



Collège doctoral

T H È S E

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité "Géostatistique"

présentée et soutenue publiquement
par
Dominique MOULIÈRE

le 23 Janvier 1998

INTÉGRATION D'INFORMATIONS SISMIQUES POUR LA SIMULATION DE RÉSERVOIRS

Directeur de thèse : Hélène BEUCHER

Jury

M.	A. Galli	Président
M.	G. de Marsily	Rapporteur
M.	P. Mechler	Rapporteur
M.	B. Volpi	Examinateur
Mme	H. Beucher	Examinateur
Mme	B. Doligez	Examinateur

Remerciements :

Tout d'abord je voudrais remercier Yves Touffait et Michel Schmitt (directeurs successifs du Centre de Géostatistique) qui m'ont accueillie au sein de leur équipe de recherche.

Je remercie également MM. de Marsily et Mechler, rapporteurs de ma thèse, ainsi que Brigitte Doligez (IFP) et Bruno Volpi (AGIP) qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

Merci à Bernard Biju Duval pour m'avoir incitée à suivre le DEA "Méthodes quantitatives des géosciences" de l'ENSPM, ce qui m'a permis de choisir la voie dans laquelle je me suis engagée.

Merci à Alain Galli et à Hélène Beucher (directeurs successifs de ma thèse) d'avoir accepté d'encadrer mon travail et d'avoir pris le temps de répondre à mes questions, relire mes rapports et articles, vérifier mes transparents... malgré un emploi du temps très chargé. C'est également grâce à eux que j'ai eu la possibilité de donner des cours aux élèves du DEA "Modélisation de bassins" de l'ENSPM.

Je remercie les partenaires des projets de recherche dans le cadre desquels s'inscrivait ce travail, notamment Paolo Terdich et Guiliana Griffi (AGIP), Brigitte Doligez (division géologie de l'IFP), Christian Cassaigneau (Total), Frédérique Fournier et Nathalie Lucet (division géophysique de l'IFP), Olinto Gomes de Souza et Paulo Schroöder Johann (Petrobras), qui ont fait preuve de beaucoup de patience quand ils ont testé les premières versions d'Alize...

Merci à toutes les personnes du Centre de Géostatistique et de l'Ecole qui m'ont aidée dans mes recherches, tout particulièrement François et Didier, toujours disponibles pour résoudre mes problèmes informatiques ; Françoise qui a réussi à trouver des articles sans référence, sans auteur ou sans titre ; Jane qui m'a fait progresser en anglais (chose que personne n'avait réussi à faire jusqu'alors) et Isabelle et Nathalie qui m'ont aidée à résoudre différents problèmes administratifs et ont dû m'expliquer patiemment le fonctionnement du fax une bonne quinzaine de fois.

Merci enfin à tous ceux qui m'ont aidée à me détendre durant ma thèse. En particulier, toutes les personnes de l'alias foot avec qui je me suis défoulée en jouant tous les mardis et vendredis au foot, au basket ou au rugby (moments très importants qui m'ont permis de me remettre de la position assise devant un ordinateur quasi-perpétuelle d'un thésard) ; Gaëlle, Lantu et Olivier qui ont effectué avec moi un petit périple en Australie (moments et images que je ne suis pas prête d'oublier) ; Bertrand, qui m'a supportée comme collègue de bureau pendant trois ans – surtout pendant la rédaction de la thèse alors que je devenais insupportable ; Sophie, Estelle et Nathalie pour les soirées bricolage (pâte à sel, peinture sur soie, point de croix, couture...) nécessaires à mon équilibre psychologique ; Valérie, Sophie et Bertrand, Estelle et Cédric et Nathalie pour les soirées gastronomiques ; Cyrille, Sabine, Camille, Marie-Hélène et mes parents qui ont su me faire oublier la thèse le temps des week-ends et des vacances. Pardon enfin à Mustafa de ne pas avoir réussi à lui apprendre le piano...

Sommaire

Introduction générale	1
 PARTIE 1 : Simulation de lithofaciès contrainte par une information dédiuite de la sismique	 3
Introduction	5
1. Les données	7
1.1. L'information déduite de la donnée sismique	7
1.2. Les lithofaciès aux puits	9
1.3. Les relations entre les covariances des données	10
2. La méthode de simulation des lithofaciès	13
2.1. Rappels sur la méthode des Gaussiennes Seuilées	13
2.2. Estimation du bloc 3D de proportions	15
2.2.1. Le krigeage sous contrainte d'agrégation	16
2.2.1.1. Le système de krigeage	17
2.2.1.2. Les hypothèses simplificatrices	25
2.2.2. Le cokrigeage	26
2.2.2.1. Le système de cokrigeage	26
2.2.2.2. Les hypothèses simplificatrices	29
3. Application à des données synthétiques	33
3.1. Les données	33
3.1.1. Le modèle géologique du Mesa Verde	33
3.1.2. Les lithofaciès aux puits	34
3.1.3. L'information sismique	35
3.1.4. Les Courbes de Proportions Verticales	36
3.2. L'estimation du bloc de proportions	36
3.2.1. Sans information déduite de la sismique	37
3.2.2. Avec une information déduite de la sismique	38

3.2.3. Avec deux informations déduites de la sismique	38
3.3. Les simulations	39
3.3.1. Sans information déduite de la sismique	39
3.3.2. Avec une information déduite de la sismique	40
3.3.3. Avec deux informations déduites de la sismique	41
Conclusion	43

PARTIE 2 : Cosimulation conditionnée d'impédances acoustiques et d'amplitudes sismiques 45

Introduction	47
1. Données et relations entre les données	49
1.1. Impédances acoustiques	49
1.2. Coefficients de réflexion	49
1.2.1. Définition des coefficients de réflexion	49
1.2.2. Approximation "continue"	50
1.2.3. Approximation discrète	51
1.3. Amplitudes sismiques modélisées	52
1.4. Amplitudes sismiques mesurées	52
2. Méthode de simulation des impédances acoustiques	55
2.1. Cosimulation du logarithme des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées	55
2.2. Contrainte de la simulation du logarithme des impédances acoustiques par un cokrigage avec filtrage d'un résidu sur les amplitudes mesurées	57
2.2.1. Rappels sur le cokrigage à moyenne connue	57
2.2.1.1. Système de cokrigage à moyenne connue	58
2.2.1.2. Variance d'estimation du cokrigage à moyenne connue	60
2.2.1.3. Propriétés du cokrigage à moyenne connue	61
2.2.2. Cokrigage conditionnant	62
2.2.2.1. Principe du cokrigage conditionnant	63
2.2.2.2. Propriétés de la simulation conditionnelle	63
2.2.2.3. Voisinage de cokrigage	66
2.3. Relations mathématiques entre les covariances	67
2.3.1. Relations mathématiques entre les covariances des données	67

2.3.1.1. Relations entre les covariances verticales des données	68
2.3.1.1.1. Relation liant la covariance verticale des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances	68
2.3.1.1.2. Relation liant la covariance verticale des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale des coefficients de réflexion	69
2.3.1.1.3. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances	69
2.3.1.1.4. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale du logarithme des impédances	69
2.3.1.2. Relations entre les covariances horizontales des données	70
2.3.1.2.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances	70
2.3.1.2.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance des coefficients de réflexion	71
2.3.1.2.3. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances	71
2.3.1.2.4. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance croisée du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion ..	71
2.3.1.3. Cas particulier d’un milieu de covariance factorisable	72
2.3.1.3.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances	73
2.3.1.3.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques “modélisées” aux covariances horizontale et verticale des coefficients de réflexion	73
2.3.1.3.3. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances	74
2.3.1.3.4. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances	74
2.3.2. Relations mathématiques liant les covariances simple et croisées du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées aux autres covariances	74
2.3.2.1. Relation liant la covariance croisée du logarithme des impédances et du résidu sur les amplitudes mesurées aux autres covariances	75

2.3.2.2. Relation liant la covariance croisée de l'amplitude modélisée et du résidu sur les amplitudes mesurées à la covariance croisée du logarithme des impédances et du résidu sur les amplitudes mesurées	75
2.3.2.3. Relation liant la covariance du résidu sur les amplitudes mesurées aux autres covariances	76
3. Application aux données du Mesa Verde	79
3.1. Présentation des données du Mesa Verde	79
3.1.1. Données fournies par l'Institut Français du Pétrole	79
3.1.1.1. Modèle géologique du Mesa Verde	79
3.1.1.2. Impédances acoustiques	81
3.1.1.3. Amplitudes sismiques mesurées et ondelette sismique	82
3.1.2. Données construites au Centre de Géostatistique	84
3.1.2.1. Coefficients de réflexion	84
3.1.2.2. Amplitudes sismiques modélisées	85
3.1.3. Quelques remarques	87
3.1.3.1. Problème de gain	87
3.1.3.2. Problème d'encaissant	89
3.1.3.3. Problème d'ordre de grandeur	90
3.1.3.4. Milieu à covariance factorisable ?	91
3.2. Relations entre les covariances des données	93
3.2.1. Test des relations entre les covariances des données	93
3.2.1.1. Test des relations entre les covariances verticales des données	93
3.2.1.2. Test des relations entre les covariances horizontales des données	96
3.2.2. Ajustement des covariances des données	98
3.2.2.1. Ajustement des covariances verticales des données	98
3.2.2.2. Ajustement des covariances horizontales des données	99
3.3. Le résidu	100
4. Application	105
4.1. Présentation des données	105
4.1.1. La section en impédances acoustiques et les puits	105
4.1.2. L'ondelette sismique	108
4.1.3. La section en amplitude sismique mesurée	108
4.2. L'analyse variographique	109
4.2.1. Avec la section en impédance acoustique complète	110

4.2.1.1. Ajustement des covariances verticales	110
4.2.1.2. Ajustement des covariances horizontales	111
4.2.2. Avec les impédances acoustiques aux puits	111
4.2.2.1. Ajustement des covariances verticales	112
4.2.2.2. Ajustement des covariances horizontales	113
4.2.2.3. La covariance du résidu	114
4.3. Simulation conditionnée des impédances acoustiques	115
4.3.1. Cosimulation des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées	115
4.3.2. Contrainte de la simulation des impédances acoustiques par un cokrigage	119
Conclusion	123
Conclusion générale	125
ANNEXES :	127
ANNEXE 1 : Intégration d'une information déduite de la sismique dans la simulation stochastique de réservoir par la méthode des Gaussiennes Seuillées [14]	131
ANNEXE 2 : Résolution simplifiée du système de krigeage (6).	143
ANNEXE 3 : Comparaison des relations (9) et (11).	147
ANNEXE 4 : Démonstration des relations mathématiques entre les covariances des données	149
ANNEXE 5 : Etude des dérivées de quelques covariances	159
ANNEXE 6 : Les covariances factorisables.	163
ANNEXE 7 : Influence de la longueur d'onde de l'ondelette sur les covariances de l'amplitude modélisée.	169
ANNEXE 8 : Les conséquences de l'utilisation d'un encaissant.	175
Références bibliographiques	181

Liste des figures :

Fig. 1 : Les maillages	9
Fig. 2 : Le calcul des Courbes de Proportions Verticales	10
Fig. 3 : Les seuils de coupure de la Gaussienne	13
Fig. 4 : Lien entre les seuils de coupure de la Gaussienne et les proportions des lithofaciès	14
Fig. 5 : La matrice de krigeage sans information déduite de la sismique	18
Fig. 6 : La matrice de krigeage avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur d'un lithofaciès	20
Fig. 7 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur d'un lithofaciès	21
Fig. 8 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur cumulée de plusieurs lithofaciès	22
Fig. 9 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès	24
Fig. 10 : La matrice de cokrigeage avec une information déduite de la sismique 1	28
Fig. 11 : La matrice de cokrigeage avec une information déduite de la sismique 2	31
Fig. 12 : L'unité supérieure du Mesa Verde	34
Fig. 13 : Les puits en lithofaciès	34
Fig. 14 : La proportion d'argile de l'unité totale	35
Fig. 15 : La proportion d'argile des sous-unités 1 et 2	35
Fig. 16 : Les Courbes de Proportions Verticales	36
Fig. 17 : Représentation du bloc 3D de proportions	37
Fig. 18 : Le bloc 3D de proportion estimé sans information déduite de la sismique ...	37
Fig. 19 : Le bloc 3D de proportion estimé à l'aide d'une information déduite de la sismique	38
Fig. 20 : Le bloc 3D de proportion estimé à l'aide de deux informations déduites de la sismique	38
Fig. 21 : La simulation à partir des proportions estimées sans information déduite de la sismique	39
Fig. 22 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées sans information déduite de la sismique	40

Fig. 23 : La simulation à partir des proportions estimées à l'aide d'une information déduite de la sismique	40
Fig. 24 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées à l'aide d'une information déduite de la sismique	41
Fig. 25 : La simulation à partir des proportions estimées à l'aide de deux informations déduites de la sismique	41
Fig. 26 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées à l'aide de deux informations déduites de la sismique	42
Fig. 27 : La campagne sismique	53
Fig. 28 : L'amplitude sismique mesurée	54
Fig. 29 : La cosimulation des impédances et des amplitudes mesurées	56
Fig. 30 : Le voisinage glissant	67
Fig. 31 : Caractéristiques physiques des différents lithofaciès	80
Fig. 32 : Section en lithofaciès	80
Fig. 33 : L'unité centrale du Mesa Verde	81
Fig. 34 : Section en impédance acoustique	81
Fig. 35 : Statistiques globales et histogramme du logarithme de l'impédance acoustique	82
Fig. 36 : Les amplitudes sismiques mesurées	82
Fig. 37 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude sismique mesurée	83
Fig. 38 : Ondelette	84
Fig. 39 : Section en coefficient de réflexion	84
Fig. 40 : Statistiques globales et histogramme des coefficients de réflexion.	85
Fig. 41 : Section en amplitude modélisée 1	86
Fig. 42 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude modélisée 1	86
Fig. 43 : Comparaison des ordres de grandeur des amplitudes modélisées et mesurées .	87
Fig. 44 : Section en amplitude modélisée 2	88
Fig. 45 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude modélisée 2	88
Fig. 46 : Comparaison trace à trace de l'amplitude mesurée et de l'amplitude modélisée	89
Fig. 47 : Direction des covariances diagonales du logarithme de l'impédance	91
Fig. 48 : Covariances diagonales du logarithme de l'impédance	92
Fig. 49 : Test sur l'ajustement des covariances verticales 1	94
Fig. 50 : Test sur l'ajustement des covariances verticales 2	95
Fig. 51 : Test sur l'ajustement des covariances horizontales	96
Fig. 52 : Ajustement des covariances verticales	99

Fig. 53 : Ajustement des covariances horizontales	100
Fig. 54 : Résidu sur les amplitudes sismiques mesurées	101
Fig. 55 : Statistiques globales et histogramme du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées	101
Fig. 56 : Covariances verticales du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées	102
Fig. 57 : Covariances horizontales sur les amplitudes sismiques mesurées	102
Fig. 58 : Section en impédance acoustique	106
Fig. 59 : Statistiques globales et histogrammes de l'impédance acoustique et de son logarithme	106
Fig. 60 : Les impédances acoustiques aux puits	107
Fig. 61 : Statistiques globales et histogrammes de l'impédance acoustique aux puits et de son logarithme	107
Fig. 62 : Ondelette sismique	108
Fig. 63 : Section en amplitudes sismiques mesurées	109
Fig. 64 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude sismique mesurée	109
Fig. 65 : Ajustement des covariances verticales des données complètes	110
Fig. 66 : Ajustement des covariances horizontales des données complètes	111
Fig. 67 : Ajustement des covariances verticales des données aux puits	112
Fig. 68 : Ajustement des covariances horizontales des données aux puits	113
Fig. 69 : Ajustement de la covariance verticale du résidu	114
Fig. 70 : Simulation non conditionnée des impédances acoustiques	116
Fig. 71 : Simulation des amplitudes sismiques modélisées	116
Fig. 72 : Simulation d'un résidu	117
Fig. 73 : Simulation des amplitudes sismiques mesurées	117
Fig. 74 : Covariances simples et croisée verticales de la cosimulation	118
Fig. 75 : Covariances simples et croisée horizontales de la cosimulation	119
Fig. 76 : Simulation conditionnée des impédances acoustiques	120
Fig. 77 : Covariances simple et croisée verticales de la cosimulation conditionnée	120
Fig. 78 : Covariances simple et croisée horizontales de la cosimulation conditionnée ..	121
Fig. 79 : Les ondelettes de différentes longueur d'onde	170
Fig. 80 : Ajustement de la covariance verticale du logarithme de l'impédance	170
Fig. 81 : Ajustement des covariances verticales des différentes sections en amplitudes modélisées	171
Fig. 82 : Ajustement de la covariance horizontale du logarithme de l'impédance	172

Fig. 83 : Ajustement de covariances horizontales des différentes sections en amplitudes modélisées	173
Fig. 84 : Les différents encaissants	175
Fig. 85 : Ajustement des covariances verticales du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion	176
Fig. 86 : Ajustement des covariances verticales des amplitudes modélisées	177
Fig. 87 : Ajustement des covariances horizontales du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion	178
Fig. 88 : Ajustement des covariances horizontales des amplitudes modélisées	179

Liste des abréviations et symboles :

Partie 1 :

$C_{f,z}^P(h)$:	La covariance des proportions du lithofaciès f au niveau z,
$C_{ef,ij}^P(h)$:	La covariance croisée des proportions du lithofaciès e au niveau i et des proportions du lithofaciès f au niveau j,
$C_f^S(h)$:	La covariance de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f,
$C_{ef}^S(h)$:	La covariance croisée de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès e et de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f,
$C_{fe,z}^{SP}(h)$:	La covariance croisée de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f et de la proportion du lithofaciès e au niveau z,
$E_f(X)$:	L'épaisseur du lithofaciès f au point X,
$E_r(X)$:	L'épaisseur du réservoir au point X,
NZ :	Le nombre de niveaux horizontaux,
N :	Le nombre de lithofaciès concernés par l'information sismique,
nb_cpv :	Le nombre de Courbes de Proportions Verticales,
nb_facies :	Le nombre de lithofaciès,
nb_sis :	Le nombre d'informations déduites de la sismique,
$P(?)$:	La probabilité de ?,
$P_f(X, z)$:	La proportion du lithofaciès f au point (X, z),
$P_{f,z}(X)$:	La proportion du lithofaciès f au point (X, z),
$S(X)$:	L'information sismique déduite de la sismique au point X,
t_f :	Un seuil de coupure de la gaussienne,
$X = (x, y)$:	La localisation d'un point sur la carte 2D horizontale,
$Y(X, z)$:	Une variable aléatoire gaussienne,
$\delta_{f,z}^e$:	Le poids de cokrigage de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f au point X_e ,
$\lambda_{f,z}^\alpha$:	Le poids de krigeage ou de cokrigage de la proportion du lithofaciès f au point (X_α, z) ,
$\mu_{f,z}$:	Le paramètre de Lagrange du lithofaciès f au niveau z,
$\nu_{f,z}$:	Le poids de krigeage ou de cokrigage de la contrainte sismique concernant le lithofaciès (ou le groupe de lithofaciès) f,
$\sigma_{K_{f,z}}^2$:	La variance d'estimation du krigeage pour le faciès f au niveau z,
$\sigma_{CO_{f,z}}^2$:	La variance d'estimation du cokrigage pour le faciès f au niveau z,
$\omega_{f,z}$:	Le facteur multiplicatif de la covariance des proportions du lithofaciès f au niveau horizontal z.

Partie 2 :

$a(x, t)$:	L'amplitude sismique "exacte",
$\text{Amp}(x, t)$:	L'amplitude sismique mesurée,
$\text{Amp}_{\text{SNC}}(y)$:	La simulation non conditionnée de l'amplitude sismique mesurée,
C :	Une constante,
$C_X(h)$:	La covariance de la variable aléatoire X ,
$C_X^H(h)$:	La covariance horizontale de la variable aléatoire X ,
$C_X^V(h)$:	La covariance verticale de la variable aléatoire X ,
$C_{XY}(h)$:	La covariance croisée des variables aléatoires X et Y ,
$C_{\text{lnI}}^*(h)$:	La covariance du cokrigeage du logarithme des impédances acoustiques,
$C_{\text{lnI}_{\text{SNC}}}^*(h)$:	La covariance du cokrigeage de la simulation non conditionnée du logarithme des impédances acoustiques,
$\text{Cov}[X; Y]$:	La covariance des variables aléatoires X et Y ,
$\text{Cr}(x, t)$:	Les coefficients de réflexion,
$E[X]$:	L'espérance de la variable aléatoire X ,
h :	La distance entre deux points,
h_t :	La distance entre deux points suivant la verticale,
h_x :	La distance entre deux points suivant l'horizontale,
$\text{Imp}(x, t)$:	L'impédance acoustique,
$\text{lnI}(x, t)$:	Le logarithme de l'impédance acoustique,
$\text{lnI}_{\text{SC}}(y)$:	La simulation conditionnée du logarithme de l'impédance acoustique,
$\text{lnI}_{\text{SNC}}(y)$:	La simulation non conditionnée du logarithme de l'impédance acoustique,
$\text{lnI}^*(y)$:	Le cokrigeage du logarithme de l'impédance acoustique,
$\text{lnI}_{\text{SNC}}^*(y)$:	Le cokrigeage de la simulation non conditionnée du logarithme de l'impédance acoustique aux points de données du logarithme de l'impédance acoustique et de l'amplitude sismique mesurée,
m_X :	La moyenne de la variable aléatoire X ,
nbA :	Le nombre de données d'amplitude sismique mesurée,
nbI :	Le nombre de données d'impédance acoustique,
$R(x, t)$:	Le résidu sur les amplitudes sismiques mesurées,
$s(t)$:	L'ondelette sismique,
$\hat{s}(t) = s(-t)$:	Le symétrique de l'ondelette sismique $s(t)$,
$S(t)$:	L'autoconvoluée de l'ondelette sismique,
t :	La coordonnée d'un point suivant la verticale,
$V(x, t)$:	La vitesse de propagation d'une onde dans le sous-sol,
x :	La coordonnée d'un point suivant l'horizontale,
$y = (x, t)$:	La coordonnée d'un point à deux dimensions,
δ_y^β :	Les poids de cokrigeage des amplitudes sismiques mesurées pour le cokrigeage du logarithme des impédances acoustiques au point y ,
Δt :	Le pas de discrétisation en temps (= suivant la verticale),
$\varepsilon(x)$:	L'erreur de cokrigeage du logarithme des impédances acoustiques,
$\varepsilon_B(x, t)$:	L'erreur de mesure ou bruit sismique,

$\varepsilon_M(x, t) :$	L'erreur de modélisation,
$\lambda :$	La longueur d'onde de l'ondelette sismique,
$\lambda_y^\alpha :$	Les poids de cokrigage du logarithme des impédances acoustiques pour le cokrigage du logarithme des impédances acoustiques au point y,
$\varrho(x, t) :$	La masse volumique du sous-sol,
$\sigma_{CK}^2 :$	La variance d'estimation du cokrigage du logarithme des impédances acoustiques,
$\sigma_X^2 :$	La variance de la variable aléatoire X,
$*$:	Le produit de convolution suivant la verticale.

Introduction générale

Les modèles probabilistes de description de réservoir sont maintenant couramment utilisés dans les domaines du pétrole, de l'hydrogéologie et pour les études de stockages souterrains. Ces modèles permettent d'obtenir des images possibles du sous-sol en tenant compte des informations disponibles. A partir de ces images du sous-sol en faciès, en impédance acoustique..., des images en paramètres pétrophysiques (porosité, perméabilité...) sont estimées, pour différentes raisons :

- ◆ Afin d'estimer l'architecture et les volumes de roche réservoir susceptible de contenir du pétrole, du gaz ou de l'eau.
- ◆ Pour choisir la méthode de récupération des fluides en place la plus intéressante.
- ◆ Afin de savoir s'il est possible de stocker un fluide dans ce réservoir.
- ◆ Ou tout simplement pour savoir comment se propagent les fluides dans le sous-sol et s'il existe des zones inaccessibles aux fluides.

Les modèles probabilistes de description des réservoirs sont actuellement obtenus à l'aide des informations des puits et de la connaissance géologique. Or, les informations de puits sont :

- ◆ denses verticalement
- ◆ et éparses horizontalement.

Généralement des données sismiques sont disponibles. Les caractéristiques de ces données sont :

- ◆ une très bonne couverture horizontale des réservoirs,
- ◆ une relation complexe et indirecte avec les paramètres pétrophysiques (porosité, perméabilité...)
- ◆ et une résolution verticale plus faible que celle des puits (un échantillon tout les 2 ou 4 ms suivant la verticale, soit, pour une vitesse de propagation des ondes de 2000 m.s⁻¹, un échantillon tout les 4 ou 8 mètres).

Le but du travail exposé ici est d'intégrer cette information sismique dans la simulation de réservoir, afin de donner une dimension horizontale aux données de puits. L'information sismique peut avoir des formes diverses, chacune de ces formes étant liée aux informations de puits de façon différente.

Plutôt que de donner une bibliographie complète des méthodes d'intégration de l'information sismique dans la simulation des réservoirs, seules quelques indications sur les principales méthodes sont données ici :

- ◆ Le modèle en dérive externe ([3] Galli A., Meunier G. "Study of a gas reservoir using the external drift method"), initié par J.P. Delhomme, considère la sismique comme variable de forme lors de l'estimation de la variable primaire.
- ◆ Le cokrigage colocalisé ([6] Xu W. and Tran T.T., Srivastava R.M. Et Journel A.G. "Integrating seismic data in reservoir modeling : the collocated cokriging alter-

native”) estime la variable primaire par un cokrigage de l’ensemble des données concernant la variable primaire et la variable d’intégration secondaire au point d’estimation uniquement.

♦ Une méthode d’intégration a posteriori ([4] Haas A. and Dubrule O. “Geostatistical inversion – a sequential method of stochastic reservoir modelling constrained by seismic data”) consiste à simuler un attribut sismique à partir des données de puits. Puis, pour chaque réalisation, un sismogramme synthétique est calculé. La simulation retenue est celle dont le sismogramme synthétique ressemble le plus à celui des données réelles. C’est l’une des rares méthodes où le modèle physique sous-jacent cherche à être respecté.

♦ Une autre méthode d’intégration de la sismique dans la simulation des réservoirs est basée sur les méthodes de type objet ([5] Skare Ø., Skorstad A., Hauge R. and Holden L. “Conditioning fluvial model on seismic data”).

♦ Behrens ([1] Behrens R.A., MacLeod M.K., Tran T.T. and Alimi A.O. “Incorporating seismic attribute maps in 3d reservoir models”) utilise la méthode nommée simulation séquentielle gaussienne avec krigage de bloc. C’est l’un des rares à soulever le problème de support.

♦ La simulation par champ de probabilité ([2] Froidevaux R. “Probability field simulation”) consiste à utiliser l’information sismique pour déterminer une fonction de répartition conditionnelle de la variable à simuler. La variable d’intérêt est ensuite simulée à partir de cette fonction de répartition en utilisant la valeur du champ de probabilité simulé non conditionnellement avec la bonne covariance.

Deux méthodes permettant d’intégrer des informations sismiques de différentes formes lors de la simulation des réservoirs sont présentées ici :

♦ La première méthode de simulation utilise les Gaussiennes Seuillées afin de simuler des faciès à l’aide de faciès aux puits et d’une information issue de la sismique. Cette information déduite de la sismique peut se présenter sous des formes multiples : porosité ou perméabilité cumulée suivant la verticale..., proportion suivant la verticale d’un ou plusieurs faciès ou le rapport des proportions de deux faciès.

♦ La seconde méthode de simulation est basée sur les relations liant les impédances acoustiques aux amplitudes sismiques mesurées. Cette méthode permet de cosimuler des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques et de contraindre cette cosimulation par un cokrigage des impédances acoustiques aux puits et des amplitudes sismiques mesurées sur l’ensemble du champ avec un filtrage de l’erreur sur les amplitudes.

Ces différentes méthodes de simulation ont été établies en fonction des données disponibles et de leur fiabilité.

Ces deux méthodes étant indépendantes, elles font l’objet des deux parties de cette thèse. Malgré quelques renvois, ces deux parties peuvent être lues et exploitées de façon totalement indépendante.

PARTIE 1 :

Simulation de lithofaciès contrainte par une information déduite de la sismique

Introduction

Les données disponibles dans cette partie sont des lithofaciès aux puits et une information déduite de la sismique. Cette information déduite de la sismique peut prendre des formes très diverses telles que la porosité (ou la perméabilité) cumulée suivant la verticale, ..., l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs lithofaciès ou encore le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès. Le but de ce travail est d'utiliser cette information déduite de la sismique afin de simuler des lithofaciès connus uniquement aux puits. Pour cela, la méthode de simulation par les Gaussiennes Seuillées est utilisée. Cette méthode de simulation s'effectue en deux phases :

- ◆ Dans une première phase, une variable aléatoire gaussienne est simulée.
- ◆ Dans une seconde phase, la variable gaussienne est "transformée" en lithofaciès à l'aide d'un seuillage, les seuils utilisés ici sont directement liés aux proportions des différents lithofaciès. C'est lors du calcul de ces proportions de lithofaciès que l'information déduite de la sismique est intégrée. Deux méthodes permettent d'intégrer l'information déduite de la sismique, l'une utilise un krigeage, l'autre un cokrigeage. Le choix de la méthode de calcul des proportions dépend de la nature de l'information déduite de la sismique.

Pour cette étude, l'Institut Français du Pétrole a fourni un jeu de données synthétiques 2D avec une information déduite de la sismique qui concerne l'épaisseur d'un lithofaciès. Ces données permettent de tester la méthode d'intégration de la sismique par krigeage. Cette méthode a également été utilisée sur un cas réel en 3D en collaboration avec la société pétrolière italienne AGIP.

Cette partie de la thèse est composée de trois chapitres :

- ◆ Le premier chapitre est consacré aux données et notamment à une explication de ce qu'est la donnée déduite de la sismique et comment elle est construite. Les relations entre l'information déduite de la sismique et les données de puits y sont ensuite expliquées, ainsi que les relations entre les covariances des données.
- ◆ Le second chapitre explique la méthode des Gaussiennes Seuillées et le calcul des proportions des différents lithofaciès.
- ◆ Le troisième et dernier chapitre est une illustration, sur un cas extrêmement simple, de la méthode d'intégration par krigeage d'une information déduite de la sismique concernant les épaisseurs d'un lithofaciès dans la simulation de faciès. Une application de cette méthode sur un cas réel 3D a également été effectuée et est présentée dans l'annexe AUCUN LIEN .

1. Les données

Les données disponibles dans cette partie sont de deux types. Les données de puits sont des lithofaciès, alors que la donnée sismique (ou plus exactement l'information déduite de la sismique) concerne la porosité ou la perméabilité cumulée suivant la verticale, ..., l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs lithofaciès ou encore le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès.

1.1. L'information déduite de la donnée sismique

La porosité ou la perméabilité cumulée suivant la verticale, ..., les épaisseurs cumulées ou le rapport des épaisseurs des lithofaciès peuvent être extraits de la donnée sismique par plusieurs méthodes. L'une d'elles, mise au point à l'Institut Français du Pétrole par F. Fournier consiste en une étude statistique de chaque trace sismique ([9] Fournier F. et Derain J.F. : "A statistical methodology for deriving reservoir properties from seismic data"). Elle peut être résumée par les trois étapes principales suivantes :

- ◆ La première étape consiste à **définir une fenêtre de temps**. Pour cela, le toit et la base de l'unité d'intérêt sont repérés sur chaque trace sismique. C'est uniquement dans cette fenêtre de temps que les traces sismiques seront étudiées.
- ◆ Dans la seconde étape, le maximum d'**attributs sismiques** (amplitude, énergie des amplitudes, variation des amplitudes...) **sont extraits**, pour chaque trace sismique.
- ◆ La troisième étape dépend de la nature et de la quantité de l'information donnée par la sismique.

