ECOLE DES MINES DE PARIS
CENTRE de MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE FONTAINEBLEAU
N - 178

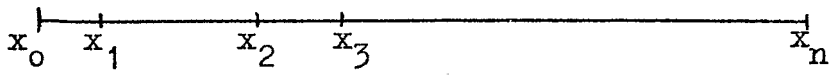
NOTE GEOSTATISTIQUE N° 106

EXERCICES SUR LE KRIGEAGE UNIVERSEL

En liaison avec certains problèmes méthodologiques posés par la mise au point des techniques d'application du krigeage universel, j'ai été amené à résoudre explicitement quelques cas de figure relatifs à l'espace à une dimension. Ils concernent d'une part l'estimation optimale de la dérive, dans le cas discret ou le cas continu et pour différents variogrammes sous-jacents ; de l'autre, le variogramme des résidus, lorsque l'on utilise l'estimateur optimal pour un variogramme linéaire, mais que le vrai variogramme sous-jacent n'est pas linéaire.

1 - ESTIMATION OPTIMALE D'UNE DERIVE LINEAIRE OU QUADRATIQUE

1-1 Variogramme linéaire, maille discrète non régulière.



Soient $x_o, \ldots x_n$ (n+1) points alignés à maille quelconque. Cherchons l'estimateur optimal d'une dérive $a_1x + a_2x^2$ lorsque le variogramme est $\gamma(h) = |h|$.

a/ Introduisons les 3 mesures suivantes :

$\nu_o(dx)$: poids 1 en x_n et 1 en x_o

$\nu_1(dx)$: poids 1 en x_n, - 1 en x_o

$\nu_2(dx)$: poids p_i en x_i avec $p_o = \frac{x_1 - x_o}{2}$, $p_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}$

et $p_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}$ $(0 < i < n)$

Elles vérifient pour $j = 0,1,2...n$:

$$(1-1)\begin{cases} \int \nu_o(dx)|x-x_j| = x_n - x_o \\ \int \nu_1(dx)|x-x_j| = x_o + x_n - 2\,x_j \\ \int \nu_2(dx)|x-x_j| = \Sigma\, p_i|x_i-x_j| = \frac{x_o^2+x_n^2}{2} - (x_o+x_n)\,x_j + x_j^2 \end{cases}$$

b/ Les estimateurs A_1 et A_2 de a_1 et a_2 sont donc de la forme

$$A_1 = \int \lambda_1(dx)\ Z(x) \quad , \quad A_2 = \int \lambda_2(dx)\ Z(x)$$

avec des mesures λ_1 et λ_2 combinaisons linéaires de ν_o, ν_1 et ν_2 .

Posons :

$$(1-2)\begin{cases} \lambda_1 = b_o\,\nu_o + b_1\,\nu_1 + b_2\,\nu_2 \\ \lambda_2 = c_o\,\nu_o + c_1\,\nu_1 + c_2\,\nu_2 \end{cases}$$

<u>Détermination de λ_1 et λ_2</u> - Partons de :

$$(1-3)\begin{cases} \int \nu_o = 2\ ,\ \int x\,\nu_o = x_n + x_o\ ,\ \int x^2\,\nu_o = x_n^2 + x_o^2 \\ \int \nu_1 = 0\ ,\ \int x\,\nu_1 = x_n - x_o\ ,\ \int x^2\,\nu_1 = x_n^2 - x_o^2 \\ \int \nu_2 = x_n - x_o,\ \int x\,\nu_2 = \frac{x_n^2 - x_o^2}{2}\ ,\ \int x^2\,\nu_2 = \Sigma\, p_i\,x_i^2 \end{cases}$$

Les conditions $\int \lambda_1 = \int x^2 \lambda_1 = 0$, $\int x \lambda_1 = 1$ donnent :

$$\begin{cases} 2 b_o + b_2 (x_n - x_o) = 0 \\ b_o(x_o + x_n) + b_1(x_n - x_o) + b_2 \dfrac{x_n^2 - x_o^2}{2} = 1 \\ b_o(x_n^2 + x_o^2) + b_1(x_n^2 - x_o^2) + b_2 \Sigma p_i x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de la première relation, la seconde donne :

$$b_1(x_n - x_o) = 1$$

D'où :

$$(1\text{-}4) \quad \begin{cases} b_o = -\dfrac{1}{2} \dfrac{x_n^2 - x_o^2}{(x_n - x_o)\left(\dfrac{x_n^2 + x_o^2}{2}\right) - \Sigma p_i x_i^2} \\ b_1 = \dfrac{1}{x_n - x_o} \\ b_2 = \dfrac{x_n + x_o}{(x_n - x_o)\left(\dfrac{x_n^2 + x_o^2}{2}\right) - \Sigma p_i x_i^2} \end{cases}$$

Passons au calcul des c_o, c_1, c_2. De :

$\int \lambda_2 = \int x \lambda_2 = 0$ et $\int x^2 \lambda_2 = 1$ résulte cette fois :

$$\begin{cases} 2 c_o + c_2(x_n - x_o) = 0 \\ c_o(x_n + x_o) + c_1(x_n^2 - x_o^2) + c_2 \dfrac{x_n^2 - x_o^2}{2} = 0 \\ c_o(x_n^2 + x_o^2) + c_1(x_n^2 - x_o^2) + c_2 \Sigma p_i x_i^2 = 1 \end{cases}$$

Compte tenu de la première relation, la seconde donne $c_1 = 0$, d'où :

$$(1\text{-}5)\quad \begin{cases} c_o = +\dfrac{1}{2}\,\dfrac{x_n - x_o}{(x_n-x_o)\left(\dfrac{x_n^2+x_o^2}{2}\right) - \Sigma\, p_i\, x_i^2} \\[2ex] c_1 = 0 \\[2ex] c_2 = -\dfrac{1}{(x_n-x_o)\left(\dfrac{x_n^2+x_o^2}{2}\right) - \Sigma\, p_i\, x_i^2} \end{cases} \quad \text{on a toujours } c_2 \leq 0$$

c/ <u>Expression des estimateurs</u> - En notant $Y_i = Y(x_i)$, on trouve :

$$\begin{cases} A_1 = b_o(Y_o+Y_n) + b_1(Y_n-Y_o) + b_2\ \Sigma\, p_i\, Y_i \\ A_2 = c_o(Y_o+Y_n) + c_2\ \Sigma\, p_i\, Y_i \end{cases}$$

d/ <u>Matrice des covariances</u> - Explicitons l'opération :

$$\int \lambda\ |x-x_j|$$

pour λ_1 et λ_2. On trouve :

$$\begin{cases} -\int \lambda_1 |x-x_j| = -\,b_o(x_n-x_o) - b_1(x_o+x_n) - b_2\,\dfrac{x_o^2+x_n^2}{2} \\ \qquad\qquad + x_j\left(2\,b_1 - b_2(x_o+x_n)\right) - b_2\,x_j^2 \\[2ex] -\int \lambda_2 |x-x_j| = -\,c_o(x_n-x_o) - c_2\,\dfrac{x_o^2+x_n^2}{2} - c_2(x_o+x_n)\,x_j - c_2 x_j^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \mu_{11} = 2\, b_1 + b_2(x_o+x_n) \\ \mu_{12} = \mu_{21} = -\, b_2 = -\, c_2(x_o+x_n) \\ \mu_{22} = c_2 \end{cases}$$

e/ <u>Choix de l'origine</u> : prendre comme origine le point $\frac{x_o+x_n}{2}$, ce qui revient à faire $x_o + x_n = 0$. On a alors $b_o = b_2 = 0$ et :

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1}{x_n-x_o}\,(Y_n - Y_o) \\ A_2 = \dfrac{+\,\dfrac{(x_n-x_o)}{2}\,(Y_o + Y_n) - \Sigma\, p_i\, Y_i}{-\,\Sigma\, p_i\, x_i^{\,2} + \dfrac{(x_n-x_o)}{2}\,(x_n^{\,2} + x_o^{\,2})} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \mu_{11} = \dfrac{2}{x_n-x_o} \\ \mu_{12} = \mu_{21} = 0 \\ \mu_{22} = \dfrac{1}{\dfrac{x_n-x_o}{2}\,(x_n^{\,2} + x_o^{\,2}) - \Sigma\, p_i\, x_i^{\,2}} \end{cases}$$

1-2 Variogramme linéaire avec effet de pépite, cas continu.

