \cap M^B) \subset \hat{S}(M^A) \cap \hat{S}(M^B)$$

il faut montrer l'inclusion inverse. Soit $z \in \hat{S}(M^A) \cap \hat{S}(M^B)$. Il existe donc dans T , d'après le critère 8-6, deux familles finies x_i , $i \in I$ et y_j , $j \in J$ avec

$$z = \vee x_i = \vee y_j \quad ; \quad x_i \in M^A \quad \forall i \in I \quad ; \quad y_j \in M^B \quad \forall j \in J$$

On en déduit, compte tenu de la distributivité :

$$z = (\vee x_i) \wedge (\vee y_j) = \vee \{x_i \wedge y_j, i \in I, j \in J\}$$

Mais $x_i \wedge y_j \in M^A \cap M^B$ pour tout $i \in I$ et $j \in J$. Comme il s'agit encore d'une famille finie, cela entraîne $z \in \hat{S}(M^A \cap M^B)$, et la relation (a) est vérifiée.

CRITÈRE 8-8. Un treillis simple T est distributif si et seulement si le treillis $\Phi_\wedge(T)$ des antifiltroïdes de T est lui-même distributif.

On désignera par $\vee$ et $\wedge$ le Sup et l'Inf au sens du treillis $\Phi_\wedge$. Pour toute famille $A_i = M^{A_i}$, $i \in I$ dans $\mathcal{P}_\wedge$, on aura donc

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \wedge \hat{S}(A_i) = \bigcap \hat{S}(A_i) \\ \vee \hat{S}(A_i) = \hat{S}(\bigcup \hat{S}(A_i)) = \hat{S}(\bigcup A_i) \end{array} \right.$$

la dernière relation résultant simplement du fait que $\hat{S}$ est une fermeture sur $\mathcal{P}_\wedge$.

Supposons T distributif, et soient A, B, C trois antifiltroïdes. On a donc dans $\Phi_\wedge$:

$$(A \vee B) \wedge C = \hat{S}(A \cup B) \cap C$$

Comme $C = M^C = \hat{S}(M^C)$, le critère 8-7 donne

$$\hat{S}(A \cup B) \cap C = \hat{S}((A \cup B) \cap C) = \hat{S}((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

Mais cette dernière expression est égale à $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ au sens du treillis $\Phi_\wedge$. On a donc bien $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, et le treillis $\Phi_\wedge$ est distributif. Inversement, si cette relation est vraie, cela entraîne la distributivité, comme on le voit avec $A = M^x$, $B = M^y$ et $C = M^z$.

Voici maintenant un théorème simple, mais qui se révèlera très utile. Il concerne cette fois les treillis complets.

THÉORÈME 8-5. Dans un treillis complet T , l'adhérence $M^{\bar{A}}$ d'un antifiltroïde $M^A \in \Phi_\wedge(T)$ pour une topologie sci admissible (i.e. comprise entre les topologies sci minimale et maximale) quelconque est toujours égale à $M^{\vee A}$, soit

$$M^{\bar{A}} = M^{\vee A} \quad (M^A \in \Phi_\wedge)$$

Comme $M^{\vee A}$ est fermé pour toute topologie sci admissible et contient M^A , on a $M^{\bar{A}} \subset M^{\vee A}$. Mais l'antifiltroïde M^A est une famille filtrante croissante et on a $M^A \uparrow \vee A$ dans T . Or $M^{\bar{A}}$, fermé pour une topologie admissible, est stable pour $\uparrow$ et contient M^A . On a donc $\vee A \in M^{\bar{A}}$ et $M^{\vee A} \subset M^{\bar{A}}$. D'où l'égalité.

Le théorème de séparation

Si une partie $F = M_F$ d'un treillis simple T est un filtroïde, son complémentaire $\complement M_F$ n'est, en général, nullement un antifiltroïde. Nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION. Dans un treillis simple T , on dit qu'un filtroïde (resp. un antifiltroïde) est un filtroïde parfait (resp. un antifiltroïde parfait) si son complémentaire est un antifiltroïde (resp. un filtroïde).

Il s'agit donc d'une notion duale : un filtroïde F est parfait si et seulement si son complémentaire $A = \complement F$ est un antifiltroïde parfait. Soit :

$$A \cup F = T \quad ; \quad A \cap F = \emptyset \quad ; \quad A \in \Phi_\wedge, \quad F \in \Phi_\vee$$

On dira parfois aussi, pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe suivant, filtroïde, ou antifiltroïde premier, au lieu de parfait.

Il est immédiat qu'un filtroïde F est parfait si et seulement si il vérifie la relation :

$$(F_p) \quad a \vee b \in F \Rightarrow a \text{ ou } b \in F$$

et de même un antifiltroïde A est parfait si et seulement si :

$$(A_p) \quad a \wedge b \in A \Rightarrow a \text{ ou } b \in A$$

Il sera commode de désigner par $\Phi_{\wedge}^p$ la classe des antifiltroïdes parfaits, et par $\Phi_{\vee}^p$ celle des filtroïdes parfaits.

THÉOREME 8-6. La classe $\Phi_{\vee}^p$ des filtroïdes parfaits d'un treillis simple T , et la classe $\Phi_{\wedge}^p$ de ses antifiltroïdes parfaits sont des sous-ensembles fermés de $\mathcal{P}_{\wedge}$ et $\mathcal{P}_{\vee}$ respectivement. En particulier, ces deux classes sont stables pour $\uparrow$ et pour $\downarrow$.

En effet, soit A_i une famille filtrée contenue dans $\Phi_{\wedge}^p$ et convergeant vers une limite $A \in \Phi_{\wedge}$ au sens de la topologie de $\Phi_{\wedge}$ (ou, aussi bien, de $\mathcal{P}_{\wedge}$ ou de $\mathcal{P}$). Comme $A_i \rightarrow A$ dans $\mathcal{P}_{\wedge}$ équivaut à $\bigcap A_i \rightarrow \bigcap A$ dans $\mathcal{P}_{\vee}$ et que les $\bigcap A_i$ sont contenus dans la classe $\Phi_{\vee}^p$ fermée dans $\mathcal{P}_{\vee}$, on aura encore $\bigcap A \in \Phi_{\vee}^p$, et par suite A est encore un antifiltroïde parfait.

Les classes $\Phi_{\wedge}$ et $\Phi_{\vee}$ sont stables, comme on l'a vu, pour $\uparrow$. D'après le théorème de Zorn, donc, si un filtroïde F et un antifiltroïde A sont disjoints dans un treillis simple T ($A \cap F = \emptyset$), il existe un antifiltroïde maximal A_M contenant A et disjoint de F , et, aussi bien, un filtroïde maximal contenant F et disjoint de A .

Un tel antifiltroïde maximal A_M est caractérisé par la propriété suivante :

(c) Si $x \notin A_M$, on peut trouver $a \in A_M$ tel que $a \vee x \in F$.

En effet, si A_M est maximal et $x \notin A_M$, $\hat{S}(A_M \cup M^x)$ est strictement plus grand que A_M , donc rencontre F . Il existe donc un $a \in A_M$ tel que $M^{a \vee x}$ rencontre F , ce qui implique $a \vee x \in F$, F étant permis pour $\vee$.

Inversement, la condition (c) entraîne manifestement qu'il n'existe pas d'antifiltroïde contenant strictement A_M et disjoint de F . Elle caractérise donc la maximalité.

De même, il existe un filtroïde maximal contenant F et disjoint de A , caractérisé par la condition duale de (c). On peut aussi construire d'abord un

antifiltroïde maximal A_M contenant A et disjoint de F , puis un filtroïde maximal F_M contenant F et disjoint de A_M . Alors A_M est, *a fortiori*, maximal parmi les antifiltroïdes contenant A et disjoint de F_M . Ainsi :

LEMME 8-3. Pour tout filtroïde F et tout antifiltroïde A disjoints dans un treillis simple T , on peut trouver un filtroïde F_M et un antifiltroïde A_M disjoints vérifiant les inclusions :

$$A \subset A_M \subset \complement F_M \subset \complement F$$

et les conditions de maximalité :

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \notin F_M \Rightarrow \exists f \in F_M \text{ tel que } x \wedge f \in A_M \\ y \notin A_M \Rightarrow \exists a \in A_M \text{ tel que } y \vee a \in F_M \end{array} \right.$$

Supposons maintenant le treillis simple T distributif. Alors le filtroïde F_M et l'antifiltroïde A_M maximaux disjoints, construits comme dans le lemme 8-3, sont complémentaires dans T : autrement dit, il s'agit d'un filtroïde parfait et de l'antifiltroïde parfait complémentaire.

En effet, supposons qu'il existe un élément z dans T n'appartenant ni à F_M ni à A_M . D'après le lemme 8-3, on peut donc trouver un $a \in A_M$ et un $f \in F_M$ avec

$$z \wedge f \in A_M ; \quad z \vee a \in F_M$$

Comme A_M est stable pour $\vee$ et F_M pour $\wedge$, on en déduit :

$$(z \wedge f) \vee a \in A_M ; \quad (z \vee a) \wedge f \in F_M$$

Mais, par hypothèse, T est distributif, et on a donc :

$$(z \vee a) \wedge f = (z \wedge f) \vee (a \wedge f)$$

Or $z \wedge f \in A_M$, par construction, et $a \wedge f \in A_M$, puisque $a \in A_M$, permis pour $\wedge$. Cela entraîne que l'élément $(z \wedge f) \vee (a \wedge f)$ appartient à l'antifiltroïde A_M : mais cela contredit $(z \vee a) \wedge f \in F_M$, puisque A_M et F_M sont disjoints. On conclut donc que l'on a bien

$$F_M \cup A_M = T$$

Enonçons ce résultat :

THÉOREME 8-7. Dans un treillis simple distributif, si un filtroïde F et un antifiltroïde A sont disjoints, on peut trouver un filtroïde parfait F_p et un antifiltroïde parfait A_p vérifiant :

$$A \subset \complement F_p = A_p \subset \complement F$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat principal que nous avons en vue dans ce paragraphe. Posons d'abord une définition :

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis simple T est parfaitement séparé si pour tout couple (x, y) de points distincts dans T , avec, par exemple, $x \not\geq y$, on peut trouver un filtroïde F_p et un antifiltroïde A_p parfaits complémentaires séparant x , et y , c'est-à-dire tels que l'on ait $x \in A_p$ et $y \in F_p$, soit :

$$(e) \quad M^x \subset A_p = \complement F_p \subset \complement M_y$$

Montrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 8-8. (THÉORÈME DE LA SÉPARATION PARFAITE). Un treillis simple T est distributif si et seulement si il est parfaitement séparé.

Supposons T distributif, $x, y \in T$ et $M^x \subset \complement M_y$: l'antifiltroïde M^x et le filtroïde M_y étant disjoints, le théorème 8-7 montre que la relation (e) est vérifiée, et donc que T est parfaitement séparé.

Inversement, supposons T parfaitement séparé, et soient a, b, c trois éléments de T . Posons

$$x = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) ; \quad y = (a \vee b) \wedge c$$

On a toujours $y \geq x$. Supposons l'inégalité stricte, c'est-à-dire $x \not\geq y$. Par définition, il existe alors un filtroïde parfait F_p avec

$$x \in \complement F_p ; \quad y \in F_p$$

Mais $y = (a \vee b) \wedge c \in F_p$ entraîne $c \in F_p$ et $a \vee b \in F_p$ (F_p étant permis pour $\vee$). Comme le filtroïde F_p est parfait, $a \vee b \in F_p$ implique que a ou b appartient à F_p . Supposons, par exemple, $a \in F_p$. Comme on a aussi $c \in F_p$, il vient $a \wedge c \in F_p$, puisque F_p est stable pour $\wedge$. Il en résulte $x = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \in F_p$ (F_p étant permis pour $\vee$) et cela contredit le point de départ $x \in \complement F_p$.

On conclut donc que l'inégalité stricte est impossible, soit $x = y$, et le treillis T est distributif.

8-4. Premiers et copremiers

Cette terminologie n'est pas spécialement heureuse, mais elle est consacrée par l'usage, et il n'a pas paru opportun de la modifier. Notre objectif est, en fait,

d'essayer de caractériser les treillis coprimaires, c'est-à-dire les treillis dont chaque élément est le Sup de ses minorants copremiers. Nous utiliserons les définitions suivantes :

DÉFINITION. On dira qu'un élément q dans un treillis T est copremier si $q \leq \vee J$ entraîne $q \in M^J$ pour toute partie finie $J \in \mathcal{J}(T)$. On désignera par $Q(T)$, ou simplement par Q , la classe des éléments copremiers dans T . On dira qu'un élément $x \in T$ est coprimaire s'il est égal au Sup de ses minorants copremiers, soit $x = \vee (Q \cap M^x)$. On dira que le treillis T lui-même est coprimaire si tous les $x \in T$ sont coprimaires.

Sous forme duale, on dira que p est premier dans T s'il est copremier dans le treillis dual T^* , et on désignera par $P(T)$, ou simplement par P la classe des éléments de T premiers dans T . On dira que x est primaire dans T s'il est coprimaire dans T^* , soit $x = \wedge (P \cap M_x)$, et que le treillis T lui-même est primaire si tous ses éléments sont primaires.

On note qu'avec cette définition, le plus petit élément d'un treillis T , noté 0 n'est jamais copremier, et de même son plus grand élément ω n'est jamais premier. On a, en effet, $0 = \vee \emptyset$, mais jamais $0 \in M^\emptyset = \emptyset$. Dans certaines questions, il y aura intérêt à compléter la classe Q en lui adjoignant l'élément minimum 0 , ou la classe P en lui adjoignant ω . On posera alors :

$$Q_0 = Q \cup \{0\} \quad ; \quad P_\omega = P \cup \{\omega\}$$

Le critère suivant résulte immédiatement de la définition.

CRITÈRE 8-9. Dans un treillis T , un élément q est copremier si et seulement si il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- a) $\mathcal{C}M_q$ est un antifiltroïde, soit $\mathcal{C}M_q = \hat{\mathcal{C}}M_q$
- b) M_q est un filtroïde parfait
- c) $q \in \hat{S}(M^A)$ équivaut à $q \in M^A$ pour toute partie M^A permise pour $\wedge$ dans T

avec comme corollaire :

COROLLAIRE.	{	$Q \cap \hat{S}(M^A) = Q \cap M^A$	$(M^A \in \mathcal{P}_\wedge)$
		$Q \cap (M^\vee J) = Q \cap M^J$	$(J \in \mathcal{J}(T))$

CRITÈRE 8-10. Dans un treillis T distributif, un élément $q \in T$ est copremier si et seulement si il vérifie la condition :

- d) La classe des $\dot{M}^q$ des minorants stricts de q est un antifiltroïde.

La condition d) est nécessaire, même dans un treillis non distributif, car $\dot{M}^q = M^q \cap \dot{C}M_q$ est un antifiltroïde, comme intersection de deux antifiltroïdes, dès que q est copremier (condition a) du critère précédent).

Inversement, supposons T distributif et soit $q \in T$ tel que $\dot{M}^q$ soit un antifiltroïde. Ceci implique déjà que $\dot{M}^q$ n'est pas vide, et donc que q n'est pas l'élément 0. Il reste à vérifier que $x \vee y \geq q$ entraîne x ou $y \geq q$. Mais, T étant distributif, $x \vee y \geq q$ entraîne $(q \wedge x) \vee (q \wedge y) = q \wedge (x \vee y) = q$. Comme $\dot{M}^q$ est un antifiltroïde, cela entraîne que l'un des éléments $q \wedge x$ et $q \wedge y$ n'appartient pas à $\dot{M}^q$. Mais $q \wedge x \notin \dot{M}^q$ (par exemple) implique $q \wedge x = q$, c'est-à-dire $x \geq q$: donc q est bien copremier.

|| **COROLLAIRE.** Dans un treillis distributif, tout atome est copremier.

En effet, par définition, un élément $a \in T$ est un atome si $a \neq 0$ et $M^a = \{0, a\}$, ce qui équivaut exactement à $\dot{M}^a = \{0\}$. Comme $\{0\} = M^0$ est un antifiltroïde, la conclusion résulte bien du critère 8–10.

N.B. — Dans un treillis non distributif, un atome n'est pas nécessairement copremier. Un treillis non distributif peut très bien être atomique (*i.e.* chaque élément est le Sup des atomes qu'il majore) sans posséder aucun élément copremier.

Par exemple, dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$, le treillis des ensembles ouverts selon la boule unité B (*i.e.* de la forme $A \oplus B$) est atomique : les atomes, en effet, sont les translatés de la boule unité B . Mais il ne contient aucun élément copremier.

La topologie sci minimale va jouer un rôle crucial dans l'étude de la coprimaryté. Nous désignerons par $\mathcal{F}_\wedge^\mu(T)$, ou simplement $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ la classe des fermés de cette topologie sci minimale, qui est la classe stable pour l'intersection engendrée par les M^I , $I \in \mathcal{J}(T)$ (parties finies de T). L'adhérence d'une partie A de T pour cette topologie sci minimale sera souvent (s'il n'y a pas ambiguïté) désignée par $M^{\bar{A}}$. Elle est donnée par :

$$M^{\bar{A}} = \bigcap \{ M^I : I \in \mathcal{J}(T), M^I \supset A \}$$

|| **CRITÈRE 8–11.** Un élément q dans un treillis T est copremier si et seulement si :

e) $q \leq \vee F$ équivaut à $q \in M^F$ pour tout fermé sci minimal $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$.

La condition est évidemment suffisante, puisque l'on a $M^J \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$ pour toute partie finie J . Inversement, supposons q copremier et $q \leq \vee F$ pour $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$.

On a, *a fortiori*, $q \leq \vee J$ pour toute partie finie J telle que $M^J \supset M^F$, ce qui implique $q \in M^J$ et donc

$$q \in \bigcap \{ M^J \supset M^F \} = M^F$$

(la dernière égalité exprimant simplement $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$).

COROLLAIRE. Pour tout fermé sci minimal $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$, on a

$$Q \cap M^{\vee F} = Q \cap M^F$$

LEMME 8-4. Si A est une partie d'un treillis T , et $M^{\bar{A}}$ son adhérence pour la topologie sci minimale (ou pour toute autre topologie sci admissible), on a :

$$\vee A = \vee M^{\bar{A}} = \wedge \{ \vee J, J \in \mathcal{J}(T), M^J \supset M^{\bar{A}} \}$$

On a, en effet, $M^{\vee A} = \bigcap \{ M^x \supset A \}$ et $M^x \supset A$ équivaut à $M^x \supset M^{\bar{A}}$ dans toute topologie sci admissible. L'autre égalité résulte des inclusions évidentes

$$M^{\vee A} = \bigcap \{ M^x \supset M^{\bar{A}} \} \supset \bigcap \{ M^{\vee J} : M^J \supset M^{\bar{A}} \} \supset M^{\vee A}$$

Ce lemme et le critère 8-11 entraînent immédiatement le théorème suivant, simple, mais utile :

THÉORÈME 8-9. Soit, dans un treillis T , q un élément copremier et $M^{\bar{A}}$ l'adhérence, pour la topologie sci minimale, d'une partie A de T . Alors :

f) on a $q \leq \vee A$ si et seulement si $q \in M^{\bar{A}}$
et de plus $Q \cap M^{\vee A} = Q \cap M^{\bar{A}}$.

L'application $\hat{H}$

On a vu (critère 8-9) qu'un élément q est copremier dans un treillis T si et seulement si $\mathcal{C}M_q$ est un antifiltroïde (critère 8-9). Or, cela équivaut à $\hat{S}(\mathcal{C}M_q) \supset \mathcal{C}M_q$, puisque l'inclusion inverse est toujours vraie, donc aussi à :

$$q \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_q, \text{ ou, si l'on préfère, } M_q = \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_q$$

Il est donc naturel de s'intéresser à l'application : $y \rightarrow \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_y$ de T dans $\mathcal{P}_\vee(T)$. Nous désignerons par $\hat{H}$ l'application réciproque, définie par :

$$(i) \quad \hat{H}(x) = \{ y : x \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_y \}$$

qui est donc, en principe, une application de T dans $\mathcal{P}_\wedge(T)$. C'est même, en réalité, une application de T dans la classe $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ des fermés sci minimaux.

En effet, on a $x \in \hat{S} \mathcal{C}M_y$ si et seulement si on peut trouver une partie finie J de T vérifiant $x \leq \vee J$ et $y \in \mathcal{C}M^J$. *A contrario*, donc, $x \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_y$ équivaut à : pour toute partie finie J de T , $x \leq \vee J$ entraîne $y \in M^J$, i.e.

$$(ii) \quad \hat{H} = \bigcap \{ M^J : \vee J \geq x \}$$

De cette relation résulte bien $\hat{H}(x) \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$. Comme $\{x\}$ appartient à la classe des parties finies J telles que $\vee J \geq x$, cette relation implique immédiatement

$$(iii) \quad \vee \hat{H}(x) \leq x$$

Pour tout x et y dans T , on a :

$$(iv) \quad \hat{H}(x \vee y) = \hat{H}(x) \cup \hat{H}(y)$$

(Mais, en général, $\hat{H}$ n'est pas une dilatation de T dans $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ ni même dans $\mathcal{P}_\wedge$).

En effet, $\hat{S} \mathcal{C}M_z$ étant un antifiltroïde, $x \vee y \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_z$ équivaut à x ou $y \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C}M_z$, soit, compte tenu de (i) :

$$z \in \hat{H}(x \vee y) \Leftrightarrow z \in \hat{H}(x) \cup \hat{H}(y)$$

Pour améliorer la relation (ii), nous allons utiliser un lemme de compacité :

LEMME 8-5. Soit, dans un treillis T (non nécessairement COF) M^F un fermé de la topologie sci minimale et M^G un ouvert de la topologie scs maximale. Alors :

$M^F \subset M^G$ entraîne $\vee F \in \hat{S}(M^G)$

et on a

$$\hat{S}(M^G) = \bigcup \{ M^{\vee F} : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, M^F \subset M^G \}$$

On a, en effet, $M^F = \bigcap \{ M^J \supset M^F \}$, puisque $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$. Mais on sait (théorème 4-1) que la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ (même non séparée) est toujours quasi-compacte. Comme la classe des M^J contenant M^F est stable pour l'intersection finie, la propriété

$$\bigcap \{ M^J \cap \mathcal{C}M^G : M^J \supset M^F \} = \emptyset$$

entraîne donc l'existence d'une partie finie J telle que $M^F \subset M^J \subset M^G$. On a donc $\vee F \leq \vee J$ avec $M^J \subset M^G$, c'est-à-dire $\vee F \in \hat{S}(M^G)$. D'où la conclusion.

Avec $M^G = \mathbb{C}M_y$, le lemme 8-5 nous donne

$$\hat{S}(\mathbb{C}M_y) = \bigcup \{ M^{\vee F} : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, y \in \mathbb{C}M^F \}$$

et, en décalquant le raisonnement qui nous a conduit à la relation (ii), nous obtenons maintenant la relation en apparence plus forte :

$$(v) \quad \hat{H}(x) = \bigcap \{ M^F : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, \vee F \geq x \}$$

Ainsi, $\hat{H}(x)$ est l'intersection des fermés sci minimaux M^F qui vérifient $\vee F \geq x$. Mais, en général, le fermé $\hat{H}(x)$ lui-même ne vérifie pas cette relation.

Plaçons-nous dans le cas particulier où on a $\vee \hat{H}(x) \geq x$, c'est-à-dire, en réalité, compte tenu de l'inégalité (iii), dans le cas où on a l'égalité :

$$(vi) \quad \vee \hat{H}(x) = x$$

La relation (v) exprime alors exactement que $\hat{H}(x)$ est le plus petit élément M^F dans $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ vérifiant $\vee F \geq x$. On a donc l'équivalence :

$$x \leq \vee F \Leftrightarrow \hat{H}(x) \subset M^F$$

Autrement dit, dans ce cas, l'application $M^F \rightarrow \vee F$ est une érosion, et la dilatation associée est justement l'application $x \rightarrow \hat{H}(x)$ de T dans $\mathcal{F}_\wedge^\mu$.

Inversement, supposons que l'application $M^F \rightarrow \vee F$ soit une érosion de $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ dans T . Alors, la dilatation associée est, justement, $\hat{H}$ et vérifie $\vee \hat{H}(x) = x$.

En effet, désignons par $\tilde{H}$ la dilatation associée. Comme $x \leq \vee F$ équivaut à $\tilde{H}(x) \subset M^F$, la relation (v) ci-dessus se réécrit sous la forme :

$$\hat{H}(x) = \bigcap \{ M^F : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, M^F \supset \tilde{H}(x) \}$$

et on a donc bien $\hat{H} = \tilde{H}$.

Sous forme analytique, la relation (vi) est donc équivalente à la relation suivante :

$$(vii) \quad \vee \bigcap_{F \in \mathcal{B}} M^F = \bigwedge_{F \in \mathcal{B}} \vee F \quad (\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_\wedge^\mu)$$

Cette relation (vii), à son tour, implique que $\vee$ distribue complètement $\wedge$ dans T (sans, d'ailleurs, que la réciproque soit vraie).

Soient, en effet, x et y_i , $i \in I$ des points dans T . Prenons comme classe $\mathcal{B}$, dans la relation (vii), les fermés $M^{F_i} = M^x \cup M^{y_i}$. Au premier membre, il vient $\vee (M^x \cup M^{\wedge y_i}) = x \vee (\bigwedge_i y_i)$, et au second $\bigwedge_i (x \vee y_i)$. Donc $\vee$ distribue complètement $\wedge$.

Résumons cette analyse :

THÉORÈME 8-10. Dans un treillis T quelconque, on pose pour tout $x \in T$:

$$(i) \quad \hat{H}(x) = \{ y : x \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_y \}$$

Alors $\hat{H}(x)$ est un fermé sci minimal, et l'application $x \rightarrow \hat{H}(x)$ de T dans $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (ii) & \hat{H}(x) = \bigcap \{ M^J : J \in \mathcal{J}(T), \forall J \geq x \} \\ (iii) & \vee \hat{H}(x) \leq x \\ (iv) & \hat{H}(x \vee y) = \hat{H}(x) \cup \hat{H}(y) \quad (x, y \in T) \\ (v) & \hat{H}(x) = \bigcap \{ M^F : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, \forall F \geq x \} \end{array} \right.$$

De plus, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (vi) & \vee \hat{H}(x) = x \quad (\forall x \in T) \\ (vii) & \text{L'application } M^F \rightarrow \vee F \text{ est une \u{erosion} de } \mathcal{F}_\wedge^\mu \text{ dans } T, \text{ i.e.} \\ & \vee \bigcap_{F \in \mathcal{B}} M^F = \bigwedge_{F \in \mathcal{B}} \vee F \quad (\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_\wedge^\mu) \end{array} \right.$$

Lorsqu'elles sont vérifiées, l'application $\hat{H}$ est la dilatation associée à l'érosion $M^F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ dans T . De plus, $\vee$ distribue alors complètement $\wedge$ dans T .

Mentionnons, en passant, un critère simple.

CRITÈRE 8-12. Dans un treillis T , un élément q est coprimaire si et seulement si il vérifie l'une des relations équivalentes suivantes :

$$\begin{array}{ll} f) & q \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_q \quad (\text{ou, si on préfère, } \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_q = M_q) \\ g) & q \in \hat{H}(q) \quad (\text{ou, si on préfère, } \hat{H}(q) = M^q) \end{array}$$

Plus importante est la conséquence suivante du théorème 8-10, puisqu'elle conduit à une condition nécessaire (et peut-être suffisante ?) de coprimarité, qui n'est autre que la condition (vi) ou (vii) du théorème :

THÉORÈME 8-11. (CONDITION NÉCESSAIRE DE COPRIMARITÉ). Si un treillis T est coprimaire, l'application $M^F \rightarrow \vee F$ est une érosion de $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ dans T (et la dilatation associée, qui est $\hat{H}$, vérifie $\vee \hat{H}(x) = x$). En particulier, $\vee$ distribue complètement $\wedge$ dans T .

En effet, dans un treillis coprimaire, on a $x = \vee (Q \cap M^x)$ pour tout $x \in T$, et par suite :

$$x \leq y \Leftrightarrow Q \cap M^x \subset Q \cap M^y$$

D'après le corollaire du critère 8–11, il en résulte :

$$x \leq \vee F \Leftrightarrow Q \cap M^x \subset Q \cap M^F$$

Or ceci équivaut encore à $\overline{R}(x) \subset M^F$, en désignant par $\overline{R}(x)$ l'adhérence de $Q \cap M^x$ pour la topologie sci minimale, soit

$$(viii) \quad \overline{R}(x) = M^{\overline{Q \cap M^x}} = \bigcap \{M^J \supset Q \cap M^x\}$$

Donc $M^F \rightarrow \vee F$ est bien une érosion. Le reste se déduit du théorème 8–10.