Si la donnée sismique donne peu d'information et permet uniquement de regrouper les traces sismiques par famille, cette dernière étape consiste à **déterminer**, puis à **interpréter les faciès sismiques**. Pour déterminer les faciès sismiques, l'ensemble des traces sismiques est représenté dans un espace multidimensionnel généré par les attributs sismiques. Dans cet espace, les traces sismiques sont regroupées à l'aide de la méthode des k-plus proches voisins. Un faciès sismique est alors attribué à chaque groupe de traces, ce faciès étant bien entendu représentatif du groupe de traces sismiques auquel il est attribué. L'interprétation de ces faciès sismiques s'effectue ensuite à l'aide des puits. Pour chaque puits, une trace sismique est calculée en moyennant les traces les plus proches de ce puits. Ces traces sismiques calculées aux puits permettent de créer un lien entre les faciès sismiques et les faciès géologiques (ou lithofaciès). C'est la **calibration qualitative**.

Si la donnée sismique donne beaucoup d'informations et permet de quantifier une proportion de lithofaciès ou des propriétés pétrophysiques, cette dernière étape consiste à **calibrer les attributs sismiques** en terme de propriétés de réservoirs. Ces propriétés de réservoir peuvent être la porosité ou la perméabilité cumulée suivant la verticale, ..., l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs lithofaciès ou le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès. Pour cela, une corrélation entre les propriétés du réservoir et les attributs sismiques est recherchée aux puits. Par régression, cette cor-

rélation permet d'associer chaque trace sismique à une propriété géologique quantitative du réservoir. C'est la **calibration quantitative**.

Cette méthode permet donc de déterminer deux types de cartes :

- ◆ La calibration qualitative donne des cartes 2D horizontales de **zones géographiques** ayant des propriétés pétrophysiques constantes.
- ◆ La calibration quantitative permet l'obtention de cartes 2D horizontales des **propriétés géologiques des réservoirs**, notamment des cartes des épaisseurs cumulées d'un ou plusieurs lithofaciès, des cartes concernant le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès, la porosité ou la perméabilité cumulée suivant la verticale.

Connaissant l'épaisseur du réservoir, une carte 2D horizontale de la proportion, suivant la verticale, d'un (ou plusieurs) lithofaciès peut alors être calculée à partir de la carte 2D des épaisseurs du (ou des) lithofaciès. Le calcul à effectuer est le suivant :

$$P_f(x, y) = \frac{E_f(x, y)}{E_r(x, y)}$$

avec : $P_f(x, y)$, la proportion du lithofaciès f au point (x,y),
 $E_f(x, y)$, l'épaisseur du lithofaciès f au point (x,y),
 $E_r(x, y)$, l'épaisseur du réservoir au point (x,y).

Dans le cas où l'information déduite de la donnée sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès, le rapport des proportions des deux lithofaciès est obtenu de façon directe. En effet :

$$\frac{P_{f_1}(x, y)}{P_{f_2}(x, y)} = \frac{\frac{E_{f_1}(x, y)}{E_r(x, y)}}{\frac{E_{f_2}(x, y)}{E_r(x, y)}} = \frac{E_{f_1}(x, y)}{E_{f_2}(x, y)}$$

Lorsque l'information déduite de la sismique est d'un type différent des précédents, l'information déduite de la sismique ne sera pas "transformée" en probabilité de rencontrer un lithofaciès, mais sera utilisée telle quelle.

Dans la suite de cette partie, l'information dérivée de la sismique est notée $S(X)$, quel que soit son type (porosité ou perméabilité cumulée suivant la verticale, ..., proportion verticale d'un ou plusieurs lithofaciès ou rapport des proportions de deux lithofaciès) avec $X=(x,y)$, la localisation sur la carte 2D des proportions.

Lors de la première étape de l'extraction de l'information déduite de la sismique, le toit et la base de l'unité d'intérêt ont été repérés sur la section sismique. L'inversion de ces temps d'arrivées permet d'accéder à la profondeur du toit et de la base du réservoir, et de définir les différents maillages qui seront utilisés par la suite :

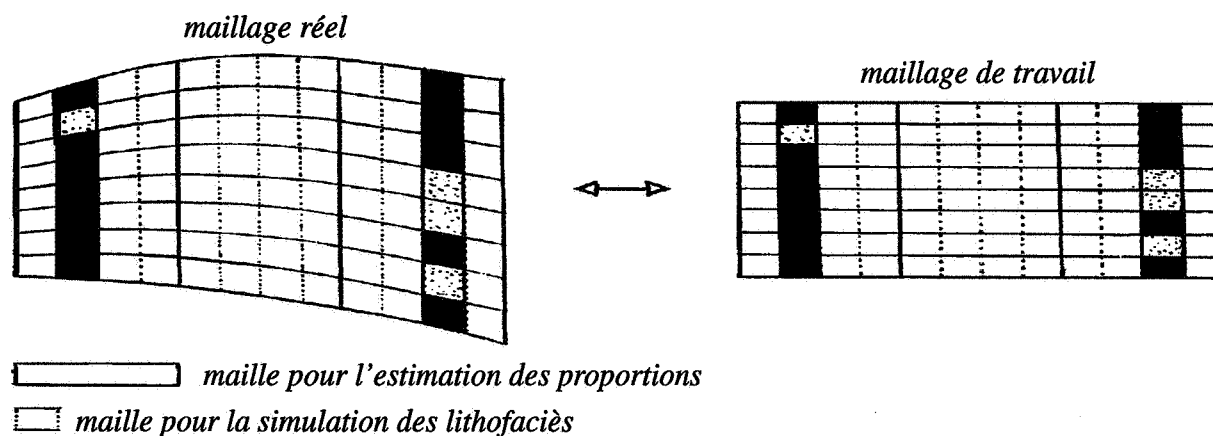


Fig. 1 : Les maillages

Tout les calculs et explications suivantes sont effectués dans le maillage de calcul. Les horizontales dont il est question sont donc des horizontales dans le maillage de calcul, mais ne sont pas forcément horizontales dans la réalité.

Une fois la simulation en lithofaciès simulée, la section de calcul est déformée afin de lui rendre sa forme originelle.

1.2. Les lithofaciès aux puits

Comme il a été écrit précédemment, les données de puits sont des lithofaciès. Afin d'avoir des données de puits de même nature que l'information déduite de la sismique, il a été choisi de "transformer" ces lithofaciès en proportion de lithofaciès. Pour cela, les données de puits et la sismique sont utilisées. Les puits ayant le même faciès sismique ou des faciès sismiques proches sont regroupés à condition que leurs faciès géologiques (lithofaciès) soient également proches. Ces familles de puits sont donc constituées à l'aide d'un va et vient entre les informations géologiques et les informations déduites de la sismique.

Pour chaque groupe de puits, une Courbe de Proportion Verticale est ensuite calculée. Le calcul d'une Courbe de Proportion Verticale consiste à calculer la proportion, pour chaque horizontale, de chaque lithofaciès du groupe de puits. Cette Courbe de Proportion Verticale est localisée au barycentre des puits ayant été utilisés pour la construire.

Par exemple, sur la figure suivante, les puits surmontés d'un cercle sont utilisés pour calculer la Courbe de Proportion Verticale 1 et ceux surmontés d'un triangle sont utilisés pour calculer la Courbe de Proportion Verticale 2.

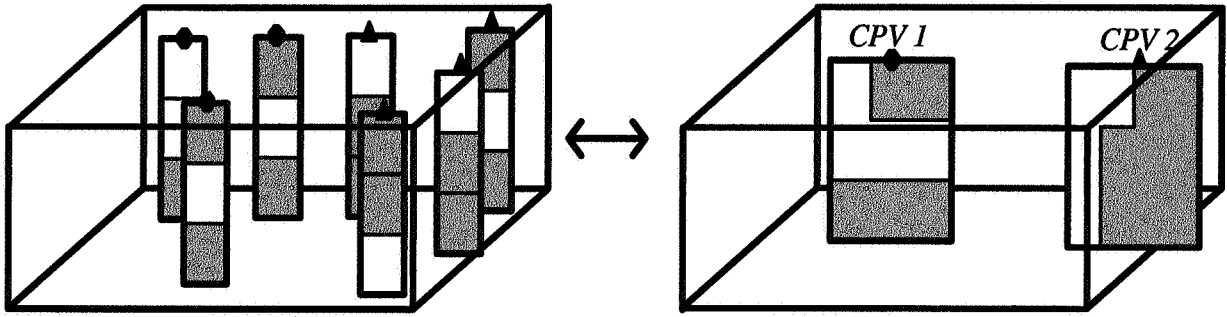


Fig. 2 : Le calcul des Courbes de Proportions Verticales

1.3. Les relations entre les covariances des données

Les données de proportion des différents lithofaciès sont liées entre elles. En effet, elles sont telles que :

$$\sum_{f=1}^{nb_facies} P_{f,z}(X) = 1 \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

avec : nb_facies, le nombre de lithofaciès,

$P_{f,z}(X)$, la proportion du lithofaciès f au point (X, z) .

Cette relation entre les proportions des différents lithofaciès induit des relations entre les covariances des proportions de ces lithofaciès :

$$\begin{aligned} \text{cov} \left[\sum_{e=1}^{nb_facies} P_{e,i}(X_\alpha); \sum_{f=1}^{nb_facies} P_{f,j}(X_\beta) \right] &= \text{Cov}[1, 1] = 0 \quad \forall X_\alpha \text{ et } X_\beta \\ \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{nb_facies} \sum_{f=1}^{nb_facies} \text{cov} [P_{e,i}(X_\alpha); P_{f,j}(X_\beta)] &= 0 \quad \forall X_\alpha \text{ et } X_\beta \\ \Leftrightarrow \sum_{e=1}^{nb_facies} \sum_{f=1}^{nb_facies} C_{ef,ij}^P(h) &= 0 \quad \forall h \end{aligned} \quad (1)$$

avec : $C_{ef,ij}^P(h)$, la covariance croisée de la proportion du lithofaciès e au niveau i et de la proportion du lithofaciès f au niveau j .

Dans le cas où une information déduite de la sismique est disponible, les proportions du ou des lithofaciès sont liées à l'information sismique. Les covariances des proportions du ou des lithofaciès en question sont donc également liées à la covariance de l'information déduite de la sismique.

♦ L'information sismique concerne l'épaisseur d'un lithofaciès

En effet, dans le cas où l'information déduite de la sismique concerne l'épaisseur d'un lithofaciès f , la contrainte sismique s'écrit :

$$\frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} P_{f,z}(X) = S_f(X) \quad \forall X$$

avec : NZ, le nombre de niveaux horizontaux.

Ce qui induit, au niveau des covariances :

$$\begin{aligned} C_{ef}^S(X_\alpha - X_\beta) &= \text{Cov}[S_e(X_\alpha); S_f(X_\beta)] = \\ &= \text{Cov}\left[\frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} P_{e,z}(X_\alpha); S_f(X_\beta)\right] = \\ &= \frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} \text{Cov}[P_{e,z}(X_\alpha); S_f(X_\beta)] \quad \forall X_\alpha \text{ et } X_\beta \end{aligned}$$

Ainsi :

$$C_{ef}^S(h) = \frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} C_{fe,z}^{SP}(h) \quad \forall h \quad (2)$$

avec : $C_{ef}^S(h)$, la covariance croisée des informations déduites de la sismique concernant les lithofaciès e et f,

$C_{fe,z}^{SP}(h)$, la covariance croisée de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f et de la proportion du lithofaciès e au niveau z.

Et, de la même façon :

$$\frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} P_{f,z}(X) = S_f(X) \quad \forall X$$

implique que :

$$\begin{aligned} C_{ef}^S(X_\alpha - X_\beta) &= \text{Cov}[S_e(X_\alpha); S_f(X_\beta)] = \\ &= \text{Cov}\left[\frac{1}{NZ} \sum_{i=1}^{NZ} P_{e,i}(X_\alpha); \frac{1}{NZ} \sum_{j=1}^{NZ} P_{f,j}(X_\beta)\right] = \\ &= \frac{1}{NZ^2} \sum_{i=1}^{NZ} \sum_{j=1}^{NZ} \text{Cov}[P_{e,i}(X_\alpha); P_{f,j}(X_\beta)] \quad \forall X_\alpha \text{ et } X_\beta \end{aligned}$$

La relation suivante est alors obtenue :

$$C_{ef}^S(h) = \frac{1}{NZ^2} \sum_{i=1}^{NZ} \sum_{j=1}^{NZ} C_{ef,ij}^P(h) \quad \forall h \quad (3)$$

♦ **L'information sismique concerne l'épaisseur cumulée de plusieurs lithofaciès**

Dans le cas où l'information sismique concerne l'épaisseur cumulée de N lithofaciès, la contrainte sismique est du même type que l'information concernant l'épaisseur d'un unique lithofaciès :

$$\frac{1}{NZ} \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} P_{f_{n,z}}(X) = S_f(X) \quad \forall X$$

Cette contrainte conduit donc à des relations entre les covariances qui sont proches des précédentes. En effet :

$$\begin{cases} C_{ef}^S(h) = \frac{1}{NZ} \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} C_{f_{n,z}}^{SP}(h) \\ C_{ef}^S(h) = \frac{1}{NZ^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \sum_{i=1}^{NZ} \sum_{j=1}^{NZ} C_{f_{n,e_m},ij}^P(h) \end{cases} \quad \forall h$$

♦ **L'information sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès**

Dans ce cas, l'information sismique est liée à des produits ou rapports de proportions et non plus simplement à une somme de proportions. Les relations entre les différentes covariances sont donc extrêmement compliquées, si bien qu'elles sont invérifiables et donc inutiles.

Lorsque l'information déduite de la sismique est d'un autre type que ceux qui sont exposés précédemment, d'autres relations entre les covariances existent. D'une manière générale, pour que l'ajustement des différentes covariances soit rigoureux, il faut :

- ♦ d'une part, beaucoup de Courbes de Proportions Verticales,
- ♦ et d'autre part que les relations entre les covariances simples et croisées des différents lithofaciès et de l'information déduite de la sismique soient vérifiées.

Ceci n'est pas possible en pratique, car :

- ♦ le nombre de Courbes de Proportions Verticales est en général très faible (de l'ordre de 5 ou 6 au maximum). Les covariances expérimentales ne sont donc pas fiables.
- ♦ Et le nombre de covariances simples et croisées est beaucoup trop important pour que ces covariances soient calculées et ajustées une à une.

Par conséquent, la modélisation des covariances simples et croisées des différents lithofaciès et de l'information déduite de la sismique nécessite de faire des choix.

2. La méthode de simulation des lithofaciès

Comme les données de puits et de sismique peuvent concerner des proportions de lithofaciès, le choix de la méthode de simulation s'est porté sur les Gaussiennes Seuillées. En effet, cette méthode est basée sur la probabilité de rencontrer un lithofaciès. Elle est par conséquent basée sur les proportions des différents lithofaciès. Dans ce paragraphe, la méthode de simulation des Gaussiennes Seuillées est donc tout d'abord exposée. Les techniques d'intégration de l'information issue de la donnée sismique sont ensuite présentées.

2.1. Rappels sur la méthode des Gaussiennes Seuillées

La méthode de simulation des Gaussiennes Seuillées permet de simuler des lithofaciès répartis de façon non stationnaire à l'aide d'une gaussienne sous-jacente stationnaire. Dans cette méthode, les lithofaciès sont représentés par des fonctions indicatrices telles que :

$$I_f(X, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } (X, z) \in \text{faciès } f \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La non stationnarité (horizontale ou verticale) de ces lithofaciès est restituée par des seuils de coupure qui varient suivant l'horizontale ou la verticale ([13] Matheron G. et al. : "Conditional simulation of the geometry of fluvi-deltaic reservoirs"). Lorsque les seuils sont constants, la simulation est stationnaire, et au contraire lorsque les seuils varient, la simulation est non stationnaire. Les lithofaciès sont en effet tels que :

$$(X, z) \in \text{lithofaciès } f \Leftrightarrow t_{f-1}(X, z) \leq Y(X, z) \leq t_f(X, z)$$

avec : $Y(X, z)$, la gaussienne stationnaire sous-jacente,

t_{f-1} et t_f les seuils de coupure de la gaussienne pour le lithofaciès f .

Schématiquement, les lithofaciès sont donc tels que :

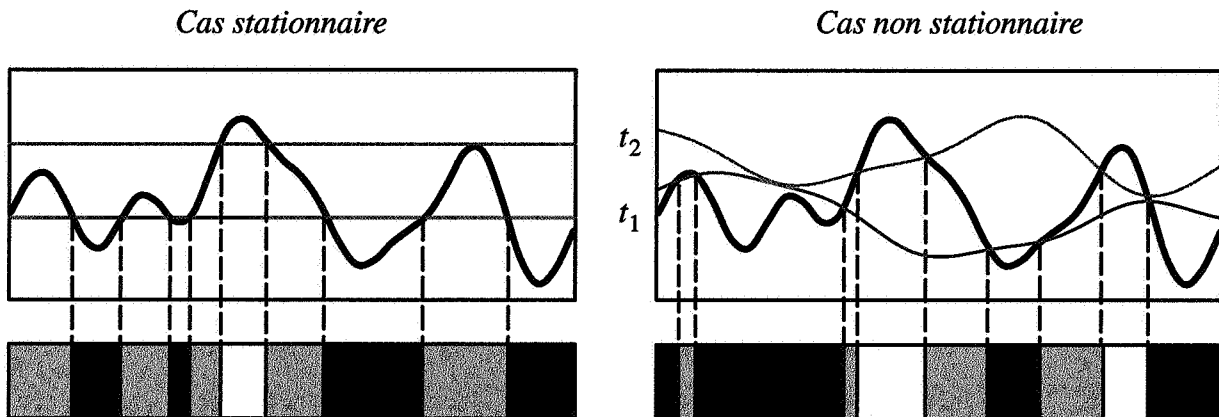


Fig. 3 : Les seuils de coupure de la gaussienne

De sorte qu'une même variable aléatoire gaussienne, seuillée de façon différente, donne des résultats différents au niveau des lithofaciès. Si les seuils sont constants, le lithofaciès 1 (en noir) n'est jamais en contact avec le lithofaciès 3 (en blanc). Par contre, si les seuils varient, il est possible que ces deux lithofaciès soient en contact.

Les seuils de coupure t_{f-1} et t_f sont directement liés aux proportions des lithofaciès par l'intermédiaire de la fonction de répartition de la gaussienne de la façon suivante :

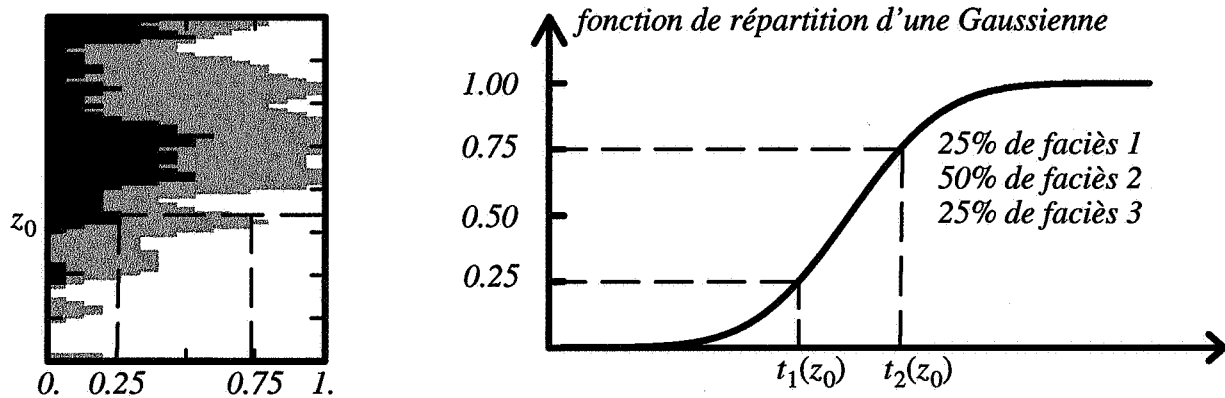


Fig. 4 : Lien entre les seuils de coupure de la gaussienne et les proportions des lithofaciès

Sur cet exemple, au niveau z_0 , il y a 25% du lithofaciès 1 (en noir), 50% de lithofaciès 2 (en gris) et 25% de lithofaciès 3 (en blanc). Le seuil $t_1(z_0)$ est donc choisi de telle sorte que 25% des valeurs prises par la gaussienne soient situées entre $-\infty$ et le seuil $t_1(z_0)$, donc de telle sorte que $P(Y < t_1(z_0)) = 0.25$.

avec : $P(A)$, la probabilité de l'événement A.

Cette probabilité $P(Y < t_1(z_0)) = 0.25$ est immédiatement donnée par la fonction de répartition de la gaussienne. De même, le seuil $t_2(z_0)$ est choisi de telle sorte que 50% des valeurs prises par la gaussienne soient situées entre les seuils $t_1(z_0)$ et $t_2(z_0)$, donc de telle sorte que 75% des valeurs prises par la gaussienne soient inférieures à $t_2(z_0)$. $t_2(z_0)$ est donc tel que $P(Y < t_2(z_0)) = 0.75$, ce qui de même que précédemment est immédiatement donné par la fonction de répartition de la gaussienne.

En résumé, la simulation des lithofaciès par la méthode des Gaussiennes Seuillées s'effectue en deux étapes :

- ◆ La première étape consiste à **simuler une variable aléatoire gaussienne** $Y(X, z)$ dont la covariance est liée aux seuils et aux covariances simples et croisées des lithofaciès ([7] Beucher H., Galli A., Le Loc'h G., Ravenne C. & Heresim group : "Including a regional trend in reservoir modelling using the truncated Gaussian method").
- ◆ Lors de la seconde étape, les **lithofaciès sont attribués à l'aide des seuils**. Comme il a été indiqué précédemment, ces seuils de coupures peuvent être constants ou non. Ces seuils sont liés aux proportions des différents lithofaciès.

Cette méthode de simulation est utilisée dans le logiciel HERESIM. Dans ce logiciel, les puits (en lithofaciès) permettent d'avoir une idée de la variabilité verticale du milieu. Ici, une information supplémentaire est disponible : l'information déduite de la sismique. Cette information indique comment le milieu varie horizontalement. En combinant ces deux données (données de puits et information déduite de la sismique), il est possible d'estimer la variabilité du milieu dans toutes les directions de l'espace, cette variabilité se traduisant par un bloc 3D de proportions des différents lithofaciès.

2.2. Estimation du bloc 3D de proportions

L'information déduite de la sismique peut être soit qualitative, soit quantitative. L'estimation du bloc 3D de proportions peut donc se faire de différentes façons, et à partir de différentes données. En effet trois approches ont été envisagées :

- ◆ Lorsque l'information déduite de la sismique est qualitative, elle définit des zones géographiques. Dans ce cas, l'estimation du bloc 3D de proportion est extrêmement simple puisqu'il consiste à **attribuer une Courbe de Proportion Verticale à chaque zone**. Les proportions d'un lithofaciès sont donc constantes suivant l'horizontale pour chaque maille de la zone en question.
- ◆ Lorsque l'information déduite de la sismique est quantitative, l'estimation du bloc 3D de proportions consiste à **utiliser les données de puits brutes (en lithofaciès) et l'information déduite de la sismique**. Cette méthode d'estimation a été envisagée par L.Y. Hu ([10] Hu L.Y. : "Vers un Heresim non stationnaire en 3D" et [11] Hu L.Y. : "Estimation des fonctions 3D de proportions lithologiques avec des données de puits et des données sismiques. Etude de l'unité supérieure du Mesa Verde").
- ◆ La méthode d'estimation qui est envisagée ici **utilise également une information déduite de la donnée sismique de type qualitatif et des Courbes de Proportions Verticales** (données de puits transformées).

Ces deux dernières méthodes de calcul sont assez proches l'une de l'autre à deux exceptions près :

- ◆ Les données ne concernent pas les mêmes supports. En effet, les données de puits brutes sont des données ponctuelles. Le krigeage utilisé pour estimer les proportions du bloc 3D est donc un krigeage en moyenne par bloc. Les Courbes de Proportions Verticales sont des valeurs moyennes qui sont supposées avoir le même support que la maille du bloc 3D de proportion que l'on veut estimer.
- ◆ Autre différence importante, l'utilisation des Courbes de Proportions Verticales permet de les déplacer et de les dupliquer, suivant les informations et les intuitions des géologues et des géophysiciens, afin d'étendre la zone d'influence de certaines Courbes de Proportions Verticales ou d'informer des zones sans information de puits. Ceci n'est pas envisageable pour des puits.

Une comparaison rapide des résultats obtenus par ces deux méthodes est effectuée dans [15] Moulière D. & Groupe Heresim : " Alize, Guide d'utilisation".

Au vu des données, le choix des différentes méthodes de construction du bloc 3D de proportions s'est imposé. En effet, connaissant des Courbes de Proportions Verticales en $X_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$, donc connaissant des proportions en des points $(X_\alpha, z) = (x_\alpha, y_\alpha, z)$ donnés, le krigeage ou le cokrigeage paraissent être les méthodes les mieux adaptées à l'estimation du bloc 3D de proportion en tout point du bloc. Une simulation conditionnée des proportions des lithofaciès aurait également pu être envisagée, mais cette méthode de construction du bloc 3D de proportion aurait donné un résultat plus erratique qu'avec le krigeage ou le cokrigeage. Or, un résultat plutôt lisse paraît mieux représenter des proportions qui sont des valeurs moyennes.

2.2.1. Le krigeage sous contrainte d'agrégation

Etant donné le nombre relativement important de données de proportion : $\text{nb_cpv} * \text{NZ}$ (avec : nb_cpv , le nombre de Courbes de Proportions Verticales), il a semblé judicieux d'estimer, pour chaque plan horizontal z et pour chaque lithofaciès f , la proportion $P_{f,z}(X)$ au point $X = (x, y)$ par un krigeage ordinaire par plan (et non par un krigeage sur l'ensemble des données). C'est le krigeage ordinaire qui a été choisi, car bien que la valeur moyenne des proportions soit connue (c'est tout simplement la valeur moyenne de l'information sismique), cette valeur n'est pas constante sur l'ensemble du champ. Pour cette raison, un krigeage à moyenne inconnue : le krigeage ordinaire, est utilisé. $P_{f,z}(X)$ est donc estimé par :

$$P_{f,z}^*(X) = \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f,z}^\alpha P_{f,z}(X_\alpha) \quad \begin{array}{l} \forall z = 1, \dots, \text{NZ} \\ \forall f = 1, \dots, \text{nb_facies} \end{array}$$

avec : $\lambda_{f,z}^\alpha$, le poids de krigeage de $P_{f,z}(X_\alpha)$.

Pour estimer $P_{f,z}(X)$, les proportions des autres niveaux auraient également pu être utilisées, mais ceci aurait considérablement augmenté (c'est-à-dire multiplié par NZ) le nombre de poids de krigeage à calculer et aurait nécessité la connaissance de la covariance des proportions non plus uniquement sur un niveau horizontal, mais également entre les niveaux horizontaux. Néanmoins, il existe une méthode peu coûteuse en temps et en calcul qui permet de restituer les corrélations verticales et d'utiliser les données de proportions des niveaux très légèrement supérieurs et inférieurs au niveau pour lequel les proportions sont estimées. Cette méthode consiste simplement à lisser les Courbes de Proportions Verticales sur 3 ou 5 niveaux.

Pour que l'erreur d'estimation $P_{f,z}(X) - P_{f,z}^*(X)$ soit une combinaison linéaire autorisée, les proportions sont supposées être stationnaires d'ordre 2 pour chaque plan horizontal.

La moyenne des proportions sur chaque plan étant inconnue, la condition d'universalité s'écrit :

$$E[P_{f,z}(X) - P_{f,z}^*(X)] = 0 \quad \begin{array}{l} \forall z = 1, \dots, \text{NZ} \\ \forall f_1, f_2, \dots \end{array}$$

Donc, si les proportions sont supposées stationnaires d'ordre 2 pour chaque plan horizontal z :

$$E\left[P_{f,z}(X) - \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f,z}^\alpha P_{f,z}(X_\alpha)\right] = 0 \quad \begin{array}{l} \forall z = 1, \dots, \text{NZ} \\ \forall f_1, f_2, \dots \end{array}$$

Par conséquent :

$$E[P_{f,z}] \left\{ 1 - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \right\} = 0 \quad \begin{matrix} \forall z = 1, \dots, NZ \\ \forall f_1, f_2, \dots \end{matrix}$$

Finalement :

$$\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} = 1 \quad \begin{matrix} \forall z = 1, \dots, NZ \\ \forall f_1, f_2, \dots \end{matrix} \quad (4)$$

Il est à noter que cette condition d'universalité est incompatible avec l'information déduite de la sismique dans le cas où il n'y a qu'une seule Courbe de Proportion Verticale. En effet, cette condition impose alors que la Courbe de Proportion Verticale soit attribuée à toutes les colonnes du bloc 3D de proportions, ce qui induirait une information déduite de la sismique constante sur l'ensemble du champ. Cette méthode d'estimation du bloc 3D de proportions ne sera donc pas utilisée dans le cas où une seule Courbe de Proportion Verticale est disponible.

Cette stationnarité d'ordre 2 est compatible avec des variations non systématiques des proportions des lithofaciès (c'est-à-dire lorsqu'il n'existe pas de dérive nette). Si ce n'était pas le cas, il faudrait travailler en non stationnaire et utiliser un krigeage en FAI-k.

2.2.1.1. Le système de krigeage

Pour établir le système de krigeage de cette estimation, il suffit maintenant de minimiser la variance d'estimation :

$$\begin{aligned} \text{Var}[P_{f,z}(X) - P_{f,z}^*(X)] &= \\ &= \text{Var} \left[P_{f,z}(X) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) \right] = \\ &= C_{f,z}^P(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) + \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) \end{aligned}$$

avec : $C_{f,z}^P(h)$, la covariance des proportions du lithofaciès f pour le niveau z .

Pour chaque lithofaciès f et chaque niveau horizontal z , la minimisation de la variance est effectuée d'abord sous la condition d'universalité (4) puis de façon globale avec une seconde condition.

♦ Sans information déduite de la sismique

Pour les lithofaciès pour lesquels il n'y a pas d'information sismique, la minimisation de la variance d'estimation s'effectue sous l'unique condition d'universalité. Les $\lambda_{f,z}^{\alpha}$ et $\mu_{f,z}$ recherchés sont donc tels que la relation suivante est minimale :

$$\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + C_{f,z}^P(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) + 2\mu_{f,z} \left[\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} - 1 \right]$$

avec : $\mu_{f,z}$ le paramètre de Lagrange pour le lithofaciès f au niveau z .

La minimisation de ceci, pour l'ensemble des niveaux horizontaux z nous conduit au système de krigeage :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f,z} = C_{f,z}^P(X - X_{\alpha}) & \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 \quad \dots \quad 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{f,z}^{\beta} \\ \mu_{f,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 5 : La matrice de krigeage sans information déduite de la sismique

La variance d'estimation du krigeage ordinaire étant :

$$\sigma_{K_{f,z}}^2 = C_{f,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) - \mu_{f,z} \quad \begin{matrix} \forall f = 1, \dots, nb_facies \\ \forall z = 1, \dots, NZ \end{matrix}$$

♦ Avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur d'un lithofaciès

Pour les lithofaciès concernés par une information déduite de la sismique indiquant l'épaisseur d'un lithofaciès, l'intégration de la sismique s'effectue en ajoutant une condition à la minimisation de la variance d'estimation, condition qui a été nommée "contrainte sismique". Cette nouvelle condition de minimisation assure simplement que :

$$\frac{1}{NZ} \sum_{z=1}^{NZ} P_{f,z}^*(X) = S_f(X)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) = NZ.S_f(X)$$

Contrairement à la condition d'universalité (ou plus exactement aux conditions d'universalité, car il y en a une pour chaque plan horizontal z), la contrainte sismique concerne l'ensemble des plans horizontaux. Les $\lambda_{f,z}^{\alpha}$, $\mu_{f,z}$ et ν_f recherchés sont donc tels que la relation suivante est minimale :

$$\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + C_{f,z}^P(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) +$$

$$+ 2\mu_{f,z} \left[\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} - 1 \right] + 2\nu_f \left[\sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) - NZ.S_f(X) \right]$$

avec : ν_f le poids de krigeage de la contrainte sismique.