Il s'agit d'un effet de pépite représentable par un Dirac (puisque nous sommes dans le cas continu), autrement dit d'un

variogramme γ de la forme

$$\gamma(x-y) = |x-y| - C\,\delta_y\,(dx)$$

Les données expérimentales sont supposées occuper le segment (-R, R)

Les relations :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-R}^{R} \mathrm{ch}ax|x-y|\,dx = \frac{2}{a^2}\,\mathrm{ch}ay - \frac{2}{a^2}\,\mathrm{ch}aR + \frac{2}{a}\,(R\,e^{aR} - R\,e^{-aR}) \\ \displaystyle\int_{-R}^{R} \mathrm{sh}ax|x-y|\,dx = \frac{2}{a^2}\,\mathrm{sh}ay - \frac{2y}{a}\,\mathrm{ch}aR \end{cases}$$

montrent qu'en prenant :

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{2}{C}}}$$

les fonctions chax, shax et 1 (sur -R, +R) vérifient les relations intégrales suivantes pour tout $y \in (-R, +R)$:

$$(1\text{-}6)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-R}^{R} \mathrm{ch}ax\,\gamma(x-y) = C^{ste} \\ \displaystyle\int_{-R}^{R} \mathrm{sh}ax\,\gamma(x-y) = -\frac{2\,\mathrm{ch}aR}{a}\,y \\ \displaystyle\int_{-R}^{R} \gamma(x-y)\,dx = C^{ste} + R^2 + y^2 \end{cases}$$

On calcule ensuite facilement les intégrales ci-dessous :

$$
(1\text{-}7)\quad \begin{cases}
\displaystyle\int_{-R}^{R} \operatorname{ch} ax \, dx = 2 \, \frac{\operatorname{sh} aR}{a} \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x \operatorname{ch} ax \, dx = 0 \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x^2 \operatorname{ch} ax \, dx = \frac{4 + 2a^2R^2}{a^3} \operatorname{sh} aR - \frac{4R}{a^2} \operatorname{ch} aR \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} \operatorname{sh} ax \, dx = 0 \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x \operatorname{sh} ax \, dx =: \frac{2R}{a} \operatorname{ch} aR - \frac{2 \operatorname{sh} aR}{a^2} \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x^2 \operatorname{sh} ax \, dx = 0 \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} dx = 2R \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x \, dx = 0 \\[2ex]
\displaystyle\int_{-R}^{R} x^2 \, dx = \frac{2}{3} R^3
\end{cases}
$$

<u>Estimation d'une dérive linéaire</u>

L'estimateur optimal A_1 de a_1 est :

$$A_1 = \int_{-R}^{R} \lambda(dx) \; Z(x)$$

avec une mesure λ vérifiant :

$$\begin{cases} -\int_{-R}^{R} \lambda(dx)\ \gamma(x-y) = \mu\ y + C \\ \int_{-R}^{R} \lambda(dx) = 1 \\ \int_{-R}^{R} x\ \lambda(dx) = 0 \end{cases}$$

Il résulte de (1-6) et (1-7) que cette mesure λ admet la densité :

$$\frac{\lambda(dx)}{dx} = \frac{\text{shax}}{2\,\frac{R}{a}\,\text{chaR} - \frac{2\ \text{shaR}}{a^2}}$$

et le paramètre $\mu = D^2(A_1)$ s'obtient par identification :

$$\mu = \frac{\frac{2}{a}\,\text{chaR}}{2\,\frac{R}{a}\,\text{chaR} - \frac{2\ \text{shaR}}{a^2}}$$

<u>Dérive quadratique</u>

Les estimateurs A_1 et A_2 sont de la forme :

$$\begin{cases} A_1 = \int_{-R}^{R} \lambda_1(dx)\ Z(x) \\ A_2 = \int_{-R}^{R} \lambda_2(dx)\ Z(x) \end{cases}$$

On vérifie sans peine que la mesure λ_1 est identique à la mesure λ obtenue dans le cas d'une dérive linéaire (ce qui est à peu près évident par raison de symétrie et d'antisymétrie), d'où aussi $\mu_{11} = \mu$ et $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$.

Pour λ_2, on prendra une mesure de densité :

$$\frac{\lambda_2(dx)}{dx} = A\ \text{chax} + B\ \text{shax} + D$$

et on déterminera les 3 coefficients A,B,D par les conditions :

$$\int \lambda_2(dx) = \int x\ \lambda_2(dx) = 0 \quad , \int x^2\ \lambda_2(dx) = 1$$

On trouve

$$B = 0$$

(ce qui est évident par raison de symétrie) et :

$$\begin{cases} 2\ A\ \dfrac{\text{sha}R}{a} + 2\ R\ D = 0 \\ A\left[\dfrac{4 + 2\ a^2R^2}{a^3}\ \text{sha}R - \dfrac{4R}{a^2}\ \text{cha}R\right] + \dfrac{2}{3}\ R^3D = 1 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{4\left(\dfrac{R^2}{3a} + \dfrac{1}{a^3}\right)\ \text{sha}R - \dfrac{4R}{a^2}\ \text{cha}R} \\ B = 0 \\ D = \dfrac{\dfrac{\text{sha}R}{aR}}{\dfrac{4R}{a^2}\ \text{cha}R - 4\left(\dfrac{R^2}{3a} + \dfrac{1}{a^3}\right)\text{sha}R} \end{cases}$$

Compte tenu de la dernière relation (1-6), la variance de A_2 est :

$$\mu_{22} = D$$

1-3 Variogramme linéaire avec effet de pépite, cas discret.

Comme on est dans le cas discret, il s'agit d'un effet de pépite fini (et non d'un Dirac). Autrement dit :

$$\begin{cases} \gamma(x-y) = |x-y| & \text{si } x \neq y \\ \gamma(x-y) = -C & \text{si } x = y \end{cases}$$

Supposons les données expérimentales connues aux n + 1 points x, d'abscisse

$$x_i = (i - \frac{n}{2})\, h$$

(origine au centre de gravité des données). Les relations :

$$\sum_{k=0}^{n} s^k = \frac{1-s^{n+1}}{1-s}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\, s^{k-1} = \frac{1-s^{n+1}}{(1-s)^2} - \frac{(n+1)s^n}{(1-s)} = \frac{1 - (n+1)s^n + n\, s^{n+1}}{(1-s)^2}$$

permettent le calcul suivant :

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha^i |i-j| = \sum_{i=0}^{j} (j-i)\, \alpha^i + \sum_{i=j}^{n} (i-j)\, \alpha^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{j} i\, \alpha^{j-i} + \sum_{k=0}^{n-j} k\, \alpha^{k+j} =$$

$$\alpha^{j-1} \frac{1 - (1+j)\alpha^{-j} + j\, \alpha^{-1-j}}{(1 - \frac{1}{\alpha})^2} + \alpha^{j+1} \frac{1 - (n+1-j)\alpha^{n-j} + (n-j)\alpha^{n+1-j}}{(1-\alpha)^2}$$

Soit, avec une constante C_n indépendante de j et qu'il n'est pas utile d'expliciter :

$$(1\text{-}8) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha^i |i-j| = \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}\, \alpha^j + \frac{1+\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\, j + C_n$$