COROLLAIRE. Dans un treillis coprimaire, la dilatation $\hat{H}$ est égale à l'application $\overline{R}$ définie en (viii), i.e. : $\hat{H}(x)$ est l'adhérence dans T , pour la topologie sci minimale, de la classe $Q \cap M^x$ des minorants copremiers de $x \in T$.

Remarques. La condition de distributivité ($\vee$ distribue complètement $\wedge$) est nécessaire, d'après le théorème, mais elle n'est pas suffisante.

Contre exemple. Le treillis des fermés F vérifiant la relation $F = \overline{\overline{F}}$ dans un espace euclidien (par exemple) ne peut pas être coprimaire (tout F de ce type peut être mis sous la forme $F = F_1 \cup F_2$, $F_1 \neq F$, $F_2 \neq F$, ce qui contredit le critère 8–10). Pourtant, il est complètement distributif et même complémenté. (Voir Annexe A). Le treillis $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$, lui, est parfaitement coprimaire et même atomique. Mais ses atomes, qui sont les fermés ponctuels $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^N$, ont tous la même image par l'ouverture $F \rightarrow \overline{\overline{F}}$, et cette image est l'ensemble vide : d'où la disparition des éléments coprimaires.

Par contre, il n'est pas impossible (et je le conjecturerais volontiers) que la condition nécessaire de l'énoncé ($\vee$ érode $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ dans T) soit aussi une condition suffisante. Mais je n'ai pas de démonstration dans le cas général. On établira cependant ci-dessous (Chapitre X) une réciproque partielle, à savoir : dans le cas d'un treillis T COF pour la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$, la condition de l'énoncé est nécessaire et suffisante pour la coprimarité, et elle est alors équivalente à la condition : T est à $\vee$ continu.

Mais il existe certainement des treillis coprimaires qui ne sont pas à $\vee$ continu, ni COF pour la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$. C'est le cas, en particulier, du treillis des fermés d'un espace topologique E séparé mais non localement compact. On trouvera, en effet, en Annexe B la démonstration du théorème suivant :

Le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace topologique séparé E est à $\vee$ continu si et seulement si E est localement compact.

Donc, si E n'est pas localement compact, $\mathcal{F}(E)$ n'est pas à $\vee$ continu. Il est pourtant coprimaire, et même atomique, puisque E est séparé.

Cas d'un treillis-produit

Soit $T = \prod_{e \in E} T_e$ un treillis-produit, $T_e, e \in E$ les treillis facteurs. La projection de T sur T_e est l'application $\bar{\omega}_e$ qui, à tout $x = (x_e)_{e \in E}$ dans T associe sa coordonnée x_e , soit $\bar{\omega}_e(x) = x_e$. C'est un homomorphisme. A cet homomorphisme sont donc associées une érosion et une dilatation de T_e dans T que nous désignerons par $\hat{Q}_e$ et $\hat{Q}_e$ respectivement. Il sera commode, pour $z_e \in T_e$ donné, de désigner par :

$$z_e \times O_{e^c} \text{ le point } x \text{ défini par } \begin{cases} x_{e'} = O_{e'} & \text{pour } e' \neq e \\ x_e = z_e \end{cases}$$

Avec cette notation, on trouve immédiatement :

$$\hat{Q}_e(z_e) = z_e \times O_{e^c}$$

Comme $\hat{Q}_e$ est une dilatation et $\bar{\omega}_e$ un homomorphisme, donc aussi une dilatation, l'ouverture $\hat{Q}_e \bar{\omega}_e$ est aussi une dilatation. Le treillis quotient associé à l'équivalence propre correspondante est évidemment isomorphe à T_e . Explicitement, on a :

$$\hat{Q}_e \bar{\omega}_e(x) = x_e \times O_{e^c}$$

et on en déduit immédiatement

$$\bigvee_{e \in E} \hat{Q}_e \bar{\omega}_e(x) = x$$

CRITÈRE 8-13. Un élément q est copremier dans un treillis-produit $T = \prod_{e \in E} T_e$ si et seulement si il est de la forme :

$$q = \hat{Q}_e(q_e) \text{ pour un } e \in E \text{ et un } q_e \in Q(T_e) \text{ copremier dans } T_e.$$

De plus, le treillis-produit est coprimaire si et seulement si chacun des facteurs T_e est coprimaire.

En effet, supposons qu'un $x \in T$ ait deux composantes x_{e_1} et x_{e_2} non nulles ($e_1 \neq e_2$). Posons

$$y_1 = O_{e_1} \times \omega_{e_1^c} \quad ; \quad y_2 = O_{e_2} \times \omega_{e_2^c}$$

On a $x \leq y_1 \vee y_2$, mais $x \not\leq y_1$ et $x \not\leq y_2$: x n'est pas copremier.

Donc, les éléments coprimaires de T sont nécessairement de la forme $q = \hat{Q}_e(q_e)$ pour un $e \in E$. Il est alors immédiat qu'un élément de cette forme est coprimaire dans T si et seulement si q_e est lui-même coprimaire dans T_e .

Pour tout $x \in T$, on a donc :

$$\vee (M^x \cap Q(T)) = \vee_{e \in E} \vee M^x \cap \hat{Q}_e(Q(T_e))$$

soit, sous forme plus analytique :

$$\bar{w}_e \vee (M^x \cap Q) = \vee M^{x_e} \cap Q(T_e)$$

La dernière affirmation de l'énoncé en découle.

Sous-treillis et quasi-sous-treillis

DÉFINITION. Nous dirons qu'une fermeture φ sur un treillis T est de type topologique (ou est une topo-fermeture) si on a

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad (x, y \in T)$$

ou, ce qui revient au même, si son domaine d'invariance B_φ vérifie $b \vee b' \in B_\varphi$ dès que b et b' sont dans B_φ .

En particulier, les dilatations-fermetures associées aux sous-treillis de T sont de ce type.

CRITÈRE 8-14. Si φ est une fermeture de type topologique sur un treillis T , et B_φ son domaine d'invariance, $\varphi(q)$ est coprimaire dans le treillis B_φ dès que q est coprimaire dans T .

De plus, si T est coprimaire, B_φ est aussi coprimaire. En particulier, tout sous-treillis d'un treillis coprimaire est lui-même coprimaire.

En effet, si $b, b' \in B_\varphi$ leur Sup dans B_φ est encore $b \vee b'$, d'après la définition des topo-fermetures. Comme $\varphi(q) \leq b \vee b' \in B_\varphi$ équivaut alors à $q \leq b \vee b'$, il en résulte bien que $\varphi(q)$ est coprimaire dans B_φ dès que q appartient à $Q(T)$.

Si T est coprimaire, on a, pour tout $b \in B_\varphi$

$$b = \vee (Q \cap M^b) \leq \vee \{\varphi(q), q \in Q \cap M^b\} \leq b$$

puisque $q \leq b$ entraîne $\varphi(q) \leq b$, et donc l'égalité : donc B_φ est coprimaire.

N.B. — B_φ peut très bien posséder d'autres éléments coprimaires que ceux de $\varphi(Q)$.

On rappelle qu'un fuseau est une partie de la forme $M_a^b = M_a \cap M^b$ ($a \leq b$) dans un treillis T , et qu'un quasi-sous-treillis est un sous-treillis d'un tel fuseau.

CRITÈRE 8-15. Soit $a \leq b$ dans un treillis T . Si q est copremier dans T et majoré par b , alors $q \vee a$ est copremier dans le fuseau $M_a \cap M^b$, sauf si $q \leq a$ (i.e. $q \vee a = a$).

Si T est coprime, les fuseaux et les quasi-sous-treillis de T sont encore coprimes.

Soit, en effet, $q \in Q \cap M^b$ dans T . Si x et y appartiennent au fuseau $M_a \cap M^b$, on a $x \vee y \geq a$, et donc $q \vee a \leq x \vee y$ équivaut à $q \leq x \vee y$. On a donc, par exemple, $q \leq x$, et par suite $q \vee a \leq x$. Si $q \leq a$, $q \vee a = a$ est l'élément nul du treillis M_a^b , et n'est donc pas copremier. Si $q \not\leq a$, on a $q \vee a > a$ strictement, et cet élément est donc copremier dans le fuseau.

Si T est coprime, on a $x = \vee Q \cap M^x$ pour tout $x \in T$. Si $x \in M_a \cap M^b$, on a $x \geq a$ et donc aussi $x = \vee \{q \vee a : q \in Q \cap M^x\}$. Si $q \vee a = a$ pour tout $q \in Q \cap M^x$, on a $x = a$. Mais, au sens du treillis $M_a \cap M^b$, le $\vee$ de la classe vide est justement égal à a . Par suite, dans tous les cas, on a

$$x = \vee \{q \vee a : q \in Q \cap M^x \cap \complement M^a\}$$

et le fuseau est coprime. Il suffit d'appliquer le critère 8-14 au fuseau lui-même pour obtenir l'énoncé relatif aux quasi-sous-treillis. En particulier :

COROLLAIRE. Sur un ensemble E quelconque, toute classe de fonctions stable pour le $\vee$ et le $\wedge$ numérique (des parties non vides) constitue un treillis coprime.

Il s'agit, en effet, d'un quasi-sous-treillis du treillis $\overline{\mathbb{R}}^E$, qui est coprime, puisque $\overline{\mathbb{R}}$ est déjà coprime (critère 8-13).

Passage au quotient

Critère 8-16. Soit, sur un treillis T , γ une ouverture vérifiant :

$$\gamma(x \vee y) = \gamma(x) \vee \gamma(y) \quad (x, y \in T)$$

et B_γ son domaine d'invariance. Alors, un élément $q = \gamma(q)$ de B_γ est copremier dans le treillis B_γ si et seulement si il est déjà copremier dans T . Ce résultat s'applique, en particulier, à la dilatation-ouverture associée à une équivalence propre sur T , donc aussi au treillis quotient T_c , isomorphe à B_γ .

En effet, $q = \gamma(q) \leq \gamma(x) \vee \gamma(y) = \gamma(x \vee y)$ équivaut à $\gamma(q) \leq x \vee y$, d'où la conclusion.

N.B. — Il semble résulter de ce critère que la coprimarité ne passe pas automatiquement au quotient par une équivalence propre. Cependant, je n'ai pas trouvé de contre exemple. On verra au contraire que, dans le cas des treillis à $\vee$ continu, le passage au quotient est toujours assuré. Comme les dilatations-ouvertures possèdent une propriété beaucoup plus forte que celle qu'utilise le critère 8-16, il se pourrait que le passage au quotient soit encore assuré dans le cas général. Mais je n'ai pas de démonstration.

Copremiers forts et déhanchements

DÉFINITION. Nous dirons qu'un point b dans un treillis T est fortement copremier, ou est un copremier fort, si $b \leq \vee B$ entraîne $b \in M^B$ pour toute partie B de T . De même un point de T sera dit fortement premier s'il est copremier fort dans le treillis dual.

Si b est copremier fort, la relation $b \notin \mathcal{C}M_b$ entraîne donc $b \not\leq \vee \mathcal{C}M_b$. Nous poserons $a = \vee \mathcal{C}M_b$. On a donc $b \notin M^a$, soit $M^a \subset \mathcal{C}M_b$ et donc, l'inclusion inverse étant évidente, l'égalité $M^a = \mathcal{C}M_b$.

Inversement, si on a $\mathcal{C}M_b = M^a$, la relation $b \notin M^B$ équivaut à $M^B \subset M^a$, donc à $\vee B \leq a$. D'où $\vee B \in \mathcal{C}M_b$, et $b \leq \vee B$: b est copremier fort.

Cette condition se met sous une forme autoduale :

$$(i) \quad M_b \cap M^a = \emptyset \quad ; \quad M_b \cup M^a = T$$

et implique :

$$(ii) \quad a = \vee \mathcal{C}M_b \quad ; \quad b = \wedge \mathcal{C}M^a$$

de sorte que a est, à son tour, fortement premier.

Critère 8-17. Un élément b est copremier fort, dans un treillis T , si et seulement si l'élément $a = \vee \mathcal{C}M_b$ satisfait les relations (i). Cet élément a est alors fortement premier, et satisfait aussi les relations (ii). L'énoncé dual est également valable.

On voit que les éléments fortement premiers et copremiers marchent par couples (a, b) . Nous dirons souvent qu'un tel couple (a, b) constitue un déhanchement du treillis T .

Nous reviendrons, dans le chapitre suivant, sur la dilatation $\alpha(x) = \vee \dot{C}M_x$ et l'érosion associée $\beta(y) = \wedge \dot{C}M^y$.

Examinons, à titre d'exemple, le cas particulier d'un treillis T totalement ordonné. Posons d'abord un critère simple, parfois utile.

CRITÈRE 8-18. Pour un treillis T , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) T est totalement ordonné
- b) Tous les éléments de T sont copremiers (sauf 0)
- c) Tous les éléments de T sont premiers (sauf ω).

Si T est totalement ordonné, $y \vee z$ est toujours égal à y ou à z ($y, z \in T$). Donc si on a $x \leq y \vee z$, il vient $x \leq y$ ou $x \leq z$: si x n'est pas égal à 0, il est copremier.

Inversement, supposons b) vérifié, et soit y et z dans T . Si $y \vee z = 0$, on a $y = z = 0$. Donc, si $y \neq z$, l'élément $x = y \vee z$ n'est pas nul, et par suite il est copremier. Mais cela implique soit $x \leq y$, donc $x = y$ et $y \geq z$, ou $x \leq z$, et $x = z \geq y$: T est donc totalement ordonné.

Dans un treillis T , on désignera par x_- le Sup des minorants stricts d'un élément x , et par x_+ l'Inf de ses majorants stricts, soit :

$$x_+ = \wedge \dot{M}_x \quad ; \quad x_- = \vee \dot{M}^x$$

Dans un treillis totalement ordonné, on a $\dot{M}_x = \dot{C}M^x$, $\dot{M}^x = \dot{C}M_x$. Ainsi :

COROLLAIRE. Dans un treillis T totalement ordonné, un élément b est copremier fort si et seulement si $b > b_-$ (strictement), et un élément a est fortement premier si et seulement si $a < a_+$. Le couple (a, b) vérifiant la relation (i) est donc caractérisé par :

$$a = b_- , \quad b = a_+ \quad \text{et} \quad a < b$$

Si tous les éléments de T sont fortement premiers (sauf ω et, éventuellement, 0), ils sont aussi fortement copremiers sauf 0 et, éventuellement, ω . Le treillis totalement ordonné T est alors dit de type discret. Si au contraire T ne possède pas d'éléments premiers forts, il est de type continu.

Quelques exemples

Dans tout ensemble E , le treillis $\mathcal{P}(E)$ est primaire et coprimaire : les copremiers sont les atomes $\{x\}$, $x \in E$, et les premiers leurs complémentaires.

Si E est un espace topologique accessible (i.e. les $\{x\}$, $x \in E$ sont fermés), le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés de E est encore coprimaire. Mais il n'est déjà plus primaire, sauf si la topologie de E est la topologie discrète.

Si, maintenant, nous partons d'un treillis T , nous voyons que $\mathcal{P}_\wedge(T)$ et $\mathcal{P}_\vee(T)$, en tant que sous-treillis, sont encore primaires et coprimaires (critère 8-14). Ici, la fermeture-dilatation est $A \rightarrow M^A$ (dans le cas de $\mathcal{P}_\wedge$). Par suite, les M^x , $x \in T$ sont coprimaires dans $\mathcal{P}_\wedge$. Mais il y en a d'autres.

THÉOREME 8-12. Si T est un treillis,, les éléments coprimaires de $\mathcal{P}_\wedge(T)$ sont les antifiltroïdes (classe $\phi_\wedge$) et ses éléments premiers sont les complémentaires des filtroïdes. De même, les éléments coprimaires de $\mathcal{P}_\vee(T)$ sont les filtroïdes (classe $\Phi_\vee$), et ses éléments premiers sont les complémentaires des antifiltroïdes.

Supposons $A = M^A$ copremier dans $\mathcal{P}_\wedge$. Alors, pour $x, y \in T$, $M^A \subset \mathcal{C}M_x \cup \mathcal{C}M_y = \mathcal{C}M_{x \vee y}$, i.e. $x \vee y \notin M^A$ entraîne, par exemple, $M^A \subset \mathcal{C}M_x$, i.e. $x \notin M^A$. Donc M^A est un antifiltroïde.

Supposons $A = M^A$ non copremier dans $\mathcal{P}_\wedge$. Si $A \neq \emptyset$, il existe alors M^B et M^D dans $\mathcal{P}_\wedge$ avec

$$M^A \subset M^B \cup M^D, \text{ mais } M^A \not\subset M^B, M^A \not\subset M^D$$

Soit donc $a_1 \in M^A \cap \mathcal{C}M^B$ et $a_2 \in M^A \cap \mathcal{C}M^D$: alors $a_1 \vee a_2$ n'appartient ni à M^B ni à M^D , donc n'appartient pas à M^A , et M^A n'est pas un antifiltroïde. On a donc bien $Q(\mathcal{P}_\wedge) = \Phi_\wedge$.

En raisonnant sur le treillis dual, on trouve $Q(\mathcal{P}_\vee) = \Phi_\vee$. Comme l'application $M^A \rightarrow \mathcal{C}M_A$ est un isomorphisme de $\mathcal{P}_\wedge$ sur le treillis dual de $\mathcal{P}_\vee$, les énoncés relatifs aux éléments premiers en découlent.

Il en résulte un important corollaire.

COROLLAIRE. Dans tout treillis T , la classe Q des coprimaires est stable pour $\uparrow$.

Soit, en effet, $A \subset Q$ une partie de Q filtrante croissante dans T , de sorte que M^A est un antifiltroïde. Si x et y sont des éléments de T tels que $\forall A \in A, x \vee y \in A$, soit $A \subset M^x \vee y$, il en résulte $A \subset M^x \cup M^y$, puisque A ne contient que des éléments coprimaires, et donc aussi :

$$M^A \subset M^x \cup M^y$$

Mais l'antifiltroïde M^A est copremier dans $\mathcal{P}_\wedge$, et on a donc, par exemple, $M^A \subset M^x$, c'est-à-dire $\forall A \in A, x \in A$: donc x est copremier.

THÉOREME 8-13. Dans le treillis $\Phi_{\wedge}(T)$ des antifiltroïdes d'un treillis T , les éléments premiers sont les antifiltroïdes parfaits. De même, dans le treillis $\Phi_{\vee}$ des filtroïdes, les éléments premiers sont les filtroïdes parfaits.

En effet, soit $M^A \in \Phi_{\wedge}$. Si M^A est premier dans $\Phi_{\wedge}$, pour $x, y \in T$, $M^x \wedge y = M^x \cap M^y \subset M^A$, i.e. $x \wedge y \in M^A$ entraîne, par exemple, $M^x \subset M^A$, i.e. $x \in M^A$: donc M^A est un filtroïde, et par suite M^A est un antifiltroïde parfait.

Si l'antifiltroïde M^A n'est pas premier, et non égal à $M^{\omega} = T$, on peut trouver deux antifiltroïdes M^{A_1} et M^{A_2} avec

$$M^{A_1} \cap M^{A_2} \subset M^A ; M^{A_1} \not\subset M^A ; M^{A_2} \not\subset M^A$$

Donc, il existe $a_1 \in M^{A_1}$ et $a_2 \in M^{A_2}$ avec $a_1 \notin M^A$, $a_2 \notin M^A$. Comme $a_1 \wedge a_2 \in M^{A_1} \cap M^{A_2}$, on a pourtant $a_1 \wedge a_2 \in M^A$. Donc M^A n'est pas un antifiltroïde parfait.

COROLLAIRE. Pour tout treillis T , les énoncés suivants sont équivalents :

- a) T est distributif
- b) Le treillis $\Phi_{\wedge}(T)$ des antifiltroïdes est primaire
- c) Le treillis $\Phi_{\vee}(T)$ des filtroïdes est primaire.

Compte tenu du théorème 8-13, ce corollaire ne fait que réénoncer le théorème 8-8 de séparation, compte tenu aussi du théorème 8-7.

THÉOREME 8-14. Dans un treillis T , les éléments copremiers de la classe $\mathcal{F}_{\wedge}^{\mu}$ des fermés sci minimaux sont les M^x , $x \in T$.

Ces éléments sont manifestement copremiers. Inversement, si M^A est copremier dans $\mathcal{F}_{\wedge}^{\mu}$, pour toute partie finie I de T , $M^A \subset M^I$ entraîne $M^A \subset M^x$ pour un $x \in I$, soit $M^{\vee A} \subset M^I$. Comme $M^A = \bigcap \{M^I \supset M^A\}$, on a bien $M^A = M^{\vee A}$.

Compléments : domaine de coprimarité

Etant donné un filtroïde $F = M_F$ dans un treillis T , on appellera domaine de coprimarité du filtroïde F la classe C^F des $y \in T$ tels que, pour tout $z \in T$, $y \vee z \in F$ entraîne $z \in F$, soit :

$$C^F = \{y : y \vee z \in M_F \Rightarrow z \in M_F\}$$

C^F est non vide ($0 \in C^F$), permis pour $\wedge$ et stable pour le Sup fini : supposons $y, y' \in C^F$. Si $(y \vee y') \vee z = y \vee (y' \vee z) \in M_F$, cela implique d'abord

$y' \vee z \in M_F$ d'après la définition de C^F , puis $z \in M_F$. Donc $y \vee y' \in C^F$, et C^F est un antifiltroïde.

On note aussi que l'on a $C^F \subset \bigcap M_F$ si et seulement si $0 \notin M_F$, i.e. si le filtroïde M_F est propre.

Si $M_F = M_x$ pour un $x \in T$, on écrira C^x au lieu de C^{M_x} , et on dira que C^x est le domaine de coprimarité de l'élément x .

THÉOREME 8-15. Si $F = M_F$ est un filtroïde dans un treillis T , son domaine de coprimarité est l'intersection des antifiltroïdes maximaux A_M disjoints de F .

Désignons par C' cette intersection. Si A_M est un antifiltroïde maximal disjoint de F , $x \notin A_M$ équivaut à : on peut trouver $a \in A_M$ avec $x \vee a \in F$. Comme on a $x \vee a \in F$ mais $a \notin F$, il vient $x \notin C^F$. Donc $C^F \subset A_M$, et par suite $C^F \subset C'$.

Inversement, soit $x \notin C^F$. Par définition, cela veut dire que l'on peut trouver $z \notin F$ avec $x \vee z \in F$. Comme $z \notin F$, l'antifiltroïde M^z est disjoint de F , et on peut trouver un antifiltroïde maximal A_M contenant M^z et disjoint de F . On a alors $z \in A_M$, et $x \vee z \in F$ entraîne donc $x \notin A_M$. Donc $C' \subset C^F$, et par suite $C' = C^F$.

N.B. — Dans cet énoncé, on n'a pas supposé le treillis T distributif. Si T est distributif, les antifiltroïdes maximaux qui interviennent dans l'énoncé sont aussi des antifiltroïdes parfaits.

CRITÈRE 8-19. Dans un treillis T distributif, un filtroïde propre (non égal à T) M_F est parfait si et seulement si son domaine de coprimarité coïncide avec son complément, soit :

$$C^F = \bigcap M_F$$

Si M_F est parfait, $y \vee z \in M_F$ et $y \notin M_F$ entraînent $z \in M_F$, donc $\bigcap M_F \subset C^F$, et l'égalité, l'inclusion inverse étant triviale.

Inversement, supposons $\bigcap M_F \subset C^F$, et soit y, z dans T avec $y \vee z \in M_F$. On a soit $y \in M_F$, soit $y \in \bigcap M_F$, donc $y \in C^F$. Mais dans ce dernier cas ($y \in C^F$) $y \vee z \in M_F$ entraîne $z \in M_F$. Donc M_F est un filtroïde parfait.

Chapitre IX

Distributivité totale et monoséparation

Dans ce chapitre et dans le suivant, nous examinons les implications topologiques des structures algébriques que nous venons de rencontrer. Nous commençons par la plus riche, la distributivité totale, qui se laisse identifier, comme nous allons le voir, à une structure topologique également très riche, celle de treillis monoséparé. L'importance de cette dernière structure, du point de vue des applications, résulte du fait que toute classe de fonctions stable pour le Sup et l'Inf numérique constitue un treillis de ce type. Tel est, en particulier, le cas du treillis des fonctions lipschitziennes construites sur un espace métrique, ou, plus généralement, des treillis de fonctions équicontinues étudiées par J. Serra [11].

9 – 1. Le théorème de monoséparation

Commençons par la définition :

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis T est monoséparé si, pour tout couple de points x, y distincts dans T , avec, par exemple, $x \neq y$, on peut trouver a et b dans T tels que

$$(a) \quad M^x \subset \mathcal{C}M_b \subset M^a \subset \mathcal{C}M_y$$

Examinons les conséquences de cette définition. Nous dirons, pour abrégé le langage, qu'un treillis est bicontinu s'il est COF à $\vee$ et à $\wedge$ continu. On a déjà rencontré cette structure au chapitre VI, et vu, en particulier, que pour un treillis de ce type, chacune des deux topologies sci et scs est à la fois minimale et maximale. En particulier, donc, la topologie minimale $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_I$ (sci minimale et scs minimale) est séparée. Or, la relation (a) implique déjà, par elle-même, cette dernière propriété. Il y a mieux :

- Tout treillis monoséparé est bicontinu.

En effet, dans la relation de définition (a), $\mathcal{C}M_b$, ouvert de la topologie scs minimale est, *a fortiori*, ouvert pour la topologie maximale, de sorte que le critère 5-2 du chapitre V est satisfait : T est COF à $\vee$ continu. Mais la relation (a) est autoduale, puisqu'elle s'écrit aussi bien :

$$(a^*) \quad M_y \subset \mathcal{C}M^a \subset M_b \subset \mathcal{C}M^x$$

Donc T est également à $\wedge$ continu.

Plus inattendue, peut-être, est la propriété suivante :

- Tout treillis monoséparé est distributif.

Soient, en effet, a, b et c trois points d'un treillis T monoséparé. Posons

$$x = a \vee (b \wedge c) \quad ; \quad y = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

On a toujours $x \leq y$. Supposons l'inégalité stricte, soit $M^x \subsetneq \mathbb{C}M_y$ et montrons que cela conduit à une contradiction. Le treillis étant monoséparé et $M^x \subsetneq \mathbb{C}M_y$, il résulte de la définition que l'on peut trouver z et z' dans T avec :

$$y \in \mathbb{C}M^z \quad ; \quad x \in \mathbb{C}M_{z'} \quad \text{et} \quad M_{z'} \cup M^z = T$$

Comme $y \not\leq z$ et $x \not\leq z'$, on a donc

$$y \geq z' \quad \text{et} \quad x \leq z$$

De plus :

$$y \not\leq z \quad \text{entraîne} \quad a \vee b \not\leq z \quad \text{et} \quad a \vee c \not\leq z$$

$$x \leq z \quad \text{entraîne} \quad a \leq z \quad \text{et} \quad b \wedge c \leq z.$$

Mais alors $a \leq z$ et $a \vee b \not\leq z$ entraîne $b \not\leq z$, d'où résulte $b \geq z'$ (puisque $M^z \cup M_{z'} = T$). De même, $a \leq z$ et $a \vee c \not\leq z$ donne $c \geq z'$. On a donc $b \wedge c \geq z'$ et *a fortiori* $x \geq z'$. Mais cela contredit $x \in \mathbb{C}M_{z'}$.

- La réciproque est vraie : tout treillis distributif et bicontinu est monoséparé.

Soit, en effet, T un treillis distributif et bicontinu, et x, y dans T avec $M^x \subsetneq \mathbb{C}M_y$.