La minimisation de cette expression conduit au système de krigeage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f,z} + \nu_f P_{f,z}(X_{\alpha}) = C_{f,z}^P(X - X_{\alpha}) \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} = 1 \\ \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} P_{f,z}(X_{\beta}) = NZ.S_f(X) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall z = 1, \dots, NZ \\ \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \forall z = 1, \dots, NZ \end{array} \quad (6)$$

ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$C_{f,1}^P(X_\alpha - X_\beta)$	1	-----	0 ----- 0	0	$P_{f,1}(X_\alpha)$	$\lambda_{f,1}^\beta$	$=$	$C_{f,1}^P(X_\alpha - X)$
1 ----- 1	0	-----	0 ----- 0	0	0	$\mu_{f,1}$		1
$\vdots$	$\vdots$	$\diagdown$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0 ----- 0	0	-----	$C_{f,NZ}^P(X_\alpha - X_\beta)$	1	$P_{f,NZ}(X_\alpha)$	$\lambda_{f,NZ}^\beta$		$C_{f,NZ}^P(X_\alpha - X)$
0 ----- 0	0	-----	1 ----- 1	0	0	$\mu_{f,NZ}$		1
$P_{f,1}(X_\beta)$		-----	$P_{f,NZ}(X_\beta)$	0	0	ν_f		$NZ.S(X)$

Fig. 6 : La matrice de krigeage avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur d'un lithofaciès

Contrairement au cas où il n'y a pas d'information sismique, le calcul des poids de krigeage s'effectue en même temps pour l'ensemble des niveaux horizontaux z . Dans le cas où il y a une information sismique, ce calcul est donc assez lourd, car il nécessite l'inversion d'une matrice de taille $(nb_cpv + 1) * NZ + 1$, pour chaque lithofaciès. La résolution de ce système de krigeage peut être simplifiée de façon très importante en évitant l'inversion de cette matrice grâce à une astuce de calcul qui est exposée dans l'annexe 2.

La variance d'estimation de ce krigeage sous contrainte d'agrégation est :

$$\sigma_{K_{f,z}}^2 = C_{f,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha [C_{f,z}^P(X_\alpha - X) + \nu_f P_{f,z}(X_\alpha)] - \mu_{f,z} \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

La variance d'estimation est dépendante des proportions du lithofaciès f aux points de données.

Pour des raisons évidentes de simplification des écritures des matrices, cette matrice est représentée par la suite par :

$$\begin{bmatrix} C_f^P(X_\alpha - X_\beta) & P_f(X_\alpha) \\ P_f^T(X_\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_f^\alpha \\ \nu_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f^P(X_\alpha - X) \\ NZ.S(X) \end{bmatrix}$$

Fig. 7 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur d'un lithofaciès

avec : $C_f^P(X_\alpha - X_\beta)$, la matrice bloc diagonale contenant les matrices de krigeage ordinaire par plan du lithofaciès f pour tous les plans horizontaux.

$P_f(X_\alpha)$, le vecteur contenant la contribution de l'ensemble des Courbes de Proportions Verticales pour l'ensemble des niveaux horizontaux.

$C_f^P(X_\alpha - X)$, le vecteur contenant les covariances croisées entre la sismique concernant le lithofaciès f et les proportions du lithofaciès f de toutes les Courbes de Proportions Verticales à tous les niveaux horizontaux.

L'extension de ce cas au cas plus général où l'information déduite de la sismique concerne la somme des épaisseurs de plusieurs lithofaciès est immédiate.

♦ Avec information déduite de la sismique concernant l'épaisseur cumulée de plusieurs lithofaciès.

Dans le cas où l'information déduite de la sismique concerne l'épaisseur de N lithofaciès (avec $N < \text{nb_facies}$), la contrainte sismique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{NZ} \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} P_{f_n,z}^*(X) &= S_f(X) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{NZ} \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f_n,z}^\alpha P_{f_n,z}(X_\alpha) &= S_f(X) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f_n,z}^\alpha P_{f_n,z}(X_\alpha) &= NZ.S_f(X) \end{aligned}$$

Les $\lambda_{f_n,z}$, $\mu_{f_n,z}$ et ν_f recherchés sont donc tels que la relation suivante est minimale pour tout $f_n = f_1, \dots, f_N$ et pour tout $z = 1, \dots, NZ$:

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \sum_{\beta=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f_n,z}^\alpha \lambda_{f_n,z}^\beta C_{f_n,z}^P(X_\alpha - X_\beta) + C_{f_n,z}^P(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f_n,z}^\alpha C_{f_n,z}^P(X_\alpha - X) +$$

$$+ 2\mu_{f_n,z} \left[\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^{\alpha} - 1 \right] + 2v_f \left[\sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^{\alpha} P_{f_n,z}(X_{\alpha}) - NZ.S_f(X) \right]$$

Les $\lambda_{f_n,z}$, $\mu_{f_n,z}$ et v_f recherchés sont donc solutions du système de krigeage :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^{\beta} C_{f_n,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f_n,z} + v_f P_{f_n,z}(X_{\alpha}) = C_{f_n,z}^P(X - X_{\alpha}) \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^{\beta} = 1 \\ \sum_{n=1}^N \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^{\beta} P_{f_n,z}(X_{\beta}) = NZ.S_f(X) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall z = 1, \dots, NZ \\ \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \forall f_n = f_1, \dots, f_N \\ \forall z = 1, \dots, NZ \\ \forall f_n = f_1, \dots, f_N \end{array}$$

soit, sous forme matricielle simplifiée :

$$\begin{bmatrix} C_{f_1}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & \dots & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & P_{f_1}(X_{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \dots & C_{f_N}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & P_{f_N}(X_{\alpha}) \\ P_{f_1}^t(X_{\alpha}) & \dots & P_{f_N}^t(X_{\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{f_1}^{\alpha} \\ \vdots \\ \lambda_{f_N}^{\alpha} \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{f_1}^P(X_{\alpha} - X) \\ \vdots \\ C_{f_N}^P(X_{\alpha} - X) \\ NZ.S(X) \end{bmatrix}$$

Fig. 8 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant l'épaisseur cumulée de plusieurs lithofaciès

Cette matrice est absolument du même type que celle du cas où l'information déduite de la sismique est la proportion d'un unique lithofaciès (figure 6). En effet, cette matrice a la même "forme" que la matrice précédente. Les matrices $C_{f_i}^P(X_{\alpha} - X_{\beta})$ pour $i = 1, \dots, N$ sont des matrices blocs diagonales contenant les matrices de krigeage ordinaire des lithofaciès f_i pour tous les niveaux horizontaux. L'ensemble de ces matrices est donc du même type que la matrice $C_f^P(X_{\alpha} - X_{\beta})$ de la figure 7. Seule la taille de ces matrices est différente. La matrice $C_f^P(X_{\alpha} - X_{\beta})$ est de taille $(nb_cpv + 1).NZ$ et l'ensemble des matrices $C_{f_i}^P(X_{\alpha} - X_{\beta})$ est de taille $(nb_cpv + 1).NZ.N$.

De même, le vecteur $P_f(X_\alpha)$ et l'ensemble des vecteurs $P_{f_i}(X_\alpha)$ d'une part, et le vecteur $C_f^P(X_\alpha - X)$ et l'ensemble des vecteurs $C_{f_i}^P(X_\alpha - X)$ d'autre part, ont même "forme" générale, mais sont de tailles différentes. Utiliser une information déduite de la sismique qui concerne les épaisseurs cumulées sur NZ niveaux horizontaux de N lithofaciès est donc (du point de vue matriciel et quantité de calcul) équivalent à utiliser une information déduite de la sismique concernant les épaisseurs cumulées d'un lithofaciès sur $NZ \times N$ niveaux horizontaux. Comme précédemment, la résolution de ce système de krigeage peut être simplifiée à l'aide de l'astuce de calcul exposée dans l'annexe 2.

La variance d'estimation du krigeage sous contrainte d'agrégation, lorsque l'information déduite de la sismique concerne les épaisseurs cumulées de plusieurs lithofaciès, est telle que :

$$\sigma_{K_{f_n,z}}^2 = C_{f_n,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_n,z}^\alpha \left[C_{f_n,z}^P(X_\alpha - X) + v_{f_n} P_{f_n,z}(X_\alpha) \right] - \mu_{f_n,z} \quad \begin{matrix} \forall f_n = f_1, \dots, f_N \\ \forall z = 1, \dots, NZ \end{matrix}$$

Pour les lithofaciès f_i , $i = 1, \dots, N$, sur lesquels porte la contrainte sismique, cette variance d'estimation est la même que celle du krigeage sous contrainte d'agrégation lorsque l'information déduite de la sismique concerne un unique lithofaciès. Seuls les poids de krigeage sont différents.

◆ Avec une information déduite de la sismique concernant le rapport des épaisseurs de deux faciès.

Dans le cas d'une information déduite de la sismique qui concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès, l'intégration de l'information déduite de la sismique se fait de la même façon que précédemment. Seule la contrainte sismique change. Cette contrainte devient :

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{z=1}^{NZ} P_{f_1,z}^*(X)}{\sum_{z=1}^{NZ} P_{f_2,z}^*(X)} &= S(X) \\ \Leftrightarrow \sum_{z=1}^{NZ} P_{f_1,z}^*(X) &= S(X) \sum_{z=1}^{NZ} P_{f_2,z}^*(X) \\ \Leftrightarrow \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_1,z} P_{f_1,z}(X_\alpha) &= S(X) \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_2,z} P_{f_2,z}(X_\alpha) \end{aligned}$$

Les $\lambda_{f,z}^\alpha$, $\mu_{f,z}$ et v_f recherchés sont donc tels que la relation suivante est minimale pour $f = f_1, f_2$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha \lambda_{f,z}^\beta C_{f,z}^P(X_\alpha - X_\beta) + C_{f,z}^P(0) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha C_{f,z}^P(X_\alpha - X) + \\ &+ 2\mu_{f,z} \left[\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha - 1 \right] + 2v_f \left[\sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_1,z}^\alpha P_{f_1,z}(X_\alpha) - S(X) \cdot \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_2,z}^\alpha P_{f_2,z}(X_\alpha) \right] \end{aligned}$$

La minimisation de cette relation conduit au système de krigeage suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_1,z}^{\beta} C_{f_1,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f_1,z} + v_f P_{f_1,z}(X_{\alpha}) = C_{f_1,z}^P(X - X_{\alpha}) \quad \forall z = 1, \dots, NZ \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_2,z}^{\beta} C_{f_2,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f_2,z} - v_f S(X) \cdot P_{f_2,z}(X_{\alpha}) = \\ = C_{f_2,z}^P(X - X_{\alpha}) \quad \forall z = 1, \dots, NZ \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} = 1 \quad \forall z = 1, \dots, NZ \\ \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_1,z}^{\beta} P_{f_1,z}(X_{\beta}) - S(X) \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_2,z}^{\beta} P_{f_2,z}(X_{\beta}) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ f = f_1, f_2 \end{array}$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle simplifiée :

$$\left[\begin{array}{c|c|c} C_{f_1}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & \begin{array}{c} 0 \text{ --- } 0 \\ \vdots \\ 0 \text{ --- } 0 \end{array} & P_{f_1}(X_{\alpha}) \\ \hline \begin{array}{c} 0 \text{ --- } 0 \\ \vdots \\ 0 \text{ --- } 0 \end{array} & C_{f_2}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & -S(X) \cdot P_{f_2}(X_{\alpha}) \\ \hline P_{f_1}^t(X_{\alpha}) & -S(X) \cdot P_{f_2}^t(X_{\alpha}) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \lambda_{f_1}^{\alpha} \\ \lambda_{f_2}^{\alpha} \\ v_f \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C_{f_1}^P(X_{\alpha} - X) \\ C_{f_2}^P(X_{\alpha} - X) \\ 0 \end{array} \right]$$

Fig. 9 : La matrice de krigeage simplifiée avec une information déduite de la sismique concernant le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès

Bien que cette information sismique soit légèrement plus compliquée que celle qui concerne l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs lithofaciès, il est évident que l'estimation des proportions n'est pas beaucoup plus difficile et ne demande guère plus d'information que les estimations précédentes.

Lorsque l'information déduite de la sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès, la variance d'estimation du krigeage est différente pour les deux lithofaciès en question. En effet, pour le lithofaciès 1, la variance d'estimation du krigeage est :

$$\sigma_{K_{f_1,z}}^2 = C_{f_1,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_1,z}^{\alpha} \left[C_{f_1,z}^P(X_{\alpha} - X) + v_{f_1} P_{f_1,z}(X_{\alpha}) \right] - \mu_{f_1,z} \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

Cette variance d'estimation est identique à celle du krigeage avec contrainte d'agrégation pour une information sismique qui concerne l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs lithofaciès. Pour le lithofaciès 2, la variance d'estimation du krigeage vaut :

$$\sigma_{K_{f_2,z}}^2 = C_{f_2,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f_2,z}^{\alpha} \left[C_{f_2,z}^P(X_{\alpha} - X) - v_{f_2} S(X) \cdot P_{f_2,z}(X_{\alpha}) \right] - \mu_{f_2,z} \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

Cette méthode d'estimation du bloc 3D de proportion par un krigeage par plan ne nécessite pas l'ajustement de toutes les covariances. En effet, quel que soit le type de l'information déduite de la sismique, seules les covariances des proportions du lithofaciès f au niveau z $C_{f,z}^P(h)$ sont nécessaires pour tous les lithofaciès et tous les niveaux horizontaux. Les relations qui ont été exposées au paragraphe 1.3. ne permettent pas d'aider lors du choix de modèles de covariance. En effet, quels que soient les modèles de covariance choisis pour $C_{f,z}^P(h)$, il existe toujours des modèles pour les autres covariances (notamment les covariances croisées) tels que les relations (1), (2) et (3) soient vérifiées.

2.2.1.2. Les hypothèses simplificatrices

Précédemment, il a été vu que les relations exprimées au paragraphe 1.3. ne sont pas utilisables en pratique et que des choix doivent être faits quant aux covariances $C_{f,z}^P(h)$ qui ne peuvent être ajustées une à une. Pour rendre possible l'ajustement des covariances des proportions, il est donc supposé que la covariance d'un lithofaciès f est la même pour tous les niveaux z . En effet, dans le logiciel HERESIM, le réservoir est séparé en plusieurs unités sédimentaires. La simulation des lithofaciès se fait indépendamment pour chaque unité sédimentaire. De même, le calcul des proportions est effectué par unité. Il est donc envisageable qu'une unité sédimentaire corresponde à un environnement de dépôt constant, et à une covariance identique pour tous les niveaux. De cette façon, il ne reste à ajuster qu'une unique covariance $C_{f,z}^P(h)$, qui ne dépend plus de z et que l'on peut donc noter $C_f^P(h)$ pour chaque lithofaciès f . Il est à noter que malgré cette supposition, rien n'implique que $C_f^S(h) = C_f^P(h)$.

En pratique, dans le cas où il n'y a pas suffisamment de données de proportions, l'ajustement de la covariance $C_f^P(h)$ n'est pas possible. Cette covariance est donc choisie par le géologue, en accord avec ses intuitions.

Cette simplification n'est bien entendu pas unique, elle n'est pas applicable dans tous les cas. Il est évident que pour certaines unités sédimentaires, les géologues peuvent juger plus subtil de les séparer en plusieurs parties suivant la verticale. Il peut alors être supposé que chaque partie du réservoir a sa propre covariance. Pour le cas où l'information déduite de la sismique concerne plusieurs unités sédimentaires du réservoir, cette simplification se réduit à utiliser plusieurs covariances (autant que de sous-unités) au lieu d'une seule.

2.2.2. Le cokrigage

Les informations déduites de la sismique de type quantitatif ne concernent pas forcément les épaisseurs cumulées ou le rapport des épaisseurs des lithofaciès. En effet, ces informations peuvent concerner différentes données (porosité, perméabilité, ...) cumulées suivant la verticale et corrélées aux proportions des lithofaciès. D'autres méthodes d'estimation du bloc 3D de proportion ont donc été envisagées en utilisant un cokrigage des proportions et de l'information sismique. L'intégration de la sismique directement au niveau du cokrigage permet de ne plus l'introduire comme contrainte dans la minimisation de la variance et donc de ne plus avoir à calculer, en même temps, les poids de krigage pour l'ensemble des niveaux horizontaux.

2.2.2.1. Le système de cokrigage

Comme pour le krigage, l'estimation s'effectue de façon différente s'il y a une information déduite de la sismique ou non.

♦ Sans information déduite de la sismique

Pour les lithofaciès qui ne sont pas concernés par une information sismique, l'estimation est faite à l'aide d'un krigage ordinaire par plan, comme il est expliqué au paragraphe 2.2.1.1.

♦ Avec une information déduite de la sismique

Quel que soit le type d'information déduite de la sismique, la proportion $P_{f,z}(X)$ est estimée par :

$$P_{f,z}^*(X) = \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) + \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} S_f(X_{\varepsilon}) \quad (7)$$

avec : nb_sis, le nombre de données sismiques,

$\delta_{f,z}^{\varepsilon}$, le poids de cokrigage de l'information déduite de la sismique concernant le lithofaciès f au point X_{ε} .

Comme pour la méthode de krigage, les proportions $P_{f,z}(X)$ auraient pu être estimées en prenant en compte les proportions de tous les niveaux horizontaux. Mais il a été choisi de n'utiliser qu'un plan et donc de n'effectuer qu'un cokrigage par plan (en ce qui concerne les données de proportion). En effet, comme pour le krigage, le fait d'utiliser toutes les proportions aurait conduit à des inversions de matrices de grande taille. De la même façon que pour la méthode précédente, il est possible de faire intervenir les proportions des plans horizontaux adjacents en lissant les Courbes de Proportions Verticales.

La combinaison linéaire (7), permettant d'estimer la proportion $P_{f,z}(X)$, est toujours autorisée si le milieu est supposé stationnaire d'ordre 2 par plan. En ce qui concerne la condition d'universalité, elle est telle que :

$$\begin{aligned} E[P_{f,z}(X) - P_{f,z}^*(X)] &= 0 \\ \Rightarrow E\left[P_{f,z}(X) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) + \sum_{\varepsilon=1}^{ns_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} S_f(X_{\varepsilon})\right] &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où il est supposé qu'il n'existe pas de relation algébrique (linéaire) entre $P_{f,z}(X)$ et $S_f(X)$, ce qui paraît raisonnable ici car les proportions sont estimées plan par plan, cette expression peut s'écrire :

$$E[P_{f,z}] \left\{ 1 - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \right\} + E[S_f] \sum_{\varepsilon=1}^{ns_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} = 0$$

$$=> \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} = 1 \\ \sum_{\varepsilon=1}^{ns_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

Les poids de cokrigage $\lambda_{f,z}^{\alpha}$, $\delta_{f,z}^{\varepsilon}$, $\mu_{f,z}$ et $\nu_{f,z}$ recherchés sont donc ceux qui minimisent la variance d'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}[P_{f,z}(X) - P_{f,z}^*(X)] &= \\ &= \text{Var} \left[P_{f,z}(X) - \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) + \sum_{\varepsilon=1}^{ns_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} S_f(X_{\varepsilon}) \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \sum_{\delta=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} \delta_{f,z}^{\delta} C_f^S(X_{\varepsilon} - X_{\delta}) + C_{f,z}^P(0) + \\ &\quad + 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \lambda_{f,z}^{\alpha} \delta_{f,z}^{\varepsilon} C_{f,z}^{PS}(X_{\alpha} - X_{\varepsilon}) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nb_sis} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X - X_{\alpha}) + \\ &\quad - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} C_{f,z}^{PS}(X_{\varepsilon} - X) \end{aligned}$$

Le calcul des poids de cokrigage se fait sous une unique condition, la condition d'universalité. Ce qui permet d'obtenir le système de cokrigage suivant :

$$\begin{cases}
 \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \sum_{\delta=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\delta} C_{f,z}^{PS}(X_{\alpha} - X_{\delta}) + \mu_{f,z} = \\
 \qquad \qquad \qquad = C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) \quad \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\
 \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^{PS}(X_{\varepsilon} - X_{\beta}) + \sum_{\delta=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\delta} C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X_{\delta}) + \nu_{f,z} = \\
 \qquad \qquad \qquad = C_{f,z}^{PS}(X_{\varepsilon} - X) \quad \forall \varepsilon = 1, \dots, nb_sis \\
 \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} = 1 \\
 \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} = 0
 \end{cases}$$

Le système de cokrigage obtenu est beaucoup plus simple que le système de krigeage de la méthode précédente puisque, sous forme matricielle, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & C_{f,z}^{SP}(X_{\alpha} - X_{\delta}) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\
 1 \text{ ----- } 1 & 0 & 0 \text{ ----- } 0 & 0 \\
 C_{f,z}^{SP}(X_{\varepsilon} - X_{\beta}) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X_{\delta}) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\
 0 \text{ ----- } 0 & 0 & 1 \text{ ----- } 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \lambda_{f,z}^{\beta} \\
 \mu_{f,z} \\
 \delta_{f,z}^{\delta} \\
 \nu_{f,z}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) \\
 1 \\
 C_{f,z}^{SP}(X_{\varepsilon} - X) \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Fig. 10 : La matrice de cokrigage avec une information déduite de la sismique 1

La matrice à inverser dans le cas d'une estimation par cokrigage est donc beaucoup plus petite que par krigeage. En effet, la matrice de cokrigage n'est que de taille $nb_sis + nb_cpv + 2$ au lieu de $NZ * (nb_cpv + 1) + 1$ pour la matrice de krigeage. Bien qu'il faille inverser NZ fois la matrice de cokrigage pour une matrice de krigeage, l'estimation des proportions par cokrigage semble plus intéressante au point de vue du temps de calcul. Malgré cet atout, la méthode d'estimation des proportions par cokrigage connaît quelques points négatifs :

- ◆ Bien que la matrice de krigeage soit de taille plus importante que la matrice de cokrigeage, l'inversion de la matrice de krigeage est simplifiée par le fait que cette dernière est creuse.
- ◆ De plus, contrairement à la méthode d'intégration d'une information sismique par krigeage, le cokrigeage ne permet pas de restituer exactement la contrainte sismique.
- ◆ Le cokrigeage précédent nécessite l'ajustement des covariances des proportions sur un plan horizontal, de la covariance de l'information déduite de la sismique et des covariances croisées entre l'information déduite de la sismique et les proportions des différents niveaux horizontaux. Comme il a été expliqué précédemment, le petit nombre de Courbes de Proportions Verticales ne rend pas possible l'ajustement des différentes covariances.

Quel que soit le type de l'information déduite de la sismique, la variance d'estimation du cokrigeage est telle que :

$$\sigma_{\text{CO}_{f,z}}^2 = C_{f,z}^P(0) - \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f,z}^{\alpha} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X) - v_{f,z} - \mu_{f,z} - \sum_{\varepsilon=1}^{\text{nb_sis}} \delta_{f,z}^{\varepsilon} C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X)$$

$$\forall f = 1, \dots, \text{nb_facies}$$

$$\forall z = 1, \dots, \text{NZ}$$

Il n'est pas possible de dire si cette variance d'estimation du cokrigeage est supérieure ou inférieure à celle du krigeage sous contrainte d'agrégation. Cela dépend en effet des données.

2.2.2.2. Les hypothèses simplificatrices

Afin de résoudre le problème d'ajustement des covariances précédemment exposées, des hypothèses peuvent être faites. Ces hypothèses simplificatrices dépendent du type de l'information sismique.

- ◆ **L'information déduite de la sismique concerne une donnée cumulée suivant la verticale (porosité, perméabilité, probabilité d'apparition d'un ou plusieurs lithofaciès...).**

En effet, lorsque l'information déduite de la sismique concerne l'épaisseur d'un ou plusieurs lithofaciès, il est possible de simplifier la covariance de la façon suivante :

$$\begin{cases} C_{f,z}^{\text{PS}}(h) = \omega_{f,z} C_f^S(h) \\ C_{f,ij}^P(h) = \omega_{f,i} \omega_{f,j} C_f^S(h) \end{cases}$$

$$\text{avec : } \omega_{f,z} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} P_{f,z}(X_{\alpha})}{\frac{1}{\text{NZ}} \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \sum_{i=1}^{\text{NZ}} P_{f,i}(X_{\alpha})} \quad \forall z = 1, \dots, \text{NZ},$$

lorsque l'information déduite de la sismique concerne l'épaisseur d'un lithofaciès

$$\omega_{f,z} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} P_{f,z}(X_{\alpha})}{\frac{1}{NZ} \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \sum_{i=1}^{NZ} P_{f,i}(X_{\alpha})} \quad \forall z = 1, \dots, NZ,$$

lorsque l'information déduite de la sismique concerne le cumul de l'épaisseur de N lithofaciès

Cette simplification peut être étendue aux cas pour lesquels l'information déduite de la sismique concerne la porosité ou la perméabilité cumulée suivant la verticale. Cette hypothèse implique que la covariance des proportions des lithofaciès pour un niveau z est la même que celle de la sismique pondérée par un poids, ce poids étant lié à la proportion du lithofaciès sur le niveau z en question et à l'information déduite de la sismique.

Cette hypothèse est en accord avec les relations liant les covariances, notamment avec la relation (3). Le système de cokrigage devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} \omega_{f,z} C_{f,z}^S(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \sum_{\delta=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\delta} C_{f,z}^S(X_{\alpha} - X_{\delta}) + \frac{\mu_{f,z}}{\omega_{f,z}} = \\ \hspace{15em} = \omega_{f,z} C_{f,z}^S(X_{\alpha} - X) \quad \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} \omega_{f,z} C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X_{\beta}) + \sum_{\delta=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\delta} C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X_{\delta}) + v_{f,z} = \\ \hspace{15em} = \omega_{f,z} C_{f,z}^S(X_{\varepsilon} - X) \quad \forall \varepsilon = 1, \dots, nb_sis \\ \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\alpha} = 1 \\ \sum_{\varepsilon=1}^{nb_sis} \delta_{f,z}^{\varepsilon} = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix}
 C_{f,z}^S(X_\alpha - X_\beta) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & C_{f,z}^S(X_\alpha - X_\delta) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\
 1 \text{ ----- } 1 & 0 & 0 \text{ ----- } 0 & 0 \\
 C_{f,z}^S(X_\varepsilon - X_\beta) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & C_{f,z}^S(X_\varepsilon - X_\delta) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\
 0 \text{ ----- } 0 & 0 & 1 \text{ ----- } 1 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \lambda_{f,z}^\beta \\
 \frac{\mu_{f,z}}{\omega_{f,z}^2} \\
 \frac{\delta_{f,z}^\delta}{\omega_{f,z}} \\
 \frac{\nu_{f,z}}{\omega_{f,z}}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 C_{f,z}^S(X_\alpha - X) \\
 1 \\
 C_{f,z}^S(X_\varepsilon - X) \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Fig. 11 : La matrice de cokrigage avec une information déduite de la sismique 2

La matrice de cokrigage ne dépend plus du niveau z sur lequel le calcul est effectué. L'utilisation de cette simplification de la covariance rend donc le calcul beaucoup plus simple, puisqu'il n'y a plus qu'une unique matrice de taille $\text{nb_cpv} + \text{nb_sis} + 2$ à inverser, et une seule covariance (celle de l'information déduite de la sismique) à ajuster.

La variance d'estimation du cokrigage après simplification de la covariance est exactement la même qu'avant la simplification, si ce n'est que la covariance des proportions et la covariance croisée des proportions et de l'information déduite de la sismique sont remplacées, à un facteur multiplicatif près, par la covariance de l'information déduite de la sismique :

$$\sigma_{\text{CO}_{f,z}}^2 = C_{f,z}^P(0) - \omega_{f,z}^2 \sum_{\alpha=1}^{\text{nb_cpv}} \lambda_{f,z}^\alpha C_f^S(X_\alpha - X) - \nu_{f,z} - \mu_{f,z} - \omega_{f,z} \sum_{\varepsilon=1}^{\text{nb_sis}} \delta_{f,z}^\varepsilon C_f^S(X_\varepsilon - X)$$

$\forall f = 1, \dots, \text{nb_facies}$
 $\forall z = 1, \dots, \text{NZ}$

♦ L'information déduite de la sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès.

Dans le cas où l'information déduite de la sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès, aucune simplification simple ne peut être effectuée. En effet, comme il est expliqué au paragraphe 1.3., les covariances ne sont pas, dans ce cas, liées par des relations simples.

3. Application à des données synthétiques

Les données disponibles ici sont des lithofaciès aux puits et une information déduite de la sismique. L'information déduite de la sismique est une donnée quantitative concernant l'épaisseur d'un lithofaciès. Cette donnée est une donnée exacte que la simulation doit restituer le mieux possible. C'est donc la méthode d'estimation du bloc 3D de proportion par krigeage qui est utilisée ici.

3.1. Les données

Les données disponibles ici sont extraites des données synthétiques simplifiées du Mesa Verde.

3.1.1. Le modèle géologique du Mesa Verde

L'affleurement du Mesa Verde se situe dans la partie sud ouest du Colorado (Etats-Unis) dans le canyon de Mancos au sud de Cortez. C'est une falaise sur laquelle des relevés ont été effectués par la division géologie de l'Institut Français du Pétrole ([8] Eschard R. et Desaubiaux G. : "Sequence stratigraphy of major regressive-transgressive littoral clastic wedge in the Mesa Verde area (Campanien, Colorado)"). Sur cette falaise, trois grandes unités lithostratigraphiques sont distinguées, de la base au sommet :

- ◆ L'**unité inférieure** est une unité progradante ponctuée par des périodes de rétrogradation ou de transgression.
- ◆ L'**unité centrale** est une unité de plaine côtière.
- ◆ L'**unité supérieure** est une unité rétrogradante où plaine côtière et séries littorales à marines sont intercalées.

Les données disponibles dans cette partie concernent l'unité supérieure de la coupe du Mesa Verde. Deux lithofaciès y sont présents.

- ◆ Le premier lithofaciès regroupant des **grès** fins à grossiers, argileux à propres,
- ◆ et le second lithofaciès regroupant des **argiles** gréseuses à propres.

La répartition spatiale réelle de ces lithofaciès est la suivante :

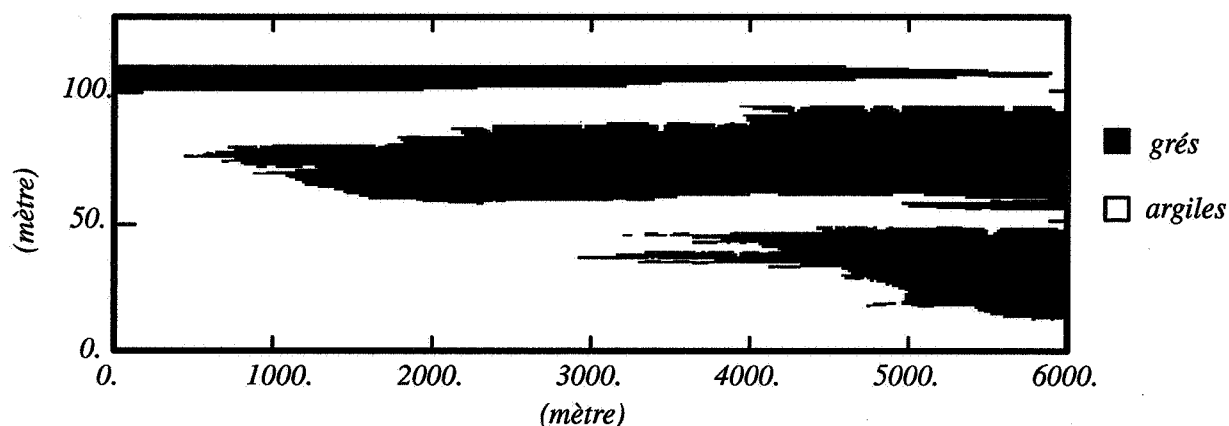


Fig. 12 : L'unité supérieure du Mesa Verde

Le modèle géologique de l'unité supérieure a été digitalisé en une grille régulière avec un pas d'échantillonnage constant de 20 m dans la direction horizontale et de 0,5 m dans la direction verticale. Il compte 300 cellules suivant l'horizontale et 257 suivant la verticale.