Désignons par α et $\beta = 1/\alpha$ <u>les deux racines</u> de l'équation

$$\frac{2\,\alpha h}{(1-\alpha)^2} = C \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 2(1+\frac{h}{c})\,\alpha + 1 = 0$$

Si le variogramme γ est la somme d'un effet de pépite (fini) et d'un terme linéaire, soit :

$$\gamma(x_i - x_j) = |i-j|\,h - C\,\delta_{ij}$$

on aura d'après (1-8) et le choix de α et β :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \alpha^i\,\gamma(x_i-x_j) = j\,\dfrac{1+\alpha^{n+1}}{1+\alpha}\,h + C^{ste} \\[2ex] \sum_i \beta^i\,\gamma(x_i-x_j) = j\,\dfrac{1+\beta^{n+1}}{1+\alpha}\,h + C^{ste} \\[2ex] \sum_i \gamma(x_i-x_j) = (j-\frac{n}{2})^2\,h + C^{ste} \end{cases}$$

Pour obtenir des notations plus symétriques, posons :

$$A = \frac{\alpha^{1+n/2} + \alpha^{-n/2}}{1-\alpha} = -\frac{\beta^{1+n/2} + \beta^{-n/2}}{1-\beta}$$

et notons γ_{ij} au lieu de $\gamma(x_i-x_j)$, soit $\gamma_{ij} = |i-j|\,h - C\,\delta_{ij}$.
Les relations ci-dessus deviennent

$$(1\text{-}9) \qquad \begin{cases} \sum_i \alpha^{i-\frac{n}{2}} : \gamma_{ij} = A\,jh + C^{ste} \\[2ex] \sum_i \beta^{i-\frac{n}{2}}\,\gamma_{ij} = -A\,jh + C^{ste} \\[2ex] \sum_i \gamma_{ij} = (j-\frac{n}{2})^2\,h + C^{ste} \end{cases}$$

Pour former les estimateurs optimaux de la dérive, nous avons également besoin des résultats suivants :

$$
(1\text{-}10)\quad \begin{cases}
\sum_i \alpha^{i-\frac{n}{2}} = \sum_i \beta^{i-\frac{n}{2}} = \dfrac{\alpha^{-n/2} - \alpha^{1+n/2}}{1-\alpha} = \dfrac{\beta^{-n/2} - \beta^{1+n/2}}{1-\beta} = B \\[2ex]
\sum (i - \frac{n}{2})\, \alpha^{i-\frac{n}{2}} = -\sum (i - \frac{n}{2})\, \beta^{i-\frac{n}{2}} = \dfrac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\alpha^{-n/2} - \alpha^{n/2}\right) - \\[2ex]
\qquad - \dfrac{n}{2}\, \dfrac{\alpha^{1+n/2} - \alpha^{-n/2}}{1-\alpha} = C \\[2ex]
\sum (\frac{n}{2} - i)^2\, \alpha^{i-\frac{n}{2}} = \sum (\frac{n}{2} - i)^2\, \alpha^{i-\frac{n}{2}} = \dfrac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha)^3}\left(\alpha^{-n/2} - \alpha^{n/2}\right) - \\[2ex]
\qquad - \dfrac{n\alpha}{(1-\alpha)^2}\left(\alpha^{n/2} + \alpha^{-n/2}\right) - \dfrac{n^2}{4}\, \dfrac{\alpha^{1+\frac{n}{2}} - \alpha^{-n/2}}{1-\alpha} = D \\[2ex]
\sum 1 = n+1,\ \sum (i - \frac{n}{2}) = 0\ ,\ \sum (i - \frac{n}{2})^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{12}
\end{cases}
$$

<u>Dérive linéaire</u> - D'après (1-9), on prendra comme estimateur

$$A_1 = \sum_i \lambda_1^i \; Z_i$$

(avec $Z_i = Z(x_i) = Z\left((i - \frac{n}{2})h\right)$ et :

$$\lambda_1^i = \frac{\alpha^{i-n/2} - \beta^{i-n/2}}{b}$$

D'après (1-10), le coefficient b est :

$$b = 2\, C\, h$$

La variance μ_{11} s'en déduit en identifiant le terme en j h dans la relation

$$\sum_i \lambda_1^i \gamma_{ij} = \mu_{11} \left(j - \frac{n}{2}\right) h + C^{ste}$$

Soit, d'après (1-9) :

$$\mu_{11} = \frac{A}{C\,h}$$

<u>Dérive quadratique</u> - L'estimateur A_1 est le même que ci-dessus . Pour A_2, on doit prendre

$$A_2 = \sum_i \lambda_2^i Z_i$$

avec, d'après (1-9), des λ_2^i de la forme

$$\lambda_2^i = f\left(\alpha^{i-\frac{n}{2}} + \beta^{i-\frac{n}{2}}\right) + g$$

On détermine f et g en écrivant :

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_2^i = 2\,B\,f + (n+1)\,g = 0 \\ \sum \left(i - \frac{n}{2}\right)^2 h^2 \lambda_2^i = 2\,D\,h^2 f + \frac{n(n+1)(n+2)}{12}\,h^2 g = 1 \end{cases}$$

Soit

$$f = \frac{1}{2\,h^2\left(D - \frac{n(n+2)}{12}\,B\right)} \quad , \quad g = -\frac{2\,B}{n+1}\,f$$

Pour les <u>variances</u>, on trouve $\mu_{12} = 0$ et $\mu_{22} = g/h$

1-4 Filtrage d'une Rose des Vents.

Soit $s(d\alpha)$ une mesure positive sur le cercle unité (dans le cas d'une rose des vents, $s(d\alpha) = s(\pi+d\alpha)$ est symétrique par rapport à l'origine) et

$$s_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ni\alpha}\, s(d\alpha)$$

ses coefficients de Fourier. On considère la régularisée

$$f(\alpha) = \int_0^{2\pi} C(\alpha-\beta)\, s(d\beta) = 2\,\pi \sum s_n\, \overline{C}_n\, e^{ni\alpha}$$

de la mesure s par la fonction $C(\alpha) = \sum C_n e^{ni\alpha}$, et on mesure les valeurs de $f(\alpha)$ aux points α_j $(j = 0,1,\ldots K^{-1})$, par exemple $\alpha_j = \frac{2\pi j}{K}$. Toutefois, ces mesures f_j sont entachées d'erreurs aléatoires ε_j indépendantes les unes des autres, d'espérance nulle et admettant la même variance σ_ε^2 - soit :

$$f_j = f(\alpha_j) + \varepsilon_j$$

On se propose d'estimer non pas la mesure s elle-même (trop irrégulière), mais sa régularisée

$$S(\alpha) = \int_0^{2\pi} g(\alpha-\beta)\, s(d\beta) = 2\,\pi \sum \overline{g}_n\, s_n\, e^{ni\alpha}$$

par une fonction $g(\alpha) = \sum g_n e^{ni\alpha}$ choisie à l'avance. On admet (hypothèse évidemment capitale) que les régularisées $S(\alpha)$ et $f(\alpha)$ sont suffisamment "régulières" pour que l'on puisse les représenter avec une excellente précision par leurs $2\,N + 1$ premiers harmoniques :

$$S(\alpha) = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} \bar{g}_n \, s_n e^{ni\alpha} \quad , \quad f(\alpha) = 2\pi \sum_{-N}^{N} s_n \, \bar{c}_n \, e^{ni\alpha}$$

Dans ces conditions, $S(\alpha)$ est assimilable à une dérive, et le problème peut être résolu par les méthodes du Krigeage Universel.