T étant à $\vee$ continu, il résulte du critère 5-2, déjà cité, que l'on peut trouver $a \in T$ avec

$$M^x \subset \overset{0}{M}^a \subset M^a \subset \mathbb{C}M_y$$

On a alors $M_y \subset \mathbb{C}M^a$. Le treillis T étant aussi à $\wedge$ continu, il résulte de la forme duale du même critère que l'on peut trouver $b \in T$ avec

$$M_y \subset \overset{0}{M}_b \subset M_b \subset \mathbb{C}M^a$$

Maintenant, le treillis T étant distributif, l'inclusion $M_b \subset \mathbb{C}M^a$ implique (théorème de séparation 8-8) l'existence d'un filtroïde parfait M_F (complémentaire d'un antifiltroïde $M^A = \mathbb{C}M_F$) avec

$$M_b \subset M_F = \mathbb{C}M^A \subset \mathbb{C}M^a$$

En particulier, on a

$$M_y \subset \overset{0}{M}_b \subset M_b \subset \mathbb{C}M^A$$

Or $\overset{0}{M}_b \subset \mathbb{C}M^A$ entraîne évidemment $\overset{0}{M}^b \subset \mathbb{C}M^{\bar{A}} \subset \mathbb{C}M^A$, et on a vu (théorème 8-5) que, pour tout antifiltroïde M^A , on a $M^{\bar{A}} = M^{\vee A}$. Il vient donc

$$M_y \subset \mathbb{C}M^{\vee A} \subset \mathbb{C}M^A$$

De même, les inclusions

$$M^x \subset \overset{0}{M}^a \subset M^a \subset \mathbb{C}M_F$$

entraînent

$$M^x \subset \mathbb{C}M_{\wedge F} \subset \mathbb{C}M_F$$

Posant donc $z = \wedge F$ et $z' = \vee A$, il vient ainsi

$$M^x \subset \mathbb{C}M_z \subset \mathbb{C}M_F = M^A \subset M^{z'} \subset \mathbb{C}M_y$$

et le treillis T est monoséparé.

Enonçons ce premier résultat :

|| **LEMME 9-1.** Un treillis T est monoséparé si et seulement si il est distributif et bicontinu.

La dilatation α et l'érosion β

Pour aller plus loin, nous devons maintenant analyser la relation liant les deux points monoséparants a et b de la définition (a). De manière générale, la relation symétrique $\mathbb{C}M_x \cap \mathbb{C}M^y = \emptyset$ équivaut à :

$$M_x \cup M^y = T$$

ou encore à :

$$\mathbb{C}M_x \subset M^y, \text{ c'est-à-dire } \vee \mathbb{C}M_x \leq y$$

ou, aussi bien, à :

$$\mathbb{C}M^y \subset M_x, \text{ c'est-à-dire } x \leq \wedge \mathbb{C}M^y.$$

Donc, en posant :

$$(b) \quad \alpha(x) = \vee \mathbb{C}M_x ; \quad \beta(y) = \wedge \mathbb{C}M^y$$

nous définissons une dilatation α de T dans lui-même ainsi que l'érosion β qui lui est associée. Outre l'équivalence canonique :

$$\alpha(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \beta(y)$$

elles satisfont les relations

$$M_x \cup M^{\alpha(x)} = M_{\beta(y)} \cup M^y = T.$$

Par définition, $\alpha(x)$ est justement le plus petit élément y tel que l'on ait $M_x \cup M^y = T$. Par suite, dans la relation de définition (a), on peut toujours

remplacer l'élément a par $\alpha(b)$, (ou b par $\beta(a)$, ou même a par $\alpha(b)$ et b par $\beta\alpha(b)$ etc.). Cette relation (a) est donc équivalente à :

$$(a') \quad M^x \subset \mathbb{C}M_b \subset M^{\alpha(b)} \subset \mathbb{C}M_y$$

Remarque. — Cette dilatation α et l'érosion β associée sont des instruments très fins et extraordinairement sélectifs. Par exemple, dans un treillis $\mathcal{P}(E)$, qui est monoséparé, on trouve pour toute partie A de l'ensemble E :

$$\alpha(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \mathbb{C}A & \text{si } A = \{x\} \text{ est un atome} \\ E & \text{si } \text{Card}(A) \geq 2 \end{cases}$$

et de même, pour $\beta \in \mathcal{P}(E)$:

$$\beta(B) = \begin{cases} E & \text{si } B = \emptyset \\ \mathbb{C}B = \{x\} & \text{si } B = \{x\}^c \text{ est le complémentaire d'un atome} \\ \emptyset & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Ainsi, la fermeture $\beta\alpha$ filtre les atomes de $\mathcal{P}(E)$:

$$\beta\alpha(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \{x\} & \text{si } A = \{x\} \text{ est un atome} \\ E & \text{si } \text{Card}(A) \geq 2. \end{cases}$$

On peut donc espérer tenir là un bon instrument pour étudier la primarité ou la coprimarité, du moins dans les treillis monoséparés. Dans le cas de structures plus grossières, notre instrument, trop fin, s'émousse et ne fonctionne plus.

Par exemple, dans le cas du treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace topologique E séparé (non discret), qui est toujours coprimaire et même atomique — et, de plus, COF à $\vee$ continu, si E est localement compact (Annexe B) — le Sup devient l'union fermée. Ainsi, l'image $\alpha(\{x\})$ d'un atome n'est plus $\{x\}^c$ mais son adhérence $\overline{\{x\}}^c$, qui est E tout entier, sauf si x est un point isolé, c'est-à-dire tel que $\{x\}$ soit à la fois ouvert et fermé dans E . On a alors :

$$\beta\alpha(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \{x\} & \text{si } A = \{x\} \text{ est un point isolé} \\ E & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

La fermeture $\beta\alpha$ ne filtre plus que les points isolés. Les autres atomes lui échappent.

La dilatation $\hat{\Gamma}$

Nous sommes maintenant en mesure de former un critère plus analytique de monoséparation. Partons de la relation de définition, mise sous la forme (a'). Comme $M^{\alpha(b)} \subset \mathbb{C}M_y$ équivaut à $b \in \alpha^{-1}(\mathbb{C}M_y)$, nous poserons, pour tout $x, y \in T$

$$\hat{\Gamma}(x) = \alpha^{-1}(\mathbb{C}M_x) ; \quad \check{\Gamma}(y) = \beta^{-1}(\mathbb{C}M^y)$$

Il est immédiat que l'application $\hat{\Gamma}$ ainsi définie est une dilatation de T dans $\mathcal{P}_{\wedge}(T)$ (et $\check{\Gamma}$ une dilatation du treillis dual T^* dans $\mathcal{P}_{\vee}$). Nous reviendrons dans un instant sur les érosions associées. Notons bien que ces définitions de la dilatation α et de la dilatation $\hat{\Gamma}$ sont valables dans un treillis T quelconque. Mais c'est seulement dans le cas monoséparé que les érosions associées prendront un aspect agréable.

Avec ces notations, on voit que deux éléments x et y de T (avec $x \neq y$) sont monoséparables, au sens de la relation (a'), si et seulement si on peut trouver un élément b appartenant à la fois à l'ensemble $\mathbb{C}M^x$ et à $\hat{\Gamma}(y)$. L'intersection de ces deux ensembles doit être non vide, ce qui revient à écrire $\hat{\Gamma}(y) \not\subset M^x$ et équivaut à

$$\vee \hat{\Gamma}(y) \neq x$$

Le treillis T sera donc monoséparé si et seulement si la relation ci-dessus est équivalente à $y \neq x$, c'est-à-dire si et seulement si $\vee \hat{\Gamma}(y) = y$. Enonçons donc :

CRITÈRE 9-1. Dans un treillis T , on définit la dilatation α et l'érosion associée β en posant

$$(b) \quad \alpha(x) = \vee \mathbb{C}M_x ; \quad \beta(y) = \wedge \mathbb{C}M^y \quad (x, y) \in T$$

ainsi que les dilatations $\hat{\Gamma}$ (de T dans $\mathcal{P}_{\wedge}$) et $\check{\Gamma}$ (du treillis dual T^* dans $\mathcal{P}_{\vee}$) en posant :

$$(c) \quad \hat{\Gamma}(x) = \alpha^{-1}(\mathbb{C}M_x) = M^{\beta(\mathbb{C}M_x)} ; \quad \check{\Gamma}(y) = \beta^{-1}(\mathbb{C}M^y) = M_{\alpha(\mathbb{C}M^y)}$$

Alors le treillis T est monoséparé si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$(d) \quad \vee \hat{\Gamma}(x) = x \quad (x \in T)$$

$$(d^*) \quad \wedge \check{\Gamma}(y) = y \quad (y \in T)$$

L'égalité $\alpha^{-1}(\mathbb{C}M_x) = M^{\beta(\mathbb{C}M_x)}$ résulte de la relation générale évidente

$$\alpha^{-1}(M^A) = M^{\beta(A)}$$

vraie pour tout couple (α, β) formé d'une dilatation et de l'érosion associée.

Dans le cas d'un treillis quelconque, on a seulement les inégalités

$$\bigvee \hat{\Gamma}(x) \leq x \quad ; \quad \bigwedge \check{\Gamma}(y) \geq y$$

en général strictes. On le voit en remarquant que $b \in \hat{\Gamma}(y)$, c'est-à-dire $y \in \mathcal{C}M^{\alpha(b)}$ entraîne $y \in M_b$, puisque $\mathcal{C}M^{\alpha(b)} \subset M_b$.

Comme, pour toute partie $M^A \in \mathcal{P}_\wedge$, l'inclusion :

$$\hat{\Gamma}(x) = \alpha^{-1}(\mathcal{C}M_x) \subset M^A$$

équivalent à

$$x \leq \bigwedge \alpha(\mathcal{C}M^A)$$

on voit que l'érosion associée à $\hat{\Gamma}$ n'a pas très bon aspect dans le cas général. Mais, dans le cas monoséparé, elle va prendre une forme très simple. On aura, en effet, dans ce cas :

$$\bigwedge \alpha(\mathcal{C}M^A) = \bigvee A$$

Un critère de distributivité totale

D'une manière assez inattendue, cette même dilatation $\hat{\Gamma}$ permet de former un critère analytique pour la distributivité totale. Pour le voir, associons à chaque point x d'un treillis T la classe $\mathcal{O}_x$ définie par

$$\mathcal{O}_x = \{ \mathcal{C}M^y, y \in \mathcal{C}M_x \}$$

Il s'agit donc d'une classe de voisinages ouverts sci du point x . La classe stable pour l'intersection finie engendrée par $\mathcal{O}_x$ constitue un système fondamental de voisinages ouverts du point x , pour la topologie sci minimale (*i.e.* la classe des $\mathcal{C}M^J$ qui contiennent le point x).

Formons la grille $g(\mathcal{O}_x)$ de cette classe $\mathcal{O}_x$ (*cf.* chapitre VIII, paragraphe 1-c), c'est-à-dire la classe des parties A de T qui rencontrent tous les éléments de $\mathcal{O}_x$.

Ainsi A appartiendra à $g(\mathcal{O}_x)$ si et seulement si $y \in \mathcal{C}M_x$ entraîne $A \not\subset M^y$, ce qui équivaut à :

$$\bigvee A \leq y \Rightarrow x \leq y$$

c'est-à-dire à $x \leq \bigvee A$. Ainsi, on a :

$$g(\mathcal{O}_x) = \{ A : A \in \mathcal{P}(T), \bigvee A \geq x \}$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme 8-1 pour évaluer l'intersection de la classe des parties M^A permises pour $\wedge$ telles que l'on ait $x \leq \bigvee A$, soit

$$\bigcap \{ M^A : \forall A \geq x \} = \bigcap \{ M^A, A \in g(O_x) \}$$

D'après le lemme 8-1, et compte tenu de la relation générale $gg(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, cette intersection est donc égale à

$$\{ \wedge B : B \in \mathcal{M}_{O_x} \} = \bigcup_{B \in O_x} M^{\wedge B}$$

(cette dernière égalité résultant immédiatement du fait qu'il s'agit d'une classe permise pour $\wedge$). Mais les $B \in O_x$ sont les $\mathcal{C}M^y$ contenant x , et $\wedge \mathcal{C}M^y = \beta(y)$. On trouve donc exactement :

$$\bigcup_{B \in O_x} M^{\wedge B} = M^{\beta(\mathcal{C}M_x)} = \alpha^{-1}(\mathcal{C}M_x) = \hat{\Gamma}(x)$$

THÉOREME 9-1. Pour tout élément x d'un treillis T , $\hat{\Gamma}(x)$ est égale à l'intersection de la classe des parties de T permises pour $\wedge$ dont le Sup majore l'élément x :

$$(e) \quad \hat{\Gamma}(x) = \bigcap \{ M^A : \forall A \geq x \}$$

Ainsi, la classe des parties $M^A \in \mathcal{P}_{\wedge}$ telles que $\forall A \geq x$ possédera un plus petit élément si l'intersection de cette classe, c'est-à-dire l'ensemble $\hat{\Gamma}(x)$ lui-même, vérifie encore la relation de définition, i.e. $\forall \hat{\Gamma}(x) \geq x$, c'est-à-dire en fait l'égalité (puisque'on a vu que l'inégalité inverse est toujours vraie). Mais c'est là aussi, exactement, la condition pour que l'application $M^A \rightarrow \vee A$ soit une érosion de $\mathcal{P}_{\wedge}$ dans T , ou encore, d'après le théorème 8-2, pour que le treillis T soit totale-ment distributif.

CRITÈRE 9-2. Un treillis T est totalement distributif (ou, ce qui revient au même, $\vee$ érode $\mathcal{P}_{\wedge}$ dans T) si et seulement si la dilatation $\hat{\Gamma}$ vérifie la relation

$$(d) \quad \vee \hat{\Gamma}(x) = x \quad (x \in T)$$

$\hat{\Gamma}$ est alors la dilatation associée à l'érosion $\vee : \mathcal{P}_{\wedge} \rightarrow T$.

Il ne reste plus qu'à rassembler ces divers éléments (théorème 8-2, lemme 9-1, critères 9-1 et 9-2) pour obtenir le théorème général de monoséparation qui constituait notre objectif :

THÉOREME 9-2. (THÉOREME DE MONOSÉPARATION) Dans un treillis T les énoncés suivants sont équivalents :

- i) T est monoséparé
- ii) T est totalement distributif
- iii) T est distributif et bicontinu

- iv) $\vee$ est une érosion de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T
- iv*) $\wedge$ est une érosion de $\mathcal{P}_{\vee\wedge}$ dans le treillis dual T^*
- v) La dilatation $\hat{\Gamma}$ vérifie $\vee \hat{\Gamma}(x) = x \quad (x \in T)$
- v*) La codilatation $\check{\Gamma}$ vérifie $\wedge \check{\Gamma}(x) = x \quad (x \in T)$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, $\hat{\Gamma}$ est la dilatation associée à l'érosion $\vee$, et $\check{\Gamma}$ est la codilatation associée à l'érosion $\wedge$. Pour toute partie A de T , on a alors

$$\vee A = \wedge \alpha(\mathbb{C}M^A) ; \quad \wedge A = \vee \beta(\mathbb{C}M_A)$$

COROLLAIRE 1. Un treillis fini T est monoséparé si et seulement si il est distributif.

Dans le cas fini, en effet, distributivités simple et totale coïncident.

COROLLAIRE 2. Si un treillis T est monoséparé, tout quasi-sous-treillis de T et tout treillis-quotient par une équivalence propre est encore monoséparé. Tout produit de treillis monoséparés est encore monoséparé.

Ces résultats ont, en effet, déjà été établis dans le cas de la distributivité totale. Comme tout treillis totalement ordonné est déjà monoséparé (cf. théorème 6-3), les résultats précédents s'appliquent à tout treillis ou quasi-sous-treillis *etc.* de fonctions à valeur dans un treillis totalement ordonné quelconque.

Exemple d'un treillis $\mathcal{G}_\wedge$

A titre d'exemple, nous allons chercher à quelle condition la classe $\mathcal{G}_\wedge$ des ouverts d'une topologie scs admissible sur un treillis T constitue elle-même un treillis monoséparé. Cela nous conduira à un important théorème.

Pour éviter toute équivoque entre les notations concernant le treillis T et le treillis $\mathcal{G}_\wedge$, nous utiliserons des lettres rondes pour la majoration et la minoration dans $\mathcal{G}_\wedge$, par exemple :

$$\mathcal{M}_{M^{G_0}} = \{ M^G = M^G \in \mathcal{G}_\wedge, M^G \supset M^{G_0} \}$$

et nous affecterons d'un tilde les opérations α, Γ se rapportant au treillis $\mathcal{G}_\wedge$, soit par exemple :

$$\tilde{\alpha}(M^{G_0}) = \bigcup \mathbb{C} \mathcal{M}_{M^{G_0}}$$

Evaluons d'abord $\tilde{\alpha}(M^{G_0})$. Il vient

$$\tilde{\alpha}(M^{G_0}) = \bigcup \{ M^G \not\supset M^{G_0} \}$$

Or $M^G \not\subset M^{G_0}$ équivaut à : il existe $x \in M^{G_0}$ tel que l'on ait $M^G \subset \mathbb{C}M_x$. Comme on a aussi $M^{G_0} \not\subset \mathbb{C}M_x$, puisque $x \in M^{G_0}$, et que $\mathbb{C}M_x$ appartient à la topologie scs admissible $\mathcal{G}_\wedge$, il vient donc

$$\tilde{\alpha}(M^{G_0}) = \bigcup \{\mathbb{C}M_x, x \in M^{G_0}\} = \mathbb{C}M_{\vee G_0}$$

De l'équivalence $\tilde{\alpha}(M^{G_0}) \subset M^G \Leftrightarrow M^{G_0} \subset \tilde{\beta}(M^G)$, on déduit ensuite

$$\tilde{\beta}(M^G) = \overset{0}{M} \wedge \mathbb{C}M^G$$

Partant de $G = \mathbb{C}M_x$, on trouve donc $\tilde{\beta}(\mathbb{C}M_x) = \overset{0}{M}^x$. Nous avons déjà noté la relation :

$$\mathbb{C}\mathcal{M}_{M^{G_0}} = \mathcal{M}_{\{\mathbb{C}M_x, x \in M^{G_0}\}}$$

Or, d'après la relation du critère 9-1, $\tilde{\Gamma}(M^{G_0})$ est la classe permise pour Inf dans $\mathcal{G}_\wedge$ (permise pour $\overset{0}{\cap}$) engendrée par $\tilde{\beta}(\mathbb{C}\mathcal{M}_{M^{G_0}})$. Par suite :

LEMME 9-2. Soit $\mathcal{G}_\wedge$ la classe des ouverts d'une topologie scs admissible sur un treillis T. La dilatation $\tilde{\Gamma}$ au sens du treillis $\mathcal{G}_\wedge$, notée ici $\tilde{\Gamma}$, associe à tout $M^G \in \mathcal{G}_\wedge$ la classe $\tilde{\Gamma}(M^G)$, permise pour $\overset{0}{\cap}$ dans $\mathcal{G}_\wedge$, engendrée par la famille $\{\overset{0}{M}^x, x \in M^G\}$, où $\overset{0}{M}^x$ désigne l'ouverture de M^x selon la topologie scs $\mathcal{G}_\wedge$. En particulier, le treillis $\mathcal{G}_\wedge$ est monoséparé si et seulement si pour tout $M^G \in \mathcal{G}_\wedge$ on a :

$$(vi) \quad M^G = \bigcup \{\overset{0}{M}^x, x \in M^G\}$$

Le dernier énoncé résulte immédiatement de la condition (v) du théorème 9-2. Ce lemme entraîne un important théorème.

THÉORÈME 9-3. Avec les mêmes notations que dans le lemme 9-2, les trois énoncés suivants sont équivalents, et impliquent que la classe $\mathcal{G}_\wedge$ est, en fait, celle des ouverts de la topologie scs maximale sur T :

- a) Le treillis $\mathcal{G}_\wedge$ est monoséparé
- b) Le treillis T est COF à $\vee$ continu (pour la topologie engendrée par $\mathcal{G}_\wedge$ et la topologie sci minimale)
- c) L'ouverture $M^A \rightarrow \overset{0}{M}^A$ associée à $\mathcal{G}_\wedge$ est une dilatation de $\mathcal{P}_\wedge(T)$ dans lui-même.

En effet, soient x et y dans T avec $M^x \subset \mathbb{C}M_y$. L'ouvert $\mathbb{C}M_y$ appartient à la topologie scs admissible $\mathcal{G}_\wedge$. Donc, si $\mathcal{G}_\wedge$ est monoséparé, la condition (vi) du lemme 9-2 implique que l'on peut trouver $z \in \mathbb{C}M_y$ avec

$$M^x \subset \overset{0}{M}^z \subset M^z \subset \mathbb{C}M_y$$

Le critère 5-2 étant vérifié, T est COF à $\vee$ continu et a) entraîne b).

Si b) est vrai, le corollaire 3 du théorème 5-2 donne, pour tout $M^A \in \mathcal{P}_\wedge(T)$

$${}^0M^A = \bigcup \{ {}^0M^x, x \in {}^0M^A \}$$

ce qui implique, *a fortiori*

$${}^0M^A = \bigcup \{ M^x, x \in M^A \}$$

et montre que l'application $M^A \rightarrow {}^0M^A$ est une dilatation : b) entraîne c).

Enfin, si c) est vrai, l'ouverture-dilatation $M^A \rightarrow {}^0M^A$ définit une équivalence propre sur le treillis monoséparé $\mathcal{P}_\wedge(T)$. D'après le corollaire 2 du théorème 9-2, le treillis-quotient est lui-même monoséparé, ainsi que l'espace image $\mathcal{G}_\wedge$, qui lui est isomorphe. Donc c) entraîne a).

Enfin, le corollaire 2 du théorème 5-2 montre que $\mathcal{G}_\wedge$ est alors nécessairement la topologie scs maximale.

En appliquant ce théorème au treillis dual, et en utilisant l'isomorphisme de $\mathcal{G}_\vee$ et du dual de $\mathcal{F}_\wedge$, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. Soit $\mathcal{F}_\wedge$ la classe des fermés d'une topologie sci admissible sur un treillis T et $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ la fermeture correspondante sur $\mathcal{P}_\wedge(T)$. Alors, les trois énoncés suivants sont équivalents, et impliquent que $\mathcal{F}_\wedge$ est en fait la classe des fermés de la topologie sci maximale :

- a) Le treillis $\mathcal{F}_\wedge$ est monoséparé
- b) Le treillis T est COF à $\wedge$ continu (pour la topologie engendrée par la classe $\mathcal{G}_\vee$ des complémentaires des fermés de $\mathcal{F}_\wedge$, et la topologie scs minimale)
- c) La fermeture $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ est une érosion sur $\mathcal{P}_\wedge(T)$.

COROLLAIRE 2. Si T est un treillis COF à $\vee$ continu, les éléments coprimiers de $\mathcal{G}_\wedge(T)$ sont les antifiltroïdes ouverts.

En effet, l'ouverture $M^A \rightarrow {}^0M^A$ sur $\mathcal{P}_\wedge$, étant une dilatation, définit sur $\mathcal{P}_\wedge$ une équivalence propre, et le treillis-quotient est isomorphe au treillis $\mathcal{G}_\wedge$. Le critère 8-16 montre alors qu'un élément de $\mathcal{G}_\wedge$ est copremier dans le treillis $\mathcal{G}_\wedge$ si et seulement si il est déjà copremier dans $\mathcal{P}_\wedge$, donc d'après le théorème 8-12, si et seulement si c'est un antifiltroïde. On a donc bien exactement :

$$Q(\mathcal{G}_\wedge) = \mathcal{G}_\wedge \cap \Phi_\wedge$$

9 – 2. Coprimarité des treillis monoséparés

Pour établir la coprimarité des treillis monoséparés, nous aurons besoin de quelques critères, que nous allons former par étapes.

Factorisation de l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$

Soit T un treillis monoséparé. Comme on a toujours $\vee A = \vee \bar{A} = \vee M^{\bar{A}}$, l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge(T)$ dans T se laisse factoriser comme le produit de l'application $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{F}_\wedge$ suivie de l'application $M^{\bar{A}} \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{F}_\wedge$ dans T . Nous venons de voir (corollaire du théorème 9–2) que la première application est elle-même une érosion de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{P}_\wedge$, ou, aussi bien, de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{F}_\wedge$. La seconde application, *i.e.* $M^{\bar{A}} \rightarrow \vee A$ est encore une érosion de $\mathcal{F}_\wedge$ dans T : c'est, en effet, la restriction à $\mathcal{F}_\wedge$ de l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T , et l'Inf est le même dans $\mathcal{P}_\wedge$ et dans $\mathcal{F}_\wedge$ (c'est l'intersection dans les deux cas). Ainsi l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T est le produit d'une érosion de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{F}_\wedge$ par une érosion de $\mathcal{F}_\wedge$ dans T . Nous allons examiner les dilatations associées, dont le produit, en sens inverse, redonnera la dilatation $x \rightarrow \hat{\Gamma}(x)$ de T dans $\mathcal{P}_\wedge$.

Pour alléger la typographie, nous écrirons souvent Γ, Γ_S, H *etc.*, s'il n'y a pas ambiguïté, au lieu de $\hat{\Gamma}, \hat{\Gamma}_S, \hat{H}$...

a) La dilatation $\hat{\Gamma}_S$

Soit T un treillis à $\wedge$ continu. A l'application $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ considérée comme une érosion de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même est associée une dilatation de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même que nous noterons $\hat{\Gamma}_S$ (ou simplement Γ_S) définie par :

$$\Gamma_S(M^A) \subset M^{\bar{B}} \Leftrightarrow M^A \subset M^{\bar{B}} \quad (M^A, M^{\bar{B}} \in \mathcal{P}_\wedge)$$

Mais $M^A \subset M^{\bar{B}}$ équivaut à $M^{\bar{A}} \subset M^{\bar{B}}$ et $M^{\bar{A}} \in \mathcal{F}_\wedge$, de sorte que la condition d) du lemme 1–2 est remplie. La restriction de Γ_S à $\mathcal{F}_\wedge$ est donc une dilatation du treillis $\mathcal{F}_\wedge$ dans $\mathcal{P}_\wedge$, que nous noterons encore Γ_S , et de plus la condition a) du lemme 1–2 nous garantit que l'on a toujours :

$$\Gamma_S(M^A) = \Gamma_S(M^{\bar{A}})$$

Pour tout $x \in T$, par un léger abus de notation (*i.e.* en identifiant le treillis T et son image isomorphe dans $\mathcal{P}_\wedge$ par l'application $x \rightarrow M^x$), nous écrirons $\Gamma_S(x)$ au lieu de $\Gamma_S(M^x)$. On a donc, pour $M^A \in \mathcal{P}_\wedge$:

$$\Gamma_S(M^A) = \bigcup \{ \Gamma_S(x), x \in M^A \} = \bigcup \{ \Gamma_S(x), x \in M^{\bar{A}} \}$$

Mais nous pouvons aussi considérer l'application $x \rightarrow \Gamma_S(x)$ de T dans $\mathcal{P}_\wedge(T)$. Par définition $\Gamma_S(x) \subset M^A$ équivaut à $x \in M^{\bar{A}}$, c'est-à-dire, le treillis T étant à $\wedge$ continu, à : $x \in \overset{0}{M}_y$ entraîne $y \in M^A$. On a donc :

$$\Gamma_S(x) = \{ y : x \in \overset{0}{M}_y \}$$

Il s'agit, dans la terminologie de Scott et Lawson, de la classe des minorants forts (*way below*) de l'élément x .

Notons que $\Gamma_S(x)$ est un antifiltroïde. En effet, pour $y, z \in T$, on a

$$\overset{0}{M}_{y \vee z} = (M_y \cap M_z)^0 = \overset{0}{M}_y \cap \overset{0}{M}_z$$

de sorte que $y \vee z \in \Gamma_S(x)$ équivaut bien à : y et z appartiennent à $\Gamma_S(x)$.

Or si : $M^A = \hat{S}(M^A)$ est lui-même un antifiltroïde, on a toujours $M^{\bar{A}} = M^{\vee A}$. Dans ce cas, $x \in M^{\bar{A}} = M^{\vee A}$ équivaut à $x \leq \vee A$, soit

$$x \leq \vee A \Leftrightarrow \Gamma_S(x) \subset M^A \quad (M^A \in \Phi_\wedge)$$

Or, on vient de le voir, $\Gamma_S(x)$ est toujours un antifiltroïde. Par suite, la restriction à $\Phi_\wedge$ de l'application $M^A \rightarrow \vee A$ est une érosion de $\Phi_\wedge$ dans T et la dilatation associée de T dans le treillis $\Phi_\wedge$ est encore $x \rightarrow \Gamma_S(x)$.

Jusqu'ici, nous avons seulement supposé le treillis T à $\wedge$ continu. Dans le cas particulier où T est monoséparé, il existe une relation simple entre la dilatation $\hat{\Gamma}_S$ de T dans le treillis $\Phi_\wedge$ et la dilatation $\hat{\Gamma}$ associée à l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T .