3.1.2. Les lithofaciès aux puits

Les données de puits sont constituées de deux puits. Ces puits sont situés aux extrémités de la coupe. Le premier puits est à 50 m de l'extrémité gauche de la coupe et le second à 290 m de son extrémité droite.

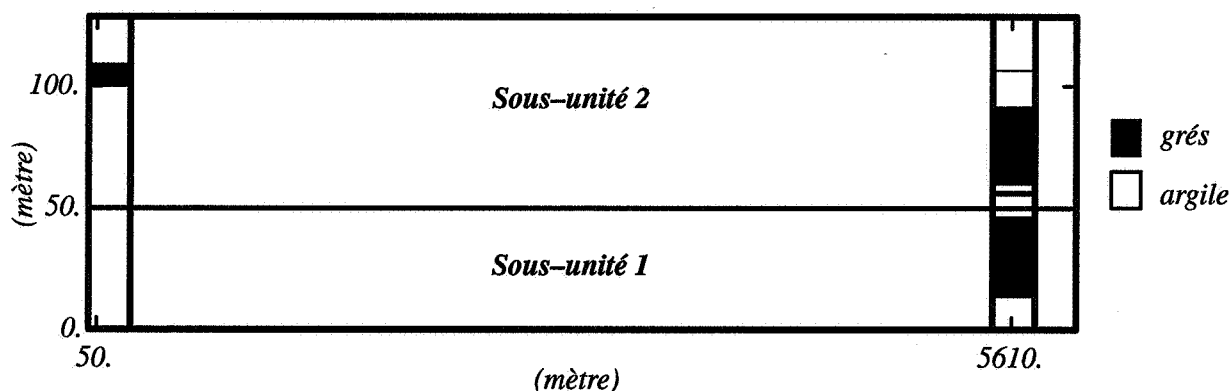


Fig. 13 : Les puits en lithofaciès

C'est uniquement à partir de ces deux puits que les Courbes de Proportions Verticales sont construites.

Pour des raisons liées à la nature de l'information déduite de la sismique, cette unité a été divisée en deux sous-unités.

- ◆ la **sous-unité 1** qui constitue les 50 mètres inférieurs de la coupe (soit 100 niveaux horizontaux),

- ♦ la **sous-unité 2** qui constitue la partie supérieure de la coupe (157 niveaux horizontaux).

3.1.3. L'information sismique

Deux informations déduites de la sismique sont disponibles ici. Ces deux informations concernent la proportion, suivant la verticale, des argiles, proportions qui sont estimées directement à partir de la falaise, en voisinage glissant.

- ♦ L'une des informations déduites de la sismique concerne la **proportion verticale des argiles sur l'ensemble de l'unité** :

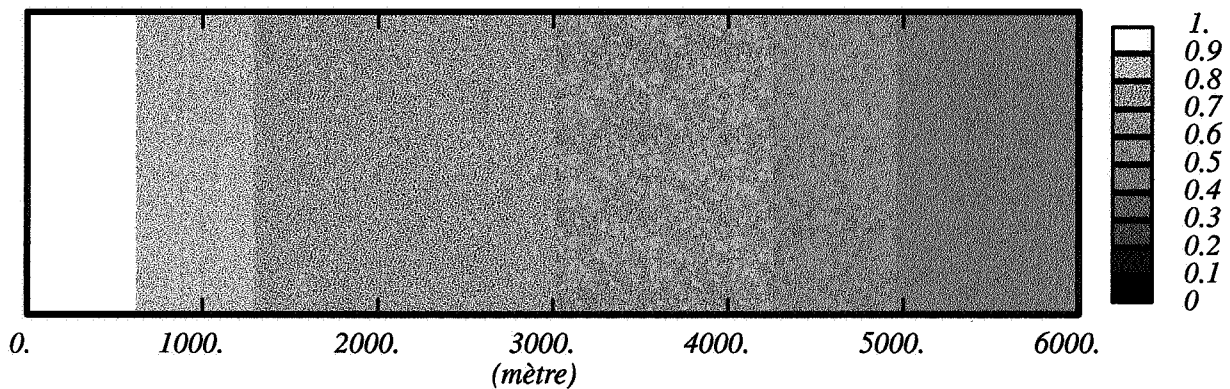


Fig. 14 : La proportion d'argile de l'unité totale

Il est à noter que cette information déduite de la sismique est presque linéaire suivant l'horizontale.

- ♦ et l'autre information déduite de la sismique concerne les **proportions verticales des argiles sur chacune des deux sous-unités** :

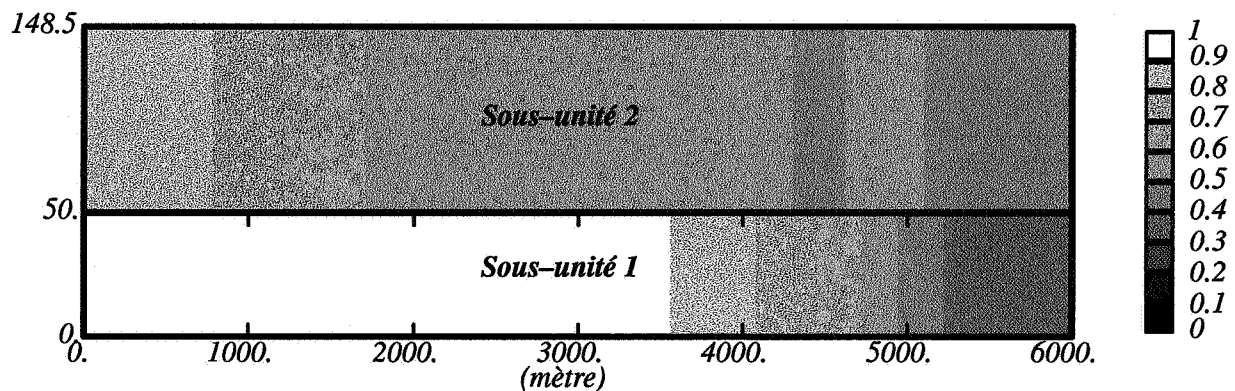


Fig. 15 : La proportion d'argile des sous-unités 1 et 2

3.1.4. Les Courbes de Proportions Verticales

Deux Courbes de Proportions Verticales sont construites à partir des deux puits précédemment exposés. Ces Courbes de Proportions Verticales lissées sur trois niveaux sont les suivantes :

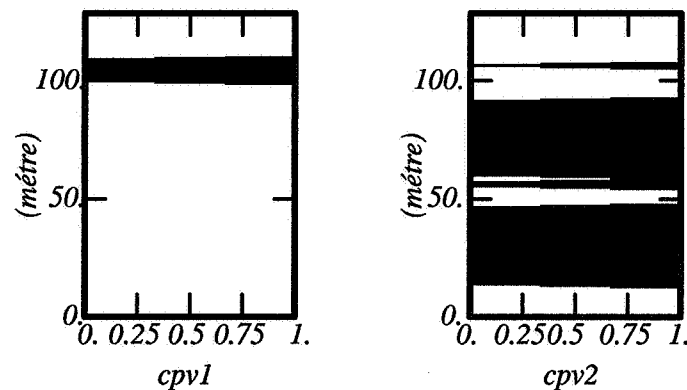


Fig. 16 : Les Courbes de Proportion Verticales

Ces deux Courbes de Proportions Verticales étant localisées au barycentre des puits ayant été utilisés pour les construire, elles sont localisées au même endroit que le puits à partir duquel elles ont été construites. La première Courbe de Proportion Verticale est donc localisée à 50 m de l'extrémité gauche de la coupe et la seconde est localisée à 290 m de son extrémité droite.

3.2. L'estimation du bloc de proportions

Les résultats de l'estimation du bloc de proportions par krigeage sont exposés dans ce paragraphe.

Afin d'avoir une représentation globale des proportions des différents lithofaciès, les proportions des lithofaciès sur une verticale sont représentées sous la forme d'une Courbe de Proportion Verticale. De cette façon, la variation verticale de tous les lithofaciès est visible. Ceci est très utile lorsque le nombre de lithofaciès est supérieur à deux, comme dans l'exemple de la figure 17. La variation horizontale (en x et en y) des proportions de ces lithofaciès est rendue visible en représentant toutes les Courbes de Proportions Verticales sur un même plan, comme indiqué sur la figure suivante :

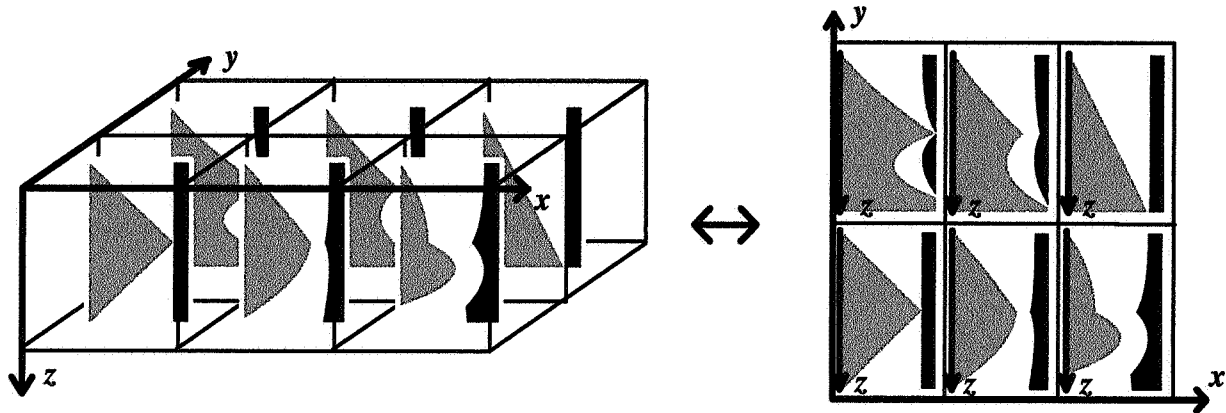


Fig. 17 : Représentation du bloc 3D de proportions

Les blocs 3D de proportions estimés dans la suite de ce paragraphe, le sont à partir des deux Courbes de Proportions Verticales calculées précédemment (figure 16). Pour voir l'influence de l'information sismique sur l'estimation du bloc 3D de proportions, les blocs de proportions suivants ont été calculés sans information déduite de la sismique puis avec une information de plus ou moins bonne qualité. La covariance horizontale des proportions d'argile utilisée pour l'ensemble des estimations des blocs 3D de proportions suivants est un modèle sphérique de portée 5000m.

Tous les blocs de proportions suivants sont échantillonnés tous les 200 mètres suivant l'horizontale et tous les 0,5 mètres suivant la verticale.

3.2.1. Sans information déduite de la sismique

Le bloc 3D de proportions estimé à partir des deux Courbes de Proportions Verticales, sans information déduite de la sismique est le suivant :

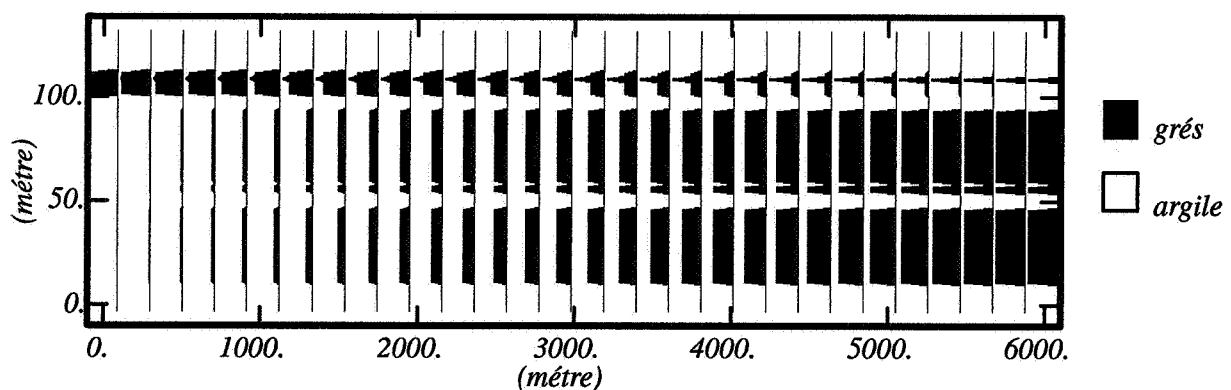


Fig. 18 : Le bloc 3D de proportion estimé sans information déduite de la sismique

Il est à noter que la proportion des lithofaciès varie linéairement suivant l'horizontale, et que les deux lentilles inférieures de grès se comportent de la même façon (ce qui est tout à fait normal au vu de la méthode qui est utilisée).

3.2.2. Avec une information déduite de la sismique

L'information sismique utilisée concerne l'ensemble de l'unité. La combinaison de cette information déduite de la sismique et des deux Courbes de Proportions Verticales calculées précédemment permet l'estimation du bloc 3D de proportions suivant :

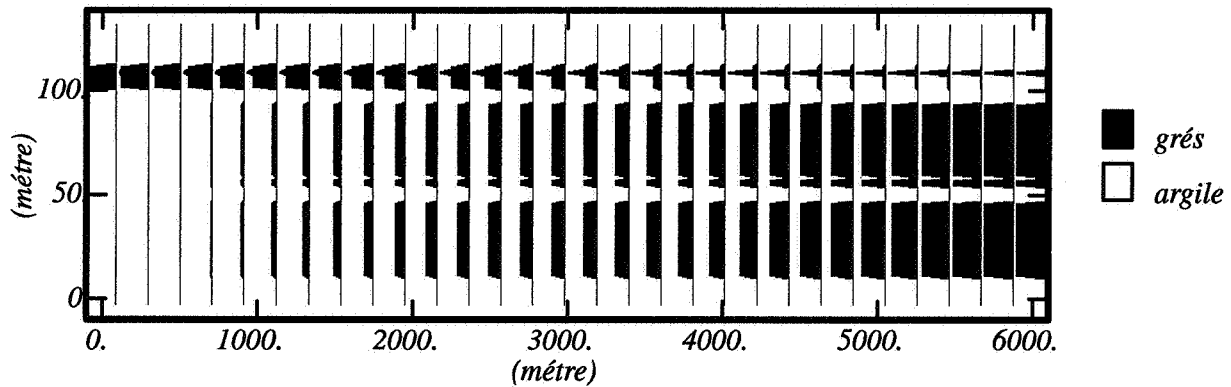


Fig. 19 : Le bloc 3D de proportion estimé à l'aide d'une information déduite de la sismique

Ce bloc 3D de proportions est peu différent de celui pour lequel il n'y a pas d'information déduite de la sismique, bien que les deux lentilles inférieures de grès soient très légèrement plus courtes. L'information déduite de la sismique semble peu apporter au calcul des proportions des lithofaciès. Ceci est lié au fait que l'information déduite de la sismique varie linéairement entre les deux Courbes de Proportion Verticales. Or le krigeage ordinaire des Courbes de Proportions utilisé pour estimer le bloc 3D des proportions lorsqu'il n'y a pas d'information déduite de la sismique restitue déjà cette linéarité.

3.2.3. Avec deux informations déduites de la sismique

Si le bloc 3D de proportions est estimé en utilisant non plus une mais deux informations déduites de la sismique, indépendantes pour les deux sous-unités, il devient alors :

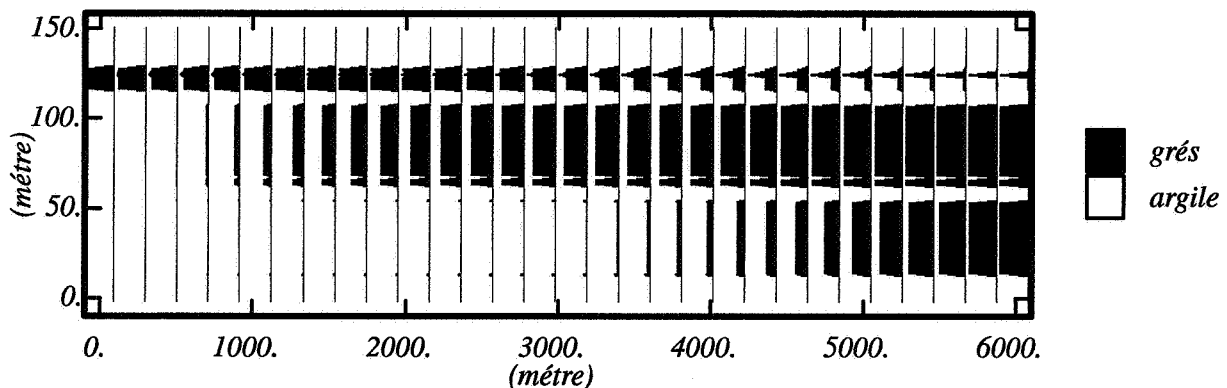


Fig. 20 : Le bloc 3D de proportion estimé à l'aide de deux informations déduites de la sismique

Les proportions des deux lentilles inférieures de grès ne se comportent plus de la même façon.

3.3. Les simulations

Afin que les résultats des simulations soient comparables, toutes les simulations sont effectuées avec le même germe. Seuls les seuils de coupure de la variable aléatoire gaussienne sont donc variables. La covariance de la variable aléatoire gaussienne simulée avant sa troncation est de type exponentiel factorisé de portées 1000 m suivant l'horizontale et 50 m suivant la verticale.

Une fois les simulations effectuées, il est vérifié qu'elles respectent bien la contrainte sismique qui a été utilisée pour le calcul du bloc 3D de proportions. Pour cela, la proportion des argiles, suivant la verticale, est calculée.

3.3.1. Sans information déduite de la sismique

La simulation obtenue à partir du bloc de proportions estimé sans information déduite de la sismique est la suivante :

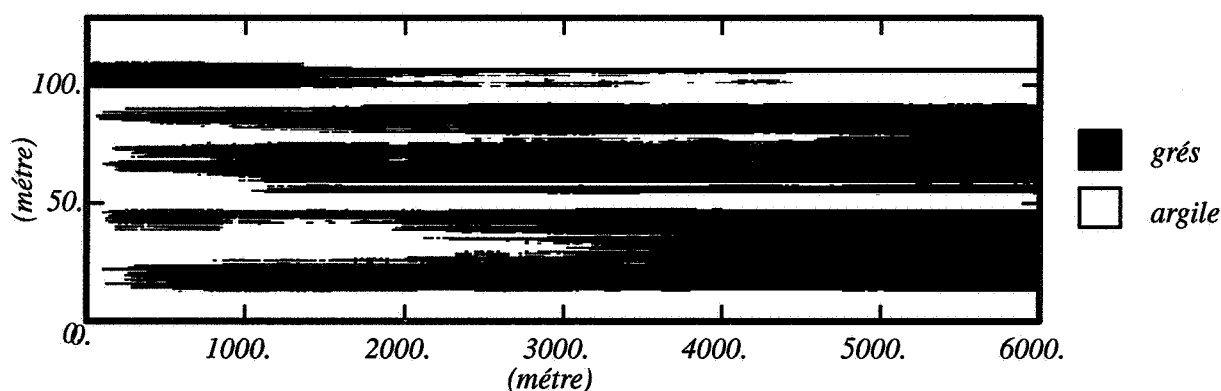


Fig. 21 : La simulation à partir des proportions estimées sans information déduite de la sismique

Comme pour les proportions correspondantes, les deux lentilles inférieures de grès se comportent de la même façon.

La proportion, suivant la verticale, d'argile de la simulation obtenue sans information sismique est la suivante :

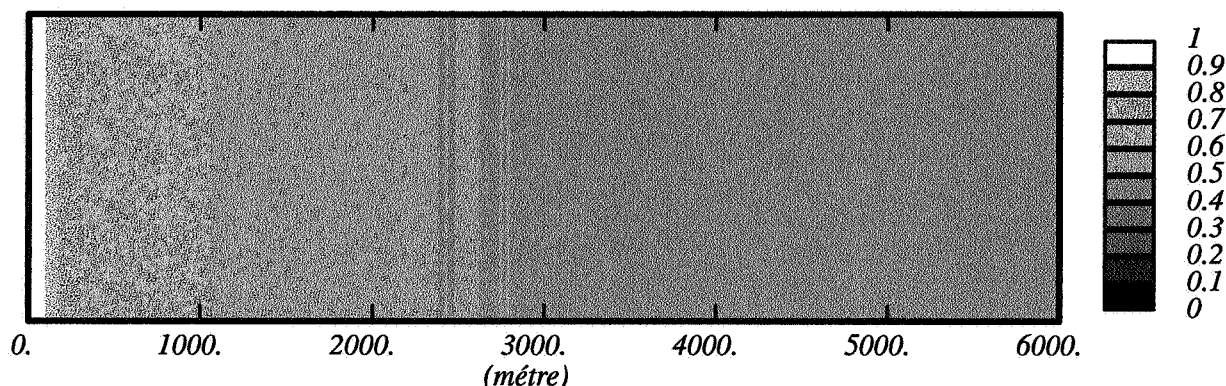


Fig. 22 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées sans information déduite de la sismique

La proportion verticale d'argile de cette simulation obtenue sans information déduite de la sismique, n'est pas exactement linéaire, comme il aurait pu être envisagé. En effet, la simulation par les Gaussiennes Seuillées ne restitue pas exactement les proportions. Cette proportion est légèrement différente de l'information sismique, mais a la même tendance.

3.3.2. Avec une information déduite de la sismique

La simulation obtenue à partir du bloc 3D de proportions estimé à l'aide d'une information déduite de la sismique concernant l'ensemble de l'unité est la suivante :

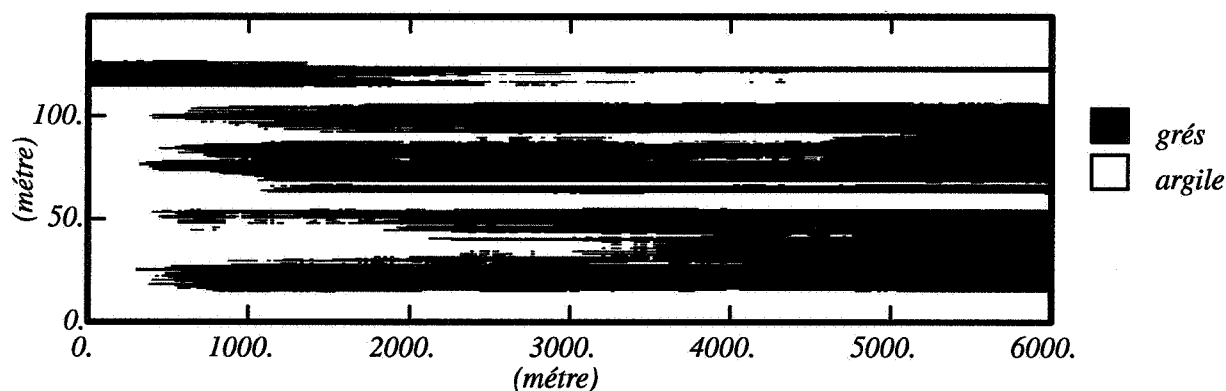


Fig. 23 : La simulation à partir des proportions estimées à l'aide d'une information déduite de la sismique

Cette simulation est très proche de celle obtenue sans information déduite de la sismique. Bien que les deux cellules inférieures de grès soient très légèrement moins étendues.

La proportion verticale des argiles de cette simulation contrainte par une information déduite de la sismique est la suivante :

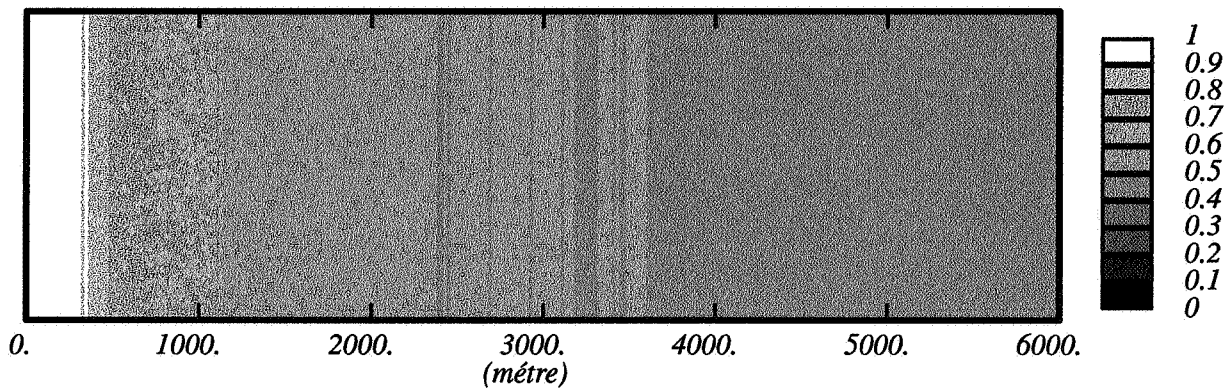


Fig. 24 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées à l'aide d'une information déduite de la sismique

Ces proportions verticales des argiles ne sont pas exactement celles de l'information déduite de la sismique, mais elles ressemblent davantage à l'information déduite de la sismique que les proportions verticales d'argile de la simulation effectuée sans information sismique. Il peut néanmoins être noté que cette information déduite de la sismique apporte peu à la simulation de cette falaise. Si l'information sismique n'avait pas été linéaire, elle aurait sans aucun doute apporté beaucoup plus à la simulation.

3.3.3. Avec deux informations déduites de la sismique

Le résultat de la simulation effectuée à partir du bloc 3D de proportions estimé avec deux informations déduites de la sismique est le suivant :

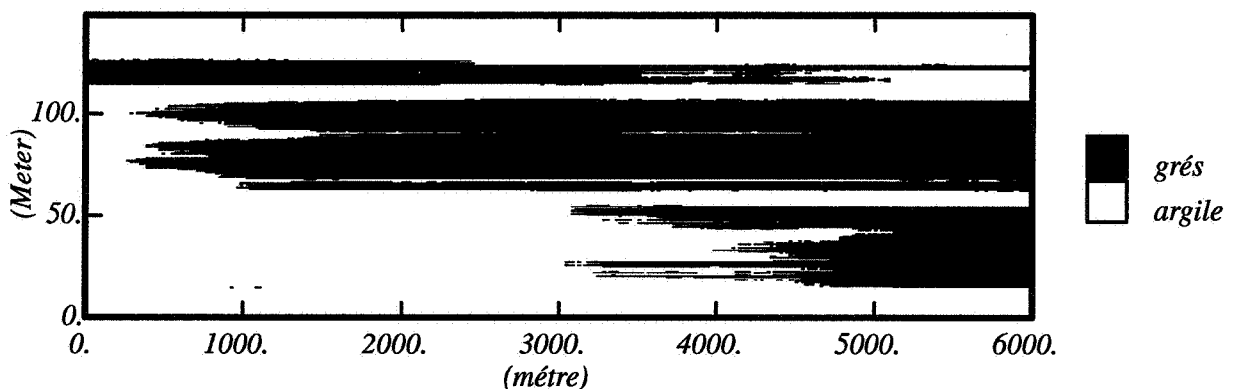


Fig. 25 : La simulation à partir des proportions estimées à l'aide de deux informations déduites de la sismique

Le résultat de cette simulation semble satisfaisant, car il correspond vraiment à la falaise d'origine. Ceci montre que l'information déduite de la sismique peut très bien, lorsqu'elle est de bonne qualité, compléter les données de puits qui sont souvent en nombre insuffisant.

La proportion verticale de l'argile de cette simulation contrainte par deux informations déduites de la sismique sur les deux sous-unités est la suivante :

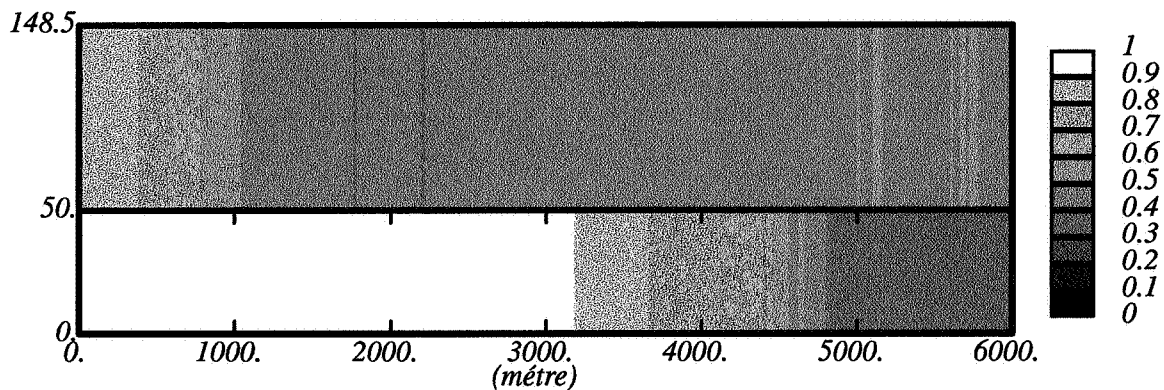


Fig. 26 : Le cumul de l'argile de la simulation basée sur les proportions estimées à l'aide de deux informations déduites de la sismique

La proportion verticale des argiles sur les deux sous-unités n'est pas exactement celle qui est désirée, mais elle est très proche de celle-ci. Ceci est, bien entendu, lié à l'utilisation de la méthode des Gaussiennes Seuillées qui ne restitue pas exactement les proportions des lithofaciès.

Ces simulations montrent que la qualité de l'information déduite de la sismique ainsi que sa non régularité jouent beaucoup sur le résultat de la simulation. Cette méthode d'intégration de l'information sismique dans la simulation des réservoirs a été testée sur deux cas réels beaucoup plus complexes. Les résultats de l'une de ces utilisations sont illustrés dans un article qui est présenté dans l'annexe 1 ([14] Moulière D., Beucher H., Hu L.Y., Fournier F., Terdich P., Melchiori F. and Griffi G. : "Integration of seismic derived information in reservoir stochastic modelling using truncated gaussian approach"). Les résultats de l'autre utilisation de cette méthode est présentée par Johann P. ([12] Johann P., Fournier F., Souza O., Eschard R. and Beucher H. : "3D stochastic reservoir modeling constrained by well and seismic data on a turbiditic field").

Conclusion

La méthode de simulation des lithofaciès présentée ici permet d'ajouter une information déduite de la sismique (porosité ou perméabilité cumulée suivant la verticale, ..., épaisseurs cumulées d'un ou plusieurs lithofaciès ou rapport des épaisseurs de deux lithofaciès) aux données de puits (des lithofaciès). Cette méthode de simulation utilise la méthode des Gaussiennes Seuillées dans le cas non stationnaire, c'est-à-dire lorsque la proportion des lithofaciès varie dans l'espace. L'introduction de l'information déduite de la sismique s'effectue au niveau du calcul de ces proportions.

Pour calculer ces proportions, les puits sont regroupés en familles afin de calculer des Courbes de Proportions Verticales. Ce sont ces Courbes de Proportions Verticales qui sont utilisées comme données de puits pour le calcul des proportions. L'avantage de l'utilisation de Courbes de Proportions Verticales à la place des puits est qu'il est possible de les déplacer et de les dupliquer, suivant les intuitions des géologues et géophysiciens.

Deux méthodes ont été choisies pour intégrer l'information déduite de la sismique. Le choix d'utiliser l'une ou l'autre de ces méthodes dépend du type de l'information déduite de la sismique.