Pour abréger les calculs, on suppose g_n et c_n <u>réels</u> (c'est-à-dire $c(\alpha)$ et $g(\alpha)$ paires)

Plaçons-nous d'abord en α donné. Il faut chercher un estimateur

$$S^*(\alpha) = \sum_j \lambda_j f_j$$

vérifiant la <u>condition d'universalité</u> :

$$E\big(S^*(\alpha)\big) = \sum_j \lambda_j f(\alpha_j) = \sum_{n=-N}^{N} 2\pi \, s_n \, g_n e^{ni\alpha}$$

quels que soient les s_n, ce qui s'écrit :

$$\sum_j \lambda_j e^{ni\alpha_j} = \frac{g_n}{c_n} e^{ni\alpha} \qquad (n = -N, \ldots +N)$$

et vérifiant la <u>condition d'optimalité</u> habituelle : la variance

$$D^2\big(S^*(\alpha)\big) = \sum_j \lambda_j^2 \, \sigma_\varepsilon^2$$

doit être minimale, compte tenu de la condition d'universalité.

D'où le système :

$$(D) \quad \begin{cases} \lambda_j = \sum_{m=0}^{N} (\mu_m \cos m\,\alpha_j + \nu_m \sin m\,\alpha_j) \\ \sum_j \lambda_j e^{ni\alpha_j} = g_n/c_n \, e^{ni\alpha} \end{cases}$$

Pour $\alpha_j = 2\pi \frac{j}{K}$, $j = 0,1,\ldots K-1$ $(K > 2N+1)$, ce système se résoud.

Portons, en effet, dans la seconde équation (D) l'expression de λ_j déduite de la première équation :

$$\sum_{j,m} (\mu_m \cos m\,\alpha_j + \nu_m \sin m\,\alpha_j)\, e^{ni\alpha_j} = g_n/c_n\, e^{ni\alpha}$$

Mais :

$$\begin{cases} \sum_j \cos m\,\alpha_j\, e^{in\alpha_j} = \frac{1}{2} K\,(\delta_{m,n} + \delta_{-m,n}) \\ \sum_j \sin m\,\alpha_j\, e^{in\alpha_j} = \frac{1}{2} i\,K\,(\delta_{m,n} - \delta_{-m,n}) \end{cases}$$

D'où

$$\mu_o = \frac{1}{K}\,\frac{g_o}{c_o}\ ,\quad \mu_n = \frac{2}{K}\,\frac{g_n}{c_n}\cos n\alpha\ ,\quad \nu_n = \frac{2}{K}\,\frac{g_n}{c_n}\sin n\alpha$$

(1) $$\lambda_j = \frac{1}{K}\,\frac{g_o}{c_o} + \frac{2}{K}\sum_{m=1}^{N}\frac{g_m}{c_m}\cos m(\alpha-\alpha_j)$$

L'estimateur $\sum \lambda_j f_j = S^*(\alpha)$, pour les valeurs (1) des λ_j, admet la variance :

$$D^2\,(S^*(\alpha)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_j \lambda_j^2 = \sigma_\varepsilon^2 \sum_j \sum_{m=0}^{N} \lambda_j\,(\mu_m \cos m\,\alpha_j + \nu_m \sin m\,\alpha_j) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \sum_m \frac{g_m}{c_m}\,(\mu_m \cos m\,\alpha + \nu_m \sin m\,\alpha) =$$

(2) $$D^2(S_\alpha^*) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{K}\left[\left(\frac{g_o}{c_o}\right)^2 + 2\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{g_m}{c_m}\right)^2\right]$$

Dans les applications, on n'estimera le plus souvent $S^*(\alpha)$

$$\lambda_j = \sum_{-N}^{+N} \tau_m \, e^{m i \alpha_j}$$

$$\sum_j \lambda_j \, e^{n i \alpha_j} = \frac{g_n}{c_n} e^{n i \alpha}$$

$$\sum_j \sum_{-N=m}^{+N} \tau_m \, e^{(m+n) i \alpha_j} = \frac{g_n}{c_n} e^{n i \alpha}$$

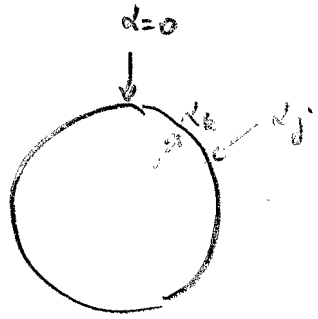
or $$\sum_j e^{(m+n) i \alpha_j} = \delta_{-m,n} \times K$$

$$\tau_{-n} = \frac{g_n}{c_n} e^{n i \alpha} \times \frac{1}{K}$$

$$\lambda_j = \sum_{-N}^{+N} \frac{g_n}{c_n} \cdot \frac{1}{K} \, e^{n i (\alpha - \alpha_j)}$$

$$= \frac{1}{K} \frac{g_0}{c_0} + \frac{2}{K} \sum_{1}^{N} \cos n(\alpha - \alpha_j) \cdot \frac{g_n}{c_n}$$

en $\alpha = 0$ $\quad \alpha_j = \frac{2\pi j}{K}$ on a donc

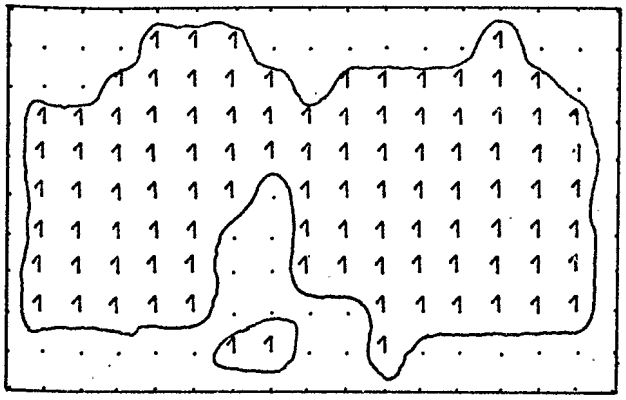


$$\lambda_j = \frac{1}{K} \frac{g_0}{c_0} + \frac{2}{K} \sum_{1}^{N} \frac{g_n}{c_n} \cdot \cos 2\pi \frac{n j}{K}$$

$$S_k^* = \sum \lambda_{j-k} f_j = \sum \lambda_j f_{j+k}$$

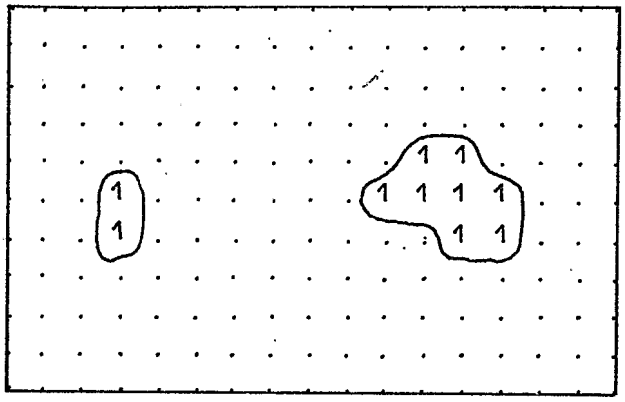
BREVET SUR LES LOGIQUES ITEREES DE l'ANALYSEUR DE TEXTURES.