En effet, le treillis T étant monoséparé, $x \leq \vee A$ équivaut aussi à $\Gamma(x) \subset M^A$, et donc encore à $\hat{S} \Gamma(x) \subset M^A$ lorsque M^A est un antifiltroïde. Ainsi, $\Gamma_S(x)$ est l'antifiltroïde engendré par $\Gamma(x)$, soit :

$$\Gamma_S(x) = \hat{S} \Gamma(x)$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME 9-4. Soit T un treillis à $\wedge$ continu. A l'érosion $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même est associée la dilatation Γ_S de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{P}_\wedge$, qui vérifie la relation :

$$\hat{\Gamma}_S(M^A) = \hat{\Gamma}_S(M^{\bar{A}}) \quad (M^A \in \mathcal{P}_\wedge)$$

et dont la restriction à $\mathcal{F}_\wedge$ est la dilatation du treillis $\mathcal{F}_\wedge$ dans $\mathcal{P}_\wedge$ associée à l'érosion $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$ (considérée comme opérant de $\mathcal{P}_\wedge$ dans $\mathcal{F}_\wedge$).

Si l'on pose $\hat{\Gamma}_S(x) = \hat{\Gamma}_S(M^x)$ pour tout $x \in T$, on a alors :

$$\hat{\Gamma}_S(M^A) = \bigcup \{ \hat{\Gamma}_S(M^x), x \in M^A \}$$

Pour chaque $x \in T$, $\hat{\Gamma}_S(x)$ est un antifiltroïde, constitué des minorants forts de l'élément x , soit

$$\hat{\Gamma}_S(x) = \{ y : x \in \hat{M}_y \}$$

De plus, l'application $x \rightarrow \hat{\Gamma}_S(x)$ est une dilatation de T dans le treillis $\Phi_\wedge$ des antifiltroïdes, associée à l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\Phi_\wedge$ dans T .

Dans le cas particulier où le treillis T est monoséparé, $\hat{\Gamma}_S(x)$ est l'antifiltroïde engendré par $\hat{\Gamma}(x)$ (où $\hat{\Gamma}$ désigne la dilatation associée à l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T), soit :

$$\hat{\Gamma}_S(x) = \hat{S} \hat{\Gamma}(x)$$

N.B. — Pour M^A quelconque dans $\mathcal{P}_\wedge$ ou $\mathcal{F}_\wedge$, $\Gamma_S(M^A)$ n'est, en général, pas un antifiltroïde.

b) La dilatation $\hat{H} = \bar{\Gamma}$

Soit un treillis monoséparé. Si $M^F \in \mathcal{F}_\wedge$, la relation $x \leq \vee F$ équivaut à $\Gamma(x) \subset M^F$, donc, M^F étant un fermé scs, à $\bar{\Gamma}(x) \subset M^F$. Comme on a ici $\mathcal{F}_\wedge = \mathcal{F}_\wedge^\mu$, la condition (vii) du théorème 8-10 est vérifiée : l'application $M^F \rightarrow \vee F$ de $\mathcal{F}_\wedge = \mathcal{F}_\wedge^\mu$ est une érosion, et la dilatation $\hat{H}$ associée est identique à $\bar{\Gamma}$. Donc :

LEMME 9-3. Soit T un treillis monoséparé et Γ la dilatation associée à l'érosion $M^A \rightarrow M^{\vee A}$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T . La restriction à $\mathcal{F}_\wedge$ de cette application est encore une érosion et la dilatation $\hat{H}$ de T dans $\mathcal{F}_\wedge$ qui lui est associée, selon le théorème 8-10, vérifie :

$$\hat{H}(x) = \bar{\Gamma}(x) \quad (x \in T)$$

Ce lemme sera notablement amélioré au chapitre suivant.

Passons maintenant à la recherche de critères pour détecter les éléments copremiers.

Critère pour les copremiers forts et les déhanchements

On rappelle que x_- est le Sup des minorants stricts d'un élément x , et x_+ l'Inf de ses majorants stricts. Dans le cas où le treillis T est monoséparé, on trouve donc :

$$x_- = \vee (M^x \cap \mathcal{C}M_x) = (\vee M^x) \wedge (\vee \mathcal{C}M_x) = x \wedge \alpha(x)$$

puisque $\vee$ érode $\mathcal{P}_\wedge$ dans T . On a ainsi :

$$x_- = x \wedge \alpha(x) ; \quad x_+ = x \vee \beta(x)$$

On a vu (critère 8–17) qu'un élément copremier fort b est caractérisé par la condition $b \not\leq \alpha(b)$. Cela équivaut donc, dans le cas monoséparé, à la fois à $b_- < b$ et à $b \in \hat{\Gamma}(b)$.

CRITÈRE 9–2. Dans un treillis monoséparé T , on a pour tout $x \in T$

$$x_- = x \wedge \alpha(x) \quad ; \quad x_+ = x \vee \beta(x)$$

et un élément $b \in T$ est copremier fort si et seulement si il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(a) $b_- < b$ (strictement)

(b) $b \in \hat{\Gamma}(b)$.

L'élément fortement premier $a = \alpha(b)$ associé à b pour former un déhanchement vérifie de même $a < a_+$ et $a \in \hat{\Gamma}(a)$. Cela évoque les propriétés énoncées au corollaire du critère 8–18. Mais, si T n'est pas totalement ordonné, on n'a plus, en général, les égalités $a = b_-$ et $b = a_+$, les éléments associés a et b n'étant plus nécessairement comparables.

Critères pour les copremiers

Nous avons déjà rencontré le critère $q \in \hat{C} \hat{S} \hat{C} M_q$, et aussi, $q \in \hat{H}(q)$, où $\hat{H}$ est l'application définie au théorème 8–10. Dans le cas d'un treillis monoséparé, ce critère devient $q \in \bar{\Gamma}(q)$ d'après le lemme 9–3. Voici un critère nouveau :

CRITÈRE 9–3. Dans un treillis monoséparé, un élément q est copremier, si et seulement si $\hat{\Gamma}(q)$ est un antifiltroïde, soit

$$\hat{\Gamma}(q) = \hat{\Gamma}_S(q)$$

En effet, d'après la définition même de l'application $M^A \rightarrow \hat{\Gamma}_S(M^A)$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même, $q \in \bar{\Gamma}(q)$, soit $M^q \subset \bar{\Gamma}(q)$ équivaut à $\hat{\Gamma}_S(q) = \hat{\Gamma}_S(M^q) \subset \bar{\Gamma}(q)$. Mais l'inclusion inverse est toujours vraie, puisque $\hat{\Gamma}_S(q) = \hat{S} \Gamma(q)$ (théorème 9–4), et cela équivaut bien à l'égalité.

Remarque. — Si q est copremier, $q \in \hat{S}(M^A)$ équivaut à $q \in M^A$ pour toute partie permise pour $\wedge$. En particulier, donc, pour tout $x \in T$, $q \in \hat{\Gamma}_S(x)$ équivaut à $q \in \hat{\Gamma}(x)$, d'où la relation :

$$\hat{M}_q = \hat{C} M^{\alpha(q)} \quad (q \in Q)$$

Mais il peut arriver que des éléments non copremiers vérifient aussi cette relation.

CRITÈRE 9-4. Dans un treillis monoséparé, les deux énoncés suivants sont équivalents

- (a) Pour tout $z \in T$, $\alpha(z)$ est premier dans T ou égal à ω , soit $\alpha(T) \subset P_\omega$
- (b) $\hat{\Gamma}(x \wedge y) = \hat{\Gamma}(x) \cap \hat{\Gamma}(y) \quad (x, y \in T)$

En effet, $z \in \hat{\Gamma}(x \wedge y)$ équivaut à $x \wedge y \not\leq \alpha(z)$ et $z \in \hat{\Gamma}(x) \cap \hat{\Gamma}(y)$ à : ni x , ni y ne minorent $\alpha(z)$, de sorte que b) signifie exactement que $\alpha(z)$ est premier, quel que soit z , ou égal à ω .

En général, un treillis monoséparé quelconque ne vérifiera pas cette relation b). On pourrait espérer, par analogie avec les propriétés des copremiers forts, qu'au moins l'image par α d'un copremier soit dans P_ω . Mais cela même ne semble pas être vrai dans le cas général. Nous établirons pourtant, au chapitre suivant, les inclusions :

$$\alpha(Q) \subset \bar{P} \quad ; \quad \beta(P) \subset \bar{Q}$$

qui signifient, par exemple, que l'image par α d'un copremier q est toujours limite dans T d'une famille filtrée d'éléments premiers.

Notons encore un critère simple :

CRITÈRE 9-5. Un treillis T est totalement ordonné si et seulement si tous ses éléments non nuls sont copremiers (ou encore si et seulement si tous ses éléments inférieurs strictement à ω sont premiers).

En effet, si T est totalement ordonné, pour $y, z \in T$ on a $y \vee z = y$ ou $y \vee z = z$. Donc $x \leq y \vee z$ entraîne $x \leq y$ ou $x \leq z$, et x est nul ou copremier.

Inversement, supposons $T = Q_0$. Comme T est manifestement coprimaire, il est distributif (théorème 8-11). Soient x et y dans T , et posons $x = y \vee z$.

Si $x = 0$, il vient $y = z = 0$. Supposons $y \neq z$, et donc $x \neq 0$. Alors x est copremier, par hypothèse, et, T étant distributif, $\dot{M}^x$ est un antifiltroïde (critère 8-10). Or $x = y \vee z$ entraîne, par distributivité, $x = (y \vee z) \wedge x = (y \wedge x) \vee (z \wedge x)$. Comme $\dot{M}^x$ est un antifiltroïde, cela entraîne, par exemple, $y \wedge x = x$, c'est-à-dire $x \leq y$, donc $x = y \vee z = y$ et $z \leq y$: T est totalement ordonné.

Coprimarité des treillis monoséparés

Soit, à nouveau, T un treillis monoséparé, et x et y dans T avec, par exemple, $x \not\leq y$. Il existe alors, comme on l'a vu au début de ce chapitre, des éléments z vérifiant la relation :

$$(a') \quad M^x \subset \dot{C}M_z \subset M^{\alpha(z)} \subset \dot{C}M_y$$

Désignons alors par $\mathcal{C}$ la classe des sous-ensembles C totale-ment ordonnés dans T vérifiant les deux axiomes suivants :

- i) tout $z \in C$ vérifie la relation (a')
- ii) si $z, z' \in C$ avec $z < z'$, on a $M^{\alpha(z)} \subset \mathcal{C}M_{z'}$, i.e. $z \in \Gamma(z')$.

(Γ désigne, comme d'habitude, la dilatation associée à l'érosion $M^A \rightarrow \vee A$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans T).

Cette classe $\mathcal{C}$ n'est pas vide (puisque T est monoséparé) et elle est manifestement stable pour la réunion croissante. Donc, d'après le théorème de Zorn, elle admet des éléments maximaux.

Soit donc C une chaîne maximale dans la classe $\mathcal{C}$, et posons

$$q = \vee C$$

Supposons d'abord $q \in C$. On a donc encore, d'après l'axiome i), $M^{\alpha(q)} \subset \mathcal{C}M_y$. Comme T est monoséparé, on peut donc trouver $b \in T$ avec

$$M^{\alpha(q)} \subset \mathcal{C}M_b \subset M^{\alpha(b)} \subset \mathcal{C}M_y$$

Mais, la chaîne C étant maximale, cela implique $q = b$, et donc, puisque $q \in \Gamma(b)$, $q \in \Gamma(q)$: q est copremier fort, d'après le critère 9-2, donc aussi copremier.

Supposons, maintenant, $q \notin C$. Alors tout $z \in C$ a un majorant strict z' dans C . Cela implique, par définition, $z \in \Gamma(z')$, donc aussi $z \in \Gamma(q)$, puisque z' est inférieur à q . Mais on a $z \uparrow q$, dans T , donc $q \in \bar{\Gamma}(q)$.

Comme $\bar{\Gamma}$ est égal à $\hat{H}$ (lemme 9-3), cela entraîne que q est copremier (critère 8-12).

Ainsi, dans tous les cas, pour tout x ne majorant pas y , il existe un élément copremier q tel que

$$M_y \subset M_q \subset \mathcal{C}M^x$$

Or M_y est égal à l'intersection des $\mathcal{C}M^x$, $x \in T$, qui le contiennent (puisque $\mathcal{C}M_y$, comme tout ensemble permis pour $\wedge$, est réunion des M^x qu'il contient). On a donc, *a fortiori* :

$$M_y = \bigcap \{M_q, q \in Q \cap M^y\} = M_{\vee(Q \cap M^y)}$$

Il en résulte bien $y = \vee(Q \cap M^y)$, et T est coprime.

Nous pouvons donc énoncer :

|| **THÉORÈME 9-5. (PREMIER THÉORÈME DE COPRIMARITÉ)** Tout treillis monoséparé est primaire et coprime.

COROLLAIRE. Pour un treillis fini T , les trois énoncés suivants sont équivalents :

- (a) T est distributif
- (b) T est coprimaire
- (c) T est primaire

En effet, si T est distributif, il est monoséparé (corollaire 1 du théorème 9–2) donc primaire et coprimaire, d’après le théorème ci-dessus.

Inversement si T est coprimaire, il est distributif, d’après le théorème 8–11.

N.B. — J’ignore s’il existe des treillis (non finis) à la fois primaires et coprimaires mais non monoséparés.

9 – 3. Les treillis de type lipschitzien

On a déjà remarqué, au chapitre VI, les excellentes propriétés des treillis de fonctions lipschitziennes, liées, en réalité, à la monoséparation. Rappelons seulement ici leur définition.

Si E est un espace métrique, muni d’une distance d , le treillis $L(E, d)$ des fonctions lipschitziennes est la classe des fonctions f à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ou dans $\overline{\mathbb{Z}}$) vérifiant :

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \quad (x, y \in E)$$

Nous nous proposons de montrer que toute classe de fonctions stables pour le $\vee$ et le $\wedge$ numérique (non vide) peut être considérée comme un quasi-sous-treillis d’un treillis de ce type, ou d’un type légèrement plus général que nous appellerons treillis de type lipschitzien.

Soit E un ensemble quelconque (il n’est pas nécessaire de le supposer, au départ, muni d’une topologie), et soit T un quasi-sous-treillis quelconque de $\overline{\mathbb{R}}^E$.

Pour $x, y \in E$, nous désignerons par $d_1(x, y)$ la borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ des nombres réels positifs finis tels que l’on ait : $f(x) \leq f(y) + a \quad \forall f \in T$. Cette définition implique donc $d_1(x, y) = +\infty$ s’il n’existe pas de tels nombres finis, par exemple si $f(x) = +\infty$. Explicitement :

$$d_1(x, y) = \wedge \{a : a \in \mathbb{R}_+, \forall f \in T, f(x) \leq f(y) + a\}$$

Cette fonction n’étant pas nécessairement symétrique, on pose ensuite :

$$d(x, y) = d_1(x, y) \vee d_1(y, x)$$

On vérifie sans trop de peine l’inégalité triangulaire :

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

On note ensuite que $d(x,y) = 0$ équivaut à :

$$f(x) = f(y) \quad \forall f \in T$$

Si la classe T est assez riche (on dit parfois qu'elle est alors séparante), cette relation n'est possible que pour $x = y$. Dans le cas contraire, elle définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E , et on peut toujours remplacer l'espace de départ par l'espace quotient $E/\mathcal{R}$. Ainsi, sans nuire à la généralité, on peut supposer :

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Il ne s'agit cependant pas d'une distance, au sens strict, puisque l'on peut avoir $d(x,y) = +\infty$. Si la classe T est trop riche, cette fois (par exemple si $T = \mathbb{R}^E$ entier), on aura même $d(x,y) = \infty$ dès que $x \neq y$, et dans ce cas l'analyse qui suit ne conduira évidemment qu'à des résultats triviaux.

Pour tout $x \in E$, désignons par D_x la classe des y situés à distance finie de x , i.e. :

$$D_x = \{ y : d(x,y) < \infty \}$$

Compte tenu de l'inégalité triangulaire, on vérifie sans peine que l'on a :

$$y \in D_x \Leftrightarrow x \in D_y$$

$$y \in D_x, z \in D_y \Rightarrow z \in D_x$$

et on en déduit $D_x = D_y$ dès que $D_x \cap D_y \neq \emptyset$. Il s'agit donc d'une partition $\mathcal{D}$ de l'espace E . La restriction à chaque classe $D \in \mathcal{D}$ de la fonction d est alors, au sens strict, une distance sur D . Muni de cette distance d , chaque $D \in \mathcal{D}$ est alors un espace métrique. La topologie engendrée sur E par les $D \in \mathcal{D}$ et les boules ouvertes de rayon fini nous restitue finalement un espace réunion de composantes ouvertes disjointes et disconnectées, dont chacune est un espace métrique.

On voit immédiatement que chaque fonction $f \in T$ vérifie :

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y) \quad (\forall x \in E, \forall y \in D_x)$$

Autrement dit, la restriction f_D à chaque composante $D \in \mathcal{D}$ de toute $f \in T$ appartient au treillis $L(D,d)$ des lipschitziennes sur D . Comme chaque $f \in T$ est identifiable à la famille

$$\{ f_D \}_{D \in \mathcal{D}}$$

de ses restrictions aux diverses composantes $D \in \mathcal{D}$, on peut introduire le treillis-produit

$$(a) \quad L = \prod_{D \in \mathcal{D}} L(D,d)$$

et le treillis T de départ s'identifie effectivement à un quasi-sous-treillis de L : ce sont les treillis-produits de cette forme que nous appellerons treillis de type lipschitzien (ou, pour abrégé, de type L).

On constate immédiatement que les treillis de type L vérifient les trois axiomes suivants :

$$\text{Axiomes (L)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) les fonctions constantes appartiennent à } L \\ \text{ii) } a \in \mathbb{R} \text{ et } f \in L \text{ entraîne } a + f \in L \\ \text{iii) } f \in L \text{ entraîne } -f \in L \end{array} \right.$$

En sens inverse, il n'est pas très difficile de montrer que tout treillis T satisfaisant ces axiomes est un treillis de type lipschitzien, c'est-à-dire identifiable à un treillis-produit du type (a) ci-dessus.

J'esquisse seulement cette reconstruction. On pose d'abord, pour chaque $x_0 \in E$:

$$\varrho_{x_0} = \vee \{ f : f \in T, f(x_0) \leq 0 \} \in T$$

Comme $0 \in T$ (axiome i)), on a toujours $\varrho_{x_0}(x_0) = 0$.

L'axiome ii) nous garantit ensuite, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\vee \{ f : f \in T, f(x_0) \leq a \} = a + \varrho_{x_0} \in T$$

et on en déduit, pour tout $f \in T$:

$$f = \bigwedge_{x_0 \in E} \{ f(x_0) + \varrho_{x_0} \}$$

de sorte que T est identique au treillis L engendré par les ϱ_{x_0} , $x_0 \in E$. Il n'est pas très difficile, ensuite, de déduire de l'axiome iii) la relation $\varrho_x(y) = \varrho_y(x)$. On introduira donc la fonction symétrique

$$\varrho(x, y) = \varrho_x(y)$$

La dernière étape consiste à montrer que la distance $d(x, y)$, construite à partir de la classe T comme dans la première partie de ce paragraphe, est identique à cette fonction $\varrho(x, y)$, ce qui n'est pas très difficile.

Il résulte, en particulier, de cette analyse que les éléments premiers sont les $a + \varrho_{x_0}$, et les éléments copremiers les $a - \varrho_{x_0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \{ a + \varrho_{x_0}, a \in \mathbb{R}, x_0 \in E \} \\ Q = \{ a - \varrho_{x_0}, a \in \mathbb{R}, x_0 \in E \} \end{array} \right.$$

N.B. — Pour qu'un treillis de type L soit lipschitzien au sens strict, $d(x, y) < \infty$ pour tout x et tout y dans T , il faut et il suffit que toute fonction $f \in T$ soit finie en tout $x \in T$ dès qu'elle est finie en un point $x_0 \in T$.

9 – 4. Les treillis fortement coprimaires

Rappelons (voir chapitre 8, paragraphe 4) qu'un élément b est fortement copremier dans un treillis T si $b \leq \vee B$ entraîne $b \in M^B$ pour toute partie B de T . On désigne par Q_f la classe des éléments fortement coprimaires du treillis T . On a donc, d'après la définition :

$$(i) \quad Q_f \cap M^{\vee B} = Q_f \cap M^B \quad (M_B \in \mathcal{P}_\wedge)$$

De même, on notera P_f la classe des éléments fortement primaires dans T . On a vu aussi que la dilatation α et l'érosion β associée, définies par

$$\alpha(x) = \vee \bigcap M_x ; \quad \beta(y) = \wedge \bigcap M^y \quad (x, y \in T)$$

établissaient entre ces deux classes une correspondance biunivoque possédant les propriétés suivantes :

- $b \in Q_f$ équivaut à $\alpha(b) \in P_f$ et entraîne $\beta\alpha(b) = b$
- $a \in P_f$ équivaut à $\beta(a) \in Q_f$ et entraîne $\alpha\beta(a) = a$

ou encore :

- $b \in Q_f$ équivaut à $M_b = \bigcap M^{\alpha(b)}$ et à $b \in \hat{\Gamma}(b)$
- $a \in P_f$ équivaut à $M^a = \bigcap M_{\beta(a)}$ et à $a \in \check{\Gamma}(a)$

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis T est fortement coprimaire si tout élément $x \in T$ est égal au Sup de ses minorants fortement coprimaires, soit :

$$(ii) \quad x = \vee Q_f \cap M^x \quad (x \in T)$$

et qu'il est fortement primaire si le treillis dual T^* est fortement coprimaire.

Un treillis fortement coprimaire est toujours monoséparé. En effet, si la relation (ii) est vraie, $x \leq \vee B$ équivaut à

$$Q_f \cap M^x \subset Q_f \cap M^{\vee B} = Q_f \cap M^B$$

compte tenu de la relation (ii), donc à :

$$M^{Q_f \cap M^x} \subset M^B$$

Ainsi, l'application $M^B \rightarrow \vee B$ érode $\mathcal{P}_\wedge$ dans T , qui est donc un treillis monoséparé, d'après le théorème 9–2, et la dilatation associée $\hat{\Gamma}$ est donnée par :

$$\hat{\Gamma}(x) = M^{Q_f \cap M^x}$$

Noter que $Q_f \cap M^x \subset M^B$ équivaut aussi à :

$$M^x \subset \bigcap M_{Q_f \cap M^B}$$

Comme, d'un autre côté, $x \leq \vee B$ est clairement équivalent à $M^x \subset M^{\vee B}$, on obtient donc la relation :

$$(iii) \quad M^{\vee B} = \bigcap_{q \in Q_f} M^B \quad (M^B \in \mathcal{P}_\wedge)$$

Nous allons en déduire que tout treillis fortement coprimaire est toujours aussi fortement primaire. Pour le voir, il suffit de montrer que l'on a, pour tout $x \in T$:

$$(iv) \quad x = \bigwedge \{ \alpha(q) : q \in Q_f, \alpha(q) \geq x \}$$

puisque, comme on l'a rappelé, $q \in Q_f$ entraîne (et même équivaut à) $\alpha(q) \in P_f$. Désignons par x' le second membre de cette relation (iv); et montrons $x' = x$.

Comme $\alpha(q) \geq x$ équivaut à $q \in \bigcap \Gamma(x)$, on trouve d'abord

$$x' = \bigwedge \{ \alpha(q) : q \in Q_f \cap \bigcap \Gamma(x) \} = \bigwedge \alpha (M_{Q_f \cap \bigcap \Gamma(x)})$$

Or, d'après le théorème 9-2, pour toute partie M^A permise pour $\wedge$, on a

$$\bigwedge \alpha (M^A) = \vee A$$

Il vient donc ici

$$x' = \vee \bigcap_{q \in Q_f \cap \bigcap \Gamma(x)} M^q$$

puis, compte tenu de (iii) et de la monoséparation :

$$x' = \vee \Gamma(x) = x$$

ce qui achève de démontrer la relation (iv). Enonçons donc :

|| **THÉORÈME 9-6. (THÉORÈME DE LA COPRIMARITÉ FORTE)** Tout treillis fortement coprimaire est fortement primaire et monoséparé.

Exemples. C'est, évidemment, le treillis $\overline{\mathbb{Z}}$ (la droite achevée discrète) qui a servi ici de prototype. Plus généralement, rappelons qu'un treillis T totale-ment ordonné est dit de type discret si tous ses éléments, sauf l'élément minimum 0, et, éventuellement, l'élément maximum ω , sont copremiers forts. On note que, dans un tel treillis, le point ω sera lui-même copremier fort si, et seulement si, il est isolé dans T (exemple : dans $\overline{\mathbb{Z}}$, les quasi-sous-treillis du type M^n , n entier $< \infty$). Donc, si ω n'est pas copremier fort, il n'est pas isolé, et par suite, la famille filtrante croissante $\dot{M}^\omega$ de ses minorants stricts converge vers ω . Comme le treillis est totalement ordonné, on a $\omega = \vee \dot{M}^\omega = \vee Q_f \cap \dot{M}^\omega$. Donc, dans tous les cas, un treillis totalement ordonné de type discret est fortement coprimaire.

On vérifie sans trop de peine que tout produit (fini ou non) de treillis fortement coprimaires est encore fortement coprimaire. Ainsi, les treillis de type $\overline{\mathbb{Z}}^N$, et le treillis $\overline{\mathbb{Z}}^E$ des fonctions à valeurs entières sur un ensemble E sont fortement coprimaires. On peut aussi prendre des sous-treillis, ou des quasi-sous-treillis, sans perdre la coprimarité forte.

Par contre, le treillis des fonctions scs à valeurs entières sur un espace topologique E , toujours coprimaire, n'est cependant plus fortement coprimaire (sauf si la topologie de E est la topologie discrète). En effet, soit x_0 un point non isolé dans E , et $\mathcal{G}_{x_0}$ la famille de ses voisinages ouverts dans E . La fonction g qui vaut n ($-\infty < n < \infty$) en x et $-\infty$ ailleurs est un élément copremier. Mais, pour chaque voisinage $G \in \mathcal{G}_{x_0}$ de x_0 , considérons la fonction f_G prenant la valeur $-\infty$ sur G et $+\infty$ sur le complémentaire $\complement G$. L'inégalité $f_G \geq g$ n'est réalisée pour aucun voisinage G de x_0 . Mais le Sup (au sens du treillis des fonctions scs) de la famille f_G , $G \in \mathcal{G}_{x_0}$ est la fonction f qui vaut $+\infty$ partout, y compris en x_0 . On a donc $g \leq \vee f_G$, mais $g \not\geq f_G$ quel que soit $G \in \mathcal{G}_{x_0}$: l'élément g n'est plus copremier fort.

On peut aussi considérer des treillis de lipschitziennes à valeurs entières. Ils seront, à nouveau, fortement coprimaires, en tant que sous-treillis, ou quasi-sous-treillis, de $\overline{\mathbb{Z}}^E$. Le cas le plus intéressant est peut-être celui des fonctions lipschitziennes à valeurs entières sur un espace métrique E muni d'une distance d à valeurs entières. Par exemple E pourra être un graphe connexe (fini ou non) muni de sa distance de proximité.

9 – 5. Compléments

Je rassemble ici quelques résultats utiles, mais qui ne se situent pas dans le fil directeur principal.

Plus grande dilatation minorant f

Si T est un treillis, et f une application croissante de T dans un autre treillis T' , on sait qu'il existe toujours une plus grande dilatation minorant f (éventuellement réduite à la fonction identiquement nulle $f = 0$), puisque la classe des dilatations est stable pour le $\vee$. Mais il n'est pas toujours facile de la construire explicitement. Dans le cas monoséparé, cette opération devient plus accessible.

THÉORÈME 9-7. Si T est un treillis monoséparé, et f une application croissante, la plus grande dilatation de T dans T' minorant f est donnée par :

$$a(x) = \vee f(\Gamma(x))$$

et l'érosion associée de T' dans T est alors définie par :

$$b(z) = \vee f^{-1}(M^z)$$

En effet, toute dilatation minorant f doit minorer l'application a définie en posant pour chaque $x \in T$

$$a(x) = \wedge \{ \vee f(A), A \in \mathcal{P}(T), \vee A \geq x \}$$

Comme f est croissante, on peut se limiter à la classe des parties permises pour $\wedge$ et vérifiant $\vee A \geq x$. Mais cette classe possède un plus petit élément, à savoir $\Gamma(x)$, puisque T est monoséparé. On a donc :

$$a(x) = \vee f(\Gamma(x))$$

Comme $\Gamma(x)$ est une dilatation de T dans $\mathcal{P}_\wedge(T)$, et f une application croissante, il est immédiat que la fonction a ainsi définie est une dilatation de T dans T' . Il s'agit donc bien de la plus grande dilatation minorant f .