- ◆ La première méthode d'estimation des proportions des différents lithofaciès utilise un krigeage ordinaire par plan. Cette méthode d'estimation est à utiliser lorsque l'information déduite de la sismique concerne les épaisseurs cumulées d'un ou plusieurs lithofaciès ou le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès.
- ◆ La seconde méthode d'estimation des proportions des lithofaciès est basée sur l'utilisation d'un cokrigeage. Cette méthode est à utiliser lorsque l'information déduite de la sismique ne concerne pas directement les épaisseurs des lithofaciès, mais concerne une donnée, sous forme de carte 2D horizontale, qui est corrélée avec la proportion des différents lithofaciès (porosité ou perméabilité cumulée suivant la verticale...), ou lorsque les épaisseurs cumulées des lithofaciès ou le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès ne sont pas précis.

L'utilisation du krigeage permet de restituer exactement l'information déduite de la sismique au niveau des proportions (pas au niveau de la simulation des lithofaciès). Par contre le cokrigeage ne permet pas la restitution de l'information déduite de la sismique.

Quelques choix ont dû être faits pour rendre cette méthode utilisable en pratique :

- ◆ Etant donné le nombre très important de données et pour ne pas surcharger les calculs, il a été choisi de n'effectuer qu'un krigeage ou cokrigeage par plan. Les corrélations verticales sont restituées par un lissage préalable des Courbes de Proportions Verticales.
- ◆ Le nombre de covariances à ajuster étant très important (une covariance des proportions par plan et autant de covariances croisées des proportions et de l'information déduite de la sismique), il est choisi de travailler avec une unique covariance

horizontale des proportions : la covariance horizontale moyenne. En outre, des simplifications sont proposées quant à la covariance croisée des proportions et de l'information déduite de la sismique.

La méthode de calcul des proportions par krigeage est testée sur un jeu de données. Ce test montre que l'information déduite de la sismique apporte une réelle contribution à la simulation lorsque celle-ci apporte un réel complément d'information. Cette méthode d'intégration de l'information déduite de la sismique a déjà fait ses preuves puisqu'elle est actuellement utilisée par quelques compagnies pétrolières. Au cours de ces utilisations, un problème s'est posé : un nombre important de Courbes de Proportions Verticales conduit à des matrices de krigeage trop importantes pour qu'elles soient gérées informatiquement. Pour résoudre ce problème, il peut être envisagé de choisir un voisinage de krigeage et donc de limiter le nombre de Courbes de Proportions à prendre en compte dans la matrice de krigeage.

Ces méthodes de calcul des proportions peuvent parfaitement être élargies à d'autres cas. En effet :

- ◆ Dans le cas où l'information déduite de la sismique concerne plusieurs unités de réservoirs, il serait bon d'avoir la possibilité de choisir une covariance des proportions différente pour chaque unité.
- ◆ Lorsque le nombre de Courbes de Proportions Verticales est important et lorsque l'information déduite de la sismique concerne les épaisseurs cumulées ou le rapport des épaisseurs de lithofaciès, il serait bien d'utiliser un voisinage pour effectuer le krigeage sous contrainte d'agrégation.
- ◆ Quand l'information déduite de la sismique est une information à trois dimensions, il faudrait envisager de choisir un voisinage pour le cokrigeage des proportions et de l'information déduite de la sismique, voisinage qui serait localisé autour des points à estimer pour l'information déduite de la sismique, mais qui prendrait en compte l'ensemble des Courbes de Proportions Verticales.

La méthode de calcul des proportions par cokrigeage n'a malheureusement pu être testée, faute d'information déduite de la sismique. Il serait intéressant de tester cette méthode et notamment de vérifier que dans ce cas, l'information déduite de la sismique est bien restituée. Il serait également intéressant de tester la méthode de calcul des proportions par krigeage lorsque l'information déduite de la sismique concerne le rapport des épaisseurs de deux lithofaciès.

PARTIE 2 :

**Cosimulation conditionnée
d'impédances acoustiques
et d'amplitudes sismiques**

Introduction

Les données disponibles ici sont des impédances acoustiques (résultats de mesures électriques) aux puits et des amplitudes sismiques (énergie de l'onde réfléchie sur les interfaces) mesurées sur l'ensemble du champ. Le but de cette partie est d'utiliser les amplitudes sismiques mesurées et l'ondelette sismique en complément des données d'impédance acoustique aux puits, afin de contraindre des simulations d'impédance acoustique. L'intégration de la sismique est basée sur le modèle mathématique liant les impédances acoustiques et les amplitudes sismiques mesurées. Cette intégration s'effectue en trois phases :

- ◆ Dans une première phase, les covariances simples et croisées des impédances acoustiques et de l'amplitude sismique mesurée sont ajustées. En pratique, seule la covariance expérimentale des amplitudes sismiques mesurées peut être ajustée, car les données d'impédance acoustique sont souvent en nombre insuffisant. Le modèle mathématique liant les données permet d'établir des relations entre les covariances des données et par conséquent de déduire la covariance des impédances acoustiques et la covariance croisée des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées à partir de la covariance des amplitudes sismiques mesurées.
- ◆ Dans une seconde phase, les impédances acoustiques et les amplitudes sismiques mesurées sont cosimulées à l'aide du modèle convolutif liant les deux variables.
- ◆ Puis, la simulation des impédances acoustiques est contrainte par un cokrigage des impédances acoustiques aux puits et des amplitudes sismiques mesurées. Lors de cette dernière phase, les covariances des impédances acoustiques, des amplitudes sismiques mesurées et la covariance croisée des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées sont utilisées pour le cokrigage conditionnant.

Pour cette étude, l'Institut Français du Pétrole a fourni un jeu complet de données synthétiques. Ces données permettent de tester les relations liant les amplitudes sismiques mesurées aux impédances acoustiques. Ces tests ont permis de mettre en évidence quelques problèmes de gains, de choix des encaissants et d'ordre de grandeur des données. Une analyse variographique des données a ensuite été effectuée afin d'examiner les relations théoriques entre les covariances des données. A ce niveau de l'étude, le problème du choix d'un encaissant s'est à nouveau présenté, ainsi qu'un problème d'ondelette qui entre en résonance avec les impédances acoustiques. Problèmes qui rendent ce jeu de données inutilisable pour effectuer cette simulation conditionnée. La mise en oeuvre est donc réalisée sur un jeu de données synthétique.

Dans un souci de clarté et de compréhension, cette partie de la thèse rend compte de la progression du travail, mais aussi des difficultés rencontrées. Après une présentation des données et des relations mathématiques, sont présentés les quatre étapes suivantes :

- ◆ L'établissement de la méthode de simulation des impédances acoustiques contraintes par les amplitudes sismiques mesurées sur l'ensemble du champ et les impédances acoustiques aux puits,

- ◆ l'analyse des relations entre les covariances des données,
- ◆ des tests sur le jeu de données du Mesa Verde,
- ◆ la mise en oeuvre de la méthode sur un jeu de données synthétiques.

1. Données et relations entre les données

Les données disponibles ici sont :

- ◆ des impédances acoustiques aux puits,
- ◆ des amplitudes sismiques sur l'ensemble du champ,
- ◆ et une ondelette sismique.

Ces variables ainsi que le modèle mathématique qui les lie sont présentés dans ce chapitre. L'expression de ce modèle nécessite l'introduction de deux nouvelles données :

- ◆ les coefficients de réflexion,
- ◆ et les amplitudes sismiques modélisées.

Ces deux nouvelles notions sont également introduites ici.

1.1. Impédances acoustiques

Les données aux puits sont des impédances acoustiques. Elles sont le résultat de mesures diagraphiques dans les puits (mesures de densité et de sonic). D'après la théorie de la propagation des ondes, l'impédance acoustique Imp , d'un milieu de masse volumique ρ , et de vitesse V , est par définition :

$$Imp = \rho V \quad (8)$$

([19] Laverne M. : "Méthodes sismiques"). Les impédances acoustiques permettent donc de caractériser les faciès géologiques en distinguant des familles de faciès. Ces impédances acoustiques sont liées aux amplitudes sismiques par l'intermédiaire des coefficients de réflexion.

1.2. Coefficients de réflexion

Les coefficients de réflexion sont définis à partir des impédances acoustiques. Mais, comme il sera vu au paragraphe 1.2.1., la relation liant les coefficients de réflexion aux impédances acoustiques n'est pas utilisable sous sa formulation classique pour déterminer des relations entre les covariances de ces deux données. Des approximations "continue" et discrète de cette relation ont donc été établies.

1.2.1. Définition des coefficients de réflexion

Les coefficients de réflexion ne sont définis que dans le cas particulier des ondes planes en incidence normale, c'est-à-dire dans le cas particulier où le front d'onde est quasi-plan et

parallèle aux interfaces. Dans ce cas, les coefficients de réflexion, Cr , du déplacement des particules sur une interface séparant les milieux d'impédances acoustiques Imp_1 et Imp_2 sont donnés par :

$$Cr = \frac{Imp_2 - Imp_1}{Imp_2 + Imp_1}$$

([19] Lavergne M. : "Méthodes sismiques"). Pour un milieu discrétisé en 2D, cette relation s'écrit :

$$Cr(x, t + \Delta t/2) = \frac{Imp(x, t + \Delta t) - Imp(x, t)}{Imp(x, t + \Delta t) + Imp(x, t)} \quad (9)$$

avec : x , la coordonnée du point suivant l'horizontale,
 t , la coordonnée du point suivant la verticale,
 Δt , le pas de discrétisation en temps (suivant la verticale).

Comme il a été dit dans l'introduction de cette partie, la relation entre l'impédance acoustique et les coefficients de réflexion doit être utilisée pour déterminer les relations entre leurs covariances (paragraphe 2.3.1.). Le fait que la relation (9) compte des impédances acoustiques au numérateur et au dénominateur rend impossible la détermination de telles relations. Pour résoudre ce problème, cette relation est transformée en une relation équivalente, sans impédances acoustiques au dénominateur.

1.2.2. Approximation "continue"

La formule discrète (9) peut aisément s'écrire de façon différente. En effet, les relations continues suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \ln[Imp(x, t + \Delta t/2)] \right\} &= \frac{\frac{d}{dt} [Imp(x, t + \Delta t/2)]}{Imp(x, t + \Delta t/2)} \simeq \\ &\simeq \frac{2 \frac{d}{dt} [Imp(x, t + \Delta t/2)]}{Imp(x, t + \Delta t) + Imp(x, t)} \end{aligned}$$

En supposant que la valeur de l'impédance acoustique située entre deux données d'impédance est la valeur moyenne de ces deux données.

La discrétisation de la dérivée d'une fonction A par les différences finies, dans sa formulation centrée, indique que, pour Δt petit :

$$\frac{d}{dt} A(t) \simeq \frac{A(t + \Delta t/2) - A(t - \Delta t/2)}{\Delta t}$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \ln[Imp(x, t + \Delta t/2)] \right\} &\simeq \frac{2}{\Delta t} \frac{Imp(x, t + \Delta t) - Imp(x, t)}{Imp(x, t + \Delta t) + Imp(x, t)} = \\ &\simeq \frac{2}{\Delta t} Cr(x, t + \Delta t/2) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$Cr(x, t + \Delta t/2) \approx \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} \{ \ln[Imp(x, t + \Delta t/2)] \}$$

Cette approximation n'est pas réellement continue, puisqu'elle fait intervenir le pas de discrétisation en temps. Elle ne lie plus les coefficients de réflexion aux impédances acoustiques, mais les lie au logarithme népérien de ces mêmes impédances. Ceci ne constitue pas un problème, car il n'y a aucune difficulté à passer directement du logarithme des impédances acoustiques aux impédances acoustiques et vice et versa. De plus, la relation liant les impédances acoustiques à leurs logarithmes est, en première approximation, linéaire, car les impédances acoustiques prennent des valeurs fortes (de l'ordre de 7000 g/cm³.m/s), relativement peu dispersée (de 6000 à 8000 g/cm³.m/s) (paragraphe 3.1.1.2.). Il n'y a donc pas de problème au niveau de la restitution des moyennes et variances des impédances acoustiques. Cette approximation dite "continue" ne compte ni impédance acoustique, ni logarithme népérien des impédances acoustiques au dénominateur. Elle paraît donc adaptée à la détermination de relations entre les covariances du logarithme des impédances acoustiques, celle des coefficients de réflexion et la covariance croisée du logarithme des impédances acoustiques et des coefficients de réflexion.

C'est donc à l'aide de cette approximation que toutes les expressions liant les différentes covariances à la covariance du logarithme des impédances acoustiques ont d'abord été établies. Néanmoins, au vu des mauvais ajustements obtenus lors des tests des expressions liant les covariances verticales (paragraphe 3.2.1.1.), il a été choisi de transformer à nouveau cette relation en la discrétisant.

Pour des raisons de simplification des notations, le logarithme népérien de l'impédance acoustique en (x,t) est noté $\ln I(x,t)$. L'expression discrète précédente est donc équivalente à l'expression "continue" :

$$Cr(x, t) \approx \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t) \quad (10)$$

1.2.3. Approximation discrète

Pour trouver une relation discrète équivalente à l'expression (9), mais n'ayant pas d'impédances acoustiques au dénominateur, l'expression (10) se discrétise à l'aide des différences finies, pour Δt petit :

$$\begin{aligned} Cr(x, t) &\approx \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t) = \\ &\approx \frac{\Delta t}{2} \frac{\ln I(x, t + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \Delta t/2)}{\Delta t} = \\ &= \frac{\ln I(x, t + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \Delta t/2)}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$Cr(x, t + \Delta t/2) \approx \frac{\ln I(x, t + \Delta t) - \ln I(x, t)}{2} \quad (11)$$

Cette relation est équivalente à l'expression (9), et ne compte ni impédances acoustiques, ni logarithme des impédances acoustiques au dénominateur. Dans l'annexe 3, il est montré sur les données synthétiques utilisées au chapitre 3., que l'utilisation de la relation (11) au lieu de la relation (9) induit une erreur sur les coefficients de réflexion inférieure à 1% de la valeur de ces coefficients. Cette relation semble donc convenir au calcul du lien entre la covariance des coefficients de réflexion et celle du logarithme népérien des impédances acoustiques.

Pour lier les impédances acoustiques aux amplitudes sismiques mesurées, reste maintenant à définir les amplitudes sismiques modélisées. En effet, l'amplitude sismique mesurée n'est pas une donnée exacte. C'est une donnée expérimentale mesurée et donc entachée d'une erreur de mesure. De plus, la relation liant les coefficients de réflexion aux amplitudes est un modèle, ce n'est donc pas une relation exacte. Une nouvelle donnée est créée, correspondant à l'amplitude idéale dans le cadre du modèle convolutif. Cette nouvelle donnée est notée l'amplitude sismique modélisée, $a(x,t)$.

1.3. Amplitudes sismiques modélisées

Mathématiquement, les coefficients de réflexion sont obtenus par la relation (9). Physiquement, ils caractérisent l'amplitude de l'énergie de l'onde réfléchie sur une interface. Ils sont donc liés à l'amplitude sismique modélisée par la relation de convolution ([19] Lavergne M. : "Méthodes sismiques") :

$$a(x, t) = Cr * s(x, t) \quad (12)$$

avec : $s(t)$, l'ondelette issue de l'inversion (basée sur le modèle convolutif utilisé ici) des amplitudes sismiques,

$*$, le produit de convolution suivant la verticale.

Ce produit de convolution peut s'écrire :

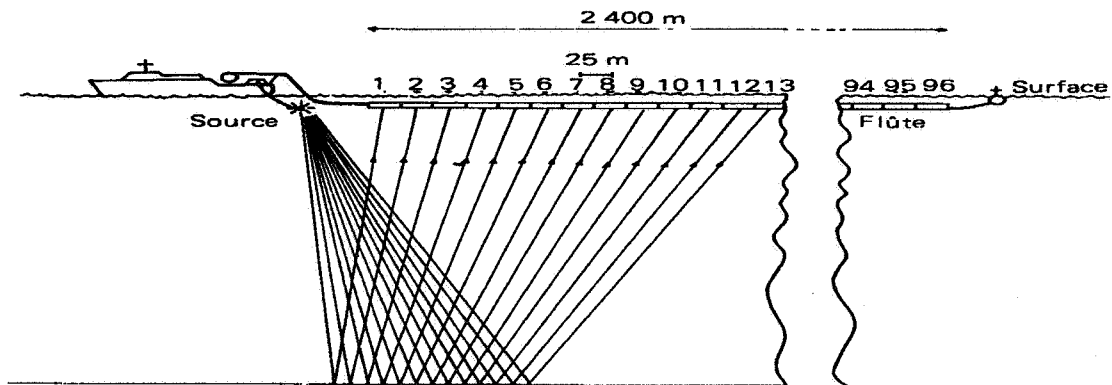
$$a(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(s, t - \tau)s(\tau)d\tau$$

1.4. Amplitudes sismiques mesurées

Les amplitudes sismiques sont le résultat d'une campagne sismique. Une campagne sismique comprend deux étapes ([19] Lavergne M. : "Méthodes sismiques") :

- ♦ **L'acquisition des données** est obtenue, à terre ou en mer, par la mise en place sur le terrain d'un système d'émission (la source), de détection (les géophones à terre ou les hydrophones en mer) et d'enregistrement. La source émet un signal sismique (ébranlement du sol ou de l'eau) qui se propage dans le sous-sol et se réfléchit sur les interfaces (surfaces de séparation de milieux d'impédances acoustiques différentes). Les géophones (ou hydrophones) transforment les mouvements du sol (ou de l'eau) en tension électrique. Cette tension électrique est enregistrée.

En mer :



A terre :

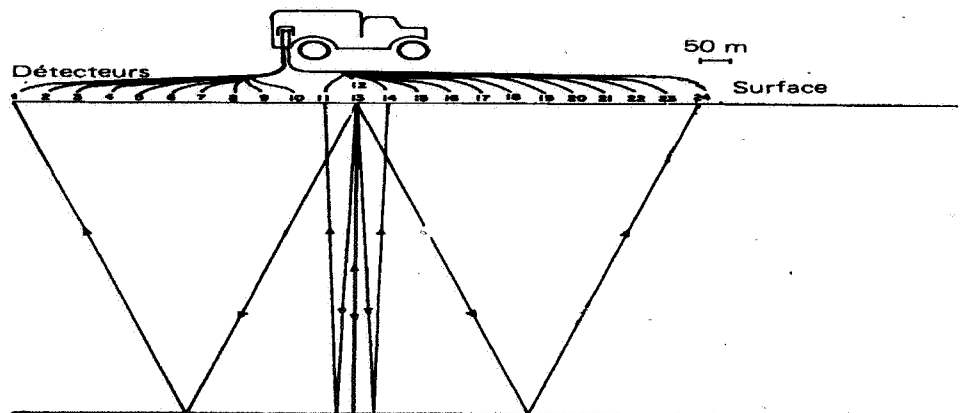


Fig. 27 : La campagne sismique

♦ **Le traitement** a pour but d'améliorer le rapport signal sur bruit et la mise en forme de l'information afin d'obtenir la meilleure image possible du sous-sol.

C'est de cette façon que la section suivante est obtenue :

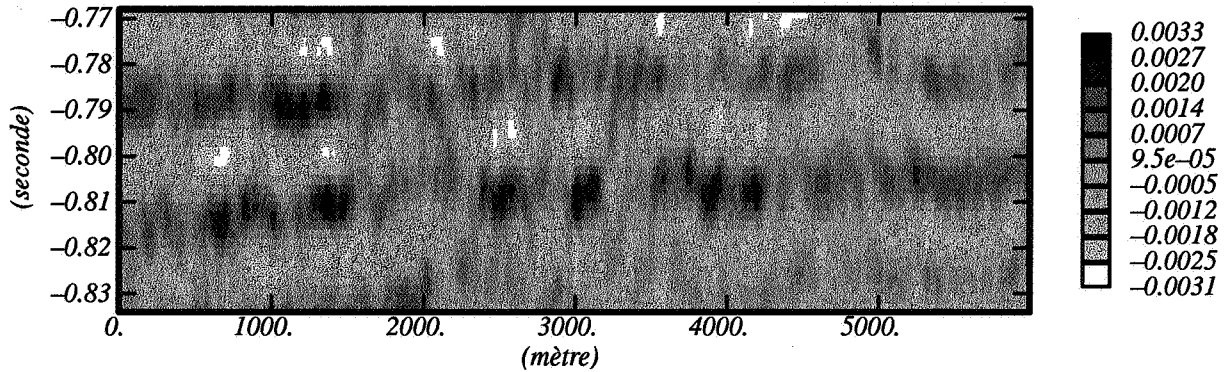


Fig. 28 : L'amplitude sismique mesurée

L'amplitude sismique, $Amp(x,t)$, étant une amplitude sismique mesurée, elle est donc entachée d'une erreur de mesure. Cette erreur se compose de deux termes :

- ◆ le bruit sismique, $\varepsilon_B(x, t)$,
- ◆ auquel s'ajoute une erreur de modélisation, $\varepsilon_M(x, t)$.

En effet, la relation de convolution utilisée pour lier les coefficients de réflexion aux amplitudes sismiques est une relation qui modélise un phénomène physique. Une ondelette ne se propage pas nécessairement verticalement dans un milieu. L'amplitude sismique mesurée est donc liée aux coefficients de réflexion par la relation :

$$\begin{aligned}
 Amp(x, t) &= a(x, t) + \varepsilon_M(x, t) + \varepsilon_B(x, t) = \\
 &= Cr * s(x, t) + \varepsilon_M(x, t) + \varepsilon_B(x, t) \\
 Amp(x, t) &= Cr * s(x, t) + R(x, t)
 \end{aligned} \tag{13}$$

avec : $R(x, t)$, un résidu sur l'amplitude sismique mesurée.

Pour des raisons de simplification des écritures et d'allègement des textes, les noms des différentes données sont, dans les chapitres suivants, simplifiés de la façon suivante :

- ◆ Les impédances acoustiques sont désormais nommées impédances,
- ◆ les amplitudes sismiques modélisées sont remplacées par amplitudes modélisées,
- ◆ les amplitudes sismiques mesurées sont appelés amplitudes mesurées,
- ◆ l'ondelette sismique devient simplement l'ondelette,
- ◆ et le résidu sur les amplitudes mesurées est le résidu.

2. Méthode de simulation des impédances acoustiques

Le but de cette étude est de simuler des impédances en utilisant :

- ◆ d'une part des **données de puits** (des impédances)
- ◆ et d'autre part une **information sismique** (des amplitudes mesurées).

Dans le chapitre précédent, il a été vu que la relation liant les impédances aux coefficients de réflexion doit être approximée pour permettre le calcul des relations entre les covariances de ces mêmes données. L'approximation de la relation (9) ne lie plus les impédances aux coefficients de réflexion, mais lie le logarithme des impédances à ces mêmes coefficients. C'est donc une simulation du logarithme des impédances contrainte par les puits et la sismique qui est effectuée ici. La simulation conditionnée des impédances désirée sera simplement l'exponentielle de la simulation précédente. Pour effectuer cette simulation du logarithme des impédances sous contrainte sismique, deux étapes sont nécessaires :

- ◆ La première étape consiste à **cosimuler le logarithme des impédances et les amplitudes mesurées**. Cette cosimulation n'est pas contrainte par les données.
- ◆ Puis, dans une seconde étape, **la cosimulation est contrainte par le logarithme des impédances aux puits et par la donnée sismique, à l'aide d'un cokrigeage**. Ce cokrigeage permet de filtrer le résidu sur les amplitudes sismiques mesurées ([17] Daly C. : "Applications de la géostatistique à quelques problèmes de filtrage" et [23] Zhang Z.Y. et Galli A. : "Getting better quality seismic sections"), de déconvoluer la section en amplitudes sismiques mesurées ([18] Jeulin D. et Renard D. : "Practical limits of the deconvolution of images by kriging") et de contraindre la simulation en logarithme de l'impédance.

Les deux étapes de cette simulation sous contrainte sont exposées ici, ainsi que quelques rappels sur le cokrigeage à moyenne connue.

2.1. Cosimulation du logarithme des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées

Sachant que les deux variables (le logarithme de l'impédance et les amplitudes sismiques mesurées) sont liées, leur cosimulation se traduit par deux simulations non conditionnelles liées :

- ◆ une simulation non conditionnelle du **logarithme des impédances**,
- ◆ et une simulation non conditionnelle des **amplitudes mesurées**.

Ce lien doit être le même que celui qui lie les données du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées. C'est-à-dire que le logarithme des impédances et les amplitudes mesurées simulés non conditionnellement doivent avoir les mêmes covariances simples et croisées que les données en logarithme des impédances et en amplitude mesurée.

La cosimulation du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées s'effectue de façon relativement simple, comme indiqué sur la figure suivante :

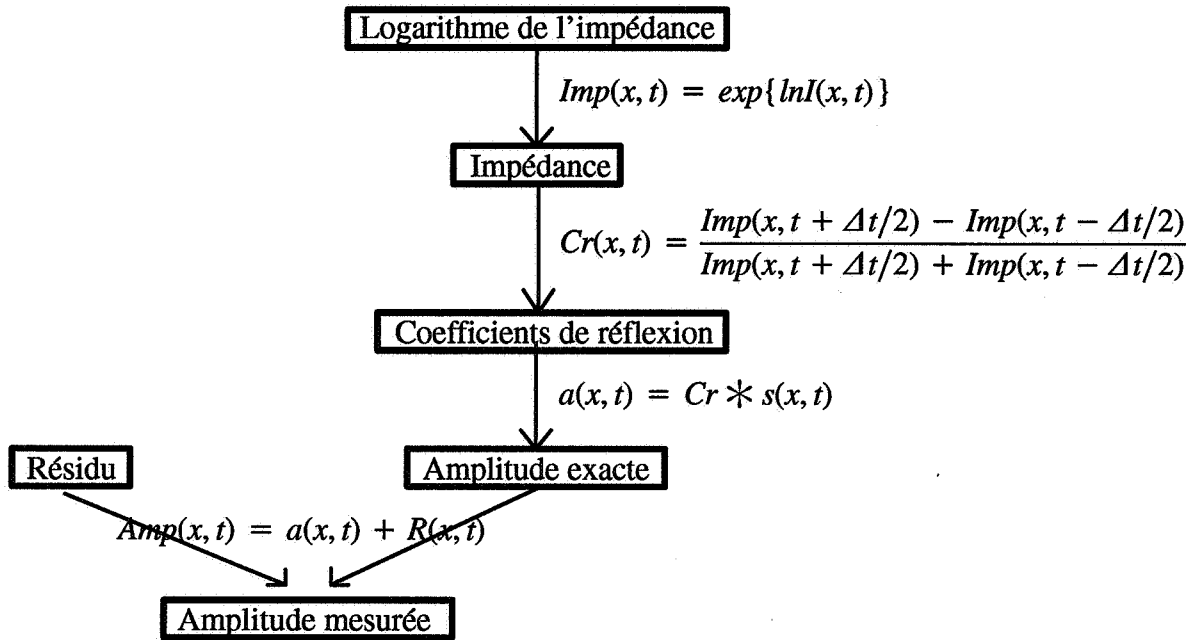


Fig. 29 : La cosimulation des impédances et des amplitudes mesurées

Les étapes de cette cosimulation sont :

- ◆ Pour commencer, une section en **logarithme de l'impédance** est simulée, sans contrainte. Cette section a les caractéristiques (moyenne, covariance) des données du logarithme de l'impédance. Pour éviter tous les problèmes d'engraissement dont il est question au paragraphe 3.1.3.2., la section simulée est plus épaisse que la section désirée finalement. L'épaisseur supplémentaire dépend de la longueur dynamique de l'ondelette, c'est-à-dire du nombre de pas de temps durant lesquels l'ondelette est non nulle.
- ◆ A l'aide de cette section en logarithme de l'impédance, une section en **impédance** de même taille est obtenue, simplement en prenant l'exponentielle de la section en logarithme de l'impédance.
- ◆ La section en impédance permet ensuite de calculer une section en **coefficients de réflexion** en utilisant la relation (9). Cette section est décalée d'un demi pas de temps suivant la verticale par rapport aux sections en impédance et logarithme de l'impédance, et elle compte un échantillon de moins que ces deux sections suivant la verticale.
- ◆ La section en coefficients de réflexion est ensuite utilisée pour calculer des **amplitudes modélisées**. Pour cela, un produit de convolution suivant la verticale est effectué entre les coefficients de réflexion et l'ondelette issue de l'inversion des amplitudes sismiques (relation (12)). Seule la partie centrale de cette section est alors conservée. En effet, les amplitudes situées en haut et en bas de la section sont enta-

chées d'une erreur due à l'inexactitude de l'encaissant, comme il est expliqué au paragraphe 3.1.3.2.

- ◆ Reste ensuite à ajouter une erreur à cette amplitude modélisée, le **résidu** étant simulé de façon classique. Cette erreur est choisie de moyenne nulle et a bien entendu la covariance dont il sera question ultérieurement.

- ◆ L'addition de cette erreur et de l'amplitude modélisée donne la section en **amplitude mesurée** simulée. Ces amplitudes mesurées simulées sont liées aux impédances précédentes par les relations (9) et (13). Leurs covariances simples et croisées vérifient les relations théoriques montrées au chapitre 2.3.

Ces données ayant des ordres de grandeur très différents, elles sont normées afin qu'il n'y ait aucun problème lors du calcul des covariances croisées ou lors du cokrigage conditionnant. Cette normation est présentée au paragraphe 3.1.3.3.

2.2. Contrainte de la simulation du logarithme des impédances acoustiques par un cokrigage avec filtrage d'un résidu sur les amplitudes mesurées

Une fois le logarithme des impédances et les amplitudes mesurées cosimulés, reste à contraindre leurs cosimulations. Habituellement, les simulations d'impédances sont uniquement contraintes par des impédances. Cette contrainte est effectuée par un krigeage conditionnant. Ici, deux types de données sont disponibles :

- ◆ le **logarithme des impédances** aux puits,
- ◆ et les **amplitudes mesurées** sur l'ensemble du domaine.

D'où l'idée d'utiliser ces deux données pour contraindre la cosimulation et donc d'effectuer un cokrigage conditionnant au lieu du krigeage habituel. Dans le cas où le logarithme des impédances et les amplitudes mesurées sont stationnaires, la simulation des impédances est contrainte par un cokrigage à moyenne connue. Lorsque ce n'est pas le cas, le cokrigage conditionnant doit être effectué à l'aide d'un cokrigage en FAI-k (c'est-à-dire pour les fonctions aléatoires intrinsèques d'ordre k). Faute de temps, seul le conditionnement par un cokrigage à moyenne connue a été étudié.

Dans le paragraphe suivant, quelques rappels sur le cokrigage à moyenne connue sont exposés, ainsi que la méthode de contrainte par cokrigage dans le cas particulier où le logarithme des impédances et les amplitudes mesurées sont stationnaires.

Pour des raisons de simplification des écritures, le couple (x,t), utilisé jusqu'ici pour localiser un point dans les sections, est remplacé, dans ce chapitre, par la notation y.

2.2.1. Rappels sur le cokrigage à moyenne connue

Afin de bien comprendre comment un cokrigage peut être utilisé lors de la contrainte d'une simulation, il apparaît nécessaire de faire quelques rappels sur le cokrigage à moyenne connue et notamment sur ses propriétés.

C'est le cokrigeage à moyenne connue qui est utilisé ici, car c'est le seul qui permette de restituer les covariances simples et croisée de la simulation conditionnée du logarithme des impédances et des données d'amplitude mesurée après le conditionnement de la cosimulation.

2.2.1.1. Système de cokrigeage à moyenne connue

♦ Linéarité

Lors du cokrigeage du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées, le logarithme des impédances est estimé à l'aide d'une combinaison linéaire des données du logarithme des impédances aux puits et des amplitudes mesurées sur l'ensemble du champ. Cette combinaison linéaire est la suivante :

$$\ln I^*(y) = \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta) \quad (14)$$

avec : nbI, le nombre de données en logarithme de l'impédance,

nbA, le nombre de données d'amplitude mesurée,

λ_y^α et δ_y^β , les poids de cokrigeage du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées pour le point y,

y_α , la localisation des points de données d'impédance,

y_β , la localisation des points de données d'amplitude mesurée.

La combinaison linéaire (14) doit vérifier plusieurs conditions :

♦ Condition d'autorisation

L'erreur d'estimation $\ln I^*(y) - \ln I(y)$ est supposée autorisée. En effet, les données en logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée sont supposées stationnaire d'ordre 2. Toutes les combinaisons linéaires sont donc autorisées.