- F I G U R E S -



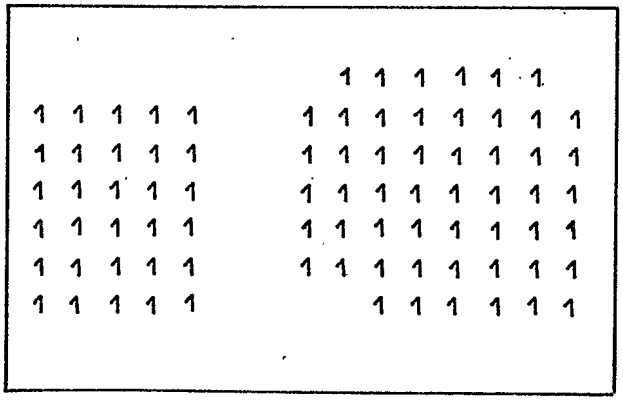
- Figure 1 -

A



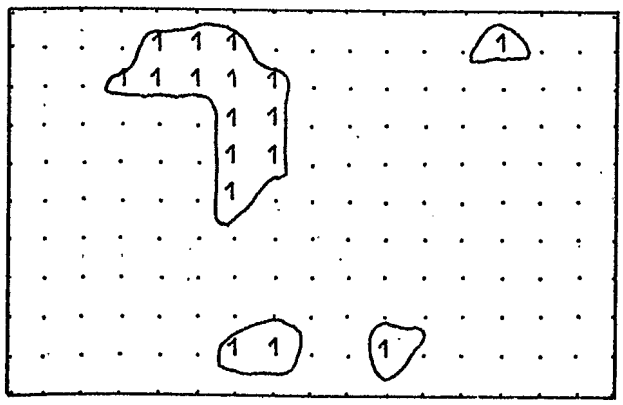
- Figure 2 -

$A \ominus \check{B}$



- Figure 3 -

$[A \ominus \check{B}] \oplus B$



- Figure 4 -

$A \cap [A \ominus \check{B}] \oplus B$

que pour les points $\alpha = \alpha_k = 2\pi \frac{k}{K}$ $(k = 0,1,\ldots K-1)$. En $\alpha = 0$:

$$(3) \quad \begin{cases} S_o^* = \sum \lambda_j f_j \\ \lambda_j = \frac{1}{K} \frac{g_o}{c_o} + \frac{2}{K} \sum_{m=1}^{N} \frac{g_m}{c_m} \cos 2\pi \frac{mj}{K} \end{cases}$$

En $\alpha = \alpha_k$, on a alors $S_k^* = \sum \lambda_{j-k} f_j = \sum \lambda_j f_{j+k}$ avec les mêmes λ_j.

Exemple de la rose des vents

Ici, $f(\alpha)$ représente la dérivée à droite dans la direction $\alpha + \frac{\pi}{2}$ du covariogramme géométrique $K(h)$. Elle est liée à la mesure s par la relation :

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \int_o^{2\pi} |\sin(\alpha-\beta)| \; s \; (d\beta)$$

On a donc ici

$$C_n = \frac{1}{4\pi} \int_o^{2\pi} |\sin \alpha| \, e^{-ni\alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_o^{\pi} \sin \alpha \cos n\alpha \, d\alpha = - \frac{1-(-1)^{n+1}}{2\pi(n^2-1)}$$

soit :

$$C_{2n+1} = 0 \quad , \quad C_{2n} = - \frac{1}{\pi(4n^2-1)}$$

Reste à choisir la fonction de pondération g. Comme la méthode ne peut marcher que si la régularisée $s * g$ est représentable avec une excellente précision par ses 2 N+1 premiers harmoniques, on doit choisir g de telle manière que la série $\sum s_n g_n$ converge

très rapidement (même si $\Sigma\, s_n$ est divergente, ce qui sera le cas général pour une mesure s quelconque). On peut, par exemple, choisir pour g la densité associée au mouvement brownien sur le cercle unité, soit :

$$g_n = \frac{1}{2\pi}\, e^{-an^2}$$

Plus précisément, d'ailleurs, puisqu'on ne peut pas séparer ici les points α et $\alpha+\pi$, on peut remplacer $g(\alpha)$ par $\frac{1}{2}\left(g(\alpha) + g(\alpha+\pi)\right)$ ce qui revient à prendre :

$$g_{2n} = \frac{1}{2\pi}\, e^{-4an^2} \quad , \quad g_{2n+1} = 0$$

La valeur S_o de la régularisée $g * s$ en $\alpha = 0$ admet alors, d'après (3), l'estimateur :

$$\begin{cases} S_o^* = \Sigma\, \lambda_j\, f_j \\ \lambda_j = \frac{1}{2K} - \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{N} (4\, n^2-1)\, e^{-4an^2} \end{cases}$$

La variance se déduit de (2) :

$$D^2(S_o^*) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{K}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (4\, n^2-1)^2\, e^{-8an^2}\right]$$

2 - LE VARIOGRAMME DES RESIDUS

Les calculs qui suivent ont pour objet de déterminer, dans certains cas de figure, l'espérance du variogramme des résidus lorsque l'on estime la dérive à l'aide d'un estimateur non optimal. Je prendrai, le plus souvent, comme estimateur celui qui est optimal pour un variogramme linéaire, et j'étudierai le variogramme des résidus ainsi construits pour différents types de variogrammes sous-jacents. Dans tous les cas, je suppose les données alignées. Elles constitueront, soit un segment continu (-R, +R), soit au contraire une maille discontinue régulière.

Remarque : Le variogramme biaisé $E(\gamma^*/\gamma)$ est toujours linéaire par rapport au variogramme sous-jacent γ, soit $E(\gamma^*/\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2) = \lambda\, E(\gamma^*/\gamma_1) + \mu\, E(\gamma^*/\gamma_2)$, de sorte que l'on peut superposer linéairement les résultats obtenus ci-dessous.

2-1 Formules générales pour le cas continu.

Ces formules figurent dans le Fascicule consacré au Krigeage Universel (formules (3-13), page 53), où elles sont données sans démonstration. Nous allons les réétablir ici, en conservant les mêmes notations. Seul le calcul du terme T_1 présente quelques difficultés. T_1 comporte 3 termes :

$$T_1 = S_1 + S_2 - S_3$$

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{2R-h} \displaystyle\int_{-R}^{R-h} h\, E_1(x_i h)\, dx \\[2ex] S_2 = \dfrac{3}{4R^2}\, \dfrac{1}{2R-h} \displaystyle\int_{-R}^{R-h} h(h+2x)[\gamma(R-x)+\gamma(R+X)-\gamma(R-x-h)-\gamma(R+x+h)]dx \\[2ex] S_3 = \dfrac{3}{4R^3}\, \dfrac{1}{2R-h} \displaystyle\int_{-R}^{R-h} h(h+2x)dx \int_{-R}^{R} [\gamma(x-y)-\gamma(x+h-y)]dy \end{cases}$$

Le calcul de S_1 est immédiat, et donne

$$S_1 = \frac{1}{2R-h}\, \frac{h}{R} \left[\int_h^{2R} \gamma(y)dy - \int_o^{2R-h} \gamma(y)dy \right]$$

Pour le terme S_2, on se ramène d'abord à

$$S_2 = \frac{3}{2R^2}\, \frac{1}{2R-h} \int_{-R}^{R-h} h(h+2x)[\gamma(R-x) + \gamma(R+x)]dx$$

(en transformant les 2 derniers termes par le changement de variable $x = -x'-h$), et il vient ensuite :

$$S_2 = \frac{3}{2R^2}\, \frac{1}{2R-h} \left[\int_h^{2R} (h^2+2Rh-2hy)\gamma(y)dy + \int_o^{2R-h} (h^2-2Rh+2hy)\gamma(y)dy \right]$$

Passons au terme S_3, et pour celà remarquons d'abord qu'en changeant y en $-y'$ et x en $-x'-h$, on a la relation

$$\int_{-R}^{R-h} h(h+2x)dx \int_{-R}^{R} \gamma(x+h-y)dy = - \int_{-R}^{R-h} h(h+2x)dx \int_{-R}^{R} \gamma(x-y)dy$$

D'où

$$S_3 = \frac{3}{2R^3} \; \frac{1}{2R-h} \int_{-R}^{R-h} h(h+2x)dx \int_{-R}^{R} \gamma(x-y)dy$$