Compte tenu de la relation $\vee \Gamma(x) = x$, on vérifie immédiatement que l'érosion associée est bien de la forme indiquée.

COROLLAIRE 1. Dans les mêmes conditions, si f est une fermeture sur T , la plus grande dilatation minorant f sur T est une dilatation-fermeture, dont le domaine d'invariance est le sous-treillis engendré par le domaine d'invariance B_f de f .

COROLLAIRE 2. Dans un treillis monoséparé, la classe stable pour $\vee$ engendrée par une classe stable pour $\wedge$ est encore stable pour $\wedge$.

Ces deux corollaires équivalents découlent, en fait, directement de la distributivité totale. Mais le théorème permet la construction explicite de la dilatation-fermeture associée au sous-treillis engendré par B_f .

L'échelle T_0 d'un treillis T

L'analyse qui suit concerne un treillis T quelconque, non nécessairement monoséparé. Elle est cependant à sa place ici, dans la mesure où elle repose sur les propriétés de la dilatation α et de l'érosion associée β définie ci-dessus :

$$(i) \quad \alpha(x) = \vee \bigcap M_x ; \quad \beta(y) = \wedge \bigcap M^y$$

Chaque fois qu'il s'agit d'une dilatation et d'une érosion associée, le domaine $\hat{B}_\alpha$ d'antiextensivité de la dilatation α , et le domaine $\check{B}_\beta$ d'extensivité de l'érosion β , définis par :

$$\hat{B}_\alpha = \{ x : \alpha(x) \leq x \} \quad ; \quad \check{B}_\beta = \{ x : x \leq \beta(x) \}$$

sont identiques. Posant donc

$$B = \hat{B}_\alpha = \check{B}_\beta$$

nous voyons que ce domaine B est un sous-treillis de T . De plus, la dilatation-fermeture φ et l'érosion-ouverture γ associées à ce sous-treillis B , coïncident respectivement avec la plus petite fermeture $\hat{\alpha}$ majorant α et la plus grande ouverture $\check{\beta}$ minorant l'érosion β , soit

$$\varphi = \hat{\alpha} \quad ; \quad \gamma = \check{\beta}$$

Dans le cas qui nous occupe ici (α et β définies par la relation (i) ci-dessus), nous poserons $T_0 = \hat{B}_\alpha = \check{B}_\beta$, et nous dirons que le sous-treillis T_0 est l'échelle du treillis T .

Pour tout $x \in T$, on a, par définition, $M_x \cup M^{\alpha(x)} = T$, et $\alpha(x)$ est le plus petit élément y de T tel que $M_x \cup M^y = T$. Donc, dire qu'un élément x appartient à l'échelle T_0 équivaut donc à :

$$M_x \cup M^x = T$$

Autrement dit, l'échelle T_0 est l'ensemble des éléments $x \in T$ comparables à tous les éléments de T , et constitue ce que l'on peut appeler la classe des éléments universellement comparables de T . Il en résulte, en particulier, que cette échelle T_0 est un sous-treillis totalement ordonné de T .

Dès lors, tout $x \in T$ admet, dans T_0 , un plus petit majorant $a_+(x)$ et un plus grand minorant $a_-(x)$, à savoir

$$a_+(x) = \wedge (T_0 \cap M_x) \quad ; \quad a_-(x) = \vee (T_0 \cap M^x)$$

Nous dirons que $a_+(x)$ est l'évaluation par excès de l'élément x dans l'échelle T_0 du treillis T , et $a_-(x)$ son évaluation par défaut. (Naturellement, si l'échelle T_0 se réduit à $\{0, \omega\}$, on obtient des résultats triviaux. Nous dirons dans ce cas que T est un treillis sans échelle propre). La première, a_+ , est une fermeture, et la seconde, a_- , une ouverture sur T , admettant le même domaine d'invariance T_0 . Il s'agit donc, respectivement, de la dilatation-fermeture et de l'érosion-ouverture associées au sous-treillis T_0 .

Si a est un élément de l'échelle T_0 , il est comparable, par définition, à tout $x \in T$.

Si $x \notin T_0$, les inégalités $a_+(x) > x > a_-(x)$ sont strictes, et on ne peut avoir $a_+(x) > a > a_-(x)$ strictement pour $a \in T$ (puisque a est comparable à x , $a \geq x$, par exemple, entraînerait $a_+(x) \leq a$).

Autrement dit, le fuseau :

$$M_{a_-(x)} \cap M^{a_+(x)}$$

contenant le point $x \notin T_0$ ne contient pas d'autre élément de l'échelle que son plus petit et son plus grand élément. Il ne s'agit cependant pas exactement d'une partition de T lui-même, car deux fuseaux distincts peuvent avoir soit 0 soit au plus un point commun, cet unique point commun coïncidant alors obligatoirement avec le plus grand élément de l'un des fuseaux et avec le plus petit élément de l'autre.

Par contre, il s'agit bien d'une partition de $T \setminus T_0$. $T \setminus T_0$ n'est plus un treillis, mais encore un ensemble ordonné. On note que la relation d'ordre passe au quotient pour l'équivalence associée à cette partition de $T \setminus T_0$: si l'on a deux classes distinctes, les éléments de l'une sont, par exemple tous inférieurs à tous les éléments de l'autre, soit inversement.

Sous forme imagée, notre treillis prend la forme d'une saucisse, dont les points d'étranglement correspondent aux points de l'échelle T_0 .

Chapitre X

Les treillis distributifs à $\vee$ continu

Les résultats accumulés dans les sections précédentes vont maintenant nous permettre d'établir le résultat le plus important, sans doute, de ce travail, à savoir la coprimarité des treillis distributifs à $\vee$ continu, et, bien sûr, par dualité, aussi la primarité des treillis distributifs à $\wedge$ continu.

10 – 1. La coprimarité des treillis distributifs à $\vee$ continu

Posons d'abord un lemme, qui présente d'ailleurs un certain intérêt pour lui-même :

LEMME 10-1. Soit T un treillis distributif à $\vee$ continu, et soient, dans T , $M^A = \overset{0}{M}^A$ un antifiltroïde ouvert et y un point n'appartenant pas à $\overset{0}{M}^A$. Alors, il existe un élément q copremier dans T , n'appartenant pas à $\overset{0}{M}^A$ et minorant y , soit :

$$(a) \quad \overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C}M_q \subset \mathbb{C}M_y$$

Le treillis T étant distributif, et $\overset{0}{M}^A$ un antifiltroïde, le théorème 8-7 montre qu'il existe un filtroïde parfait M_F vérifiant

$$\overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C}M_F \subset \mathbb{C}M_y$$

Mais $\overset{0}{M}^A$, étant ouvert, est alors contenu dans l'intérieur de $\mathbb{C}M_F$ qui est $\mathbb{C}M_{\wedge F}$ (d'après le théorème 8-5). On aura donc

$$(b) \quad \overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C}M_{\wedge F} \subset \mathbb{C}M_F \subset \mathbb{C}M_y$$

Introduisons alors la classe Ω des familles $\mathbb{C}$ totalelement ordonnées de filtroïdes parfaits satisfaisant aux deux axiomes suivants :

- i) Tout $M_F \in \mathbb{C}$ vérifie la relation (b)
- ii) Si $M_{F'} \in \mathbb{C}$ et $M_{F'} \supset M_F$ strictement, on a

$$\mathbb{C}M_{F'} \subset \mathbb{C}M_{\wedge F} \subset \mathbb{C}M_F$$

On vient de voir que la classe Ω des chaînes $\mathbb{C}$ de ce type n'est pas vide. Cette classe étant, manifestement, stable pour la réunion croissante, le théorème de Zorn nous garantit qu'elle contient des éléments maximaux.

Soit donc $\mathbb{C}$ une chaîne maximale dans Ω , et vérifiant donc les deux axiomes ci-dessus. Posons

$$M_{F_0} = \bigcup \{M_F, M_F \in \mathbb{C}\} \text{ et } q = \bigwedge M_{F_0}$$

D'après le théorème 8-6, la classe des filtroïdes parfaits est stable pour la réunion croissante, de sorte que M_{F_0} est encore un filtroïde parfait. D'autre part M_{F_0} vérifie encore la relation $\overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C} M_{F_0}$. Comme $\overset{0}{M}^A$ est ouvert, cela entraîne à nouveau $\overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C} M_{\bigwedge F_0} = \mathbb{C} M_q$ (avec $q = \bigwedge M_{F_0}$). Par suite de la maximalité, on a donc encore $M_{F_0} \in \mathbb{C}$ et M_{F_0} est le plus grand élément de $\mathbb{C}$.

Cependant, puisque l'on a $\overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C} M_q$, le théorème 8-7, à nouveau, implique l'existence d'un filtroïde parfait $M_{F'}$ séparant $\overset{0}{M}^A$ et M_q , et vérifiant donc

$$\overset{0}{M}^A \subset \mathbb{C} M_{\bigwedge F'} \subset \mathbb{C} M_{F'} \subset M_q \subset \mathbb{C} M_{F_0}$$

Mais, la chaîne $\mathbb{C}$ étant maximale, cela entraîne cette fois $M_{F'} = M_{F_0}$ et par suite :

$$M_{F_0} = M_q$$

Comme M_{F_0} est un filtroïde parfait, cela signifie que q est copremier dans T , et achève la démonstration, puisque M_{F_0} vérifie l'axiome i) et donc la relation (b).

COROLLAIRE. Dans un treillis distributif à $\vee$ continu, tout antifiltroïde ouvert $\overset{0}{M}^A$ est l'intersection des $\mathbb{C} M_q$, $q \in Q$ qui le contiennent, soit :

$$(c) \quad \overset{0}{M}^A = \mathbb{C} M_{Q \cap \mathbb{C} \overset{0}{M}^A}$$

N.B. — Toute partie $M^A \in \mathcal{P}_{\bigwedge}$ de la forme

$$M^A = \bigcap \mathbb{C} M_{Q \cap D}$$

est un antifiltroïde, égal à l'intersection des antifiltroïdes $\mathbb{C} M_q$, $q \in Q$ qui le contiennent, mais, en général, n'est pas ouvert dans T .

Venons-en, maintenant, maintenant, au résultat principal.

THÉORÈME 10-1. (SECOND THÉORÈME DE COPRIMARITÉ). Tout treillis COF distributif et à $\vee$ continu est coprimaire.

Soit T un tel treillis. D'après le théorème 9-3, le treillis $\mathcal{G}_{\bigwedge}$ des ouverts scs de T est monoséparé, et, d'après le corollaire 2 de ce même théorème, ses

éléments coprimaires sont exactement les antifiltroïdes ouverts. Par ailleurs, étant monoséparé, le treillis $\mathcal{G}_\wedge$ est coprimaire, d'après le premier théorème de coprimarité (théorème 9–5). Il suit de là que tout $M^G \in \mathcal{G}_\wedge$ est réunion d'antifiltroïdes ouverts.

Soient alors x et y dans T avec $M^x \subset \mathcal{C}M_y$. Comme $\mathcal{C}M_y \in \mathcal{G}_\wedge$, il résulte de ce qui précède qu'il existe un antifiltroïde ouvert $\overset{0}{M}^A$ vérifiant :

$$M^x \subset \overset{0}{M}^A \subset \mathcal{C}M_y$$

D'après le lemme 10–1, il existe alors un élément q coprimaire dans T tel que l'on ait :

$$M^x \subset \overset{0}{M}^A \subset \mathcal{C}M_q \subset \mathcal{C}M_y$$

Soit aussi :

$$(d) \quad M_y \subset M_q \subset \mathcal{C}M^x$$

Or, pour tout $y \in T$, M_y est égal à l'intersection des $\mathcal{C}M^x$ qui le contiennent. D'après la relation (d), on aura donc, *a fortiori*

$$M_y = \bigcap \{M_q : q \leq y\} = M_{\vee Q \cap M^y}$$

c'est-à-dire $y = \vee (Q \cap M^y)$. Le treillis T est donc coprimaire.

COROLLAIRE 1. Dans un treillis distributif à $\vee$ continu, tout ouvert scs est égal à la réunion des antifiltroïdes ouverts qu'il contient.

Ce corollaire découle de la première partie de la démonstration.

COROLLAIRE 2. Pour tout treillis COF T , les deux énoncés suivants sont équivalents :

- a) L'application $M^F \rightarrow \vee F$ est une érosion de $\mathcal{F}_\wedge(T)$ dans T
- b) T est distributif à $\vee$ continu.

Pour tout treillis COF T , le treillis $\mathcal{F}_\wedge(T)$ est distributif à $\vee$ continu, puisque l'application $F \rightarrow M^F$ est une fermeture scs sur $\mathcal{F}(T)$. Si la condition a) est remplie, l'application $M^F \rightarrow M^{\vee F}$ est alors une érosion-fermeture sur $\mathcal{F}_\wedge$, comme on le voit facilement, donc associée à une équivalence propre. Comme les deux propriétés ci-dessus passent au quotient, pour les équivalences propres, le treillis T , isomorphe au treillis image, et donc aussi au treillis quotient, les possède donc encore : donc a) entraîne b).

Inversement, si la condition b) est satisfaite, le treillis T est coprimaire, d'après le théorème ci-dessus. D'après le théorème 8–11, le $\vee$ érode donc $\mathcal{F}_\wedge^\mu$

dans T . Mais, selon le corollaire 2 du théorème 5-2, on a $\mathcal{F}_\wedge = \mathcal{F}_\wedge^\mu$ pour tout treillis à $\vee$ continu. Donc b) entraîne a).

N.B. — Ce corollaire 2 n'entraîne qu'une réciproque partielle, très imparfaite encore, du théorème 8-11, même si on se limite à la classe des treillis COF. En effet, pour qu'un treillis T soit coprimaire, il faut, d'après le théorème 8-11, que $\vee$ érode $\mathcal{F}_\wedge^\mu$ dans T . Dans le cas d'un treillis COF, il suffit, d'après le corollaire 2 et le théorème 10-1 lui-même, que $\vee$ érode $\mathcal{F}_\wedge$ dans T . En toute rigueur, donc, c'est seulement dans le cas $\mathcal{F}_\wedge = \mathcal{F}_\wedge^\mu$ que l'on a une réciproque :

|| **COROLLAIRE 1.** Un treillis T COF à topologie sci minimale est coprimaire si et seulement si il est à $\vee$ continu et distributif.

Je conjecturerais volontiers qu'il n'existe pas de treillis COF pour une autre topologie que la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ (donc à $\vee$ non continu), qui soit en même temps coprimaire — autrement dit, que la condition nécessaire et suffisante soit : $\vee$ érode $\mathcal{F}_\wedge$ dans T pour tous les treillis COF. Mais je n'ai ni démonstration, ni contre-exemple.

En résumé, je propose à la sagacité du lecteur deux conjectures, à démontrer, ou à réfuter par un contre-exemple judicieux, l'une faible, l'autre forte :

|| **CONJECTURE FAIBLE.** Un treillis COF est coprimaire si et seulement si il est distributif à $\vee$ continu.

|| **CONJECTURE FORTE.** Un treillis T quelconque est coprimaire si et seulement si $\vee$ érode $\mathcal{F}_\wedge^\mu(T)$ dans T .

Pour être complet, mentionnons encore un critère, voisin du théorème 9-3, permettant de caractériser les treillis à $\vee$ continu (non nécessairement distributifs). Pour changer, nous l'énonçons sous la forme duale :

|| **CRITÈRE 10-1.** Pour un treillis T quelconque, les deux énoncés suivants sont équivalents :

- a) T est COF à $\wedge$ continu
- b) Le $\vee$ érode le treillis $\Phi_\wedge$ des antifiltroïdes dans le treillis T .

L'implication : a) entraîne b) est une conséquence immédiate du corollaire 1 du théorème 9-3. Il suffit, pour le voir, de considérer la restriction à $\Phi_\wedge$ de l'érosion $M^A \rightarrow M^{\bar{A}}$: on obtient l'application $M^A \rightarrow M^{\vee A}$ qui est encore une érosion, ainsi que l'application $M^A \rightarrow \vee A$ de $\phi_\wedge$ dans T .

Inversement, si $b)$ est vrai, l'application $M^A \rightarrow M^{\vee A}$ est, elle aussi, une érosion, et même une érosion-fermeture sur $\Phi_\wedge$. Elle est donc associée à une équivalence propre. On sait d'autre part que le treillis $\Phi_\wedge$ est toujours à $\wedge$ continu (théorème 8-4), et on a vu que c'est là une propriété qui passe au quotient pour les équivalences propres. Donc le treillis T , isomorphe au treillis image et au treillis quotient, est lui aussi à $\wedge$ continu.

10 – 2. La condition de l'antifiltroïde ouvert

Dans un treillis T quelconque, pour tout $x \in T$, M^x est évidemment un antifiltroïde. On peut se demander si son intérieur M^x_0 , à supposer qu'il ne soit pas vide, est encore un antifiltroïde. En fait, il n'en est rien. On obtient un contre-exemple simple, en partant du treillis $T = (0,1) \times (0,1)$. Ce treillis très simple, mentionnons-le en passant, est parfois très utile, dans la mesure où il permet souvent de trouver des contre-exemples en griffonnant un dessin sur un coin de table. Il est monoséparé et vérifie, en ce qui le concerne, la propriété ci-dessus. Mais considérons un sous-treillis T_0 de la forme :

$$T_0 = M_b \cup M^a$$

avec $a > b$ dans T_0 , et M^a, M_b d'intérieurs non vides dans T . Le lecteur constatera facilement (au moyen d'un simple dessin) que l'intérieur de la classe des minorants de a dans T_0 (qui coïncide avec M^a) pour la topologie induite sur T_0 est strictement plus grand que l'intérieur M^a_0 de M^a dans T , et, en particulier, ne constitue plus un antifiltroïde.

Cependant, sur un registre plus relevé, le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace topologique E localement compact vérifie, comme nous le verrons, cette condition dite de l'antifiltroïde ouvert. Etant donné l'importance de cette classe paradigmatique, il n'est peut-être pas inutile d'approfondir un peu cette question.

Bien que la question mérite d'être étudiée dans un cadre plus général, nous ne l'aborderons ici que dans le cas particulier des treillis à $\vee$ continu, dans lequel on arrive à former des critères simples.

Posons d'abord la définition :

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis T à $\vee$ continu vérifie la condition dite de "l'antifiltroïde ouvert" si et seulement si il vérifie l'une des conditions suivantes (dont nous verrons, dans un instant, qu'elles sont équivalentes) :

- i) Pour tout $x \in T$, $\overset{0}{M}^x$ est vide ou est un antifiltroïde
- ii) Pour tout antifiltroïde $M^A \in \Phi_\wedge$, $\overset{0}{M}^A$ est vide ou est encore un antifiltroïde
- iii) Pour tout ouvert scs $M^G \in \mathcal{G}_\wedge$ non vide, l'antifiltroïde $\hat{S}(M^G)$ est encore ouvert.

Posons d'abord un lemme simple :

LEMME 10-2. Soit f une application d'un treillis T (quelconque) dans $\mathcal{P}_\wedge(T)$ vérifiant la relation :

$$(\omega) \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad (x, y \in T)$$

Alors la dilatation $M^A \rightarrow f(M^A) = \bigcup \{f(x), x \in M^A\}$ de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même vérifie la relation

$$(\omega') \quad f(M^A \cap M^B) = f(M^A) \cap f(M^B) \quad (M^A, M^B \in \mathcal{P}_\wedge)$$

D'après la relation (ω) , l'application f est croissante, et on a donc $f(x) = f(M^x)$. D'où, pour tout $A \in \mathcal{P}(T)$

$$(\omega'') \quad f(M^A) = \bigcup \{f(x), x \in A\}$$

Partant alors de la relation évidente :

$$M^A \cap M^B = \bigcup \{M^{x \wedge y}, x \in A, y \in B\}$$

il vient $f(M^A \cap M^B) = \bigcup \{f(x \wedge y), x \in A, y \in B\}$. D'après (ω) , ceci est encore égal à :

$$\bigcup \{f(x) \cap f(y) ; x \in A, y \in B\} = \bigcup \{f(x), x \in A\} \cap \bigcup \{f(y), y \in B\}$$

c'est-à-dire, d'après (ω'') , à $f(M^A) \cap f(M^B)$.

Nous considérons maintenant un treillis T à $\vee$ continu, mais non nécessairement distributif. D'après nos résultats antérieurs, ce treillis est muni des instruments suivants :

- Une érosion-fermeture sur $\mathcal{P}_\wedge$, associée à l'ouverture-dilatation $M^A \rightarrow \overset{0}{M}^A$ (théorème 9-3). Nous la noterons Φ :

$$M^B \subset \Phi(M^A) \Leftrightarrow \overset{0}{M}^B \subset M^A \quad (M^A, M^B \in \mathcal{P}_\wedge)$$

- La dilatation-ouverture réciproque sur $\mathcal{P}_\vee$, associée à l'érosion-fermeture $M_A \rightarrow M_{\bar{A}}$, qui a déjà été notée $\overset{\vee}{\Gamma}_S(M_A)$. On a évidemment :

$$\Phi(M^A) = \mathcal{C} \overset{\vee}{\Gamma}_S(\mathcal{C} M^A)$$

• On utilisera aussi les résultats du théorème 9-4 (forme duale). Posant $\check{\Gamma}_S(x) = \check{\Gamma}_S(M^x)$ pour $x \in T$, on obtient un filtroïde, qui est la classe $\{y : x \in \check{M}^y\}$ des majorants forts de x . De plus, l'application $x \rightarrow \check{\Gamma}_S(x)$ dilate T dans le treillis Φ_V des filtroïdes (l'érosion associée étant $M^A \rightarrow \wedge A$).

• Enfin, on introduira aussi l'application $\hat{H}$ définie au théorème 8-10, et que nous noterons ici simplement H , aucune équivoque n'étant possible.

Comme nous n'avons pas encore supposé le treillis T distributif, on aura simplement $\vee H(x) \leq x$, mais non, en général, l'égalité, et l'application $x \rightarrow H(x)$ ne sera pas, en général, une dilatation de T dans $\mathcal{F}_\wedge = \mathcal{F}_\wedge^\mu$. Ces conditions, en effet, ne seront vérifiées que lorsque notre treillis T à $\vee$ continu sera, de plus, distributif.

Avec ces notations, nous allons maintenant établir un critère à entrées multiples, qui, du même coup, justifiera les équivalences postulées dans la définition, que nous avons posée ci-dessus, de la condition dite de l'antifiltroïde ouvert.

CRITÈRE 10-2. (CRITÈRE DE L'ANTIFILTROÏDE OUVERT). Pour un treillis T à $\vee$ continu (mais non nécessairement distributif), et avec les notations rappelées ci-dessus, les énoncés suivants sont équivalents :

- a) Pour tout $x \in T$, $\check{M}^x$ est vide ou est un antifiltroïde
- b) $\check{\Gamma}_S(x \vee y) = \check{\Gamma}_S(x) \cap \check{\Gamma}_S(y)$ ($x, y \in T$)
- c) $\Phi(M^A \cup M^B) = \Phi(M^A) \cup \Phi(M^B)$ ($M^A, M^B \in \mathcal{P}_V$)
- d) Pour tout antifiltroïde M^A , $\check{M}^A$ est vide ou est un antifiltroïde.
- e) Pour tout ouvert scs M^G non vide, $\hat{S}(M^G)$ est un antifiltroïde ouvert.
- f) L'application $x \rightarrow H(x)$ de T dans $\mathcal{F}_\wedge$ est scs en tout point $x \neq 0$.
- g) $\hat{S}(\mathbb{C}M_x)$ est ouvert pour tout $x \neq 0$.

Comme $z \in \check{\Gamma}_S(x)$ équivaut à $x \in \check{M}^z$, la relation b) se réécrit sous la forme

$$x \vee y \in \check{M}^z \Leftrightarrow x \in \check{M}^z \text{ et } y \in \check{M}^z$$

Mais c'est là, exactement, la condition pour que $\check{M}^z$, s'il n'est pas vide, soit un antifiltroïde. D'où l'équivalence de a) et b).

D'après la forme duale du lemme 10-2, la relation b) entraîne la relation (plus forte) $\check{\Gamma}_S(M_A \cap M_B) = \check{\Gamma}_S(M_A) \cap \check{\Gamma}_S(M_B)$, et lui est donc équivalente. Mais cette dernière relation se réécrit sous la forme c). D'où l'équivalence de b) et c).

La relation c) exprime que la fermeture Φ est de type topologique. D'après le critère 8–14, l'image par Φ d'un élément copremier de $\mathcal{P}_\wedge$ (c'est-à-dire d'un antifiltroïde, d'après le théorème 8–2) est encore copremière dans l'espace image. Mais Φ est l'érosion-fermeture associée à la dilatation-ouverture $M^A \rightarrow \hat{M}^A$, de sorte que $\mathcal{G}_\wedge$ est isomorphe à l'espace image de T par Φ , d'où il résulte que l'intérieur d'un antifiltroïde est un élément copremier dans le treillis $\mathcal{G}_\wedge$. Or on sait que les éléments copremiers de $\mathcal{G}_\wedge$ sont, justement, les antifiltroïdes ouverts (théorème 9–3, corollaire 2). On conclut donc que c) entraîne d). Réciproquement, d) entraîne trivialement a), de sorte que la condition d) est bien équivalente aux trois précédentes.

On sait que, si γ est une ouverture et φ une fermeture sur un treillis T , la relation $\varphi\gamma\varphi = \gamma\varphi$ équivaut à $\varphi\gamma = \gamma\varphi\gamma$ et aussi à $\gamma\varphi(T) = \varphi\gamma(T) = \gamma(T) \cap \varphi(T)$ [5]. En raisonnant sur le treillis $\mathcal{P}_\wedge(T)$ des parties permises pour $\wedge$, avec la fermeture $\varphi = \hat{S}$ et l'ouverture $\gamma(M^A) = \hat{M}^A$, on obtient l'équivalence des conditions d) et e).

Compte tenu de la compacité de T et de l'expression de $H(x)$ donnée par la relation (v) du théorème 8–10, on a $H(x) \subset M^G$ pour un ouvert scs M^G si et seulement si il existe $M^F \in \mathcal{F}_\wedge$ avec :

$$H(x) \subset M^F \subset M^G, \quad x \leq \vee F$$

D'après le lemme 8–5, cela équivaut exactement à $x \in \hat{S}(M^G)$. Si $x \neq 0$, l'ouvert scs M^G n'est certainement pas vide, puisque l'antifiltroïde $\hat{S}(M^G)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Si la condition e) est vérifiée, cet antifiltroïde est ouvert, et cela exprime exactement l'équivalence des conditions e) et f).

La condition d), équivalente à f), entraîne trivialement g). Il reste donc à montrer que g) entraîne f). Pour la commodité du raisonnement, nous remplacerons la fonction $H(x)$ par :

$$H_0(x) = H(x) \cup \{0\}$$

Il est immédiat que, si cette nouvelle fonction est scs de T dans $\mathcal{F}_\wedge$, cela entraîne que $H(x)$ elle-même est scs en tout $x \neq 0$. Comme T est muni de sa topologie scs maximale, le théorème 4–3 montre qu'il suffit donc d'établir la continuité monotone : $x_i \downarrow x$ dans T entraîne $H_0(x) = \bigcap H_0(x_i)$. Soit donc $z \in \bigcap H_0(x_i)$. D'après la relation (i) du théorème 8–10, cela équivaut à $x_i \in \hat{C} \hat{S} \hat{C} M_z$ pour tout $i \in I$. Si $z \neq 0$, la condition g) signifie que $\hat{C} \hat{S} \hat{C} M_z$ est fermé : on a donc $x \in \hat{C} \hat{S} \hat{C} M_z$, soit $z \in H(x)$. Si $z = 0$, on a toujours $0 \in H_0(x)$. Par suite, on a $\bigcap H_0(x_i) \subset H_0(x)$, et l'égalité puisque l'inclusion inverse est

toujours vraie. Donc g) entraîne f), et ceci achève la démonstration du critère 9-1.

COROLLAIRE. Si un treillis T à $\vee$ continu (non nécessairement distributif) vérifie la condition de l'antifiltroïde ouvert, alors, pour tout filtroïde parfait F , $\wedge F$ est copremier dans T ou égal à 0.

Si $F = M_F$ est un filtroïde parfait, son complémentaire $M^A = \mathcal{C}M_F$ est, par définition, un antifiltroïde. Sous la condition indiquée, $\overset{0}{M}^A$ est encore un antifiltroïde (s'il n'est pas vide). Mais on a alors $\overset{0}{M}^A = \mathcal{C}M_{\wedge F}$, et par suite $\wedge F$ est copremier dans T . Si $\overset{0}{M}^A = \emptyset$, on trouve $\wedge F = 0$.