♦ Condition d'universalité

La condition d'universalité est respectée si l'erreur d'estimation est d'espérance nulle :

$$\begin{aligned} E[\ln I(y) - \ln I^*(y)] &= 0 \\ \Rightarrow E\left[\ln I(y) - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta)\right] &= 0 \\ \Rightarrow E[\ln I(y)] \left\{1 - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha\right\} - E[\text{Amp}(y)] \left\{\sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta\right\} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Par construction, la moyenne des amplitudes mesurées est nulle. En effet, la moyenne des coefficients de réflexion est telle que :

$$E[\text{Cr}(x, t + \Delta t/2)] \approx E\left[\frac{\ln I(x, t + \Delta t) - \ln I(x, t)}{\Delta t}\right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \{E[\ln I(y)] - E[\ln I(y)]\} = 0$$

et par suite :

$$\begin{aligned} E[\text{Amp}(x, t)] &= E[a(x, t) + \varepsilon(x, t)] = \\ &= E[\text{Cr} * s(x, t)] + E[\varepsilon(y)] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cr}(x, t - \tau) s(\tau) d\tau\right] + E[\varepsilon(y)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[\text{Cr}(y)] s(\tau) d\tau + E[\varepsilon(y)] = 0 \end{aligned}$$

Car, par hypothèse, le résidu est choisi de moyenne nulle. La condition d'universalité devient donc :

$$E[\ln I(y)] \left\{ 1 - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \right\} = 0$$

Bien que le nombre de données d'impédance soit faible, la moyenne du logarithme des impédances m_I est supposée connue. Par définition des impédances, cette moyenne m_I n'est pas nulle. En effet, les impédances prennent des valeurs relativement élevées (supérieures à 4000 g/cm³.m/s). Pour que la condition d'universalité soit vérifiée sans influence sur le poids de cokrigage λ_y^α , il faudra, lors du cokrigage, utiliser le logarithme des impédances centré $\ln I(y) - m_I$ à la place du logarithme des impédances. Ainsi, la condition d'universalité :

$$E[\ln I(y) - m_I] \left\{ 1 - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \right\} = 0$$

sera automatiquement vérifiée.

Pour la suite de ce rappel, il est supposé que les données en logarithme de l'impédance sont centrées. C'est-à-dire que $m_I = 0$, ce qui permet de travailler directement avec le logarithme de l'impédance et de simplifier les notations et les calculs des relations suivantes.

♦ Minimisation de la variance d'estimation

Les poids de cokrigage λ_y^α et δ_y^β sont tels que la variance d'estimation du cokrigage σ_{CK}^2 est minimum. Or :

$$\begin{aligned} \sigma_{CK}^2 &= \text{Var}[\ln I(y) - \ln I^*(y)] = \\ &= \text{Var}\left[\ln I(y) - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta)\right] = \\ &= C_{\ln I}(0) + \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \lambda_y^{\alpha'} C_{\ln I}(y_{\alpha'} - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_y^\beta \delta_y^{\beta'} C_{\text{Amp}}(y_{\beta'} - y_\beta) + \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\beta=1}^{nbA} \lambda_y^\alpha \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_\alpha) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y_\alpha - y) - 2 \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y)$$

Cette relation est minimum pour des valeurs de λ_y^α et δ_y^β telles que :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y_\alpha - y_{\alpha'}) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_{\alpha'}) = C_{\ln I}(y - y_{\alpha'}) \quad \forall \alpha' = 1, \dots, nbI \\ \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\text{Amp}}(y_{\beta'} - y_\beta) = C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y) \quad \forall \beta' = 1, \dots, nbA \end{cases}$$

Ce système est le système de cokrigage à moyenne connue.

2.2.1.2. Variance d'estimation du cokrigage à moyenne connue

La variance d'estimation du cokrigage à moyenne connue est donc telle que :

$$\begin{aligned} \sigma_{CK}^2 &= \text{Var}[\ln I(y) - \ln I^*(y)] = \\ &= C_{\ln I}(0) + \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \left[\sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_y^{\alpha'} C_{\ln I}(y_{\alpha'} - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_\alpha) \right] + \\ &+ \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \left[\sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_\alpha) + \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_y^{\beta'} C_{\text{Amp}}(y_\beta - y_{\beta'}) \right] - 2 \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y - y_\alpha) + \\ &- 2 \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y) = \\ &= C_{\ln I}(0) + \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y) - 2 \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y - y_\alpha) + \\ &- 2 \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y) = \\ &= C_{\ln I}(0) - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y - y_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y) \end{aligned}$$

Cette variance d'estimation du cokrigage à moyenne connue est plus faible que celle du krigage correspondant. En effet, la variance d'estimation du krigage σ_K^2 à moyenne connue est :

$$\sigma_K^2 = C_{\ln I}(0) - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y - y_\alpha)$$

Les λ_y^α et δ_y^β déterminés à l'aide du système de cokrigeage minimisent la variance d'estimation du cokrigeage $\sigma_{CO}^2(\lambda_y^\alpha, \delta_y^\beta)$. La résolution du système de krigeage correspondant permettrait de minimiser la variance d'estimation du krigeage $\sigma_K^2(\lambda_y^\alpha)$. Or :

$$\sigma_Z^2(\lambda_y^\alpha) = \sigma_{CO}^2(\lambda_y^\alpha, 0) \geq \sigma_{CO}^2(\lambda_y^\alpha, \delta_y^\beta)$$

Par conséquent, la variance d'estimation du cokrigeage est inférieure à celle du krigeage. Le cokrigeage donne donc une meilleure estimation du logarithme des impédances que le krigeage.

2.2.1.3. Propriétés du cokrigeage à moyenne connue

Le cokrigeage à moyenne connue a deux propriétés importantes qui sont très utiles lors de l'utilisation du cokrigeage afin de contraindre la cosimulation du logarithme des impédances et de l'amplitude mesurée. La première de ces propriétés est commune à l'ensemble des kriges et cokriges, il s'agit de l'exactitude du cokrigeage aux points de données. La seconde propriété n'est vérifiée que dans le cas d'un krigeage ou d'un cokrigeage à moyenne connue, c'est l'orthogonalité de l'erreur de krigeage ou de cokrigeage par rapport à toute combinaison linéaire des données.

Ces deux propriétés sont démontrées dans les paragraphes suivants.

♦ Exactitude aux points de données

Si le point y , pour lequel le logarithme de l'impédance est estimé, est un point de donnée d'impédance y_ζ , les poids de cokrigeage, solutions du système de cokrigeage sont tels que :

$$\begin{cases} \lambda_{x_\zeta}^\alpha = 0 & \forall \alpha \neq \zeta \\ \lambda_{x_\zeta}^\alpha = 1 & \text{si } \alpha = \zeta \\ \delta_{x_\zeta}^\beta = 0 & \forall \beta \end{cases}$$

Pour constater ceci, il suffit d'écrire le système de cokrigeage dans le cas particulier où y est un point de donnée du logarithme de l'impédance. La valeur du logarithme de l'impédance estimée en y_ζ est donc :

$$\ln I^*(x_\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_{x_\zeta}^\alpha \ln I(x_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_{x_\zeta}^\beta \text{Amp}(x_\beta) = \ln I(x_\zeta)$$

Le cokrigeage est donc bien exact aux points de données d'impédance.

♦ Orthogonalité de l'erreur de cokrigeage par rapport aux combinaisons linéaires des données en logarithme des impédances ou d'amplitude mesurée

La première ligne du système de cokrigeage indique que pour tout point y :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I}(y_\alpha - y_{\alpha'}) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_{\alpha'}) &= C_{\ln I}(y - y_{\alpha'}) \quad \forall \alpha' = 1, \dots, nbI \\ \Rightarrow \text{Cov} \left[\ln I(y_{\alpha'}); \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta) - \ln I(y) \right] &= 0 \quad \forall \alpha' = 1, \dots, nbI \end{aligned}$$

$$=> \text{Cov}[\ln I(y_{\alpha'}); \ln I^*(y) - \ln I(y)] = 0 \quad \forall \alpha' = 1, \dots, \text{nbI}$$

$$=> \text{Cov}\left[\sum_{\alpha'=1}^{\text{nbI}} \mu^{\alpha'} \ln I(y_{\alpha'}); \ln I^*(y) - \ln I(y)\right] = 0 \quad \forall \mu^{\alpha'}$$

Ce qui signifie que toute combinaison linéaire des données du logarithme des impédances est orthogonale à l'erreur de cokrigage. De la même façon, la seconde ligne du système de cokrigage indique que pour tout point y :

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{nbI}} \lambda_y^{\alpha} C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{\text{nbA}} \delta_y^{\beta} C_{\text{Amp}}(y_{\beta'} - y_{\beta}) = C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y) \quad \forall \beta' = 1, \dots, \text{nbA}$$

$$=> \text{Cov}\left[\text{Amp}(y_{\beta'}); \sum_{\alpha=1}^{\text{nbI}} \lambda_y^{\alpha} \ln I(y_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{\text{nbA}} \delta_y^{\beta} \text{Amp}(y_{\beta}) - \ln I(y)\right] = 0 \quad \forall \beta' = 1, \dots, \text{nbA}$$

$$=> \text{Cov}[\text{Amp}(y_{\beta'}); \ln I^*(y) - \ln I(y)] = 0 \quad \forall \beta' = 1, \dots, \text{nbA}$$

$$=> \text{Cov}\left[\sum_{\beta'=1}^{\text{nbA}} v^{\beta'} \text{Amp}(y_{\beta'}); \ln I^*(y) - \ln I(y)\right] = 0 \quad \forall v^{\beta'}$$

Ce qui, de même que précédemment, signifie que toute combinaison linéaire des données d'amplitude mesurée est orthogonale à l'erreur de cokrigage.

La combinaison de ces deux remarques implique que, pour tout point y :

$$=> \text{Cov}\left[\sum_{\alpha'=1}^{\text{nbI}} \mu^{\alpha'} \ln I(y_{\alpha'}) + \sum_{\beta'=1}^{\text{nbA}} v^{\beta'} \text{Amp}(y_{\beta'}); \ln I^*(y) - \ln I(y)\right] = 0 \quad \forall \mu^{\alpha'} \quad \forall v^{\beta'}$$

Toute combinaison linéaire des données du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée est donc orthogonale à l'erreur de cokrigage. Dans le cas où le logarithme de l'impédance et les amplitudes mesurées sont des variables aléatoires gaussiennes, il y a en plus indépendance du cokrigage et de son erreur, propriété qui sera utilisée lors de la simulation.

2.2.2. Cokrigage conditionnant

L'une des méthodes "classiques" d'obtention d'une simulation conditionnelle est de contraindre une simulation non conditionnelle par un krigeage à moyenne connue. Afin de tenir compte de l'ensemble des données disponibles, l'idée est ici de contraindre une cosimulation non conditionnelle par un cokrigage à moyenne connue. L'utilisation de ce cokrigage à moyenne connue n'est possible que si le logarithme des impédances et les amplitudes simulées sont des variables aléatoires gaussiennes, stationnaire d'ordre 2 et si la moyenne du logarithme des impédances est supposée connue. En effet, sans ces hypothèses, les propriétés du cokrigage à moyenne connue exposées précédemment ne sont pas vérifiées. Et ce cokrigage ne peut pas être utilisé pour conditionner la simulation du logarithme des impédances.

2.2.2.1. Principe du cokrigage conditionnant

La contrainte d'une cosimulation du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées par un cokrigage est basée sur le fait que, quel que soit le point y , le logarithme de l'impédance en y peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\ln I(y) &= \ln I^*(y) + [\ln I(y) - \ln I^*(y)] = \\ &= \ln I^*(y) + \varepsilon(y)\end{aligned}$$

avec : $\varepsilon(y)$: l'erreur de cokrigage.

Quel que soit le point y , le logarithme de l'impédance en y s'écrit donc comme la somme du cokrigage des données et de l'erreur de cokrigage. Pour simuler le logarithme de l'impédance conditionnellement aux données, il faut donc effectuer un cokrigage des données auquel une simulation de l'erreur de cokrigage est ajoutée. Afin que les propriétés de l'erreur de cokrigage soient vérifiées, cette erreur doit être indépendante du cokrigage du logarithme des impédances.

L'erreur de cokrigage est simulée en remplaçant la réalité inconnue par une simulation. Soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon(y) &= \ln I_{\text{SNC}}(y) - \ln I_{\text{SNC}}^*(y) = \\ &= \ln I_{\text{SNC}}(y) - \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I_{\text{SNC}}(y_\alpha) - \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}_{\text{SNC}}(y_\beta)\end{aligned}$$

avec : $\ln I_{\text{SNC}}(y)$, la cosimulation non conditionnelle du logarithme des impédances,
 $\text{Amp}_{\text{SNC}}(y)$, la cosimulation non conditionnelle des amplitudes mesurées,
 $\ln I_{\text{SNC}}^*(y)$, le cokrigage de la cosimulation du logarithme des impédances à l'aide du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée cosimulées, aux mêmes points que les données d'impédance acoustique et d'amplitude mesurée.

Les cosimulations du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée étant indépendantes des données, l'erreur de cokrigage simulée est bien indépendante du cokrigage des données.

Finalement, la simulation conditionnelle du logarithme des impédances, $\ln I_{\text{SC}}$, est donc telle que :

$$\ln I_{\text{SC}}(y) = \ln I^*(y) + \ln I_{\text{SNC}}(y) - \ln I_{\text{SNC}}^*(y)$$

2.2.2.2. Propriétés de la simulation conditionnelle

Reste à vérifier que cette simulation conditionnée a les bonnes propriétés, c'est-à-dire qu'elle a l'espérance, les covariances simples et croisée désirées et qu'elle est modélisée aux points de données.

◆ Espérance

La moyenne de la simulation conditionnée du logarithme des impédances est telle que :

$$E[\ln I_{\text{SC}}(y)] = E[\ln I^*(y)] + E[\ln I_{\text{SNC}}(y) - \ln I_{\text{SNC}}^*(y)] =$$

$$= E[\ln I^*(y)] = E[\ln I(y)]$$

En effet, le cokrigage est (comme le krigeage) un estimateur sans biais, comme l'exprime la condition d'universalité (15). La simulation conditionnée du logarithme de l'impédance a donc bien l'espérance désirée.

♦ Covariance simple

La simulation conditionnée du logarithme de l'impédance peut s'écrire :

$$\ln I_{SC}(y) = \ln I^*(y) + \varepsilon(y)$$

La covariance de la simulation conditionnée du logarithme des impédances est donc telle que :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\ln I_{SC}(y); \ln I_{SC}(y+h)] &= \text{Cov}[\ln I^*(y) + \varepsilon(y); \ln I^*(y+h) + \varepsilon(y+h)] = \\ &= \text{Cov}[\ln I^*(y); \ln I^*(y+h)] + \text{Cov}[\ln I^*(y); \varepsilon(y+h)] + \text{Cov}[\varepsilon(y); \ln I^*(y+h)] + \\ &\quad + \text{Cov}[\varepsilon(y); \varepsilon(y+h)] = \\ &= C_{\ln I}^*(h) + C_{\varepsilon}(h) \end{aligned}$$

En effet, toute combinaison linéaire du logarithme des impédances et des amplitudes étant orthogonale à l'erreur de cokrigage (paragraphe 2.2.1.3.), les termes $\text{Cov}[\ln I^*(y); \varepsilon(y+h)]$ et $\text{Cov}[\varepsilon(y); \ln I^*(y+h)]$ sont nuls.

Le terme restant $C_{\ln I}^*(h)$ s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_{\ln I}^*(h) &= \text{Cov}[\ln I^*(y); \ln I^*(y+h)] = \\ &= \text{Cov}\left[\sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta); \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_{y+h}^{\alpha'} \ln I(y_{\alpha'}) + \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_{y+h}^{\beta'} \text{Amp}(y_{\beta'})\right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \lambda_{y+h}^{\alpha'} C_{\ln I}(y_{\alpha'} - y_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\beta'=1}^{nbA} \lambda_y^\alpha \delta_{y+h}^{\beta'} C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y_\alpha) + \\ &\quad + \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \sum_{\beta=1}^{nbA} \lambda_{y+h}^{\alpha'} \delta_y^\beta C_{\ln I \text{ Amp}}(y_\beta - y_{\alpha'}) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_y^\beta \delta_{y+h}^{\beta'} C_{\text{Amp}}(y_\beta - y_{\beta'}) \end{aligned}$$

En ce qui concerne le terme $C_{\varepsilon}(h)$, les calculs sont grandement simplifiés s'il est considéré que :

$$\varepsilon(y) = \ln I_{SNC}(y) - \ln I_{SNC}^*(y)$$

Donc :

$$[\varepsilon(y) + \ln I_{SNC}^*(y)] = \ln I_{SNC}(y)$$

Par conséquent :

$$\text{Cov}[\varepsilon(y) + \ln I_{\text{SNC}}^*(y); \varepsilon(y+h) + \ln I_{\text{SNC}}^*(y+h)] = C_{\ln I}(h)$$

Car, par définition de la cosimulation, $\text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}(y); \ln I_{\text{SNC}}(y+h)] = C_{\ln I}(h)$. Par suite :

$$\begin{aligned} &\text{Cov}[\varepsilon(y); \varepsilon(y+h)] + \text{Cov}[\varepsilon(y); \ln I_{\text{SNC}}^*(y+h)] + \text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}^*(y); \varepsilon(y+h)] + \\ &+ \text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}^*(y); \ln I_{\text{SNC}}^*(y+h)] = C_{\ln I}(h) \end{aligned}$$

Finalement :

$$C_{\varepsilon}(y) + C_{\ln I_{\text{SNC}}}^*(h) = C_{\ln I}(h)$$

En effet, toute combinaison linéaire des données du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées étant orthogonale à l'erreur de cokrigage (paragraphe 2.2.1.3.), les termes $\text{Cov}[\varepsilon(y); \ln I_{\text{SNC}}^*(y+h)]$ et $\text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}^*(y); \varepsilon(y+h)]$ sont nuls. Le terme $C_{\varepsilon}(h)$ peut donc s'écrire :

$$C_{\varepsilon}(y) = C_{\ln I}(h) - C_{\ln I_{\text{SNC}}}^*(h)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_{\ln I_{\text{SNC}}}^*(h) &= \text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}^*(y); \ln I_{\text{SNC}}^*(y+h)] = \\ &= \text{Cov} \left[\sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^{\alpha} \ln I_{\text{SNC}}(y_{\alpha}) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^{\beta} \text{Amp}_{\text{SNC}}(y_{\beta}); \right. \\ &\quad \left. \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_y^{\alpha'} \ln I_{\text{SNC}}(y_{\alpha'}) + \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_y^{\beta'} \text{Amp}_{\text{SNC}}(y_{\beta'}) \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \lambda_y^{\alpha} \lambda_y^{\alpha'} C_{\ln I}(y_{\alpha'} - y_{\alpha}) + \sum_{\alpha=1}^{nbI} \sum_{\beta'=1}^{nbA} \lambda_y^{\alpha} \delta_y^{\beta'} C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta'} - y_{\alpha}) + \\ &+ \sum_{\alpha'=1}^{nbI} \sum_{\beta=1}^{nbA} \lambda_y^{\alpha'} \delta_y^{\beta} C_{\ln I \text{ Amp}}(y_{\beta} - y_{\alpha'}) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \sum_{\beta'=1}^{nbA} \delta_y^{\beta} \delta_y^{\beta'} C_{\text{Amp}}(y_{\beta} - y_{\beta'}) = C_{\ln I}^*(h) \end{aligned}$$

Car, par définition de la cosimulation, $\text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}(y); \text{Amp}_{\text{SNC}}(y+h)] = C_{\ln I \text{ Amp}}(h)$ et $\text{Cov}[\ln I_{\text{SNC}}(y); \ln I_{\text{SNC}}(y+h)] = C_{\ln I}(h)$ et $\text{Cov}[\text{Amp}_{\text{SNC}}(y); \text{Amp}_{\text{SNC}}(y+h)] = C_{\text{Amp}}(h)$. Finalement, la covariance de la simulation conditionnelle est donc telle que :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\ln I_{\text{SC}}(y); \ln I_{\text{SC}}(y+h)] &= C_{\ln I}^*(h) + C_{\ln I}(h) - C_{\ln I_{\text{SNC}}}^*(h) = \\ &= C_{\ln I}^*(h) + C_{\ln I}(h) - C_{\ln I}^*(h) = C_{\ln I}(h) \end{aligned}$$

La covariance du logarithme de l'impédance simulé conditionnellement aux données est donc bien la covariance désirée ; à savoir : la covariance du logarithme des impédances.

♦ Covariance croisée

En ce qui concerne la covariance croisée de la simulation conditionnée du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée, elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\ln I_{SC}(y); \text{Amp}(y + h)] &= \text{Cov}[\ln I^*(y) + \varepsilon(y); \text{Amp}(y + h)] = \\ &= \text{Cov}[\ln I^*(y); \text{Amp}(y + h)] + \text{Cov}[\varepsilon(y); \text{Amp}(y + h)] = \\ &= \text{Cov}[\ln I^*(y); \text{Amp}(y + h)]\end{aligned}$$

En effet, il a été vu au paragraphe 2.2.1.3. que l'erreur de cokrigage est orthogonale à toute combinaison linéaire des amplitudes mesurées, donc : $\text{Cov}[\varepsilon(y); \text{Amp}(y + h)] = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\ln I^*(y); \text{Amp}(y + h)] &= \text{Cov}\left[\sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha \ln I(y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta \text{Amp}(y_\beta); \text{Amp}(y + h)\right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{nbI} \lambda_y^\alpha C_{\ln I \text{ Amp}}(y + h - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{nbA} \delta_y^\beta C_{\text{Amp}}(y + h - y_\beta) = \\ &= C_{\ln I \text{ Amp}}(y - h - y) = C_{\ln I \text{ Amp}}(h)\end{aligned}$$

d'après le système de cokrigage. La covariance croisée entre le logarithme de l'impédance simulé conditionnellement aux données et l'amplitude mesurée est donc bien la covariance croisée désirée.

♦ Exactitude aux points de données

En un point expérimental y_ξ , la relation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}\ln I_{SC}(y_\xi) &= \ln I^*(y_\xi) + \ln I_{SNC}(y_\xi) - \ln I_{SNC}^*(y_\xi) = \\ &= \ln I(y_\xi) + \ln I_{SNC}(y_\xi) - \ln I_{SNC}(h_\xi) = \ln I(h_\xi)\end{aligned}$$

Car, le cokrigage est un estimateur exact aux points de données. Le logarithme des impédances simulé conditionnellement aux données est donc exact aux points de données d'impédance.

La simulation conditionnelle du logarithme des impédances effectuée à l'aide d'une cosimulation et d'un cokrigage conditionnant a donc bien les propriétés désirées. La généralisation de cette méthode de simulation du logarithme des impédances contrainte par les données d'impédance acoustique et d'amplitude mesurée au cas non stationnaire pourrait s'effectuer en utilisant un cokrigage en FAI-k pour conditionner la cosimulation.

2.2.2.3. Voisinage de cokrigage

Etant donné le nombre extrêmement important de données (notamment de données d'amplitude mesurée), le cokrigage est effectué sur un voisinage glissant, ou plus exactement sur deux voisinages glissants : l'un pour le logarithme de l'impédance et l'autre pour l'amplitude mesurée. C'est-à-dire que seules les données contenues dans ces voisinages sont utilisées afin

d'estimer le logarithme de l'impédance. Ce voisinage glissant est un voisinage rectangulaire centré sur le point pour lequel le cokrigage est effectué. Ce voisinage se déplace donc en même temps que le point pour lequel le logarithme de l'impédance est estimé, d'où le nom de voisinage "glissant". Si le point à estimer est situé sur un bord du champ, le voisinage cesse de glisser et vient se caler sur le bord du champ, comme il est représenté sur la figure suivante :

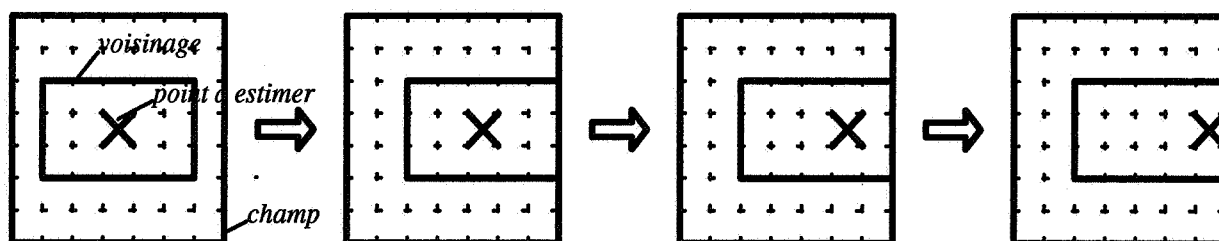


Fig. 30 : Le voisinage glissant

De même si le point à estimer est sur un coin du champ. Le logarithme de l'impédance étant la donnée d'intérêt et les données d'impédances étant beaucoup moins nombreuses que les données d'amplitude mesurée, le voisinage du logarithme de l'impédance est toujours choisi plus grand que le voisinage de l'amplitude mesurée. La taille de ces voisinages est fonction de la portée des différentes covariances et donc de la longueur dynamique de l'ondelette.

2.3. Relations mathématiques entre les covariances

Le cokrigage conditionnant exposé précédemment nécessite la connaissance :

- ◆ de la covariance du logarithme des impédances,
- ◆ de celle des amplitudes mesurées,
- ◆ et de la covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées.

Or, les impédances ne sont connues qu'aux puits. Elles sont donc trop peu nombreuses pour calculer une covariance expérimentale absolument fiable. Les relations entre les covariances exposées et démontrées ici permettent de vérifier l'ajustement de la covariance du logarithme des impédances et de la covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées à l'aide de la covariance des amplitudes mesurées.

2.3.1. Relations mathématiques entre les covariances des données

Ce paragraphe reprend et complète le travail de Zhang effectué au cours de son mastère au Centre de Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris ([22] Zhang Z. Y. : "Analyses géostatistiques de données sismiques").

Les relations liant le logarithme des impédances aux coefficients de réflexion et les coefficients de réflexion aux amplitudes modélisées sont toutes les deux verticales. C'est-à-dire

que les logarithmes des impédances qui interviennent dans le calcul d'un coefficient de réflexion sont situés sur plusieurs lignes horizontales de données, et sur une seule verticale. De même, les coefficients de réflexion utilisés pour le calcul d'une amplitude modélisée sont situés sur une verticale unique. Il apparaît donc logique de distinguer deux directions dans le calcul des relations entre les covariances : la direction verticale et la direction horizontale. Ces covariances verticales et horizontales sont notées respectivement $C^V(h)$ et $C^H(h)$. La covariance "générale" aux distances h_x suivant l'horizontale et h_t suivant la verticale est notée $C(h_x, h_t)$.

Afin de distinguer les covariances des différentes données, elles sont notées $C_{\ln I}$, C_{Cr} , C_a , C_{Amp} et C_R respectivement pour le logarithme de l'impédance, les coefficients de réflexion, l'amplitude modélisée, l'amplitude mesurée et le résidu. De même, les covariances croisées sont distinguées à l'aide des abréviations des deux données concernées. Par exemple $C_{\ln I \text{ Amp}}$ représente la covariance croisée du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée.

Afin de ne pas effrayer le lecteur par un nombre important d'équations, seules les relations liant les covariances des données sont exposées dans ce paragraphe. L'ensemble des démonstrations de ces relations est exposé dans l'annexe 4.

2.3.1.1. Relations entre les covariances verticales des données

Les covariances simples verticales sont par définition :

$$C_Y^V(h) = C_Y(0, h) = \text{Cov}[Y(x, t); Y(x, t + h)]$$

La définition des covariances croisées verticales est :

$$C_{YZ}^V(h) = C_{YZ}(0, h) = \text{Cov}[Y(x, t); Z(x, t + h)]$$

C'est à partir de ces définitions que l'ensemble des relations suivantes ont été déterminées.

2.3.1.1.1. Relation liant la covariance verticale des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances

Deux approximations permettent de lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances : l'une "continue" et l'autre discrète. Ces deux approximations permettent d'établir deux relations entre la covariance des coefficients de réflexion et celle du logarithme des impédances.

♦ Approximation "continue"

$$C_{Cr}^V(h) = - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I}^V}{dt^2}(h) \quad (16)$$

L'utilisation de cette relation entre les covariances limite de façon importante le nombre de covariances admissibles pour le logarithme des impédances. En effet, un grand nombre de covariances usuellement utilisées ont des dérivées secondes qui n'ont pas les propriétés d'une covariance. Une analyse des dérivées secondes de quelques modèles de covariance fréquemment utilisés en géostatistique est effectuée dans l'annexe 5.

♦ Approximation discrète

$$C_{Cr}^V(h) = -\frac{1}{4}\{C_{lnl}^V(h + \Delta t) - 2C_{lnl}^V(h) + C_{lnl}^V(h - \Delta t)\} \quad (17)$$

Cette relation n'est rien d'autre que la discrétisation par les différences finies de la relation (16). L'avantage de cette relation par rapport à la relation (16) est que tous les modèles de covariances sont admissibles, car ce sont des combinaisons linéaires de covariances.

2.3.1.1.2. Relation liant la covariance verticale des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale des coefficients de réflexion

$$C_a^V(h) = C_{Cr}^V * S(h) \quad (18)$$

avec : $S(u) = \hat{s} * s(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u + \tau)s(\tau)d\tau$ l'autoconvolué de l'ondelette $s(t)$.

Les covariances verticales du logarithme des impédances, des coefficients de réflexion et des amplitudes sont donc directement liées entre elles.

2.3.1.1.3. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances

Deux relations, l'une “continue” et l'autre discrète, permettent de lier la covariance croisée verticale du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances.

♦ Approximation “continue”

$$C_{lnl Cr}^V(h) = -\frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} C_{lnl}^V(h) \quad (19)$$

Comme pour la relation (16), l'utilisation de cette expression impose à la dérivée de la covariance verticale du logarithme des impédances d'être une covariance, ce qui, une fois encore, n'est pas toujours le cas (annexe 5).

♦ Approximation discrète

$$C_{lnl Cr}^V(h) = \frac{1}{2}\{C_{lnl}^V(h + \Delta t/2) - C_{lnl}^V(h - \Delta t/2)\} \quad (20)$$

Ici encore, la relation discrète liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances à la covariance des coefficients de réflexion est la discrétisation par les différences finies de la relation “continue” correspondante.

Les relations “continue” et discrète liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances ont été établies pour permettre le calcul des relations suivantes. Elles ne sont pas directement utilisées dans la contrainte de la simulation du logarithme des impédances par un cokrigage.

2.3.1.1.4. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale du logarithme des impédances

Cette relation peut s'écrire de deux façons différentes en utilisant l'une ou l'autre des relations qui lient les coefficients de réflexion au logarithme des impédances.

◆ Approximation “continue”

$$C_{\ln a}^V(h) = -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln}^V}{dt} * s(h) \quad (21)$$

Comme pour les relations “continues” précédentes, l’utilisation de cette relation impose des restrictions lors du choix du modèle de covariance utilisé pour ajuster la covariance expérimentale du logarithme des impédances. Les modèles usuels autorisés pour la covariance du logarithme des impédances sont également exposés dans l’annexe 5.

◆ Approximation discrète

$$C_{\ln a}^V(h) = \frac{1}{2} [C_{\ln}^V * s(h + \Delta t/2) - C_{\ln}^V * s(h - \Delta t/2)] \quad (22)$$

Cette expression discrète est, une nouvelle fois, la discrétisation par les différences finies de l’expression “continue” correspondante.

Les relations précédentes liant les différentes covariances verticales simples et croisées à la covariance du logarithme des impédances sont relativement simples. Elles sont testées (paragraphe 3.2.1.) puis utilisées afin d’ajuster les différentes covariances verticales (paragraphe 4.2.).