Effectuons ensuite une intégration par partie sur l'intégrale :

$$I = \int_{-R}^{R-h} h(h+2x)dx \int_{-R}^{R} \gamma(x-y)dy = \int_{-R}^{R-h} h(h+2x) \int_{x-R}^{x+R} \gamma(z)dz =$$

$$= (h^2x+hx^2) \int_{x-R}^{x+R} \gamma(z)dz \Bigg|_{x=-R}^{x=R-h} - \int_{-R}^{R-h} (h^2x+hx^2)[\gamma(x+R)-\gamma(x-R)]dx$$

$$= \qquad B_1 \qquad - \qquad B_2$$

Evaluons d'abord le terme tout intégré, soit :

$$B_1 = hR(R-h) \int_{-h}^{2R-h} \quad - \quad hR(R-h) \int_{-2R}^{o}$$

$$B_1 = (hR^2-h^2R) \left[\int_{o}^{2R-h} \gamma(y)dy - \int_{h}^{2R} \gamma(y)dy \right]$$

Par changement de variable, le terme B_2 donne :

$$B_2 = \int_{-R}^{R-h} (h^2x+hx^2) \; \gamma(x+R)dx - \int_{-R}^{R-h} (h^2x+hx^2) \; \gamma(x-R)dx =$$

$$= \int_{o}^{2R-h} [(hR^2-h^2R)+ z(h^2-2hR) + hz^2] \; \gamma(z)dz -$$

$$- \int_{h}^{2R} [(hR^2+h^2R) - z(h^2+2hR) + hz^2] \; \gamma(z)dz$$

D'où :

$$I = B_1 - B_2 = - \int_0^{2R-h} [(h^2-2hR)z + hz^2]\ \gamma(z)dz +$$

$$+ \int_h^{2R} [2h^2R - (h^2+2hR)z + hz^2]\ \gamma(z)dz$$

et finalement :

$$S_3 = \frac{1}{2R-h}\ \frac{3}{2R^3} \left[\int_h^{2R} \left(2h^2R - (h^2+2hR)z + hz^2\right)\ \gamma(z)dz - \right.$$

$$- \int_0^{2R-h} \left((h^2-2hR)z + hz^2\right)\ \gamma(z)dz$$

D'où l'expression de $T_1 = S_1 + S_2 - S_3$:

$$(2\text{-}1) \quad \begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{2R-h} \displaystyle\int_h^{2R} \left(4\,\frac{h}{R} - \frac{3}{2}\,\frac{h^2}{R^2} + \frac{3}{2}\,\frac{h^2}{R^3}\,z - \frac{3}{2}\,\frac{h}{R^3}\,z^2\right)\ \gamma(z)dz - \\ \quad - \dfrac{1}{2R-h} \displaystyle\int_h^{2R} \left(4\,\frac{h}{R} - \frac{3}{2}\,\frac{h^2}{R^2} - \frac{3}{2}\,\frac{h^2}{R^3}\,z - \frac{3}{2}\,\frac{h}{R^3}\,z^2\right) \gamma(z)dz \end{cases}$$

Telles étaient bien les formules (3-13). Rappelons que l'on a alors :

$$2\ E(\gamma^*(h)/\gamma) = 2\ \gamma(h) - 2\ T_1(h) + T_2(h)$$

$$T_2(h) = \frac{h^2}{2R^2}\ \gamma(2R) + \frac{3}{8R^4}\ h^2(2R-h)^2\ [4\ \chi(2R) - 2\ F(2R) - \gamma(2R)]$$

2-2 Exemple : Effet de pépite (fini)

Du fait que les estimateurs contiennent les valeurs ponctuelles $Z(R)$ et $Z(-R)$, on ne peut pas introduire un effet de pépite diracien. Pour un effet de pépite fini, soit :

$$\gamma_o(x) = \begin{cases} C & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Le terme T_1 est nul (suaf en $h = 2R$), et T_2 vaut :

$$T_2(h) = C\left(\frac{h^2}{2R^2} + \frac{3}{8R^4}\ h^2(2R-h)^2\right) = \frac{2h^2}{R^2} - \frac{3}{2}\frac{h^3}{R^3} + \frac{3}{8}\frac{h^4}{R^4}$$

d'où :

$$E(\gamma^*/\gamma_o) = C\left(1 + \frac{h^2}{R^2} - \frac{3}{4}\frac{h^3}{R^3} + \frac{3}{16}\frac{h^4}{R^4}\right) \quad (h \neq 0)$$

ou, en posant $\frac{h}{2R} = x$:

$$E(\gamma^*/\gamma_o) = C\ (1 + 4x^2 - 6\ x^3 + 3\ x^4)\ \ (x \neq 0,\ x \neq 1)$$

et 0 en $x = 0$ ou $x = 1$.

2-3 Variogramme des résidus dans le cas discret.

Plaçons-nous d'abord dans le cas général (données en des points $x_\alpha \in \mathbb{R}^3$ quelconques) :

a/ <u>Estimateur optimal</u> (Système 1-0', page 17 du fascicule sur le Krigeage Universel)

(a) $$2\,\gamma^*_{\alpha\beta} = (Z_\alpha - Z_\beta)^2 - 2\,(Z_\alpha - Z_\beta)(m_\alpha - m_\beta) + (m_\alpha - m_\beta)$$

$$(m_\alpha = A_\ell f^\ell_\alpha)$$

En espérance :

$$2\,E(\gamma^*_{\alpha\beta}/\gamma) = 2\,\gamma_{\alpha\beta} - \mu_{\ell s}\,(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta)$$

b/ <u>Estimateur non optimal</u>

Nous utilisons l'estimateur optimal pour γ, mais le vrai variogramme sous-jacent est $\gamma+g$. Les trois termes de (a) vont donner en espérance :

(b-1) $$(Z_\alpha - Z_\beta)^2 \rightarrow 2\,(\gamma_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta})$$

(b-2) $$(Z_\alpha - Z_\beta)(m_\alpha - m_\beta) \rightarrow \mu_{\ell s}\,(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta) - \lambda^\gamma_\ell\,(g_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma})(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)$$

(b-3) $$(m_\alpha - m_\beta)^2 \rightarrow \mu_{\ell s}\,(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta) - g_{\gamma\gamma'}\,\lambda^\gamma_\ell\,\lambda^{\gamma'}_s\,(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta)$$

D'où

(b) $$\left\{\begin{array}{l} 2\,E(\gamma^*_{\alpha\beta}/\gamma+g) = 2\,E(\gamma^*_{\alpha\beta}/\gamma) + 2\,\lambda^\gamma_\ell\,(g_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma})(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta) \\ \qquad - g_{\gamma\gamma'}\,\lambda^\gamma_\ell\,\lambda^{\gamma'}_s\,(f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta) + 2\,g_{\alpha\beta} \end{array}\right.$$

c/ <u>Cas où g est un effet de pépite pur</u> superposé à γ

$$g_{\alpha\beta} = C\,(1 - \delta_{\alpha\beta}) \qquad \left(\delta_{\alpha\beta} = \begin{matrix} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{matrix}\right)$$

On peut calculer le 2ème et le 3ème terme de (b) en remplaçant $g_{\alpha\beta}$ par $- C\delta_{\alpha\beta}$, d'où :

$$2\,E\left(\gamma^*_{\alpha\beta}/\gamma + C(1-\delta)\right) = 2\,E(\gamma^*_{\alpha\beta}/\gamma) + 2\,C(1 - \delta_{\alpha\beta})$$

$$- 2\,C\left(\lambda_\ell^{(\alpha)} - \lambda_\ell^{(\beta)}\right)\left(f^{\ell}_{(\alpha)} - f^{\ell}_{(\beta)}\right) + C \sum_\gamma \lambda^\gamma_\ell\, \lambda^\gamma_s\, (f^\ell_\alpha - f^\ell_\beta)(f^s_\alpha - f^s_\beta)$$

(sans sommation sur (α) et (β))

<u>Application</u>

Variogramme γ linéaire - n+1 points équidistants sur (0,L), L = nh.

d/ <u>Estimateur optimal</u> (absence d'effet de pépite)