Ce corollaire est intéressant dans le cas général, puisqu'il fournit un critère indépendant de la distributivité. Mais il va prendre sa pleine signification dans le cas distributif.

THÉORÈME 10-2. (THÉORÈME DE L'ANTIFILTROÏDE OUVERT). Un treillis T distributif à $\vee$ continu satisfait à la condition de l'antifiltroïde ouvert si et seulement si il vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

- h) Pour tout filtroïde parfait F , $\wedge F$ est copremier ou nul.
- i) $Q_0 = Q \cup \{0\}$ est fermé dans T .

La condition h) est nécessaire, d'après le corollaire du critère 10-2. Inversement, supposons cette condition h) vérifiée, et soient x, z dans T , avec $\overset{0}{M}^x \neq \emptyset$ et $z \notin \overset{0}{M}^x$. D'après les propriétés de la fermeture Φ , $\overset{0}{M}^x \subset \mathcal{C}M_z$ équivaut à :

$$M^x \subset \Phi(\mathcal{C}M_z) = \mathcal{C}\overset{\vee}{\Gamma}_{S(z)}$$

Comme $\overset{\vee}{\Gamma}_{S(z)}$ est un filtroïde (voir ci-dessus) et que T est distributif, il résulte du théorème de séparation parfaite 8-7 que l'on peut trouver un filtroïde parfait M_F avec

$$M^x \subset \mathcal{C}M_F \subset \Phi(\mathcal{C}M_z)$$

D'après les propriétés de l'érosion-fermeture Φ , cela entraîne

$$\overset{0}{M}^x \subset \mathcal{C}\overline{M_F} = \mathcal{C}M_{\wedge F} \subset \mathcal{C}M_z$$

D'après la condition h), cet élément $q = \wedge F$ est copremier.

On a ainsi montré que, pour tout $z \notin \overset{0}{M}^x$ ($\overset{0}{M}^x \neq \emptyset$), il existe un copremier q tel que $q \leq z$ et $q \notin \overset{0}{M}^x$.

Si maintenant on a $z_1 \vee z_2 \notin \overset{0}{M}^x$ pour deux éléments z_1, z_2 de T , on trouvera de même un copremier $q \notin \overset{0}{M}^x$ avec $q \leq z_1 \vee z_2$, donc, par exemple,

$q \leq z_1$, ce qui entraîne $z_1 \notin M^x$ et montre que M^x (s'il n'est pas vide) est bien un antifiltroïde.

On a déjà remarqué que la fonction $x \rightarrow H(x)$ est scs en tout $x \neq 0$ si et seulement si $x \rightarrow H_0(x) = H(x) \cup \{0\}$ est scs sur T . Soit alors q_i une famille dans Q , convergeant dans T vers un élément $x \in T$. Les q_i étant copremiers, on a $q_i \in H(q_i)$ pour tout i (critère 8–12). Donc, si T vérifie la condition de l'antifiltroïde ouvert, la condition f) du critère 10–2 entraîne $x \in H_0(x)$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x \in Q$: Q_0 est fermé.

Inversement, supposons Q_0 fermé. Comme T est distributif et à $\vee$ continu, il est coprimaire (théorème 10–1). D'après le corollaire du théorème 8–11, on a alors :

$$H(x) = \overline{M^Q \cap M^x}$$

Pour $x \neq 0$, $Q \cap M^x$ n'est pas vide et $M^Q \cap M^x$ contient l'élément 0, d'où résulte $M^Q \cap M^x = M^{Q_0 \cap M^x}$. Comme q_0 est fermé dans T , il en résulte :

$$H(x) = M^{Q_0 \cap M^x} = M^Q \cap M^x$$

Si $x = 0$, on a encore $H_0(x) = M^{Q_0 \cap M^x}$. Il est alors immédiat, d'après les propriétés du treillis COF que H_0 est scs (car les applications $x \rightarrow M^x$, $F \rightarrow Q_0 \cap F$, $F \rightarrow M^F$ sont toutes scs, compte tenu du fait que Q_0 est fermé dans T). Ainsi la condition f) du critère 10–2 est satisfaite, et cela achève la démonstration.

Exemple. — C'est, évidemment, le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace topologique E localement compact qui a servi de prototype. C'est un treillis distributif à $\vee$ continu, donc coprimaire, et même atomique : les atomes sont les $\{x\}$, $x \in E$, de sorte que Q s'identifie à l'espace localement compact E lui-même, et Q_0 à son compactifié d'Alexandrov (l'élément 0 du treillis T est le fermé vide $\emptyset$), et que cet espace Q_0 est effectivement fermé : $\mathcal{F}(E)$ vérifie la propriété d'antifiltroïde ouvert.

Dans ce treillis $\mathcal{F}(E)$, la classe des antifiltroïdes ouverts, qui joue un si grand rôle dans tout ce contexte, s'identifie à la classe des ouverts scs de la forme $\mathcal{F}^K$ (classe des fermés F disjoints d'un compact K). On vérifie, en particulier, que tout ouvert scs dans $\mathcal{F}(E)$ est bien réunion de tels antifiltroïdes ouverts de type $\mathcal{F}^K$.

COROLLAIRE 1. Pour un treillis T distributif à $\vee$ continu, la propriété d'antifiltroïde ouvert équivaut encore à :

- j) Pour tout antifiltroïde parfait M^A dans T , $\overset{0}{M}^A$ est encore un antifiltroïde, à moins qu'il ne soit vide.

En effet, si $M_F = \mathbb{C}M^A$ est un filtroïde parfait, on a $M_{\wedge F} = \mathbb{C}\overset{0}{M}^A$. La condition j) équivaut à la condition h) du théorème.

COROLLAIRE 2. Sous les conditions du théorème, on a, pour tout $x \in T$:

$$k) \quad H(x) = M^Q \cap M^x$$

N.B. — La réciproque est fausse, et la relation k) n'entraîne pas la condition de l'antifiltroïde ouvert. Le contre-exemple simple que nous avons présenté au début le montre bien : le sous-treillis $M_b \cup M^a$ du treillis $(0,1) \times (0,1)$ ne vérifie pas la condition d'antifiltroïde ouvert, mais satisfait pourtant la relation k).

Le treillis des antifiltroïdes ouverts

Nous désignerons par $\Phi_{\wedge}^g$ la classe des antifiltroïdes ouverts d'un treillis T distributif à $\vee$ continu, soit

$$\Phi_{\wedge}^g = \Phi_{\wedge} \cap \mathcal{G}_{\wedge}$$

et par $\tilde{\Phi}_{\wedge}^g$ la classe obtenue en adjoignant à $\Phi_{\wedge}^g$, à titre de plus petit élément, l'ensemble vide $\emptyset$, i.e.

$$\tilde{\Phi}_{\wedge}^g = \Phi_{\wedge}^g \cup \{\emptyset\}$$

Il sera commode de considérer $\tilde{\Phi}_{\wedge}^g$ comme un sous-senssemble de $\mathcal{G}_{\wedge}$. En général, ce sous-senssemble ne sera pas complètement réticulé pour l'ordre induit par $\mathcal{G}_{\wedge}$ (c'est-à-dire l'inclusion) sauf, toutefois, si le treillis T vérifie de plus la propriété de l'antifiltroïde ouvert. Énonçons ce résultat sous la forme d'un corollaire du théorème 10-2 :

COROLLAIRE 3. Soit T un treillis distributif à $\vee$ continu vérifiant la condition de l'antifiltroïde ouvert. Alors, la classe $\tilde{\Phi}_{\wedge}^g$ des antifiltroïdes ouverts, complétée par l'ensemble vide $\emptyset$, ordonnée par l'inclusion, constitue un treillis complet.

De plus, ce treillis $\tilde{\Phi}_{\wedge}^g$ est homomorphe au dual du treillis $\mathcal{K}(Q)$ des compacts de l'espace localement compact $Q = Q(T)$, complété par un plus grand élément identifié à Q_0 .

D'après le théorème 10-7, en effet, $Q_0 = Q \cup \{0\}$ est fermé, donc compact, dans T , et Q est donc lui-même localement compact pour la topologie induite (et même compact, si Q lui-même est fermé, ce qui correspond au cas où le plus petit élément 0 du treillis T est isolé dans T). Le compactifié d'Alexandrov de l'espace localement compact Q s'identifie, de manière naturelle, à Q_0 lui-même.

Soit maintenant $\overset{0}{M}^{A_i}$ une famille dans $\tilde{\Phi}_\Lambda^g$, que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer constituée d'éléments non vides, c'est-à-dire d'antifiltroïdes ouverts. L'intersection $\bigcap \overset{0}{M}^{A_i}$ est soit vide, soit encore un antifiltroïde. D'après la condition de l'antifiltroïde ouvert, son intérieur, $\overset{0}{\bigcap} \overset{0}{M}^{A_i}$ est donc lui-même soit vide, soit un antifiltroïde ouvert : il s'agit donc bien du plus grand minorant de la famille $\overset{0}{M}^{A_i}$ dans $\tilde{\Phi}_\Lambda^g$, soit :

$$\bigwedge \overset{0}{M}^{A_i} = \overset{0}{\bigcap} \overset{0}{M}^{A_i}$$

De même, la réunion $\bigcup \overset{0}{M}^{A_i}$ est un ouvert, et, d'après la même condition de l'antifiltroïde ouvert, $\hat{S}(\bigcup \overset{0}{M}^{A_i})$ est encore un antifiltroïde ouvert, éventuellement impropre (égal à T), et constitue donc le plus petit majorant de la famille :

$$\bigvee \overset{0}{M}^{A_i} = \hat{S}(\bigcup \overset{0}{M}^{A_i})$$

$\tilde{\Phi}_\Lambda^g$ est donc bien un treillis.

Maintenant, le corollaire du lemme 10-1 nous montre que tout antifiltroïde ouvert vérifie la relation :

$$(c) \quad \overset{0}{M}^A = \bigcap_{Q \in \mathcal{K}(Q)} \overset{0}{M}^Q$$

On note que 0 n'appartient pas à $\overset{0}{M}^A$, puisque l'antifiltroïde $\overset{0}{M}^A$ n'est pas vide, de sorte que, dans la relation (c), on peut remplacer Q par Q_0 . Par ailleurs $\overset{0}{M}^A$ est un fermé de T et ne contient pas l'élément 0 .

En sens inverse, si F est un fermé de T ne contenant pas 0 , $F \cap Q_0$ est fermé (donc compact) dans T , puisque Q_0 est fermé (théorème 10-2), et, ne contenant pas 0 , est un compact K de l'espace localement compact Q . Inversement, d'ailleurs, tout $K \in \mathcal{K}(Q)$ est de cette forme. Posant

$$\overset{0}{M}^B = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(Q)} \overset{0}{M}^K$$

pour $K \in \mathcal{K}(Q)$, nous obtenons un ouvert de $\mathcal{G}_\Lambda$, non vide (car $0 \notin K$ donne $0 \in \overset{0}{M}^B$), qui est aussi un antifiltroïde (comme intersection des antifiltroïdes $\overset{0}{M}^q$, $q \in K \subset Q$). Si maintenant on remplace K par le plus grand élément de

$\tilde{\mathcal{K}}(Q)$, identifié à Q_0 lui-même, on trouve $M_{Q_0} = T$ et donc $\overset{0}{M}^B \neq \emptyset$: c'est le plus petit élément de $\tilde{\Phi}_\wedge^g$. L'application $K \rightarrow \mathcal{C}M_K$ est donc surjective de $\tilde{\mathcal{K}}(Q)$ sur $\tilde{\Phi}_\wedge^g$.

Comme $\overset{0}{M}^B \subset \mathcal{C}M_K$ équivaut à $K \subset \mathcal{C}\overset{0}{M}^B \cap Q_0$, il s'agit d'une dilatation du dual de $\tilde{\mathcal{K}}(Q)$ dans $\tilde{\Phi}_\wedge^g$. Mais

$$\mathcal{C}M_K \subset \overset{0}{M}^B = \mathcal{C}M_{Q_0 \cap \mathcal{C}\overset{0}{M}^B}$$

équivaut (puisque $K \subset Q_0$) à $Q_0 \cap \mathcal{C}\overset{0}{M}^B \subset M_K$. Si l'on désigne par $D(\overset{0}{M}^B)$ l'adhérence dans T (ou, aussi bien, dans Q_0) de l'ensemble des éléments minimaux du fermé $Q_0 \cap \mathcal{C}\overset{0}{M}^B$, cela équivaut encore à $D(\overset{0}{M}^B) \subset K$. Il s'agit donc aussi d'une érosion du dual du treillis $\tilde{\mathcal{K}}(Q)$ dans $\tilde{\Phi}_\wedge^g$.

Ainsi, $\tilde{\Phi}_\wedge^g$ est l'image des $\tilde{\mathcal{K}}(Q)$ dans $\mathcal{G}_\wedge$ par l'homomorphisme $K \rightarrow \mathcal{C}M_K$, ce qui achève la démonstration.

Exemple. — Dans le cas du treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace E localement compact, Q est constitué des atomes $\{x\}$, $x \in E$ et s'identifie à l'espace localement compact E lui-même. La classe des antifiltroïdes ouverts $\Phi_\wedge^g$ est ici la classe des éléments de $\mathcal{G}_\wedge$ de la forme $\mathcal{F}^K$, où $K \in \mathcal{K}(E)$. De plus, à l'élément maximal E de $\tilde{\mathcal{K}}(E)$ est associé l'élément $\mathcal{F}^E = \{\emptyset\}$, qui est le plus petit élément du treillis $\mathcal{G}_\wedge(\mathcal{F})$. ici, donc, l'homomorphisme est même unisomorphisme (et le lecteur vérifiera qu'il s'agit aussi d'un homeomorphisme).

10-3. La condition du radical fermé

DÉFINITION. Dans un treillis T coprimaire, on pose

$$R(x) = M^Q \cap M^x \quad (x \in T)$$

et on dit que $R(x)$ est le radical de l'élément x . Si le treillis T vérifie la relation k) $H(x) = R(x)$, on dira qu'il satisfait la condition du radical fermé. (H est la fonction notée $\hat{H}$ aux théorèmes 8-10 et 8-11).

Il s'agit donc d'une condition strictement plus faible que celle de l'antifiltroïde ouvert. Mais il ne faut pas croire pour autant qu'elle soit toujours vérifiée.

Contre-exemple. — Pour avoir un exemple encore accessible par un dessin de coin de table, considérons le treillis des lipschitziennes sur l'espace euclidien

$\mathbb{R}$ à 1 dimension. On a vu que les éléments copremiers sont les fonctions de la forme

$$f(x) = a - d(x_0, x) \quad \text{pour un } a \in \mathbb{R} \text{ et un } x_0 \in \mathbb{R}$$

auxquelles il convient, éventuellement, d'ajouter les limites de telles fonctions, si elles sont encore copremières.

Si d est la distance euclidienne usuelle, $d(x, y) = |x - y|$, on obtient ainsi les fonctions linéaires de pente ± 1 , qui sont encore des éléments copremiers : la condition de l'antifiltroïde ouvert est vérifiée.

Avec une autre distance, il n'en est plus forcément de même. Par exemple, avec

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1), \quad \text{ou } d(x, y) = 1 - e^{-|x - y|} \quad \text{etc.}$$

on ramasse, à la limite, les fonctions constantes, qui ne sont plus copremières : la condition de l'antifiltroïde ouvert n'est plus vérifiée, bien que celle du radical fermé le soit toujours.

Pour obtenir un contre-exemple à la propriété du radical fermé, il faut passer à un sous-treillis du type :

$$T = M_{f_0} \cup M^{f_1}$$

Prenons les fonctions constantes, $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$.

Les éléments copremiers du type $a - d(x_0, x)$ restent copremiers dans T tant qu'ils appartiennent à M^{f_1} , i.e. pour $a \leq 1$. Pour $a > 1$ (strictement), on doit les remplacer par

$$(a - d(x_0, \cdot)) \vee f_0 = (a - d(x_0, \cdot))_+$$

En particulier, la fonction $(1 - d(x_0, \cdot))_+$ est dans $\overline{Q}$, mais non dans Q_0 : la condition de l'antifiltroïde ouvert n'est pas vérifiée.

La condition de radical fermé ne l'est pas non plus. Pour avoir un contre-exemple, prenons la fonction f définie par

$$f(x) = (1 + C x)_+ \quad (0 < C < 1 \text{ strictement})$$

Son radical $R(f)$ est constitué des fonctions minorant celles du "chapeau" $Q \cap M^f$ qui comporte les fonctions du type :

$$\begin{array}{lll} (a - d(x_0, \cdot))_+ & a > 1 & (1 + C x_0)_+ \geq a \\ a - d(x_0, \cdot) & a \leq 1 & (1 + C x_0)_+ \geq a \end{array}$$

On voit que l'élément limite correspondant à $a \downarrow 1$ et $x_0 = 0$, soit $(a-d(0, \cdot))_+$ ne figure pas dans ce chapeau, bien qu'il appartienne à $H(x)$. Ainsi la condition du radical fermé n'est pas satisfaite.

Revenons à l'étude du cas général. Dans la définition donnée ci-dessus de la condition du radical fermé, nous n'avons pas supposé le treillis T à $\vee$ continu. Cette étude concerne donc aussi les treillis coprimaires dont la topologie $\mathcal{C}M^I - \mathcal{C}M_A$ n'est pas séparée (qu'ils soient COF, s'il en existe, ou non). Nous aurons besoin de quelques instruments nouveaux, que nous allons maintenant définir.

La dilatation η et l'érosion W

Posant

$$\eta(M^A) = \bigcup \{H(x), x \in M^A\} \quad (M^A \in \mathcal{P}_\wedge)$$

nous obtenons une dilatation de $\mathcal{P}_\wedge$ dans lui-même. Nous noterons W l'érosion associée. On trouve sans peine, compte tenu de la relation (i) du théorème 8-10 :

$$W(M^A) = \bigcap \{\hat{S}\mathcal{C}M_y, y \in \mathcal{C}M^A\} \quad (M^A \in \mathcal{P}_\wedge)$$

Il s'agit donc de la plus petite érosion majorant, sur $\mathcal{P}_\wedge$, la fermeture $\hat{S}$ dont le domaine d'invariance est la classe $\Phi_\wedge$ des antifiltroïdes. L'expression même de $W(M^A)$ écrite ci-dessus montre que $W(M^A)$ est toujours un anti-filtroïde. Mais en général l'inclusion $W(\mathcal{P}_\wedge) \subset \Phi_\wedge$ est stricte.

Notons que, par définition, on a pour tout $x \in T$:

$$x \in W(M^A) \Leftrightarrow H(x) \subset M^A$$

Comme on a toujours $H(x) \subset M^x$, la dilatation η est anti extensive, et l'érosion W est extensive :

$$\eta(M^A) \subset M^A ; M^A \subset W(M^A)$$

Mais, en général, cette érosion W n'est plus une fermeture.

La fermeture $\hat{S}_\mu$

Nous introduirons donc la plus petite fermeture majorant l'érosion W , et nous la noterons $\hat{S}_\mu$.

On sait [5] que son domaine d'invariance coïncide avec le domaine d'anti extensivité de W , qui est d'ailleurs ici en fait (puisque W est extensive) le domaine d'invariance de W . Ainsi :

$$M^A = \hat{S}_\mu(M^A) \Leftrightarrow M^A = W(M^A)$$

et cette relation définit complètement la fermeture $\hat{S}_\mu$. Noter que cela implique encore que $\hat{S}_\mu(M^A)$ est toujours un antifiltroïde.

Les invariants de la fermeture $\hat{S}_\mu$, ou, ce qui revient au même, de l'érosion W sont caractérisés par la relation : $H(x) \subset M^A$ entraîne $x \in M^A$, ou, ce qui revient au même, pour $M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu$ on a : $M^F \subset M^A$ entraîne $M^{\vee F} \in M^A$, soit :

$$M^A = \bigcup \{M^x, H(x) \subset M^A\} = \bigcup \{M^{\vee F} : M^F \in \mathcal{F}_\wedge^\mu, M^F \subset M^A\}$$

Naturellement, cette nouvelle fermeture $\hat{S}_\mu$ ne sera, en général, plus une érosion. Nous ne poursuivrons pas cette régression transfinie jusqu'à son terme ultime, qui serait la plus petite érosion-fermeture majorant la fermeture $\hat{S}$, mais nous introduirons encore un couple dilatation-érosion.

La dilatation-ouverture radicale u et l'érosion-fermeture v

La dilatation u est définie par :

$$u(M^A) = \bigcup \{R(x), x \in M^A\} = M^Q \cap M^A$$

Comme on a, manifestement, $Q \cap u(M^A) = Q \cap M^A$, il s'agit d'une dilatation-ouverture. L'érosion-fermeture associée, notée v , est donc donnée par :

$$v(M^A) = \mathcal{C}M_{Q \cap \mathcal{C}M^A}$$

On notera, d'après le corollaire du lemme 10-1, que les antifiltroïdes ouverts appartiennent au domaine d'invariance de l'érosion-fermeture v .

A titre de conjecture, j'inclinerais à penser que cette érosion-fermeture v coïncide avec la plus petite érosion-fermeture majorant la fermeture $\hat{S}$ — mais je n'ai pas de démonstration.

On notera aussi les inclusions, en général strictes

$$M^A \subset \hat{S}(M^A) \subset W(M^A) \subset \hat{S}_\mu(M^A) \subset v(M^A) \subset M^{vA}$$

d'où il résulte que ces expressions ont toutes le même Sup :

$$v \hat{S}(M^A) = v W(M^A) = v \hat{S}_\mu(M^A) = v v(M^A) = v M^A$$

Nous allons maintenant considérer le cas où le terme de cette progression est atteint dès l'étape W , c'est-à-dire le cas où l'on a

$$W = \hat{S}_\mu$$

THÉORÈME 10-3. (THÉORÈME DU RADICAL FERMÉ). Pour un treillis coprimaire T (non nécessairement à v continu), les énoncés suivants sont équivalents :

- a) L'érosion W est aussi une fermeture (i.e. $W = \hat{S}_\mu$)
- b) Pour tout $x \in T$, on a $\eta H(x) = H(x)$
- c) T vérifie la condition de radical fermé.

Si l'érosion W est une fermeture, la dilatation η associée est aussi une ouverture (lemme 8-2) et, en particulier, on a $\eta H(x) = H(x)$. Donc a) entraîne b). Inversement, $\eta H = H$ entraîne $\eta\eta = \eta$ et $W = WW$, et a) équivaut à b).

Si la condition b) est remplie, pour $x \in T$ et $y \in H(x)$ on peut trouver un $z \in H(x)$ avec $y \in H(z)$. Mais $H(x)$ appartient à $\mathcal{F}_\wedge^\mu$, et donc, en particulier est stable pour $\uparrow$. Donc tout y dans $H(x)$ admet un majorant maximal q dans $H(x)$. Soit alors $z' \in H(x)$ tel que $q \in H(z')$, et donc aussi $q \leq z'$: comme q est maximal dans $H(x)$, cela implique $z' = q$, et donc $q \in H(q)$. D'après le critère 8-12, q est copremier. Comme tout $y \in H(x)$ admet un majorant copremier dans $H(x)$, il vient

$$Q \cap M^x \subset H(x) \subset M^Q \cap M^x = R(x)$$

et donc $H(x) = R(x)$. Ainsi b) entraîne c).

Enfin, si $H(x) = R(x)$, tout $y \in H(x)$ admet un majorant copremier $q \in H(x)$. On a donc $y \in M^q = H(q) \subset H(x)$. On en déduit $H(x) = \bigcup \{H(q), q \in Q \cap H(x)\}$ et, *a fortiori* $\eta H(x) = H(x)$. Donc c) entraîne b), ce qui achève la démonstration.

Examinons un cas particulier.

Treillis de type fini

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis T (nécessairement coprimaire) est de type fini si tout $x \in T$ est le Sup d'une famille finie J_x d'éléments copremiers dans T :

$$x = \vee J_x, \quad J_x \subset Q, \quad J_x \in \mathcal{J}(T)$$

Voici leur caractérisation :

CRITÈRE 10-3. Un treillis coprimaire T est de type fini si et seulement si il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

- a) Pour tout $x \in T$, il existe une partie finie I_x telle que $H(x) = M^{I_x}$.
- b) Pour tout $x \in T$, on a $H(x) = M^{J_x}$, $J_x \in \mathcal{J}(T)$, $J_x \subset Q$.
- c) Pour toute partie $M^A \in \mathcal{P}_\wedge$, on a $\hat{S}(M^A) = \hat{S}(M^A \cap Q)$.
- d) $\hat{S}$ est une érosion sur $\mathcal{P}_\wedge$.

Le treillis T vérifie alors la condition de radical fermé (mais non nécessairement celle de l'antifiltroïde ouvert).

Supposons T de type fini. Soit $x \in T$ et $J_x \subset Q$ une partie finie telle que $x = \vee J_x$. La relation $Q \cap M^{\vee J_x} = Q \cap M^{J_x}$ (corollaire du critère 8-9) donne ici $Q \cap M^x = Q \cap M^{J_x} \subset M^{J_x}$. Comme M^{J_x} est dans $\mathcal{F}_\wedge^\mu$, cela entraîne $H(x) = \bar{R}(x) \subset M^{J_x}$. Mais $J_x \subset Q \cap M^x$ donne $M^{J_x} \subset R(x)$. On a donc

$$H(x) = R(x) = M^{J_x}$$

Ainsi, la condition de radical fermé est remplie, et les conditions a) et b) sont satisfaites.

b) implique trivialement a). Supposons a) vrai, soit $H(x) = M^{I_x}$ pour une partie quelconque finie de T . On peut, sans nuire à la généralité, supposer la partie finie I_x irréductible, en ce sens que l'égalité $H(x) = M^J$ ne soit réalisée par aucun sous-ensemble strict J de I_x . D'autre part, d'après la relation (iv) du théorème 8-10, l'égalité $x = \vee I_x$ entraîne la relation :

$$H(x) = \bigcup \{H(z), z \in I_x\}$$

Pour chaque $z \in I_x$, il y a donc un $z' \in I_x$ avec $z \in H(z')$. Cela entraîne $z \leq z'$. Mais, comme nous avons supposé I_x irréductible, cela entraîne $z' = z$ et donc $z \in H(z)$: z est copremier, et on a en fait $I_x \subset Q$. Donc a) entraîne b), et ces deux conditions sont équivalentes.

Compte tenu de $\vee H(x) = x$, la condition b) entraîne trivialement que T est de type fini. A ce stade, on a donc montré l'équivalence de la condition de type fini avec chacune des conditions a) et b).

Supposons b) satisfaite. Pour $M^A \in \mathcal{P}_\wedge$ et toute partie finie $I \subset A$, on a $\vee I = \vee \{J_x, x \in I\}$. Posons $J = \bigcup \{J_x, x \in I\}$, qui est encore une partie finie $\subset Q$, il vient $\vee I = \vee J = \vee Q \cap M^J$, avec $J \subset M^A \cap Q$. On a donc $\hat{S}(M^A) \subset \hat{S}(M^A \cap Q)$, et donc l'égalité. Donc b) entraîne c).

Inversement, si c) est vraie, on a $M^x = \hat{S}(M^x) = \hat{S}(Q \cap M^x)$ pour tout $x \in T$, soit $x \in \hat{S}(Q \cap M^x)$: il existe donc une partie finie $J_x \subset Q \cap M^x$ avec $x = \vee J_x$ et c) entraîne b).

On a vu que $x \in W(M^A)$ équivaut à $H(x) \subset M^A$. Si b) est vraie, cela équivaut à $J_x \subset M^A$ et entraîne $x = \vee J_x \in \hat{S}(M^A)$. On a donc $W(M^A) \subset \hat{S}(M^A)$, et par suite l'égalité, puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. Comme W est une érosion, on conclut que b) entraîne d).

Enfin, si $\hat{S}$ est une érosion sur $\mathcal{P}_\wedge$, c'est une érosion-fermeture, et cela entraîne $\hat{S} = W = \hat{S}_\mu$. D'après le théorème 10-3, on a alors $H(x) = M^Q \cap M^x$. De plus $x \in \hat{S}(M^A) = W(M^A)$ équivaut, d'après les propriétés de l'érosion W , à $H(x) \subset M^A$, donc aussi à $Q \cap M^x \subset M^A \cap Q$. Cela entraîne $H(x) \subset M^Q \cap M^A$, donc $x \in W(Q \cap M^A) = \hat{S}(Q \cap M^A)$. Il vient donc $\hat{S}(M^A) \subset \hat{S}(Q \cap M^A)$ et c) est vérifiée, ce qui achève la démonstration.