2.3.1.2. Relations entre les covariances horizontales des données

Comme les covariances verticales simples, les covariances horizontales simples sont définies par :

$$C_Y^H(h) = C_Y(h, 0) = \text{Cov}[Y(x, t); Y(x + h, t)]$$

Par contre, les covariances horizontales expérimentales croisées du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion et celle du logarithme des impédances et des amplitudes ne peuvent pas être calculée. En effet, les données d’impédance ne sont pas situées sur les mêmes horizontales que les coefficients de réflexion ou les données d’amplitude (les grilles des coefficients de réflexion et des amplitudes sont décalées d’un demi pas de temps, suivant la verticale, par rapport à la grille des impédances). De même, étant donné les liens entre les données, il n’est pas possible de calculer une covariance croisée horizontale. On a donc choisi de travailler à l’aide d’une covariance pseudo-horizontale, définie comme suit :

$$C_{YZ}^H(h, \Delta t/2) = C_{YZ}(h, \Delta t/2) = \text{Cov}[Y(x, t); Z(x + h, t + \Delta t/2)]$$

Cette covariance sera notée covariance croisée “horizontale”.

2.3.1.2.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances

Tout comme les relations précédentes suivant l’axe vertical, les relations suivant l’horizontale peuvent s’écrire de deux façons, l’une “continue” et l’autre discrète.

◆ Approximation “continue”

$$C_{Cr}^H(h) = -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln}^V}{dt^2}(h, 0) \quad (23)$$

♦ **Approximation discrète**

$$C_{Cr}^H(h) = -\frac{1}{4} \{C_{lnl}(h, \Delta t) - 2C_{lnl}^H(h) + C_{lnl}(h, -\Delta t)\} \quad (24)$$

Cette relation n'est pas aussi simple que celles qui lient les covariances verticales. En effet, elle ne fait pas intervenir uniquement la covariance horizontale du logarithme des impédances, mais sa covariance "générale".

2.3.1.2.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques "modélisées" à la covariance des coefficients de réflexion

La relation entre la covariance horizontale des amplitudes modélisées et celle des coefficients de réflexion fait, elle aussi, intervenir la covariance "générale" des coefficients de réflexion. En effet, la relation (12) est, comme la relation (11), une "relation verticale".

La relation liant la covariance horizontale des amplitudes modélisées et la covariance des coefficients de réflexion est la suivante :

$$C_a^H(h) = C_{Cr} * S(h, 0) \quad (25)$$

Cette relation fait donc bien intervenir la covariance "générale" des coefficients de réflexion.

2.3.1.2.3. Relation liant la covariance croisée "horizontale" du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances

Tout comme les relations précédentes, cette relation peut s'écrire de deux façons : l'une "continue" et l'autre discrète.

♦ **Approximation "continue"**

$$C_{lnl Cr}^H(h) = -\frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} C_{lnl}(h, \Delta t/2) \quad (26)$$

♦ **Approximation discrète**

$$C_{lnl Cr}^H(h, \Delta t/2) = \frac{1}{2} \{C_{lnl}(h, \Delta t) - C_{lnl}^H(h)\} \quad (27)$$

Comme les relations correspondantes sur la direction verticale, les relations "continue" et discrète liant la covariance horizontale croisée du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances sont utilisées pour permettre de calculer le lien entre la covariance croisée horizontale du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées et celle du logarithme des impédances. Elles ne sont pas directement utilisées lors du conditionnement de la simulation du logarithme des impédances par un cokrigeage.

2.3.1.2.4. Relation liant la covariance croisée "horizontale" du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques "modélisées" à la covariance croisée du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion

$$C_{lnl a}^H(h, \Delta t/2) = C_{lnl Cr} * s(h, \Delta t/2) \quad (28)$$

Comme toutes les relations qui lient les diverses covariances simples et croisées horizontales à la covariance du logarithme des impédances, cette relation fait intervenir la covariance "géné-

rale” du logarithme des impédances et non pas sa covariance horizontale. Les relations liant les covariances horizontales à la covariance du logarithme des impédances sont donc plus complexes que celles qui lient les covariances verticales à la covariance verticale du logarithme des impédances.

Comme il est expliqué précédemment, dans un cas réel, seule la covariance expérimentale des amplitudes mesurées est accessible de façon fiable. L’idée est donc d’utiliser les relations entre les covariances afin de choisir le modèle de covariance du logarithme des impédances qui permet d’ajuster au mieux la covariance expérimentale du logarithme des impédances, celle des amplitudes mesurées et la covariance expérimentale croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées. Pour faire ceci, il est intéressant d’avoir des relations simples qui lient toutes ces covariances.

La covariance expérimentale des amplitudes mesurées est très différente dans les directions horizontale et verticale. Il paraît donc plus simple d’effectuer les ajustements indépendamment dans les deux directions. Les relations qui lient les covariances verticales permettent un tel ajustement. Mais ce n’est pas le cas des relations liant les covariances horizontales, car la covariance “générale” y apparaît. Pour que ces ajustements soient simples, une hypothèse simplificatrice est à envisager. Le milieu en logarithme des impédances est donc supposé à covariance factorisable.

2.3.1.3. Cas particulier d’un milieu de covariance factorisable

Une covariance est dite factorisable si elle s’écrit comme le produit de deux covariances :

$$C(h_x, h_t) = C_1(h_x)C_2(h_t) \quad (29)$$

Les covariances C_1 et C_2 sont liées aux covariances horizontales et verticales. En effet :

$$\begin{aligned} C^H(h_x) &= C(h_x, 0) = C_1(h_x)C_2(0) \\ \Rightarrow C_1(h_x) &= \frac{C^H(h_x)}{C_2(0)} \end{aligned} \quad (30)$$

et de même :

$$\begin{aligned} C^V(h_t) &= C(0, h_t) = C_1(0)C_2(h_t) \\ \Rightarrow C_2(h_t) &= \frac{C^V(h_t)}{C_1(0)} \end{aligned} \quad (31)$$

En introduisant les expressions (30) et (31) dans la relation (29), une expression liant la covariance “générale” aux covariances horizontale et verticale est obtenue :

$$C(h_x, h_t) = \frac{C^H(h_x)C^V(h_t)}{C_1(0)C_2(0)} = \frac{C^H(h_x)C^V(h_t)}{C(0, 0)}$$

Or, $C(0,0)$ n’est rien d’autre que la variance de la donnée considérée. En effet, pour une variable Y , la relation suivante peut être écrite :

$$C_Y(0, 0) = \text{Cov}[Y(x, t); Y(x, t)] = \text{Var}[Y(x, t)]$$

Il a été vu précédemment que la covariance croisée horizontale du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion ou celle du logarithme des impédances et des amplitudes ne pouvaient pas être calculées expérimentalement, et qu'un modèle croisé horizontal n'avait pas de sens ici. Néanmoins, une expression liant la covariance croisée "générale" aux covariances croisées "horizontale" et verticale peut être établie. En effet, la covariance croisée "horizontale" étant factorisable, elle peut s'écrire "

$$\begin{aligned} C^H(h_x, \Delta t/2) &= C(h_x, \Delta t/2) = C_1(h_x)C_2(\Delta t/2) \\ &=> C_1(h_x) = \frac{C^H(h_x, \Delta t/2)}{C_2(\Delta t/2)} \end{aligned} \quad (32)$$

En introduisant les expressions (31) et (32) dans la relation (29), la covariance croisée peut s'écrire :

$$C(h_x, h_t) = \frac{C^H(h_x)C^V(h_t)}{C_1(0)C_2(\Delta t/2)} = \frac{C^H(h_x)C^V(h_t)}{C(0, \Delta t/2)}$$

avec $C(0, \Delta t/2) = C^H(0, \Delta t/2)$ ou $C(0, \Delta t/2) = C^V(\Delta t/2)$

Le milieu qui est considéré à covariance factorisable est la section en logarithme de l'impédance. En effet, si le logarithme des impédances est à covariance factorisable, toutes les autres covariances simples et croisées le sont aussi. Ceci est démontré très simplement dans l'annexe 6.

Ces milieux étant tous à covariance factorisable, les expressions continues et discrètes liant les covariances simples et croisées horizontales peuvent s'écrire plus simplement. Les relations liant les covariances simples et croisées verticales ne subissent aucune modification.

2.3.1.3.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

Dans le cas de milieux à covariances factorisables, les relations (23) et (24) liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances se simplifient de la façon suivante :

♦ Approximation "continue"

$$C_{Cr}^H(h) = -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{C_{lnI}^H(h)}{\text{Var}[lnI]} \frac{d^2 C_{lnI}^V}{dt^2}(0) \quad (33)$$

♦ Approximation discrète

$$C_{Cr}^H(h) = -\frac{C_{lnI}^H(h)}{2} \left\{ \frac{C_{lnI}^V(\Delta t)}{\text{Var}[lnI]} - 1 \right\} \quad (34)$$

La covariance horizontale des coefficients de réflexion est ainsi liée de façon relativement simple aux covariances horizontales et verticales du logarithme de l'impédance.

2.3.1.3.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques "modélisées" aux covariances horizontale et verticale des coefficients de réflexion

$$C_a^H(h) = \frac{C_{Cr}^H(h)}{\text{Var}[Cr]} C_{Cr}^V * S(0) \quad (35)$$

2.3.1.3.3. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

Tout comme les expressions précédentes faisant intervenir les coefficients de réflexion, la covariance croisée “horizontale” du logarithme de l’impédance et des coefficients de réflexion peut s’écrire de deux façons, l’une “continue” et l’autre discrète.

♦ Approximation “continue”

$$C_{\ln I}^H Cr(h, \Delta t/2) = - \frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{\text{Var}[\ln I]} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(\Delta t/2) \quad (36)$$

♦ Approximation discrète

$$C_{\ln I}^H Cr(h, \Delta t/2) = \frac{C_{\ln I}^H(h)}{2\text{Var}[\ln I]} \{C_{\ln I}^V(\Delta t) - C_{\ln I}^V(0)\} \quad (37)$$

Encore une fois, l’expression discrète est la discrétisation par les différences finies de l’expression “continue”.

2.3.1.3.4. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

La relation liant la covariance croisée horizontale du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées à celle de logarithme des impédances s’écrit d’une façon “continue” et d’une façon discrète.

♦ Approximation “continue”

$$C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) = - \frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{C_{\ln I}^H(0)} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt} * s(\Delta t/2) \quad (38)$$

Bien que peu différente de la relation (26), cette expression ne dépend plus de la covariance “générale” du logarithme de l’impédance, mais de leurs covariances horizontale et verticale.

♦ Approximation discrète

$$C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) = \frac{C_{\ln I}^H(h)}{2C_{\ln I}^H(0)} \{C_{\ln I}^V * s(\Delta t) - C_{\ln I}^V * s(0)\} \quad (39)$$

Les relations qui lient les covariances simples et croisées horizontales à la covariance du logarithme des impédances sont maintenant beaucoup plus simples, ce qui facilitera l’ajustement des covariances expérimentales.

2.3.2. Relations mathématiques liant les covariances simple et croisées du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées aux autres covariances

Les relations entre les covariances précédemment exprimées ne concernent que le logarithme de l’impédance, les coefficients de réflexion et les amplitudes modélisées. L’analyse

variographique se poursuit donc maintenant par l'expression des liens entre la covariance des amplitudes mesurées, celle du résidu et les covariances des autres données.

Toutes les covariances simples et croisées concernant le résidu sont exprimées dans ce paragraphe. L'obtention de ces expressions est basée sur l'utilisation de la relation (13).

2.3.2.1. Relation liant la covariance croisée du logarithme des impédances et du résidu sur les amplitudes mesurées aux autres covariances

La relation (13) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln I \text{ Amp}}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); \text{Amp}(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}[\ln I(x, t); a(x + h_x, t + h_t) + R(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}[\ln I(x, t); a(x + h_x, t + h_t)] + \text{Cov}[\ln I(x, t); R(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= C_{\ln I a}(h_x, h_t) + C_{\ln I R}(h_x, h_t)
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$= > C_{\ln I R}(h_x, h_t) = C_{\ln I \text{ Amp}}(h_x, h_t) - C_{\ln I a}(h_x, h_t)$$

Il est à noter que le second membre de cette expression n'est rien d'autre que la différence entre le modèle de covariance qui ajuste la covariance expérimentale croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées et le modèle de covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées qui est calculé à l'aide du modèle de covariance du logarithme de l'impédance et de l'ondelette.

Dans le cadre du modèle convolutif, le logarithme des impédances et le résidu n'ont aucune raison physique d'être corrélés. Par la suite, il sera donc supposé que :

$$C_{\ln I R}(h_x, h_t) = 0$$

2.3.2.2. Relation liant la covariance croisée de l'amplitude modélisée et du résidu sur les amplitudes mesurées à la covariance croisée du logarithme des impédances et du résidu sur les amplitudes mesurées

En écrivant les amplitudes modélisées en fonction du logarithme des impédances, la covariance croisée de l'amplitude modélisée et du résidu peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 C_{a R}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[a(x, t); R(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x, t - \tau)s(\tau)d\tau; R(x + h_x, t + h_t)\right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[Cr(x, t - \tau); R(x + h_x, t + h_t)]s(\tau)d\tau =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov} \left[\frac{\ln I(x, t - \tau + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \tau - \Delta t/2)}{2}; R(x + h_x, t + h_t) \right] s(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t - \tau + \Delta t/2); R(x + h_x, t + h_t)] - \\
 &\quad - \text{Cov}[\ln I(x, t - \tau - \Delta t/2); R(x + h_x, t + h_t)] \} s(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_{\ln I R}(h_x, h_t - \Delta t/2 + \tau) - C_{\ln I R}(h_x, h_t + \Delta t/2 + \tau)] s(\tau) d\tau \\
 C_{aR}(h_x, h_t) &= \frac{1}{2} [C_{\ln I R} * \hat{s}(h_x, h_t - \Delta t/2) - C_{\ln I R} * \hat{s}(h_x, h_t + \Delta t/2)]
 \end{aligned}$$

La covariance croisée de l'amplitude modélisée et du résidu est donc directement calculable à partir de la covariance croisée du logarithme de l'impédance et du résidu.

Dans le cas où le résidu est supposé sans corrélation avec le logarithme de l'impédance, cette relation se réduit très simplement à :

$$C_{aR}(h_x, h_t) = 0$$

Ceci indique que dans ce cas, et si l'amplitude modélisée et le résidu sont gaussiens, ces deux variables sont indépendantes.

2.3.2.3. Relation liant la covariance du résidu sur les amplitudes mesurées aux autres covariances

L'expression (13) indique que :

$$\begin{aligned}
 C_{\text{Amp}}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[\text{Amp}(x, t); \text{Amp}(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}[a(x, t) + R(x, t); a(x + h_x, t + h_t) + R(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}[a(x, t); a(x + h_x, t + h_t)] + \text{Cov}[a(x, t); R(x + h_x, t + h_t)] + \\
 &\quad + \text{Cov}[R(x, t); a(x + h_x, t + h_t)] + \text{Cov}[R(x, t); R(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= C_a(h_x, h_t) + C_{aR}(h_x, h_t) + C_{Ra}(h_x, h_t) + C_R(h_x, h_t) = \\
 &= C_a(h_x, h_t) + C_{aR}(h_x, h_t) + C_{aR}(-h_x, -h_t) + C_R(h_x, h_t)
 \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$=> C_R(h_x, h_t) = [C_{\text{Amp}}(h_x, h_t) - C_a(h_x, h_t)] - [C_{aR}(h_x, h_t) + C_{aR}(-h_x, -h_t)]$$

De même que précédemment, la première partie du second membre de cette expression est la différence entre le modèle de covariance utilisé pour ajuster la covariance expérimentale des amplitudes mesurées et le modèle de covariance des amplitudes modélisées calculé à l'aide du modèle de covariance du logarithme de l'impédance et de l'ondelette.

Ici encore, dans le cas où le résidu est supposé sans corrélation avec le logarithme des impédances et donc avec les amplitudes modélisées, cette relation peut se simplifier de la façon suivante :

$$C_R(h_x, h_t) = C_{\text{Amp}}(h_x, h_t) - C_a(h_x, h_t) \quad (40)$$

Le second membre de cette expression est alors la différence entre le modèle de covariance de l'amplitude mesurée et le modèle de covariance des amplitudes modélisées.

Les relations exposées dans ce chapitre ont pour but d'être utilisées afin de déterminer la covariance du logarithme des impédances et celle du résidu en connaissant uniquement les impédances aux puits et des amplitudes mesurées sur l'ensemble du champ. Sur la direction verticale, il semble que ceci soit possible. En effet, les puits permettent d'avoir une idée de la covariance du logarithme des impédances et de calculer la covariance des amplitudes modélisées correspondantes. Il ne reste plus qu'à comparer cette covariance à la covariance des amplitudes mesurées pour déterminer la covariance du résidu. L'ajustement des covariances verticales croisées se fait de la même façon. Sur la direction horizontale, ceci ne semble pas possible, car les puits ne permettent pas le calcul de la covariance horizontale du logarithme des impédances pour des petites distances. Pour résoudre ce problème, une hypothèse peut être faite ([23] Zhang Z. Y. et Galli A. : "Getting better quality seismic sections"). Il peut, en effet, être supposé que le résidu est non corrélé trace à trace. Ce qui implique que la covariance du résidu suivant l'horizontale est un effet de pépité pur. Il est alors possible d'ajuster l'ensemble des covariances horizontales.

Toutes les relations entre les covariances des différentes données exposées dans ce chapitre sont testées sur les données fournies par l'Institut Français du Pétrole. Ces tests sont exposés dans le chapitre suivant.

3. Application aux données du Mesa Verde

Les différentes données synthétiques fournies par l'Institut Français du Pétrole (impédances, amplitudes mesurées et ondelette) et les données supplémentaires (coefficients de réflexion et amplitudes modélisées) sont présentées ici, ainsi que leurs méthodes de construction. La construction des amplitudes modélisées a soulevé quelques problèmes qui sont exposés et étudiés ici. Ces données sont ensuite utilisées pour tester l'adéquation du modèle.

3.1. Présentation des données du Mesa Verde

Les données disponibles pour cette étude sont une section d'impédance acoustique, une section de coefficients de réflexion, une section d'amplitude modélisée, une section d'amplitude mesurée et une ondelette sismique. Ces données ont été :

- ◆ soit simulées à l'Institut Français du Pétrole,
- ◆ soit calculées au Centre de Géostatistique.

3.1.1. Données fournies par l'Institut Français du Pétrole

Les données fournies par l'Institut Français du Pétrole sont des données synthétiques issues d'une analyse séquentielle (stratigraphique) faite sur la coupe du Mesa Verde grâce aux panoramas et aux données de terrain ([8] Eschard R. et Desaubliaux G. : "Sequence stratigraphy of major regressive-transgressive littoral clastic wedge in the Mesa Verde area (Campanien, Colorado)").

3.1.1.1. Modèle géologique du Mesa Verde

Le modèle géologique du Mesa Verde est présenté dans la partie 1 au paragraphe 3.1.1. L'unité à partir de laquelle les données ont été construites est l'unité intermédiaire de la coupe. Il s'agit d'une unité de plaine côtière avec des grès réservoirs lenticulaires correspondant à des chenaux amalgamés ou isolés dans une matrice argileuse avec des bancs de charbon. Quatre lithofaciès ont été définis au sein de cette unité :

- ◆ un faciès de chenal, formé de grès propres moyens à stratification oblique en feston (faciès 11),
- ◆ un faciès de crevasses, composé de grès fins argileux avec des structures de rides de courant (faciès 4),
- ◆ un faciès de plaine d'inondation caractérisé par des argiles fines avec des sols et des nodules sidéritiques (faciès 3),
- ◆ des bancs de charbon (faciès 10).

Le modèle géologique a été digitalisé en une grille régulière avec un pas d'échantillonnage constant de 1 m dans les directions horizontale et verticale. C'est à partir de cette grille échantillonnée en profondeur sur l'axe vertical que la section en amplitude mesurée a été construite.

Par construction, les sections sismiques sont échantillonnées en temps sur l'axe vertical. C'est le cas de l'amplitude mesurée disponible pour cette étude. Afin que les impédances (directement construites à partir de la grille lithologique) soient sur une grille semblable à celle de la grille sismique, une conversion profondeur-temps de la grille lithologique a été effectuée. Pour cela, une loi de vitesse basée sur la vitesse de chaque lithofaciès (figure 31) a été calculée puis appliquée sur la grille lithologique régulière en profondeur.

	<i>masse volumique en g/cm³</i>	<i>vitesse en m/s</i>	<i>impédance en g/cm³.m/s</i>
<i>faciès 3</i>	2,39	2969	7095,91
<i>faciès 4</i>	2,25	2892	6507
<i>faciès 10</i>	2	2531	5062
<i>faciès 11</i>	2,25	2831	6369,75

Fig. 31 : Caractéristiques physiques des différents lithofaciès

Ces vitesses et masses volumiques ont été estimées à partir des diagraphies de deux puits d'une formation géologique équivalente à celle du Mesa Verde : la formation du Brent en mer du Nord ([16] Bourgeois A., Dequierez P.Y., Eschard R., Etienne G., Mace D. et Richard V. : "The Mesa Verde outcrop : seismic modeling, processing and interpretation").

De cette façon, une grille irrégulière en temps a été obtenue pour être rééchantillonnée au pas régulier de 0,2 milliseconde.

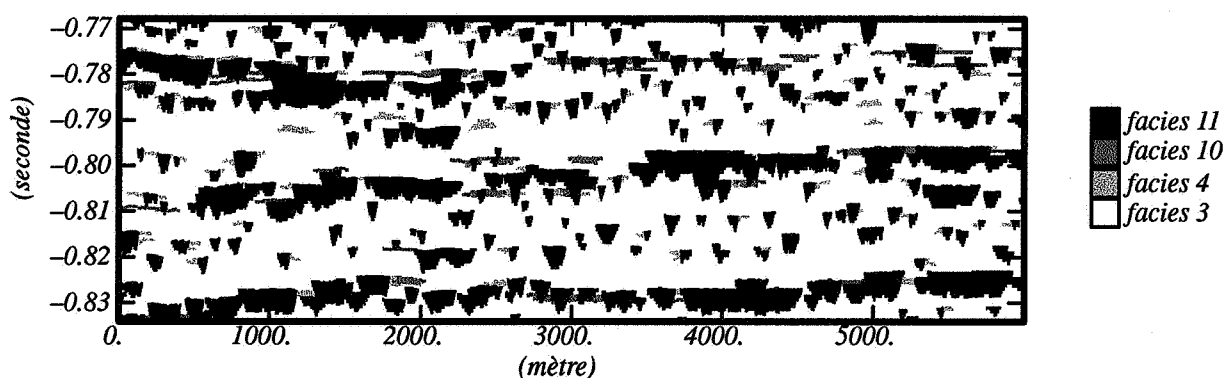


Fig. 32 : Section en lithofaciès

Cette image compte 6000 données suivant l'horizontale espacées de 1 mètre et 331 données suivant la verticale espacées de 0,2 milliseconde.

Toujours par construction, les sections sismiques ne peuvent pas être échantillonnées suivant la verticale avec un pas de temps aussi fin que 0,2 milliseconde. De même sur l'axe hori-

zontal, une section en amplitude mesurée ne peut pas être enregistrée tous les mètres. La section en amplitude disponible pour cette étude est échantillonnée avec un pas de temps, Δt , de 2 millisecondes sur la verticale et un pas d'espace de 12,5 mètres sur l'horizontale. Afin que les faciès et les amplitudes mesurées soient connues aux mêmes points, les faciès ont été rééchantillonnés sur la grille régulière de la sismique. La section obtenue est la suivante :

Ces quatre faciès sont répartis géographiquement comme suit :

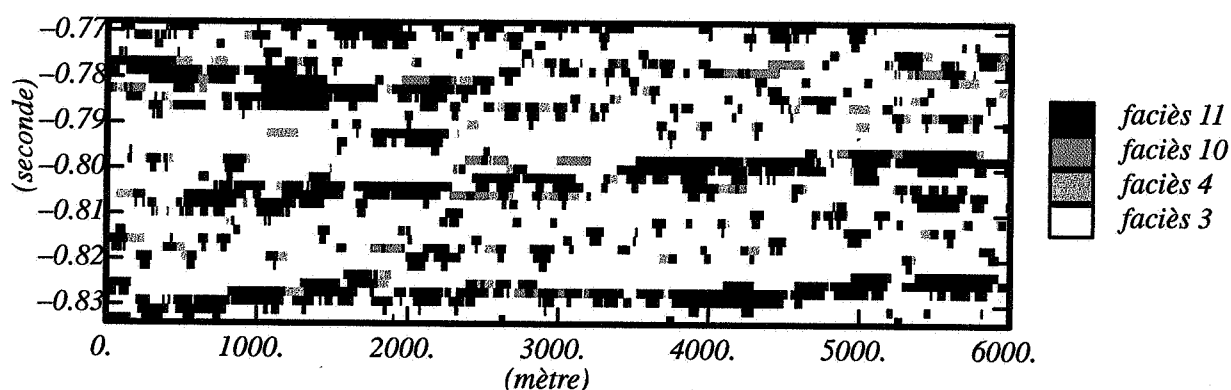


Fig. 33 : L'unité centrale du Mesa Verde

Elle compte 480 échantillons espacés de 12,5 mètres suivant l'horizontale et 34 échantillons espacés de 2 millisecondes suivant la verticale.

3.1.1.2. Impédances acoustiques

Conformément à la relation (8) définissant les impédances, la section en impédance a été construite en attribuant une vitesse et une masse volumique à chaque faciès de la section lithologique en temps.

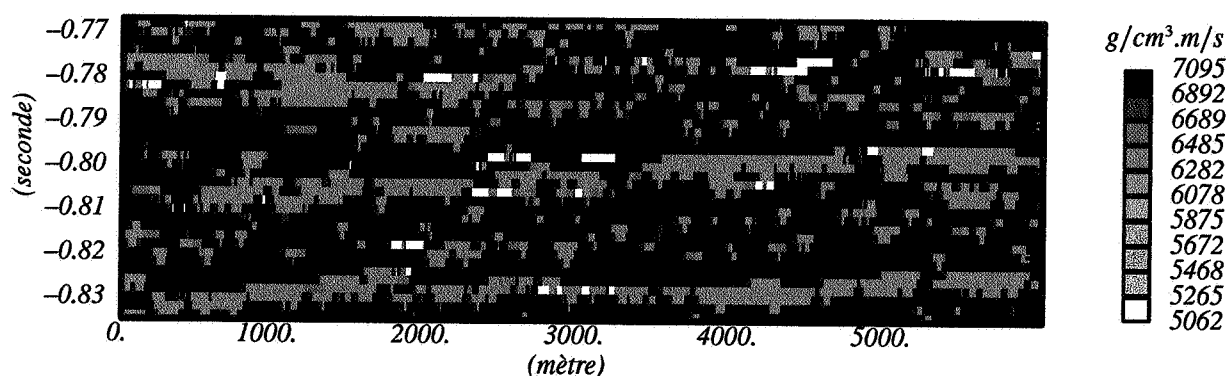


Fig. 34 : Section en impédance acoustique

Cette grille est échantillonnée tout les 12,5 mètres suivant l'horizontale, soit 480 échantillons. Suivant la verticale, elle est échantillonnée en temps afin d'être compatible avec l'échantillon-

nage d'une donnée sismique. La verticale compte donc 34 échantillons distants de 2 millisecondes.

A partir de la section en impédance précédente, une section en logarithme de l'impédance a été calculée. Quelques statistiques globales ont été calculées sur ces données en logarithme de l'impédance :

<i>minimum</i>	8,59
<i>maximum</i>	8,87
<i>moyenne</i>	8,83
<i>variance</i>	$3,55,10^{-3}$

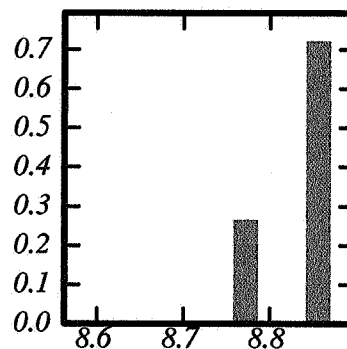


Fig. 35 : Statistiques globales et histogramme du logarithme de l'impédance acoustique

Ces statistiques montrent une distribution non gaussienne de cette donnée. Cette répartition est induite par le fait que le logarithme des impédances acoustiques sont des données synthétiques qui ne prennent que quatre valeurs distinctes. Une telle répartition du logarithme des impédances rend impossible la contrainte de la cosimulation du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées par un cokrigage. Heureusement, dans un cas réel, les impédances ne sont pas constantes pour chaque faciès, mais varient autour d'une valeur moyenne. La distribution du logarithme des impédances devrait alors être plus proche d'une distribution gaussienne, et la contrainte par un cokrigage de la simulation du logarithme des impédances doit être possible.

3.1.1.3. Amplitudes sismiques mesurées et ondelette sismique

L'information sismique est constituée de la section en amplitude dite "mesurée" suivante :

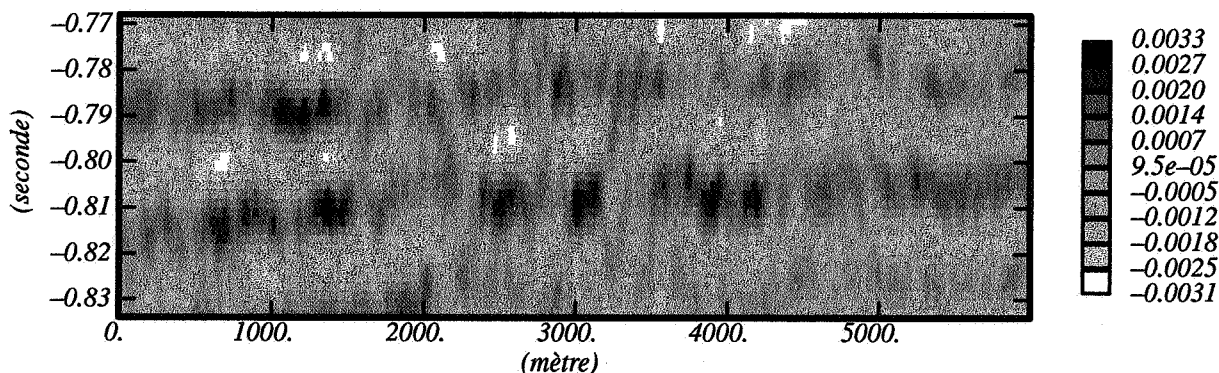


Fig. 36 : Les amplitudes sismiques mesurées

Cette section est constituée de 480 échantillons espacés de 12,5 mètres dans la direction horizontale. Comme la section en impédance, cette section est échantillonnée en temps sur la verticale. Elle compte 33 échantillons espacés de 2 millisecondes suivant la verticale, soit un échantillon de moins que la section en faciès. Cette différence du nombre d'échantillons suivant la verticale est simplement liée au fait qu'une valeur d'amplitude mesurée est située, suivant la verticale, entre deux valeurs d'impédance acoustique (paragraphe 1.2.1.).

Contrairement aux impédances, les amplitudes mesurées n'ont pas d'unité. En effet, ce ne sont pas réellement des amplitudes mesurées, mais des coefficients de réflexion Interwell. Or, les coefficients de réflexion n'ont pas d'unité (paragraphe 1.2.1.). Néanmoins, cette section a bien les caractéristiques d'une section en amplitudes mesurées, et est bien liée aux autres données par les relations exposées dans le chapitre 1.