Il est détaillé page 44 - Le terme μ_{11} donné dans le fascicule est entaché d'une erreur de calcul. Sa vraie valeur est :

$$\mu_{11} = \frac{8n^2-2}{n(n^2-1)}\,\frac{1}{h}$$

On a ici pour $\beta = \alpha + k$

$$f^1_\alpha - f^1_{\alpha+k} = - kh \qquad f^2_\alpha - f^2_{\alpha+k} = - (2\,\alpha k + k^2)h^2$$

$$T^{11}_{(k)} = \frac{1}{n+1-k} \sum_{\alpha=0}^{n-k} \left(f^1_\alpha - f^1_{\alpha+k}\right)^2 = k^2h^2$$

$$T^{12}_{(k)} = \frac{1}{n+1-k} \sum_{\alpha=0}^{n-k} \left(f^1_\alpha - f^1_{\alpha+k}\right)\left(f^2_\alpha - f^2_{\alpha+k}\right) = n\ k^2\ h^3$$

$$T^{22}_{(k)} = \frac{1}{n+1-k} \sum_{\alpha=0}^{n-k} \left(f^2_\alpha - f^2_{\alpha+k}\right)^2 =$$

$$= h^4\ k^2\left(k^2 + 2k(n-k) + \frac{2}{3}\ (n-k)(2n-2k+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ h^4\ k^2\ (k^2 - 2k\ n + 4\ n^2 + 2n - 2k)$$

D'où :

$$2\ \gamma^*(kh) = 2\ kh - k^2\ \frac{8\ n^2-2}{n(n^2-1)}\ h + \frac{12\ n}{n^2-1}\ k^2h - \frac{2\ k^2}{n(n^2-1)}\ (k^2-2kn+4n^2+2n-2k)h$$

et, en ordonnant en k :

$$\text{(d)} \quad \left\{\begin{array}{l} 2\ E(\gamma^*(kh)/\gamma) = \\ = \left(2\ k - \dfrac{4\ n^2}{n(n^2-1)}\ k^2 - \dfrac{4\ n-2}{n(n^2-1)}\ k^2 + \dfrac{4\ (n+1)}{n(n^2-1)}\ k^3 - \dfrac{2\ k^4}{n(n^2-1)}\right) h \end{array}\right.$$

e/ Dans les mêmes conditions, ajoutons <u>un effet de pépite</u> C :

Pour $\beta = \alpha + k \quad (k \neq 0)$, 3 termes correctifs :

(e-1) $\quad + 2\ C$

(e-2) $\quad + 2\ C(\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{\alpha+k})\ k\ h + 2\ C(\lambda_2^\alpha - \lambda_2^{\alpha+k})(2\ \alpha\ k + k^2)h^2$

(e-3) $\quad C\, L_{\ell s} \quad (f_\alpha^\ell - f_\beta^\ell)(f_\alpha^s - f_\beta^s)$

$$L_{\ell s} = \sum_{\gamma=0}^{n} \lambda_\ell^\gamma \; \lambda_s^\gamma$$

Ces termes sont ensuite soumis à l'opération $\frac{1}{n-k+1} \sum_{\alpha=0}^{n-k}$

<u>Calcul de (e-3)</u> - En se reportant aux estimateurs de la page 44 :

$$\lambda_1^\alpha \begin{cases} \lambda_1^o = \left(\frac{6}{(n^2-1)} - \frac{1}{n} - \frac{3}{n-1}\right)\frac{1}{h} = -\frac{1+4n}{n(n+1)}\;\frac{1}{h} \\ \lambda_1^n = \left(\frac{6}{n^2-1} + \frac{1}{n} - \frac{3}{n-1}\right)\frac{1}{h} = \frac{1-2n}{n(n+1)}\;\frac{1}{h} \\ \lambda_1^i = \frac{6}{n^2-1}\;\frac{1}{h} \qquad (i \neq 0\ ,\ i \neq n) \end{cases}$$

$$\lambda_2^\alpha \begin{cases} \lambda_2^o = \lambda_2^n = \left(-\frac{6}{n(n^2-1)} + \frac{3\,(n+1)}{n(n^2-1)}\right)\frac{1}{h^2} = \frac{3}{n(n+1)}\;\frac{1}{h^2} \\ \lambda_2^i = -\frac{6}{n(n^2-1)}\;\frac{1}{h^2} \qquad (i \neq 0\ ,\ i \neq n) \end{cases}$$

Matrice $L_{\ell s}$

$$\begin{cases} L_{11} = \sum_{\gamma=0}^{n} (\lambda_1^\gamma)^2 = \left(\frac{36(n-1)}{(n^2-1)^2} + \frac{(1+4n)^2}{n^2(n+1)^2} + \frac{(1-2n)^2}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{1}{h^2} = \frac{20\,n^2-2}{n^2(n^2-1)}\;\frac{1}{h^2} \\ L_{12} = \sum_{\gamma=0}^{n} \lambda_1^\gamma\,\lambda_2^\gamma = \left(-\frac{3(1+4n)}{n^2(n+1)^2} + \frac{3(1-2n)}{n^2(n+1)^2} - \frac{36\,(n-1)}{n(n^2-1)^2}\right)\frac{1}{h^3} = \\ \qquad = \frac{18}{n(n^2-1)}\;\frac{1}{h^3} \end{cases}$$

$$\left\{ L_{22} = \sum_{\gamma=0}^{n} (\lambda_2^\gamma)^2 = \left(\frac{18}{n^2(n+1)^2} + \frac{36(n-1)}{n^2(n^2-1)^2} \right) \frac{1}{h^4} = \frac{18}{n^2(n^2-1)} \frac{1}{h^4} \right.$$

Le terme correctif (e-3) - après sommation en k - est $L_{\ell s}\, T^{\ell s}(k)$, avec les $T^{\ell s}(k)$ données en (d)

$$L_{\ell s}\, T^{\ell s}(k) = \frac{20\, n^2-2}{n^2(n^2-1)} k^2 - \frac{36}{n^2-1} k^2 + \frac{6\, (k^2-2kn+\ 4n^2+2n-2k)}{n^2(n^2-1)} k^2$$

En regroupant :

$$\text{(e-3)} \qquad C\, L_{\ell s}\, T^{\ell s}(k) = C \left[\frac{8\, n^2+12\, n-2}{n^2(n^2-1)} k^2 - \frac{12\, k^3}{n^2(n-1)} + \frac{6\, k^4}{n^2(n^2-1)} \right]$$

<u>Calcul de (e-2)</u>

	$\alpha = 0,\ \beta \neq n$	$\alpha \neq 0,\ \beta = n$	$\alpha = 0,\ \beta = n$	$\alpha \neq 0,\ \beta \neq n$
$\lambda_1^\alpha - \lambda_1^\beta =$	$\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n-1}\right) \frac{1}{h}$	$\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n-1}\right) \frac{1}{h}$	$\frac{2}{n} \quad \frac{1}{h}$	0
$\lambda_2^\alpha - \lambda_2^\beta =$	$-\frac{3\ (n+1)}{n(n^2-1)} \quad \frac{1}{h}$	$\frac{3\ (n+1)}{n(n^2-1)} \quad \frac{1}{h}$	0	0

Le terme correctif, après opération $\frac{1}{n+1-k} \sum_\alpha$, est (pour $k \neq n$)

$$\frac{2C}{n+1-k} \left[\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n-1}\right) \left(f_o^1 - f_k^1\right) - \frac{3\ (n+1)}{n(n^2-1)} \left(f_o^2 - f_k^2\right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n-1}\right) \left(f_{n-k}^1 - f_n^1\right) + \frac{3\ (n+1)}{n(n^2-1)} \left(f_{n-k}^2 - f_n^2\right) \right] =$$

$$\text{(e-2)} \quad \frac{2C}{n+1-k} \left[-\frac{2k}{n} + \frac{3\ (n+1)}{n(n^2-1)} \left((n-k)^2 - n^2 + k^2\right) \right] = -\frac{4\ C\ k(4n-3k-1)}{n(n-1)(n+1-k)}$$