Exemple. — On vérifie sans peine que tout produit fini de treillis de type fini est encore de type fini. En particulier, pour tout entier n fini, le treillis $\overline{\mathbb{R}}^n$ est un treillis de type fini.

On obtient un exemple moins banal en partant de la classe $\mathcal{J}(E)$ des parties finies d'un ensemble E et en la munissant d'un plus grand élément identifié à E . Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{J}}(E)$ ce treillis, manifestement de type fini (noter que le plus grand élément $\omega = E$ est copremier dans ce treillis dès que E est infini). Il s'agit en fait ici d'un cas particulier du treillis $\tilde{\mathcal{K}}(E)$ obtenu en prenant le compactifié de l'espace $\mathcal{K}(E)$ des compacts d'un espace topologique E localement compact. Si l'on munit un ensemble E quelconque de la topologie discrète, qui est localement compacte, on trouve bien, en effet, $\mathcal{K}(E) = \mathcal{J}(E)$.

Treillis à $\wedge$ fini

Dans le même ordre d'idée, on peut aussi considérer des treillis de type noetherien, c'est-à-dire à $\vee$ ou $\wedge$ fini.

DÉFINITION. Nous dirons qu'un treillis T est à $\wedge$ fini si, pour toute partie A de T , il existe une partie finie $J \subset A$ telle que $\wedge A = \wedge J$, ou encore, ce qui revient manifestement au même, si tout filtroïde dans T est de la forme M_x pour un $x \in T$.

On note que cette définition n'implique aucune hypothèse de coprimarité.

L'un des exemples de treillis de type fini cités ci-dessus (treillis $\tilde{\mathcal{J}}(E)$) est en fait aussi un exemple de treillis à $\wedge$ fini, mais non l'autre : $\overline{\mathbb{R}}^N$ n'est pas à $\wedge$ fini, ni même $\overline{\mathbb{Z}}^N$. ($\overline{\mathbb{Z}}$ est le treillis des entiers, positifs ou négatifs, complété par $+\infty$ et $-\infty$). Dans le treillis $\overline{\mathbb{Z}}$, en effet, l'Inf de l'ensemble des entiers $> -\infty$ n'est pas atteint par une opération finie. Par contre le treillis $\overline{\mathbb{N}}$ des entiers naturels (complété par $+\infty$) est bien à $\wedge$ fini.

Voici leur caractérisation :

CRITÈRE 10-4. Pour un treillis T quelconque, les énoncés suivants sont équivalents :

- a) T est à $\wedge$ fini.
- b) T est COF à $\vee$ continu, et on a $M^x = \overset{0}{M}^x$ pour tout $x \in T$.
- c) Toute partie $M^A \in \mathcal{P}_\wedge$ est ouverte pour la topologie scs maximale, ou, ce qui revient au même, toute partie $M_A \in \mathcal{P}_\wedge$ est stable pour $\downarrow$.

Comme on a $M_F = M_{\wedge F}$ pour tout filtroïde, si a) est vrai, l'application $M_F \rightarrow M_{\wedge F}$ est une érosion sur $\Phi_\wedge$. Cela entraîne que T est à $\vee$ continu, d'après la forme duale du critère 9-1. Mais alors le filtroïde $\overset{\vee}{\Gamma}_S(x)$, d'après la condition a) vérifie $\overset{\vee}{\Gamma}_S(x) = M_x$, puisque $x = \wedge \overset{\vee}{\Gamma}_S(x)$. Mais cela équivaut à $x \in \overset{0}{M}^x$, d'après la définition de $\overset{\vee}{\Gamma}_S$, et entraîne donc $M^x = \overset{0}{M}^x$ pour tout $x \in T$.

La condition b) entraîne la condition c), puisque, dans tout treillis à $\vee$ continu, on a $\overset{0}{M}^A = \bigcup \{ \overset{0}{M}^x, x \in M^A \}$. Comme ici $\overset{0}{M}^x = M^x$, il vient $\overset{0}{M}^A = M^A$.

Supposons la condition c) vérifiée. Cela entraîne $M^x = \overset{0}{M}^x$ pour tout $x \in T$ et donc, si $M^x \subset \mathcal{C}M_y : M^x \subset \overset{0}{M}^x \subset M^x \subset \mathcal{C}M_y$, ce qui montre que T est à $\vee$ continu : donc c) entraîne b).

Enfin, supposons b) vraie. Soit A une partie de T . Comme la famille filtrante décroissante $\{ \wedge J : J \in \mathcal{J}(A) \}$ converge vers $\wedge A = x$ dans T , et que $x \in \overset{0}{M}^x$, d'après l'hypothèse, il existe une partie finie $J \subset A$ telle que $\wedge J \in \overset{0}{M}^x = M^x$. Comme on a évidemment $\wedge J \geq x$, cela entraîne bien $\wedge J = x$, et T est à $\wedge$ fini. Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. Les treillis à $\wedge$ fini vérifient la condition de l'antifiltroïde ouvert.

En effet, dans un tel treillis, on a $M^A = \overset{0}{M}^A$ pour tout antifiltroïde M^A , d'après la condition c) du critère, et $\overset{0}{M}^A$ est donc un antifiltroïde.

COROLLAIRE 2. Un treillis à $\wedge$ fini est coprimaire si et seulement si il est distributif.

En effet, la condition est nécessaire, d'après le théorème 8-11, et suffisante, d'après la condition b) du critère et le théorème 9-5.

10-4. Les copremiers faibles

Nous avons, à plusieurs reprises, rencontré la classe des éléments q' de la forme $q' = \bigwedge F$ où F est un filtroïde parfait. Il est temps de leur donner un statut et de les étudier pour eux-mêmes. Cela nous permettra ensuite de mettre en évidence quelques classes de treillis possédant des propriétés intéressantes. Dans cette section, nous limitons notre analyse au cas des treillis T COF distributifs à $\vee$ continu, donc coprimaires. Voici d'abord la définition.

DÉFINITION. Dans un treillis T distributif à $\vee$ continu, on dit qu'un élément q' est copremier faible s'il existe un filtroïde parfait F tel que l'on ait :

$$q' = \bigwedge F$$

On désignera par Q' la classe des éléments copremiers faibles du treillis T , soit $Q' = \{ \bigwedge F, F \in \Phi_{\vee}^p \}$. On dira de même qu'un élément p' est premier faible, s'il est copremier faible dans le treillis dual, et on désignera par $P' = \{ \bigvee A : A \in \Phi_{\wedge}^p \}$ la classe correspondante.

Dans le cas particulier d'un treillis T monoséparé, une conséquence immédiate de cette définition est la suivante : si q est copremier dans T , alors $\alpha(q)$ est premier faible ; de même, si p est premier, $\beta(p)$ est copremier faible, soit :

$$\alpha(Q) \subset P' \quad ; \quad \beta(P) \subset Q'$$

En effet, soit, par exemple, p premier dans T . Alors $\bigcap MP$ est un filtroïde parfait. On a donc $\beta(p) = \bigwedge \bigcap MP \in Q'$, d'après la définition ci-dessus.

Posons maintenant deux lemmes :

LEMME 10-3. Soit f une application croissante d'un treillis T à $\vee$ continu dans un treillis COF quelconque T' . Alors f admet une plus petite majorante croissante scs, notée f' et vérifiant :

$$f'(x) = \bigwedge \left\{ f(y) : y \in \bigvee_s \Gamma_s(x) \right\}$$

On dira que f' est la régularisée scs de x .

Vérification immédiate, à partir de l'équivalence :

$$y \in \check{\Gamma}_S(x) \Leftrightarrow x \in \overset{0}{M}^y$$

et du théorème 4-3.

Pour tout treillis T distributif à $\vee$ continu, nous désignerons par H' la régularisée scs de l'application H (notée $\hat{H}$ dans le théorème 8-10), soit :

$$H'(x) = \bigcap \left\{ H(y), y \in \check{\Gamma}_S(x) \right\}$$

LEMME 10-4. Dans un treillis T distributif à $\vee$ continu, et pour $x, z \in T$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $y \in \overline{\mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z}$
- ii) $z \in H'(y)$
- iii) Il existe un copremier faible q' tel que $z \leq q' \leq y$.

En effet, i) signifie que, pour tout $x \in T$, $y \in \overset{0}{M}^x$ entraîne $x \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z$, c'est-à-dire $z \in H(x)$. D'où l'équivalence de i) et ii).

Noter que la relation i) se met aussi sous la forme : $x \in \check{\Gamma}_S(y)$ entraîne $x \in \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z$ c'est-à-dire

$$\check{\Gamma}_S(y) \subset \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z$$

Comme le treillis T est distributif, il découle du théorème de séparation 8-7 que ceci entraîne (et équivaut à) l'existence d'un filtroïde parfait F séparant ce filtroïde et cet antifiltroïde disjoint, soit :

$$\check{\Gamma}_S(y) \subset F \subset \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z$$

Comme $F = M_F \in \Phi_\wedge$, $\check{\Gamma}_S(x) \subset F$ équivaut à $y \in \bar{F} = M_{\wedge F}$. Désignons par q' l'élément copremier faible $q' = \wedge F$. Il vient ainsi $y \geq q' = \wedge F \in Q'$. D'autre part, $F \subset \mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z$ équivaut à $\hat{S} \mathcal{C} M_z \subset \mathcal{C} F$, donc aussi à $\mathcal{C} M_z \subset \mathcal{C} F$ — puisque le complémentaire de F est un antifiltroïde — donc à $F \subset M_z$ et finalement à $z \leq \wedge F = q'$. Donc ii) équivaut à iii).

COROLLAIRE. Pour tout y, z dans T , on a

$$H'(y) = M^{Q'} \cap M^y ; \quad \overline{\mathcal{C} \hat{S} \mathcal{C} M_z} = M_{Q'} \cap M_z$$

CRITÈRE 10-5. Pour un élément x d'un treillis T distributif à $\vee$ continu, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) x est copremier faible
- b) $x \in \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$, ou, ce qui revient au même, $M_x = \mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_x}$
- c) $x \in H'(x)$
- d) Pour tout $y \in \bigvee \Gamma_S(x)$ on a $x \in H(y)$.

L'équivalence des trois premières conditions découle immédiatement du lemme 10-4 appliqué aux éléments $y=x$ et $z=x$. La quatrième condition n'est rien de plus que l'écriture explicite de la troisième, compte tenu de la définition de la régularisée $\text{scs } H'$ de l'application H .

COROLLAIRE 1. L'élément minimum de T , noté 0 , est copremier faible si et seulement si ce n'est pas un point isolé dans T .

En effet, $0 \in Q'$ équivaut à $0 \in \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_0}}$. Or $\mathcal{C} M_0 = \emptyset$ et $\hat{\mathcal{S}}(\emptyset) = \{0\}$, d'où $\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_0} = \dot{M}_0$. Ainsi $0 \in Q'$ si et seulement si 0 appartient à l'adhérence $\dot{M}_0$ de ses majorants stricts, *i.e.* s'il n'est pas un point isolé.

Exemple. — Dans le cas du treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace E localement compact, l'ensemble vide $\emptyset$ (élément 0) est copremier faible si et seulement si il existe dans E des familles filtrées sans point d'adhérence, *i.e.* si E n'est pas compact.

COROLLAIRE 2. L'élément maximum de T , noté ω , est copremier faible si et seulement si il est copremier, *i.e.*

$$\omega \in Q' \Leftrightarrow \omega \in Q$$

En effet, on a toujours $H'(\omega) = H(\omega)$, de sorte que $\omega \in H'(\omega)$ équivaut à $\omega \in H(\omega)$. la condition c) du critère entraîne donc le corollaire 2.

COROLLAIRE 3. La classe Q' des copremiers faibles est fermée dans T .

La condition d) du critère se met, en effet, sous la forme :

$$(e) \quad Q' = \bigcap_{z \in T} (H(z) \cup \mathcal{C} \dot{M}_z)$$

N.B. — En partant de b), on obtient de la même façon :

$$(e') \quad Q' = \bigcap_{z \in T} (\mathcal{C} M_z \cup \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}})$$

Je laisse à la virtuosité du lecteur le soin de démontrer les assez curieuses formules suivantes. D'abord :

$$(f) \quad Q = \bigcap_{z \in T} (H(z) \cup \mathcal{C}M^0_z) = \bigcap_{z \in T} (\mathcal{C}M_z \cup \mathcal{C}\hat{S}\mathcal{C}M_z)$$

Puis, en se limitant au domaine $z \in Q'$ (au lieu de $z \in T$) :

$$(g) \quad \bigcap_{q \in Q'} (\mathcal{C}M^q \cup H(q)) = \{y : \hat{S}\mathcal{C}M_y = \hat{S}^0\mathcal{C}M_y\}$$

$$(h) \quad \bigcap_{q \in Q'} (\mathcal{C}M_q \cup \mathcal{C}\hat{S}\mathcal{C}M_q) = \{x : H(x) = H'(x)\}$$

La première intersection représente donc la classe des éléments y pour lesquels l'ouvert $\mathcal{C}M_y$ vérifie la condition de l'antifiltroïde ouvert. La seconde représente l'ensemble des points de continuité de l'application H .

THÉOREME 10-4. (THÉOREME DES COPREMIERS FAIBLES). Dans un treillis T , distributif et à $\vee$ continu, la classe Q' des copremiers faibles est l'adhérence dans T de la classe Q des copremiers, soit :

$$Q' = \overline{Q}$$

Soit, en effet, $q' \in Q'$ un copremier faible dans T . On a $q' \in H'q'$, d'après le critère 10-5. Comme H' est la régularisée scs de H , cela signifie que, pour tout $z \in T$,

$$(\lambda) \quad q' \in M^0_z \text{ entraîne } q' \in H(z) = \overline{M^z \cap M^z}$$

Soit alors G un voisinage ouvert de q' , que l'on peut prendre de la forme

$$G = M^y \cap \mathcal{C}M^I$$

pour un $y \in T$ et une partie finie I de T (cela découle du fait que T est à $\vee$ continu) et on peut même trouver de plus $z \in T$ avec :

$$q' \in M^0_z \subset M^z \subset M^y$$

et on a donc encore $q' \in M^z \cap \mathcal{C}M^I$. Mais d'après la relation (λ) , on peut trouver un élément $q_0 \in \overline{M^z \cap M^z}$ et majorant q' , $q' \leq q_0$. Comme $q_0 \in M^z$, on a aussi $q_0 \in M^y$. De même $q_0 \geq q'$ et $q' \in \mathcal{C}M^I$ donnent $q_0 \in \mathcal{C}M^I$. Donc q_0 appartient au voisinage ouvert G de q' . Comme q_0 appartient à l'adhérence $\overline{M^z \cap M^z}$, cela entraîne :

$$Q \cap M^z \cap G \neq \emptyset$$

A fortiori, on aura $Q \cap G \neq \emptyset$, et cela pour tout voisinage ouvert G de q' . Donc $q' \in \overline{Q}$, et $Q' \subset \overline{Q}$.

D'autre part, on a manifestement $Q \subset Q'$, et Q' est fermé, d'après le corollaire du critère 10-5. On a donc bien $Q' = \overline{Q}$.

N.B. — Ce théorème explique bien l'équivalence des conditions h) et i) du théorème 10-2.

Quelques classes de treillis

Dans ce qui va suivre jouera un certain rôle une fermeture, notée φ , définie par

$$\varphi(z) = \bigwedge (Q' \cap M_z) \quad (z \in T)$$

$\varphi(z)$ est donc l'Inf des copremiers faibles majorant l'élément z . D'après le corollaire du lemme 10-4, on a aussi

$$(\lambda) \quad \varphi(z) = \bigwedge \mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z$$

Voici une autre propriété de la fermeture φ , qui nous sera utile dans un instant.

On note que $y \leq \varphi(z)$, soit $\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z \subset M_y$, ou encore $\mathcal{C} M_y \subset \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z$ équivaut à :

$$\hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_y \subset \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z$$

puisque $\hat{\mathcal{S}}$ est une fermeture. Mais cette inclusion équivaut elle-même à l'implication

$$z \in H(x) \Rightarrow y \in H(x)$$

On en déduit la relation :

$$(\mu) \quad M^{\varphi(z)} = \bigcap \{H(x) : z \in H(x)\}$$

Il résulte de cette relation que $z \in H(x)$ équivaut à $\varphi(z) \in H(x)$, et, en inversant, que $x \in \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z$ équivaut à $x \in \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_{\varphi(z)}$. On a donc, pour tout $z \in T$, l'égalité

$$(\nu) \quad \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_{\varphi(z)} = \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C} M_z$$

Nous allons maintenant nous intéresser au domaine d'invariance B_φ de cette fermeture φ , c'est-à-dire à la classe stable pour $\bigwedge$ engendrée par la classe Q' des copremiers faibles. Elle contient donc Q' , et aussi le point ω .

Pour cette raison, il sera parfois utile de compléter la classe Q' en lui adjoignant le point ω , si elle ne le contient pas déjà. On posera donc

$$Q'_\omega = Q' \cup \{\omega\}$$

De la même manière, l'espace image de T par l'application H ou sa régularisée scs H' admet dans $\mathcal{F}_\wedge$ un même plus grand élément, qui est $H(\omega) = H'(\omega)$. Pour cette raison, nous introduirons un quasi-sous-treillis de $\mathcal{F}_\wedge$ noté $\mathcal{F}_\wedge^H$ et défini par :

$$\mathcal{F}_\wedge^H = \{M^F : M^F \in \mathcal{F}_\wedge, M^F \subset H(\omega)\}$$

D'après le corollaire 2 du critère 10-5, on aura à la fois $Q'_\omega = Q'$ et $\mathcal{F}_\wedge^H = \mathcal{F}_\wedge$ si et seulement si ω est copremier.

Au lieu de dire : Q' est stable pour l'Inf non vide, *i.e.* pour toute partie $A \subset Q'$ et non vide, on a $\bigwedge A \in Q'$, il sera clairement équivalent de dire : Q'_ω est stable pour $\bigwedge$. Cela équivaut à $B_\varphi = Q'_\omega$, donc à : pour tout $z \in T$, $\varphi(z)$ est copremier faible ou égal à ω .

De même, il sera équivalent (mais plus agréable) de dire : H' érode T dans le treillis $\mathcal{F}_\wedge^H$, ou : pour toute partie A non vide de T , on a $H'(\bigwedge A) = \bigwedge H'(A)$.

Le critère suivant illustre cette remarque :

CRITÈRE 10-6. Pour un treillis T distributif à $\vee$ continu, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $Q'_\omega = Q' \cup \{\omega\}$ est stable pour $\bigwedge$ (ou, ce qui revient au même, pour tout $z \in T$, $\varphi(z)$ est copremier faible ou égal à ω).
- b) La régularisée scs H' de H est une érosion de T dans le treillis $\mathcal{F}_\wedge^H$.

Comme la condition relative au plus grand élément ($H'(\omega) = H(\omega)$) est toujours réalisée, et que H' est scs par définition, H' érodera T dans $\mathcal{F}_\wedge^H$ si et seulement si, pour $x, y \in T$, on a

$$H'(x) \cap H'(y) = H'(x \wedge y)$$

Or cette relation équivaut elle-même à l'équivalence :

$$x, y \in \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}} \Leftrightarrow x \wedge y \in \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$$

qui est satisfaite, pour x, y, z quelconques dans T , si et seulement si pour tout $z \in T$:

$$\text{— ou bien } \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}} = \emptyset$$

— ou bien $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est un filtroïde.

Dans le premier cas, on a $\varphi(z) = (\omega)$. Dans le second, s'agissant d'un filtroïde fermé, on a nécessairement :

$$\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}} = M_{\varphi(z)}$$

puisque $\varphi(z)$ est, par définition, l'Inf de ce filtroïde. Mais cela équivaut à $\varphi(z) \in \overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$, donc à $\varphi(z) \in Q'$ (critère 10-5, condition b)).

On a ainsi montré que la condition b) entraîne la condition a). Inversement, supposons Q'_ω stable pour $\wedge$, et soit $z \in T$.

- Si $\varphi(z) \neq \omega$, on a $\varphi(z) \in Q'$, donc (d'après le critère 10-5) :

$$\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}} = M_{\varphi(z)}$$

et $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est un filtroïde.

- Si $\varphi(z) = \omega$, $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est vide ou égal à $\{\omega\} = M_\omega$. mais, dans ce dernier cas, $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est encore un filtroïde. Donc, dans tous les cas, $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est vide ou est un filtroïde. D'après ce qui précède, cela achève la démonstration.

Le corollaire suivant, établi en cours de démonstration, présente ces mêmes conditions sous forme plus analytique.

COROLLAIRE. Avec les mêmes notations, les conditions du théorème équivalent aussi à la condition suivante :

- c) Pour tout $z \in T$, $\overline{\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{M_z}}$ est vide ou est un filtroïde.

Exemple : Treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace E localement compact.

On désignera par $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \emptyset$ la classe des fermés non vides de E . Ce n'est pas un filtroïde. On note bien que, si E n'est pas compact, alors $\mathcal{F}'$ n'est pas fermé dans $\mathcal{F}$, et son adhérence est $\mathcal{F}$ lui-même. Par contre, si E est compact, et non pas seulement localement compact, $\mathcal{F}'$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{F}$.

On trouve facilement les expressions de $\mathcal{C} \hat{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\mathcal{M}_F}$ et de son adhérence dans $\mathcal{F}$, pour un $F \in \mathcal{F}$, en distinguant les 3 cas de figures habituels : $F = \emptyset$, F est un atome $\{x\}$ ou $\text{Card } F \geq 2$:

F	$\mathcal{CS} \wedge \mathcal{CM}_F$	$\overline{\mathcal{CS} \wedge \mathcal{CM}_F}$
$\emptyset$	$\mathcal{F}'$	$\begin{cases} \mathcal{F} \text{ si } E \text{ n'est pas compact} \\ \mathcal{F}' \text{ si } E \text{ est compact} \end{cases}$
atome $\{x\}$	$\mathcal{M}_{\{x\}}$	$\mathcal{M}_{\{x\}}$
$\text{Card } F \geq 2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Les valeurs correspondantes de la fermeture φ sont, respectivement $\emptyset$, $\{x\}$ et E : cette fermeture sélectionne les atomes. Mais, $\mathcal{F}'$ n'étant pas un filtroïde, les conditions du théorème précédent ne sont vérifiées par le treillis $\mathcal{F}(E)$ que dans le cas où l'espace E , localement compact, n'est pas compact. Elles sont en défaut dans le cas d'un espace compact.

Cette circonstance inattendue est liée au comportement différent que présente l'application H selon que l'élément minimum 0 est, ou non, un point isolé dans le treillis T : si 0 est un point isolé, H est scs en $x = 0$. En effet, $\{0\} = M^0$ est ouvert, par définition d'un point isolé, soit $0 \in \overset{0}{M}^0$ et donc $0 \in \overset{0}{\Gamma}_S(0)$. On a par suite $H'(0) = H(0) = \emptyset$.

Au contraire, si 0 n'est pas isolé dans T , $0 \in \overset{0}{M}^x$ entraîne $0 < x$ strictement, et donc $0 \in H(x)$, d'où résulte cette fois $H'(0) = \{0\}$, avec toujours $H(0) = \emptyset$. En résumé :

$$H'(0) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \text{ est isolé dans } T \\ \{0\} & \text{si } 0 \text{ n'est pas isolé} \end{cases} ; \quad H(0) = \emptyset \text{ dans tous les cas}$$

Le difficulté provient de ce que la fermeture φ peut très bien vérifier $\varphi(0) = 0$ même dans le cas où 0 est isolé et n'est donc pas copremier faible. C'est justement ce qui se produit pour le treillis $\mathcal{F}(E)$ lorsque E est compact.

Si au lieu du treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace localement compact E nous considérons le treillis des fonctions scs sur ce même espace E , la difficulté mentionnée ci-dessus disparaît. Dans ce treillis, en effet, l'élément 0 (c'est-à-dire la fonction constante, égale à $-\infty$ en tout $x \in E$) n'est jamais un point isolé, même si l'espace E est compact. Donc, le treillis des fonctions scs vérifie toujours les conditions du théorème.

Comme la difficulté, dans le cas des treillis des fermés d'un espace E compact, provient du fait que l'élément minimum 0 , isolé dans T , n'est pas

copremier faible, nous allons procéder à une opération artificielle, mais simple, qui fera de 0 un élément copremier dans un nouveau treillis T_2 contenant T comme quasi-sous-treillis.

Prolongement vers le bas d'un treillis T

Soit T notre treillis initial, distributif et à $\vee$ continu, et T_1 un treillis totalement ordonné de type continu (par exemple, isomorphe au treillis $\overline{\mathbb{R}}$), donc, lui aussi, distributif et à $\vee$ continu, et même monoséparé. Nous affectons de l'indice 1 les éléments se rapportant au treillis T_1 (0_1 est son élément minimum, M_1^x les minorants dans T_1 de $x \in T_1$, de même Q_1, Q'_1, H_1, H'_1 etc.). Nous posons $T_2 = T_1 \cup T$, et $x \leq y$ dans T_2 si :

$$\begin{aligned} x \in T_1 \quad \text{et} \quad y \in T, \text{ soit symboliquement } T_1 \leq T \\ x, y \in T_1 \quad \text{et} \quad x \leq y \text{ dans } T_1 \\ x, y \in T \quad \text{et} \quad x \leq y \text{ dans } T. \end{aligned}$$

Il est immédiat que T_2 est encore un treillis. Mais l'élément $0 \in T$ devient copremier dans T_2 . Il est même copremier fort, le premier fort qui lui est associé dans T_2 coïncidant avec l'élément maximum ω_1 de T_1 . Ces deux éléments, 0 et ω_1 , appartiennent d'ailleurs aussi à l'échelle du treillis T_2 .

Comme T_1 est totalement ordonné, tous ses éléments, sauf 0_1 , sont co-premiers. Comme il est de type continu, 0_1 n'est pas isolé dans T_1 , et appartient donc à Q'_1 . On a donc simplement $Q'_1 = T_1$, et, dans le treillis T_2 :

$$Q'_2 = T_1 \cup \{0\} \cup Q'$$

On aura donc $0 \in Q'_2$, même si 0 n'est pas copremier faible dans T ;

Il est alors évident que la condition a) du critère 10-6 sera vérifiée par le treillis T_2 si et seulement si l'ensemble

$$\tilde{Q}' = Q' \cup \{0\} \cup \{\omega\}$$

est stable pour $\wedge$ dans le treillis T . Cette condition équivaut à $B_\varphi \subset Q' \cup \{0\} \cup \{\omega\}$. Comme on a toujours $Q' \subset B_\varphi$, cela signifie soit $B_\varphi = \tilde{Q}'$, soit, si d'aventure $0 \notin B_\varphi$, $B_\varphi = Q'_\omega = Q' \cup \{\omega\}$. Dans tous les cas, cela équivaut à dire que, pour tout $z \in T$, $\varphi(z)$ est copremier faible, égal à 0 ou égal à ω .

L'application H_2 , sur le treillis T_2 , vérifie :

$$\left| \begin{array}{l} H_2(x) = T_1 \cup \{0\} \cup H(x) = T_1 \cup H_0(x) \quad \text{pour } x \in T \\ H_2(x) = M_1^x \quad \text{pour } x \in T_1, x \neq 0_1 \\ H_2(x) = \emptyset \quad \text{si } x = 0_2 \text{ (élément identifié à } 0_1) \end{array} \right.$$

et sa régularisée scs, H'_2 , de son côté, est donnée par :

$$\begin{cases} H'_2(x) = T_1 \cup H'(x) \cup \{0\}, & x \in T \\ H'_2(x) = H_1(x) \cup \{0_1\} = M_1^x, & x \in T_1 \end{cases}$$

puisque 0_1 n'est pas isolé dans T_1 . Il est alors immédiat que la condition b) du critère 10-6 est satisfaite si et seulement si l'application $H'_0 = H' \cup \{0\}$ est une érosion de T dans $\mathcal{F}_\Lambda^H$.

Nous obtenons ainsi un nouveau critère :

CRITÈRE 10-7. Pour un treillis T distributif à $\vee$ continu, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\tilde{Q}' = Q' \cup \{0\} \cup \{\omega\}$ est stable pour $\wedge$, ou, ce qui revient au même, pour tout $z \in T$, $\varphi(z)$ est copremier faible, nul, ou égal à ω .
- b) L'application $H'_0 = H' \cup \{0\}$ est une érosion de T dans le treillis $\mathcal{F}_\Lambda^H$.

Cette fois, ces conditions sont vérifiées par le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace localement compact, même si l'espace E est, de plus, compact.

THÉORÈME 10-5. Pour un treillis T , distributif et à $\vee$ continu, les trois conditions suivantes sont équivalentes, et entraînent la condition de l'antifiltroïde ouvert :

- a) L'application $H_0 = H \cup \{0\}$ est une érosion de T dans $\mathcal{F}_\Lambda^H$
- b) $\tilde{Q} = Q \cup \{0, \omega\}$ est fermé et stable pour $\wedge$ dans T
- c) Pour tout $z \in T$, $\varphi(z)$ est nul, égal à ω ou copremier.

1/ Montrons d'abord que chacune de ces trois conditions entraîne la propriété de l'antifiltroïde ouvert.

- Pour la condition a), on note que si H_0 est une érosion, c'est aussi une application scs, puisque T est muni de sa topologie scs maximale (théorème 4-3). Or, on a déjà vu que cela équivaut à dire que l'application H elle-même est scs en tout $x \neq 0$ dans T . Le critère 10-2 permet donc de conclure.

- Si b) est vrai, l'ensemble $\tilde{Q} = Q_0 \cup \{\omega\}$ est fermé. Si $\omega \in Q$, on a $\tilde{Q} = Q_0$ et Q_0 est fermé. Si $\omega \notin Q$, on a aussi $\omega \notin \tilde{Q}$ (corollaire 2 du critère 10-5, et théorème 10-4). Sans nuire à la généralité, on peut supposer $\omega \neq 0$, le théorème devenant trivialement vrai pour un treillis réduit à un point unique. Alors ω n'appartient pas, non plus, au fermé $\tilde{Q} \cup \{0\} = \tilde{Q}_0$. Or, l'espace T

étant compact, ce fermé (donc compact) $\bar{Q}_0$ admet alors un voisinage compact ne contenant pas ω . Dès lors, si $\tilde{Q} = Q_0 \cup \{\omega\}$ est fermé, Q_0 est nécessairement fermé lui aussi. Le théorème 10-2 montre alors que la condition de l'anti-filtroïde ouvert est bien vérifiée.

• Enfin, pour ce qui concerne la condition c), partons de la relation (v) établie ci-dessus :

$$(v) \quad \hat{S} \mathcal{C}M_z = \hat{S} \mathcal{C}M_{\varphi(z)} \quad (z \in T)$$

Soit alors $z \neq 0$ dans T . Comme $\varphi(z)$ majore z , on a aussi $\varphi(z) \neq 0$. D'après la condition c), $\varphi(z)$ est donc copremier ou égal à ω .

Si $\varphi(z)$ est copremier, la relation (v) devient :

$$\hat{S} \mathcal{C}M_z = \mathcal{C}M_{\varphi(z)}$$

et montre que l'antifiltroïde $\hat{S} \mathcal{C}M_z$ est ouvert. Si $\varphi(z) = \omega$, et si de plus ω n'est pas copremier, la relation

$$\hat{S} \mathcal{C}M_\omega = \hat{S}(\dot{M}^\omega)$$

montre que l'on a $\hat{S} \mathcal{C}M_\omega = M^\omega = T$, donc est encore un ensemble ouvert. Car, d'après le critère 8-10, $\dot{M}^\omega$ n'est pas un antifiltroïde, et l'inclusion $\hat{S}(\dot{M}^\omega) \supset \dot{M}^\omega$ est stricte, d'où $\hat{S}(\dot{M}^\omega) = M^\omega$.

Ainsi, pour $z \neq 0$, dans tous les cas, $\hat{S} \mathcal{C}M_z$ est ouvert dans T , et la dernière condition du critère 10-2 permet de conclure.

2/ Il suffit donc de démontrer que les trois conditions de l'énoncé sont équivalentes dans le cas d'un treillis T vérifiant, de plus, la condition de l'antifiltroïde ouvert.

D'après le théorème 10-2, Q_0 est alors fermé dans T . Cela implique que $Q' = \bar{Q}$ est égal à Q ou à Q_0 , selon que 0 est, ou non, un point isolé. Mais, dans tous les cas, on a $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$, et cet ensemble est fermé dans T . De même, d'après le critère 10-2, H est scs en tout $x \neq 0$. La régularisée scs H' est donc égale à H , si 0 est isolé dans T (i.e. $H'(0) = H(0) = \emptyset$) ou à H_0 si 0 n'est pas isolé. Mais, dans tous les cas, on a $H'_0 = H_0$. En résumé, nous avons :

$$H_0 = H'_0 ; \quad \tilde{Q} = \tilde{Q}' \quad (\text{et cet ensemble est fermé}).$$

Supposons alors que $H_0 = H'_0$ soit une érosion de T dans $\mathcal{F}_\Lambda^H$. D'après le critère 10-7, il s'ensuit que $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$ est stable pour $\wedge$. Cet ensemble étant, de plus, fermé, on voit que la condition a) implique la condition b).

Si la condition b) est remplie, $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$ est alors stable pour $\wedge$, et cet ensemble contient donc le domaine d'invariance B_φ de la fermeture φ (puisque

ce domaine est la plus petite classe stable pour $\wedge$ et contenant Q'). Mais l'inclusion $B_\varphi \subset \tilde{Q}$ équivaut à la condition c). Ainsi, b) entraîne c).

Supposons enfin que la condition c) soit satisfaite. On a donc $B_\varphi \subset \tilde{Q} = \tilde{Q}'$. On a donc soit $B_\varphi = \tilde{Q}'$, soit $B_\varphi = Q' \cup \{\omega\}$. Or B_φ est stable pour $\wedge$, ainsi que $\{0\} \cup B_\varphi$ (si $0 \notin B_\varphi$). Dans les deux cas, donc, $\tilde{Q}'$ est stable pour $\wedge$. Le critère 10–7 montre alors que H'_0 est une érosion de T dans $\mathcal{F}_\wedge^H$. Comme H_0 est égal à H'_0 , la condition a) est donc satisfaite, ce qui achève la démonstration.

N.B. — Le treillis $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace topologique E compact ou localement compact vérifie toujours les conditions de ce théorème, puisque les éléments copremiers sont les atomes de $\mathcal{F}(E)$. Il en est de même pour le treillis de fonctions scs définies sur l'espace E . Ces deux treillis vérifient même une condition beaucoup plus forte que la condition b) du théorème, à savoir : tous les minorants d'un élément copremier sont nuls, ou copremiers, ou encore : Q_0 est permis pour $\wedge$, soit :

$$Q_0 = M^{Q_0}$$

COROLLAIRE. Dans le cas particulier d'un treillis T monoséparé, la condition b) du théorème est équivalente à la condition suivante, d'apparence plus faible :

$$b') \quad \tilde{Q} \text{ est stable pour } \wedge$$

En effet, la classe Q_0 , et donc aussi la classe $\tilde{Q}$ est toujours stable pour $\uparrow$ (corollaire du théorème 8–12). Si $\tilde{Q}$ est stable pour $\wedge$, cet ensemble appartient à la version duale de la classe $\mathcal{C}$ du lemme 4–2. Si T est monoséparé, donc à $\wedge$ continu, le théorème 4–2 montre que $\tilde{Q}$ est alors nécessairement fermé dans T , de sorte que la condition b') implique la condition b) du théorème.

Annexes

Annexe A

Les treillis des fermés de type $\bar{A}$

Le but de cette annexe est de fournir un exemple de treillis non coprimaire, et pourtant complètement distributif, et même complémenté (mais non totalement distributif).

Posons d'abord un lemme.

LEMME A. S'il existe une application C injective, ou surjective, d'un treillis T dans lui-même vérifiant la relation

$$(i) \quad y \leq C(x) \Leftrightarrow y \wedge x = 0$$

alors C est un complément sur T , et T est complètement distributif et complémenté.

La relation (i) entraîne l'équivalence

$$y \leq C(x) \Leftrightarrow x \leq C(y)$$

qui exprime que C est une dilatation de T dans le treillis dual T^* , l'érosion associée étant C elle-même, considérée cette fois comme une application de T^* dans T . On a donc, pour toute famille x_i dans T :

$$(ii) \quad C(\vee x_i) = \wedge C(x_i)$$

et de plus l'application

$$\varphi = C \circ C$$

est une fermeture sur T . Si C est surjective, le domaine d'invariance de la fermeture φ , toujours égal à l'espace image $C(T)$, est donc égal à T entier, et φ se réduit à l'identité. Si C est injective, la fermeture φ l'est également, et se réduit à l'identité (puisque $\varphi(x) = \varphi \varphi(x)$ entraîne alors $x = \varphi(x)$). Donc, dans les deux cas, la fermeture $\varphi = CC$ est l'application identique.

Pour un $x \in T$ donné, considérons l'application α_x de T dans lui-même définie en posant pour tout $y \in T$:

$$\alpha_x(y) = x \wedge y$$

Comme $CC = I$ (application identique), $\alpha_x(y) \leq z$ équivaut à $x \wedge y \leq CC(z)$, donc, d'après (i), à :

$$x \wedge y \wedge C(z) = 0$$

soit, toujours d'après (i), à :

$$y \leq C(x \wedge C(z))$$

Ainsi, l'application α_x est une dilatation, d'où la relation :

$$x \wedge (\vee y_i) = \vee (x \wedge y_i)$$

qui exprime que l'Inf distribue complètement le Sup. L'érosion b_x associée est définie par

$$b_x(z) = C(x \wedge C(z))$$

Utilisant alors les relations $CC=I$ et (ii), il vient :

$$\begin{aligned} C(x \wedge C(z)) &= C(CC(x) \wedge C(z)) \\ &= CC(C(x) \vee z) = C(x) \vee z \end{aligned}$$

Soit $b_x(z) = C(x) \vee z$. Remplaçant x par $C(x)$, et compte tenu de $CC=I$, on obtient ainsi l'équivalence

$$y \leq x \vee z \Leftrightarrow y \wedge C(x) \leq z$$

L'application $z \rightarrow x \vee z$ est donc une érosion, et on a :

$$x \vee (\wedge z_i) = \wedge (x \vee z_i)$$

Le Sup distribue donc complètement l'Inf, et le treillis T est ainsi complètement distributif.

Partant de la relation (ii), il vient :

$$C(\wedge x_i) = C(\wedge CC(x_i)) = CC(\vee C(x_i)) = \vee C(x_i)$$

On a donc

$$(iii) \quad C(\wedge x_i) = \vee C(x_i)$$

Les relations (ii), (iii) et $CC=I$ montrent ainsi que C est une anamorphose (isomorphisme pour la structure de treillis) du treillis T sur son dual T^* .

Enfin, la relation $x = CC(x)$ (donc $\leq$) entraîne, d'après (i) :

$$(iv) \quad x \wedge C(x) = 0$$

Dans l'isomorphisme C de T sur T^* , le plus petit élément 0 devient le plus grand élément ω , soit $C(0) = \omega$. Comme, d'autre part, la relation (ii)

donne $C(x \wedge C(x)) = C(x) \vee CC(x) = C(x) \vee x$, en appliquant C aux deux membres de (iv), il vient

$$(v) \quad x \vee C(x) = \omega$$

Les relations (iv) et (v) montrent que C est bien une complémentation, d'ailleurs nécessairement unique (à cause de la distributivité).

|| **COROLLAIRE.** Un treillis complet simplement distributif et complémenté est complètement distributif.

Soit T un tel treillis. Notons $C(x)$ le complément (nécessairement unique) de $x \in T$. Les relations $x \wedge C(x) = 0$ et $x \vee C(x) = \omega$ expriment, aussi bien, que x est le complément de $C(x)$, soit $CC(x) = x$, et $CC = I$: l'application C est bijective.

Il reste à montrer que la relation (i) du théorème est satisfaite. Or $y \leq C(x)$ entraîne $x \wedge y = 0$, puisque l'on a déjà $x \wedge C(x) = 0$. Inversement, soit $y \in T$ tel que $x \wedge y = 0$: il reste à montrer que cela entraîne $y \leq C(x)$. Pour cela, posons

$$z = y \vee C(x)$$

Par distributivité, on trouve $x \wedge z = (x \wedge y) \vee (x \wedge C(x)) = 0 \vee 0 = 0$.

Mais $z \geq C(x)$ implique $x \vee z = \omega$. Donc z est l'unique complément de x , soit $z = C(x)$. D'après la définition de z , cela entraîne $y \leq C(x)$, et achève la démonstration.

Exemple : Le treillis des fermés du type $\bar{A}$

Soit E un espace muni d'une topologie quelconque (non nécessairement séparée), $\mathcal{F}$ la classe des fermés de E , $\mathcal{G}$ celle de ses ouverts. Ce sont des treillis complets, mais non complémentés. Mais la restriction à $\mathcal{F}$ de la complémentation $\bar{}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une anamorphose de $\mathcal{F}$ sur le treillis dual de $\mathcal{G}$, et réciproquement.

Désignons alors par $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ la classe des fermés A tels que $A = \bar{\bar{A}}$, et par $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ celle des ouverts B tels que $B = \bar{\bar{B}}$. On a aussi :

$$\mathcal{A} = \{\bar{G}, G \in \mathcal{G}\} ; \quad \mathcal{B} = \left\{ \bar{\bar{F}}, F \in \mathcal{F} \right\}$$

Pour toute famille A_i dans $\mathcal{A}$, on trouve :

$$\overline{\bigcup A_i} = \bigcup \bar{A_i} = \bigcup \bar{\bar{A_i}}$$

En tant qu'adhérence d'un ouvert, cet ensemble est encore dans $\mathcal{A}$, qui est donc une classe stable pour $\vee$ dans $\mathcal{F}$. Par suite, $\mathcal{A}$ est un treillis complet pour l'ordre induit (mais non un sous-treillis de $\mathcal{F}$), le Sup et l'Inf dans $\mathcal{A}$ étant donnés par :

$$\vee A_i = \overline{\bigcup A_i} ; \wedge A_i = \bigcap^0 A_i$$

De même, $\mathcal{B}$ est complètement réticulé pour l'ordre induit par $\mathcal{G}$, le Sup et l'Inf de $\mathcal{B}$ étant donnés par :

$$\vee B_i = \bigcup^0 B_i ; \wedge B_i = \bigcap^0 B_i$$

Montrons que $\mathcal{A}$ vérifie les conditions du théorème (il en sera de même pour $\mathcal{B}$, puisque $\mathcal{C}$ est manifestement une anamorphose du treillis $\mathcal{A}$ sur le dual du treillis $\mathcal{B}$).

Soient alors A, A' dans $\mathcal{A}$. On a, au sens du treillis $\mathcal{A}$:

$$A \wedge A' = \overline{\overline{A} \bigcap^0 \overline{A'}}$$

et par suite $A \wedge A' = \emptyset$ équivaut à $\overline{A} \bigcap^0 \overline{A'} = \emptyset$ dans $\mathcal{P}(E)$, donc à $\overline{A} \subset \mathcal{C} \overline{A'}$. Comme $\mathcal{C} \overline{A'}$ est fermé, cela équivaut encore à $\overline{A} \subset \overline{\mathcal{C} \overline{A'}}$. Comme, par définition, $A = \overline{\overline{A}}$, on a ainsi l'équivalence

$$A \wedge A' = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \overline{\mathcal{C} \overline{A'}} \in \mathcal{A}$$

Si donc nous posons

$$C(A) = \mathcal{C} \overline{A} = \overline{A^c}$$

cette application du treillis $\mathcal{A}$ dans lui-même vérifie la condition (i) du théorème.

De plus, on a $CC(A) = \overline{\mathcal{C} \overline{\mathcal{C} \overline{A}}} = \overline{\overline{A}} = A$, de sorte que cette application C est bijective.

Ainsi, le treillis $\mathcal{A}$ est complètement distributif et complémenté, pour le complément $C(A) = \overline{A^c}$.

N.B. — Il est possible, mais assez ingrat, de vérifier directement ces propriétés, voir [12].

Que le treillis des fermés de type $\overline{A}$ ne soit coprimaire que dans le cas où la topologie de E est la topologie discrète résulte du théorème suivant que nous allons maintenant établir. Ce théorème exprime que tout treillis coprimaire et complémenté est identifiable à un treillis du type $\mathcal{P}(E)$.

THÉOREME A. Pour un treillis T , les trois énoncés suivants sont équivalents :

- a) T est coprimaire et complémenté
- b) T est atomique et fortement coprimaire
- c) T est isomorphe à un treillis $\mathcal{P}(E)$
- d) T est isomorphe au treillis $\mathcal{P}(Q)$.

Supposons T coprimaire et complémenté, et soit $C(x)$ le complément de chaque $x \in T$ (nécessairement unique, puisque T est distributif, d'après le théorème 8-11). Soit $q \in Q$ copremier dans T et $x \in \dot{M}^q$ un minorant strict de q . Comme $x \vee C(x) = \omega$, il vient, compte tenu de la distributivité de T et de $x < q$:

$$q = (x \vee C(x)) \wedge q = (x \wedge q) \vee (C(x) \wedge q) = x \vee (C(x) \wedge q)$$

Mais $\dot{M}^q$ est un antifiltroïde (critère 8-10). Comme $x \in \dot{M}^q$, l'égalité ci-dessus entraîne donc $C(x) \wedge q = q$, soit $C(x) \geq q$. Mais, $C(x)$ étant le complément de x , cette inégalité entraîne $x \wedge q = 0$. Or $x \wedge q$ est égal à x (car $x < q$). On a donc $x = 0$, c'est-à-dire $\dot{M}^q = \{0, q\}$: les éléments copremiers sont des atomes, et le treillis coprimaire T est atomique.

Maintenant, T étant coprimaire, pour tout $y \in T$, la relation $y \vee C(y) = \omega$ donne $Q \cap M^{y \vee C(y)} = Q \cap (M^y \cup M^{C(y)}) = Q$, et de même $y \wedge C(y) = 0$ donne $Q \cap M^y \cap M^{C(y)} = \emptyset$. On a donc

$$Q \cap M^{C(y)} = Q \cap \complement M^y$$

Dès lors, $z \leq C(y)$, i.e. $M^z \subset M^{C(y)}$ équivaut à $Q \cap M^z \subset Q \cap \complement M^y$, soit encore à

$$M^z \subset \complement M_{Q \cap M^y}$$

On a donc, en fait, l'égalité $M^{C(y)} = \complement M_{Q \cap M^y}$. Prenons, comme élément y , un copremier $q \in Q$. On vient de voir que q est un atome, donc $Q \cap M^q = \{q\}$. Il vient donc :

$$M^{C(q)} = \complement M_q$$

Cela entraîne $C(q) = \vee \complement M_q = \alpha(q)$, et $M^{\alpha(q)} = \complement M_q$: l'élément q est copremier fort, et T est fortement coprimaire. Donc, la condition a) entraîne la condition b).

Supposons maintenant que la condition b) soit remplie. D'après le théorème 9-6, le treillis T est monoséparé, et la dilatation T vérifie :

$$\Gamma(x) = M^{Q_f} \cap M^x$$

où Q_f représente la classe des copremiers forts. Mais, le treillis T étant atomique, on a aussi $x = \vee (Q_a \cap M^x)$, où Q_a est la classe des atomes de T . D'après les propriétés de la dilatation Γ , cela implique :

$$\Gamma(x) \subset M^{Q_a} \cap M^x = (Q_a \cap M^x) \cup \{0\}$$

On en déduit aussitôt $Q_f \cap M^x \subset Q_a \cap M^x$: les copremiers forts sont tous des atomes. Inversement, si $a \in Q_a$ est un atome, cet élément n'a pas d'autres minorants non nuls que lui-même, et on a donc $a \in Q_f$ puisque le treillis est fortement coprimaire. Ainsi $Q_a = Q_f$.

Ainsi, à tout $x \in T$ est associée la partie $B = Q_f \cap M^x$ de Q_f . Inversement, pour toute partie $B \subset Q_f = Q_a$, on a $M^B = \{0\} \cup B$ et $M^B \cap Q_f = B$. Or, par définition, on a $Q_f \cap M^B = Q_f \cap M^{\vee B}$: $\vee B$ est donc l'unique élément $x \in T$ tel que l'on ait $B = Q_f \cap M^x$, et l'application $B \rightarrow \vee B$ est une bijection de $\mathcal{P}(Q_f)$ sur T . Comme, de plus, $B \subset B'$ dans $\mathcal{P}(Q_f)$ équivaut alors à $\vee B \leq \vee B'$ dans T , il s'agit même d'un isomorphisme de ces deux treillis. Donc, la condition b) entraîne la condition c) avec $E = Q_f$.

Enfin, tout treillis $\mathcal{P}(E)$ étant coprimaire et complémenté, la condition c) entraîne trivialement la condition a).

Ainsi les trois premières conditions sont équivalentes. On a vu que la première entraîne $Q = Q_a$, et la seconde $Q_f = Q_a$. Soit donc :

$$Q = Q_f = Q_a$$

et on a vu aussi que b) entraîne l'isomorphisme de T et de $\mathcal{P}(Q_f)$. Donc ces trois conditions entraînent la quatrième, et la réciproque (d) entraîne c)) est triviale.

Annexe B

Les treillis $\mathcal{F}(E)$ sont-ils toujours à $\vee$ continu ?

Il s'agit ici de trouver un exemple de treillis coprimaire qui ne soit pas COF à $\vee$ continu. Le résultat essentiel est fourni par le théorème suivant (on rappelle que, dans un espace topologique E séparé, les atomes $\{x\}$, $x \in E$ sont fermés dans E).

THÉOREME B. Soit $\mathcal{F}(E)$ le treillis des fermés d'un espace topologique séparé E . Alors le treillis $\mathcal{F}(E)$ est COF à $\vee$ continu si et seulement si l'espace topologique E est localement compact.

On sait déjà que la condition est suffisante. Il reste à montrer qu'elle est nécessaire. Supposons donc le treillis $\mathcal{F}(E)$ COF à $\vee$ continu. Dans ce treillis, donc, pour toute famille F_i filtrée par une base de filtre $\mathcal{B}$, la limite topologique supérieure coïncide avec la limite monotone supérieure (théorème 5-2), soit :

$$\overline{\lim} F_i = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{\bigcup_{i \in B} F_i}$$

où le symbole $\overline{\bigcup_{i \in B} F_i}$ représente l'adhérence, dans l'espace topologique E , de la réunion ensembliste $\bigcup_{i \in B} F_i$. Comme les atomes sont fermés, puisque E est supposé séparé, on peut appliquer cela à une famille d'atomes, soit $F_i = \{x_i\}$. Posant $x(B) = \{x_i, i \in B\}$, il vient donc, au sens du treillis $\mathcal{F}$:

$$\overline{\lim} \{x_i\} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{x(B)}$$

L'expression qui apparaît au second membre représente aussi la classe des valeurs d'adhérence, pour la topologie de E , de la famille filtrée x_i dans E . Nous la noterons $\text{Adh}(x_i)$. On a ainsi :

$$\overline{\lim} \{x_i\} = \text{Adh}(x_i)$$

Nous désignerons par E' le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ constitué des atomes $\{x\}$, $x \in E$, de sorte que l'application $x \rightarrow \{x\}$ de E dans E' est, manifestement, bijective. Nous allons montrer que cette application est bicontinue, d'une part, et, d'autre part, que E' est un sous-espace de $\mathcal{F}$ localement compact pour la topologie induite. Le théorème en résultera.

Soit alors x_i une famille filtrée dans E , convergeant dans E vers une limite $x \in E$. L'espace E étant séparé, cette limite est l'unique valeur d'adhérence de la famille x_i . D'après la relation (i), nous avons donc dans $\mathcal{F}$:

$$\overline{\lim} \{x_i\} = \{x\}$$

Les seules valeurs d'adhérence possibles dans $\mathcal{F}$ sont ainsi $\emptyset$ et $\{x\}$. Or $\emptyset$ ne peut pas être une valeur d'adhérence de la famille $\{x_i\}$ dans $\mathcal{F}$. Sinon, en effet, pour un filtre $\mathcal{B}'$ plus fin que $\mathcal{B}$, on aurait la convergence $\{x_{g'}\} \rightarrow \emptyset$ dans $\mathcal{F}$. mais on aurait toujours, dans E cette fois, $x_{g'} \rightarrow x$ et $\text{Adh}(x_{g'}) = \{x\}$. Or cela contredirait la relation (i). Donc, la famille $\{x_i\}$ n'a, dans $\mathcal{F}$, aucune autre valeur d'adhérence que $\{x\}$. Comme $\mathcal{F}$ est compact, cela entraîne $\{x_i\} \rightarrow \{x\}$ dans $\mathcal{F}$: l'application $x \rightarrow \{x\}$ de E dans $\mathcal{F}$ est continue.

Inversement, supposons maintenant que l'on ait $\{x_i\} \rightarrow \{x\}$ dans $\mathcal{F}$, et donc, d'après (i), $\text{Adh}(x_i) = \{x\}$ dans E . Supposons que x_i ne converge pas vers x dans E . Comme il n'y a pas, dans E , d'autre valeur d'adhérence que x , cela signifie qu'il existe un filtre $\mathcal{B}'$ plus fin que $\mathcal{B}$ tel que la famille correspondante, $x_{g'}$, soit sans valeur d'adhérence dans E . D'après la relation (i), cela entraîne l'hypothèse de départ. Donc x_i converge vers x dans E et l'application $\{x\} \rightarrow x$ est continue de E' dans E .

Il reste à montrer que E' est localement compact pour la topologie induite par $\mathcal{F}$. Posons :

$$\tilde{E}' = E' \cup \{\emptyset\}$$

Montrons que $\tilde{E}'$ est fermée, et donc compacte, dans $\mathcal{F}$. Il faut pour cela montrer que toute famille filtrée $\{x_i\}$ dans E' convergeant dans $\mathcal{F}$ a pour limite un atome $\{x\} \in E'$ ou le fermé vide $\emptyset$.

Supposons donc $\{x_i\} \rightarrow F$ dans $\mathcal{F}$, avec $F \neq \emptyset$. On a, dans E , $\text{Adh}(x_i) = F$. Comme F n'est pas vide, soit $y \in F$ une valeur d'adhérence de x_i dans E . D'après la continuité de l'application $x \rightarrow \{x\}$, $\{y\}$ est donc valeur d'adhérence pour $\{x_i\}$ dans $\mathcal{F}$: mais cela implique $F = \{y\}$, puisque $\{x_i\}$ converge vers F .

Donc $\tilde{E}'$ est une partie compacte de $\mathcal{F}$, et $E' = \tilde{E}' \setminus \{\emptyset\}$ est donc localement compact, ce qui achève la démonstration.

N.B. — Comme le treillis $\mathcal{F}(E)$ est atomique et distributif, donc coprimaire, dès que la topologie de E est séparée, on obtient des exemples de treillis coprimaires qui ne sont pas COF à $\vee$ continu dès que E n'est plus localement compact. On peut, par exemple, prendre pour E le sous-espace de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ constitué de points, de coordonnées rationnelles.

Il se pourrait, peut-être, pour E non localement compact, que $\mathcal{F}(E)$ soit cependant COF pour une autre topologie que la topologie $\mathbb{C}M^I - \mathbb{C}M_A$ (pour cette dernière, on peut montrer que c'est impossible). Cela me paraît cependant peu plausible, et je conjecturerais volontiers qu'il n'en est rien. Mais je n'ai pas de démonstration.

Références

- [1] Armstrong M. (ed.) (1989). *Geostatistics*, Proc. 3rd International Geostatistics Congress, Avignon, 5–9 Sept. 1988, Kluwer, Dordrecht, Holland.
- [2] Binkhoff G. (1983). *Lattice theory*, 3rd ed., Ann. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 25.
- [3] Bourbaki N. (1965). *Eléments de mathématique, Topologie générale*, Hermann, Paris.
- [4] Matheron G. (1988). Dilations on topological spaces. In [7], Chap. 3.
- [5] Matheron G. (1988). Filters and lattices. In [7], Chap. 6.
- [6] Neveu J. (1964). *Bases mathématiques du calcul de probabilités*, Masson, Paris.
- [7] Serra J. (ed.) (1988). *Image analysis and mathematical morphology, Vol. 2 : Theoretical Advances*, Academic Press, London.
- [8] Serra J. (1988). Mathematical morphology for complete lattices. In [7], Chap. 1.
- [9] Matheron G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, London.
- [10] Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., Scott D.S. (1980). *A compendium of Continuous Lattices*, Springer, Berlin.
- [11] Serra J. (1992). Anamorphoses and function lattices. In E.R. Dougherty (ed.), *Mathematical morphology in image processing*, Marcel Dekker, N.Y., Chap. 13.
- [12] Heijmans H.J.A.M. (1994). *Morphological image operators*, Academic Press, London.