Pour k = n, il vient - 4 C, de sorte que (e-2) est encore valable pour k = n. Au total :

$$(e)\quad \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right.\right. \bar{2}\, E(\gamma^*(k)/\gamma + C(1-\delta)) = 2\, E(\gamma^*(k)/\gamma) + C \left[2 - \frac{4\,k(4n-3k-1)}{n(n+1)(n+1-k)} + \frac{8\,n^2+12n-2}{n^2(n^2-1)}\,k^2 - \frac{12\,k^3}{n^2(n-1)} + \frac{6\,k^4}{n^2(n^2-1)} \right]$$

ADDITIF à la Note Géostatistique n° 106

K.U. pour une covariance exponentielle

Considérons les deux problèmes suivants :

a/ (cas continu). Pour une fonction g donnée, trouver une mesure λ telle que :

$$\text{(a)} \qquad \int_0^L \lambda(dx)\, e^{-a|x-y|} = g(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant L)$$

b/ (cas discret). Pour $g = (g_0, g_1, \ldots g_n)$ donné, trouver $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n)$ tel que :

$$\text{(b)} \qquad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\, C_{ij} = g_i \quad (i = 0, 1, \ldots n,\ C_{ij} = e^{-a|i-j|})$$

Si l'on sait résoudre ces deux problèmes, on en déduira facilement l'estimateur optimal de la dérive sur une droite pour la covariance exponentielle et pour des fonctions f^1 quelconques.

a/ Cas continu

La dérivée seconde de $e^{-a|h|}$ est la mesure $a^2\, e^{-a|h|}\, dh - 2a\delta(dh)$
En dérivant deux fois (a) en y (g étant supposée dérivable), on en déduit que la mesure $\lambda(dx)$ (si elle existe) doit coïncider sur l'intervalle <u>ouvert</u> (0,L) avec une mesure de densité f(x) telle que

$$(a_1) \qquad a^2 \int_0^L e^{-a|x-y|}\, \lambda(dx) - 2a\, f(y) = g''(y)$$

c'est-à-dire, d'après (a) (supposé vérifié) :

$$f(y) = \frac{1}{2a}\,(a^2\, g(y) - g''(y)) \qquad (0 < y < L)$$

Sur l'intervalle fermé [0,L], la mesure λ devrait alors être de la forme :

$$(a_2) \qquad \lambda(dx) = \frac{1}{2a}\,(a^2 g(y) - g''(y)) + A\, \delta_0(dx) + B\, \delta_L(dx)$$

Montrons qu'il existe effectivement une mesure λ de la forme (a_2) vérifiant (a). Pour celà, effectuons une intégration par partie sur :

$$I = \int_0^L g''(x)\, e^{-a|x-y|}\, dx = \int_0^y g''(x)\, e^{-a(y-x)} dx + \int_0^L g''(x)\, e^{-a(x-y)} dx =$$

$$= g'(x)\, e^{-a(y-x)}\Big|_0^y - a\int_0^y g'(x)\, e^{-a(y-x)} dx +$$

$$+ g'(x)\, e^{-a(x-y)}\Big|_y^L + a\int_y^L g'(x)\, e^{-a(x-y)} dx =$$

$$g'(L)\, e^{-a(L-y)} - g'(o)\, e^{-ay} - a\int_0^y g'(x) e^{-a(y-x)} dx + a\int_0^L g'(x) e^{-a(x-y)} dx$$

Une nouvelle intégration par partie donne :

$$I = g'(L)\, e^{-a(L-y)} - g'(o)\, e^{-ay} - ag(x)\, e^{-a(y-x)}\Big|_0^y + ag(x) e^{-a(x-y)}\Big|_y^L +$$

$$+ a^2\int_0^y g(x)\, e^{-a(y-x)} dx + a^2\int_y^L g(x)\, e^{-a(x-y)} dx =$$

$$(g'(L)+ag(L))\, e^{-a(L-y)} + (ag(o)-g'(o)) e^{-ay} - 2ag(y) + a^2\int_0^L g(x) e^{-a|x-y|} dx$$

Par conséquent, la mesure λ définie par :

$$\lambda(dx) = \frac{1}{2a}\left[(a^2 g(x) - g''(x))dx + (ag(o)-g'(o))\delta_o(dx) + (g'(L)+ag(L))\delta_L(dx)\right]$$

vérifie effectivement la relation (a) dès que la dérivée seconde $g''(y)$ est continue sur $[0,L]$.

b/ <u>Cas discret (maille régulière)</u>

Désignons par Δ^2 la différence seconde centrée :

$$(\Delta^2 f)_j = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1} \qquad (j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

et calculons $\Delta^2 C_{ij}$ pour $C_{ij} = e^{-a|i-j|}$. On trouve d'abord :

$$\Delta^1 C_{ij} = C_{i,j+1} - C_{i,j} = \begin{cases} (e^{-a}-1)\, e^{-a(j-i)} & (j \geqslant i) \\ (1-e^{-a})\, e^{a(j+1-i)} & (j \leqslant i-1) \end{cases}$$

puis :

$$\Delta^2 C_{ij} = \Delta^1 C_{ij} - \Delta^1 C_{i,j-1} = \begin{cases} (e^{-a}-1)(1-e^{a})e^{-a(j-i)} & (j \geqslant i+1) \\ -2\,(1-e^{-a}) & (j = i) \\ (e^{a}-1)(1-e^{-a})\, e^{-a(i-j)} & (j \leqslant i-1) \end{cases}$$

Sous forme condensée, ceci s'écrit :

$$(b_1) \qquad \Delta^2 C_{ij} = (e^{a}-1)(1-e^{-a})\, C_{ij} - (e^{a}-e^{-a})\, \delta_{ij}$$

Soit alors à résoudre le système :

$$(b) \qquad \sum_{j=o}^{n} C_{ij}\, \lambda_j = g_j \qquad (j = 0,\ 1,\ ..\ n)$$

où les g_j sont donnés pour $j = 0, 1, ..n$. Posons $g_j = 0$ pour $j < 0$ ou $j > n$ et considérons les différences secondes $\Delta^2 g_j$:

$$\Delta_2\, g_o = g_1 - 2\, g_o$$

$$\Delta_2\, g_1 = g_2 - 2\, g_1 + g_o$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_2\, g_{n-1} = g_n - 2\, g_{n-1} + g_{n-2}$$

$$\Delta_2\, g_n = -2\, g_n + g_{n-1}$$

Formons l'expression suivante :

$$\sum_{j=o}^{n} C_{ij}\, \Delta^2\, g_j = \sum_{j=o}^{n} (\Delta^2\, C_{ij})\, g_j - C_{i,-1}\, g_o - C_{i,n+1}\, g_n$$

c'est-à-dire, d'après (b_1), et pour $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$\sum_{j=o}^{n} C_{ij}\, \Delta^2\, g_j = (e^{a}-1)(1-e^{-a}) \sum_{j=o}^{n} C_{ij}\, g_j - (e^{a}-e^{-a})\, g_i - e^{-a(i+1)}\, g_o - e^{-a(n+1-i)}\, g_n$$

On en déduit que les quantités :

$$\lambda_j = \frac{1}{e^a - e^{-a}} \quad (e^a-1)(1-e^{-a})\ g_j - \Delta^2 g_j - e^{-a}\delta_{oj} - e^{-a}\ \delta_{nj}$$

vérifient bien le système (b). Alors que, dans le cas continu, la fonction $g(y)$ devrait être deux fois dérivable, la solution λ_j obtenue dans le cas discret est valable pour toute fonction g_j sur $\{0, 1, .. n\}$.