Quelques statistiques globales ont été calculées sur la section en amplitude mesurée :

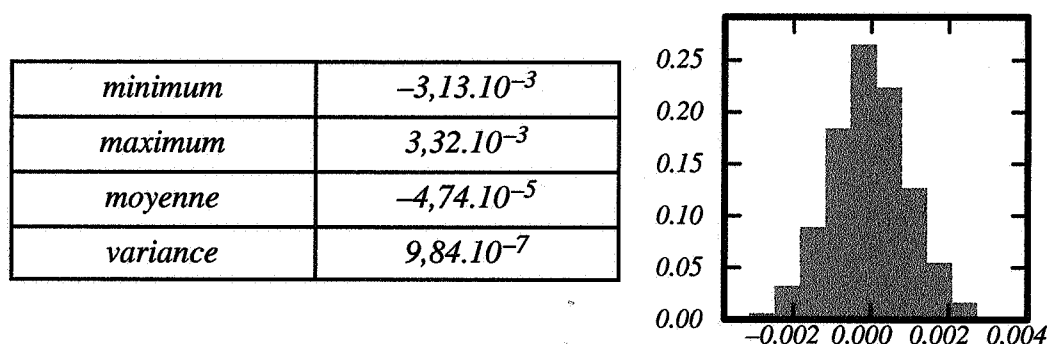


Fig. 37 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude sismique mesurée

Ces statistiques indiquent que les ordres de grandeur des impédances acoustiques et des amplitudes mesurées sont totalement différents. En effet, les impédances acoustiques sont en moyenne 2.10^6 fois supérieures aux amplitudes mesurées, et la variance des impédances est 10^{11} fois supérieure à la variance des amplitudes mesurées. Cette différence d'ordre de grandeur importante risque de conduire à des problèmes au niveau des calculs informatiques. Au paragraphe 3.1.3.3., une méthode permettant de contourner ce problème est proposée.

Contrairement aux impédances, les amplitudes mesurées ont une distribution gaussienne.

Au cours du traitement stratigraphique, une ondelette $o(t)$ a été extraite à partir des données de puits. Cette ondelette est la suivante :

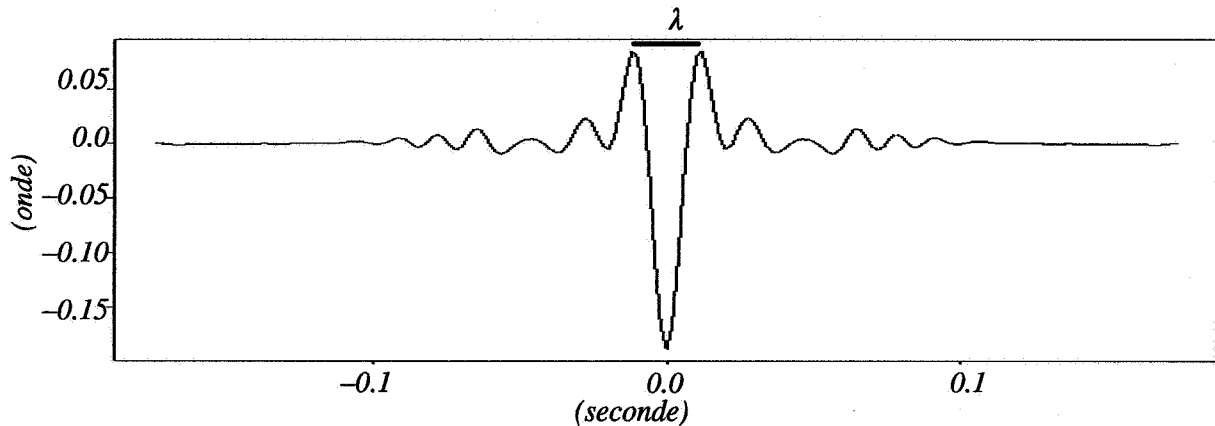


Fig. 38 : Ondelette

C'est une ondelette à phase nulle (symétrique). Elle compte 175 échantillons espacés de 2 milli-secondes à la même unité que l'amplitude mesurée (relation (12)). De toute évidence, cette ondelette a été obtenue par inversion d'une zone beaucoup plus grande des amplitudes sismiques que celle qui est disponible ici. Cette ondelette est en effet beaucoup plus longue que la section d'étude.

Les impédances sont liées aux amplitudes mesurées par l'intermédiaire des coefficients de réflexion et des amplitudes modélisées.

3.1.2. Données construites au Centre de Géostatistique

Afin de pouvoir tester l'ensemble des relations entre les données, les sections en coefficients de réflexion et en amplitude modélisée ont été calculées au Centre de Géostatistique.

3.1.2.1. Coefficients de réflexion

La définition des coefficients de réflexion (9) a permis de construire, à partir de la section en impédance (figure 34), la section en coefficient de réflexion suivante :

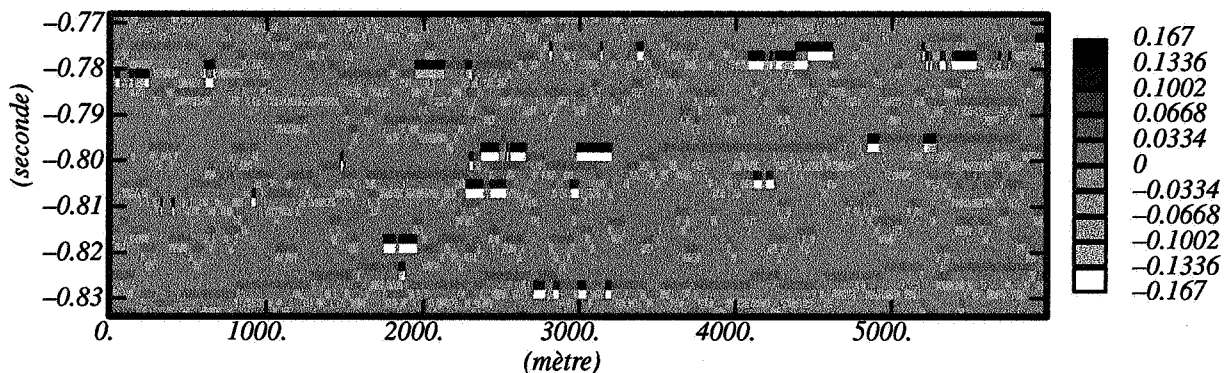


Fig. 39 : Section en coefficient de réflexion

Cette section compte 480 échantillons espacés de 12,5 mètres suivant l'horizontale et 33 échantillons (au lieu de 34 pour la section en impédance) espacés de 2 millisecondes suivant la verticale. Les coefficients de réflexion sont décalés d'un demi pas de temps vers le bas par rapport à la section en impédance, ce qui est expliqué par la relation (9).

Les statistiques globales calculées sur les coefficients de réflexion sont les suivantes :

<i>minimum</i>	$-0,167$
<i>maximum</i>	$0,167$
<i>moyenne</i>	$-4,76.10^{-4}$
<i>variance</i>	$1,52.10^{-3}$

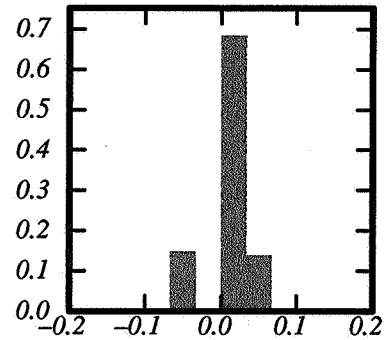


Fig. 40 : Statistiques globales et histogramme des coefficients de réflexion.

Etant donné la méthode de calcul des coefficients de réflexion, et l'aspect synthétique des impédances, les coefficients de réflexion prennent, comme les impédances, peu de valeurs. Ceci explique la forme de l'histogramme des coefficients de réflexion. Comme pour les impédances, cette distribution est expliquée par le fait que les données sont synthétiques.

Les coefficients de réflexion sont d'un ordre de grandeur intermédiaire entre celui des impédances et celui des amplitudes mesurées.

3.1.2.2. Amplitudes sismiques modélisées

La relation (12) a permis de créer une section d'amplitude modélisée, en convoluant, suivant la verticale, les coefficients de réflexion précédents par l'ondelette. Mais comme l'ondelette est beaucoup plus longue (175 pas de temps) que la section en coefficients de réflexion (seulement 33 pas de temps), la section en coefficients de réflexion a été placée dans un encaissant. En effet, les amplitudes modélisées sont définies par la relation :

$$a(x, t) = Cr * s(x, t)$$

Or, la définition du produit de convolution implique que :

$$a(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x, t-\tau)s(\tau)d\tau$$

Ce qui s'écrit de façon discrète :

$$a(x, t) = \Delta t \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} Cr(x, t-\tau)s(\tau)$$

Et pour l'ondelette de l'étude, $o(t)$, qui est non nulle sur un support fini entre $-T$ et T :

$$a(x, t) = \Delta t \sum_{\tau=-T}^T Cr(x, t-\tau) o(\tau)$$

Par conséquent, le calcul d'une amplitude modélisée pour un temps t nécessite la connaissance des coefficients de réflexion pour les temps précédents : $t - \tau$ (pour $\tau > 0$) et pour les temps suivants : $t - \tau$ (pour $\tau < 0$). Ainsi, le calcul des amplitudes modélisées nécessite d'utiliser des coefficients de réflexion inconnus, car hors de la section en coefficients de réflexion. Afin de pouvoir calculer l'amplitude modélisée, il est par conséquent supposé que la section en coefficients de réflexion est entourée de deux autres sections en coefficients de réflexion (l'une en dessous, l'autre au dessus de l'unité d'étude). Ces deux sections constituent l'encaissant. Pour des raisons de simplicité de calcul, les coefficients de réflexion de l'encaissant sont supposés nuls. De cette façon, la section en amplitudes modélisées est la suivante :

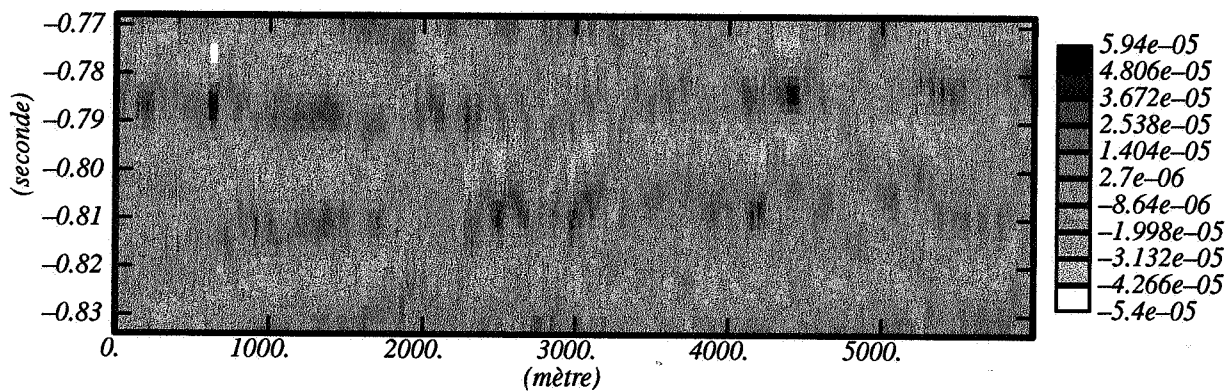


Fig. 41 : Section en amplitude modélisée 1

Cette section est composée de 480 échantillons espacés de 12,5 mètres dans la direction horizontale et de 33 échantillons espacés de 2 millisecondes dans la direction verticale. Comme les sections en coefficients de réflexion et en amplitude mesurée, elle est décalée d'un demi pas de temps vers le bas par rapport à la section en impédance.

Les statistiques globales calculées sur cette section sont les suivantes :

<i>minimum</i>	$-5,40.10^{-5}$
<i>maximum</i>	$5,94.10^{-5}$
<i>moyenne</i>	$-2,66.10^{-7}$
<i>variance</i>	$1,79.10^{-10}$

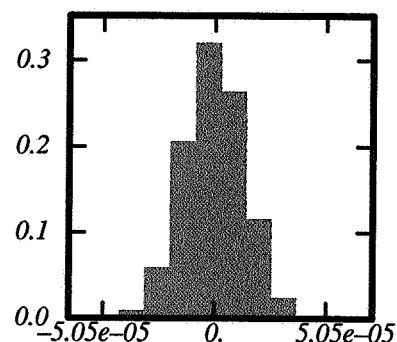


Fig. 42 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude modélisée 1

Elles montrent que, comme les amplitudes mesurées, les amplitudes modélisées ont une distribution gaussienne, mais les amplitudes modélisées sont beaucoup plus faibles que les amplitudes sismiques mesurées. Ce problème de gain est exposé et résolu dans le paragraphe suivant.

3.1.3. Quelques remarques

A ce stade de l'étude, quelques problèmes apparaissent. En effet, la comparaison de l'amplitude modélisée (figure 41) et de l'amplitude mesurée (figure 36), montre une différence importante, différence que le résidu sur l'amplitude mesurée seul ne peut pas expliquer. Cette différence semble induite par deux problèmes : un problème de gain et un problème d'encastement. Une dernière difficulté est produite par la différence importante d'ordre de grandeur entre le logarithme des impédances et les amplitudes modélisées et mesurées. Pour terminer, quelques tests sont effectués sur les données expérimentales, pour vérifier si l'hypothèse d'un milieu à covariance factorisable est envisageable.

3.1.3.1. Problème de gain

La comparaison globale de l'amplitude modélisée et de l'amplitude mesurée montre une différence d'ordre de grandeur importante.

	<i>amplitude modélisée</i> $a(x,t)$	<i>amplitude mesurée</i> $Amp(x,t)$
<i>minimum</i>	$-5,40.10^{-5}$	$-3,13.10^{-3}$
<i>maximum</i>	$5,94.10^{-5}$	$3,32.10^{-3}$
<i>moyenne</i>	$-2,66.10^{-7}$	$-4,74.10^{-5}$
<i>variance</i>	$1,79.10^{-10}$	$9,84.10^{-7}$

Fig. 43 : Comparaison des ordres de grandeur des amplitudes modélisées et mesurées

L'amplitude modélisée est, en effet, 55 fois (environ) plus faible que l'amplitude mesurée (problème de gain). Il faut donc multiplier l'ondelette par une valeur constante C. La détermination de ce gain a été effectuée par la méthode usuellement utilisée par les géophysiciens, à savoir le rapport des énergies :

$$C^2 = \frac{\sum_x \sum_t Amp^2(x, t)}{\sum_x \sum_t a^2(x, t)} = 5512$$

$$=> |C| = 74,24$$

La détermination du signe de la constante multiplicative a été effectuée en comparant visuellement les deux sections en amplitude. Lors de cette comparaison, il s'est avéré que les amplitudes

des deux sections varient sensiblement de la même façon. C'est-à-dire qu'à de fortes valeurs positives de l'amplitude modélisée correspondent de fortes valeurs positives de l'amplitude mesurée, et inversement, à de fortes valeurs négatives de l'amplitude modélisée correspondent de fortes valeurs négatives de l'amplitude mesurée. La constante multiplicative de l'ondelette est donc positive :

$$C = 74,24$$

En multipliant l'ondelette par cette constante, une nouvelle section en amplitude modélisée a été construite, avec la méthode précédente :

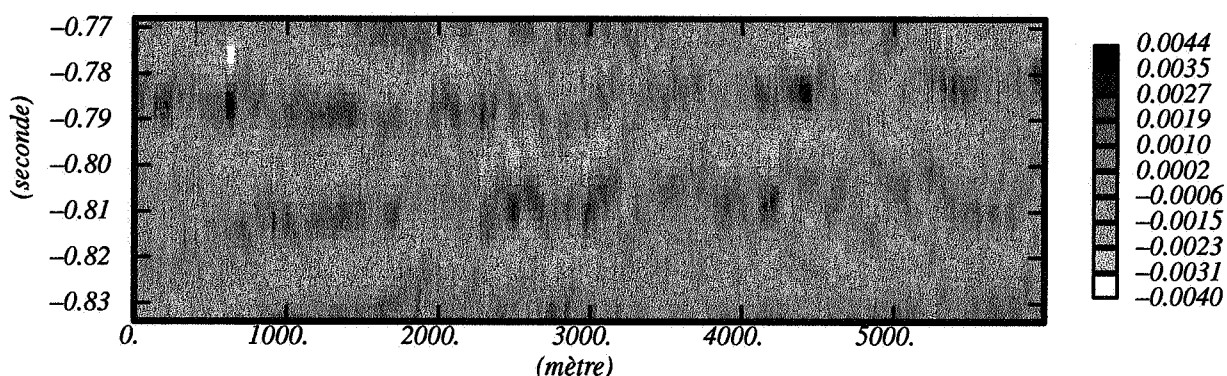


Fig. 44 : Section en amplitude modélisée 2

Les statistiques globales calculées sur cette nouvelle section en amplitude modélisée sont les suivantes :

<i>minimum</i>	$-3,99.10^{-3}$
<i>maximum</i>	$4,39.10^{-3}$
<i>moyenne</i>	$-1,97.10^{-5}$
<i>variance</i>	$9,8.10^{-7}$

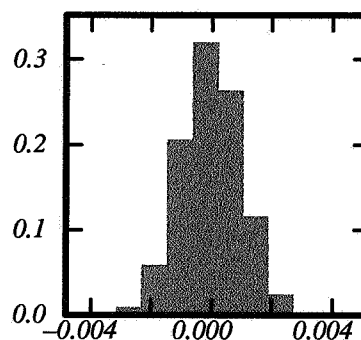


Fig. 45 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude modélisée 2

Ces statistiques montrent que les ordres de grandeur des amplitudes mesurées et des amplitudes modélisées sont maintenant les mêmes, et que ces deux sections en amplitude ont la même variance et des distributions semblables.

Dans la suite de ce rapport, lorsqu'il est question d'amplitude modélisée, il s'agit de cette section en amplitude modélisée (figure 44) et non de la précédente. En ce qui concerne l'ondelette, celle-ci est égale à $C.s(t)$. Pour des raisons de simplification des écritures, cette nouvelle ondelette est toujours représentée par $s(t)$ dans la suite de ce rapport.

3.1.3.2. Problème d'encaissant

A la suite de cette comparaison grossière des sections en amplitudes modélisées et mesurées, une analyse plus fine a été effectuée trace à trace. Quelques traces sismiques ont été sélectionnées sur la section en amplitude modélisée et comparées aux traces correspondantes de l'amplitude mesurée. Dans le schéma suivant, les amplitudes modélisées sont représentées en trait pointillé et les amplitudes mesurées en trait plein.

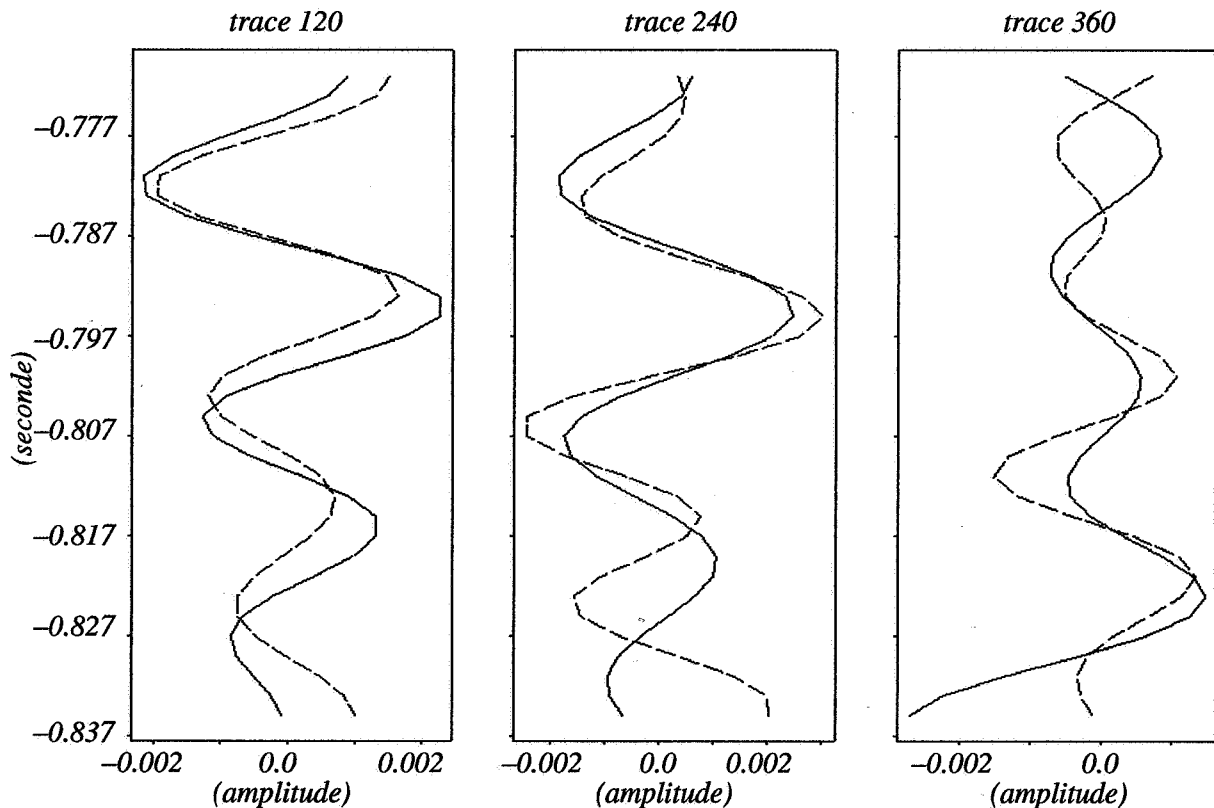


Fig. 46 : Comparaison trace à trace de l'amplitude mesurée et de l'amplitude modélisée

Les traces représentées ci-dessus montrent des différences de forme entre les amplitudes modélisées et mesurées, notamment dans la partie inférieure. Ces différences de forme peuvent être liées à l'encaissant dans lequel la section en coefficient de réflexion a été placée afin de calculer la section en amplitude modélisée. En effet, au paragraphe 3.1.2.2., il a été observé que le calcul d'une amplitude pour un temps t nécessite la connaissance des coefficients de réflexion pour les temps précédents et pour les temps suivants. Ainsi, le calcul des amplitudes modélisées nécessite l'utilisation des coefficients de réflexion de l'encaissant. Donc si l'encaissant est bien choisi, les amplitudes modélisées sont proches des amplitudes mesurées, au résidu près. C'est ce qui semble être le cas de la partie supérieure des deux premières traces. Par contre si l'encaissant est mal choisi, les amplitudes modélisées sont différentes des amplitudes mesurées. C'est peut être ce qui apparaît sur les parties inférieures des deux premières traces et sur la dernière trace.

Les informations sur les unités géologiques situées au dessus et en dessous de l'unité d'intérêt n'étant pas disponibles pour cette étude, un encaissant plus approprié n'a pu être choisi. Néan-

moins, il faut garder en mémoire le fait que, pour calculer les amplitudes modélisées, des coefficients de réflexion situés au dessus et en dessous de la section en coefficients de réflexion, sur lesquels une erreur a été commise, ont été utilisés.

3.1.3.3. Problème d'ordre de grandeur

La différence d'ordre de grandeur importante entre les impédances et les amplitudes sismiques, qui a été observée au paragraphe 3.1.1.3., risque de poser des problèmes importants lors du calcul des covariances croisées expérimentales ou du calcul des poids de cokrigage. En effet, cette différence d'ordre de grandeur peut induire des erreurs numériques dues à l'écriture en puissance de 10 des valeurs des amplitudes, car par exemple, $1,737 \cdot 10^{-5}$ est précis avec 8 chiffres après la virgule, alors que $3,248 \cdot 10^{-3}$ n'est précis qu'avec 6 chiffres après la virgule. Il a donc été choisi de travailler sur des données centrées et normées (c'est-à-dire de moyenne égale à 0 et de variance 1). Les données en logarithme de l'impédance, en amplitude modélisée et en amplitude mesurée, utilisées sont normées de la façon suivante :

$$\text{normX}(x, t) = \frac{X(x, t) - m_X}{\sqrt{\sigma_X^2}}$$

avec : $X(x, t)$, une donnée non normée,
 $\text{normX}(x, t)$, la donnée X normée,
 m_X , la moyenne de X,
 σ_X^2 , la variance de X.

De même que les données précédentes, les coefficients de réflexion et l'ondelette sont également "normés" ou plus exactement multipliés par une constante de sorte que les équations précédentes (l'équation (11) pour les coefficients de réflexion et l'équation (12) pour l'ondelette) restent valables lors de l'utilisation des données d'impédance et d'amplitude normées. Les coefficients de réflexion "normés" sont donc tels que :

$$\text{normCr}(x, t) = \frac{Cr(x, t)}{\sqrt{\sigma_{\ln I}^2}}$$

avec : $\text{normCr}(x, t)$, les coefficients de réflexion normés,
 $\sigma_{\ln I}^2$, la variance du logarithme des impédances.

L'ondelette normée est calculée par la relation :

$$\text{normonde}(t) = \sqrt{\frac{\sigma_{\ln I}^2}{\sigma_a^2}} s(t)$$

avec : $\text{normonde}(t)$, l'ondelette normée,
 σ_a^2 , la variance des amplitudes modélisées.

Les données expérimentales utilisées pour la cosimulation et la contrainte par cokrigage de cette cosimulation sont les données normées dans ce paragraphe. Pour restituer la bonne variance et la bonne moyenne à la section en logarithme des impédances simulées conditionnellement aux données, il suffit d'effectuer l'opération suivante :

$$\ln I_{SC(x,t)} = \text{norm} \ln I_{SC(x,t)} \cdot \sqrt{\sigma_{\ln I}^2} + m_{\ln I} \quad (41)$$

Il est à noter que l'ensemble des relations entre les données ou les covariances précédentes sont valables pour les données ayant subi une normation et pour les données brutes (c'est-à-dire non normées).

3.1.3.4. Milieu à covariance factorisable ?

Le milieu qui est considéré à covariance factorisable est la section en logarithme de l'impédance. En effet, ce milieu en impédance présente des structures horizontales et semble bien adapté à ce type de covariance. Afin de s'assurer de la validité de cette hypothèse, des covariances expérimentales du logarithme des impédances ont été calculées suivant les six directions suivantes :

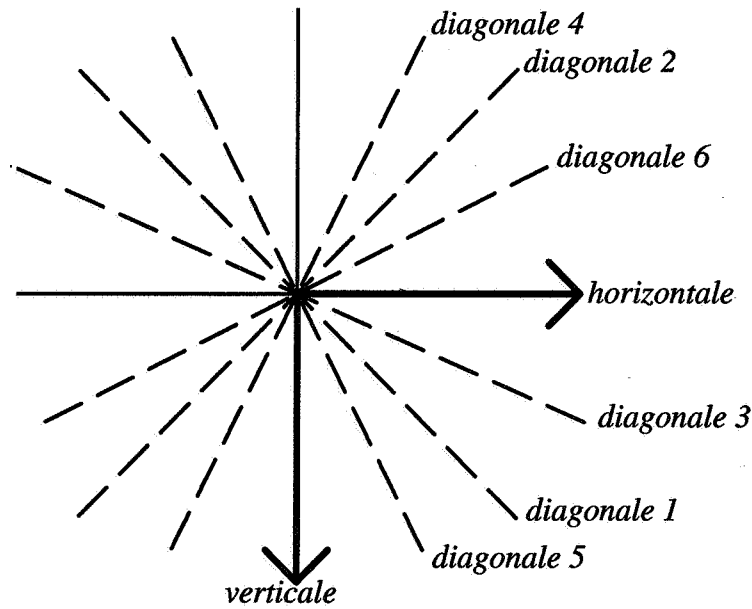


Fig. 47 : Direction des covariances diagonales du logarithme de l'impédance

Ces covariances expérimentales sont représentées en pointillées sur les figures suivantes. Sur les mêmes graphes, sont représentées en traits continus les covariances calculées à l'aide des covariances expérimentales verticale et horizontale du logarithme de l'impédance. Le calcul effectué est le suivant :

$$C(h_x, h_t) = \frac{C^H(h_x) \cdot C^V(h_t)}{\text{Var}[\ln I]}$$

Les différentes covariances diagonales calculées et expérimentales sont telles que :

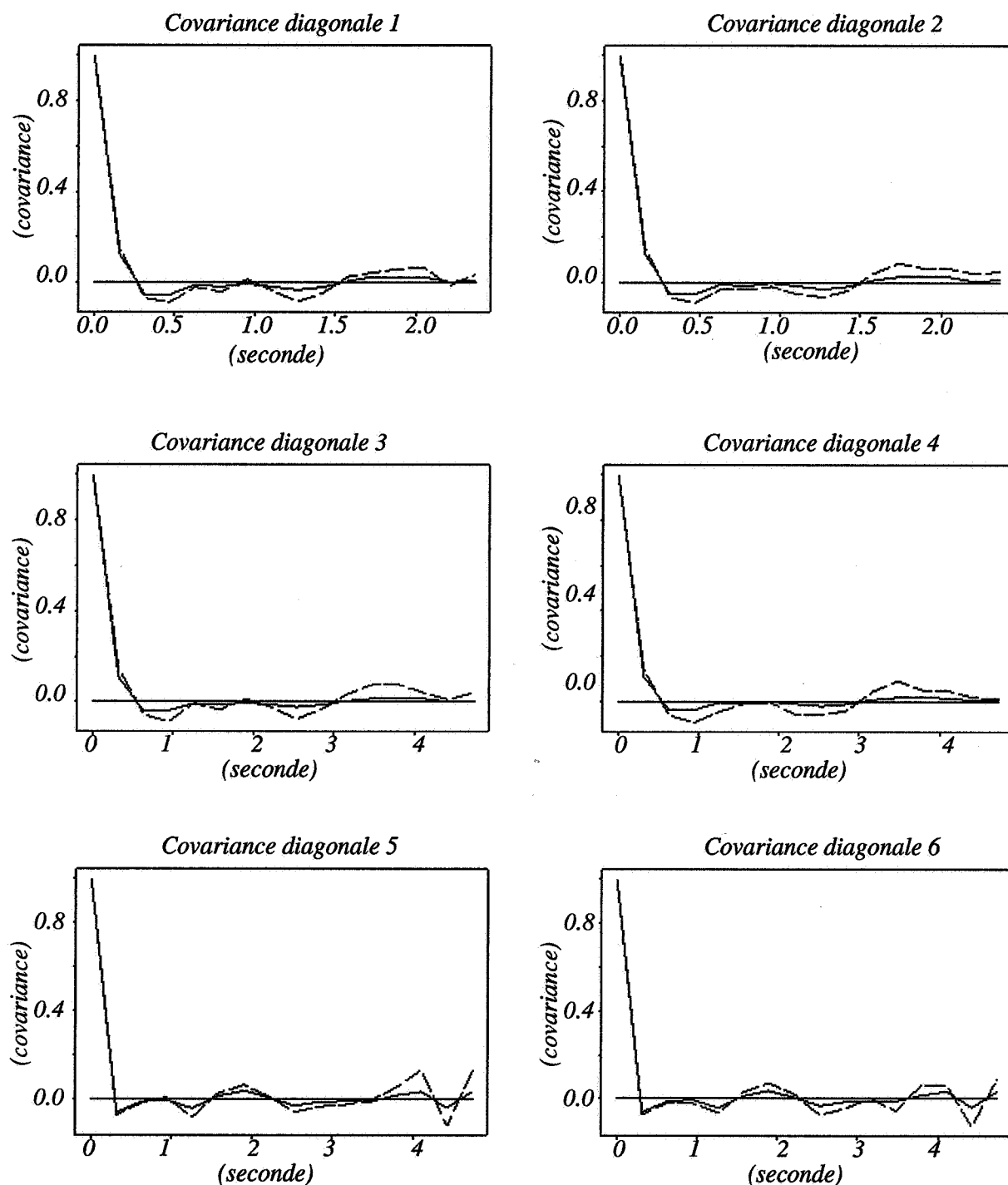


Fig. 48 : Covariances diagonales du logarithme de l'impédance

Les covariances diagonales calculées et les covariances diagonales expérimentales se ressemblent beaucoup. Bien que les portées des covariances soient extrêmement courtes, il semble donc que l'hypothèse d'un milieu en logarithme de l'impédance à covariance factorisable soit justifiée. De plus, si le logarithme des impédances est à covariance factorisable, toutes les autres

covariances simples et croisées le sont aussi. Ceci est démontré très simplement dans l'annexe 6.

3.2. Relations entre les covariances des données

Seules les covariances simples et croisée du logarithme des impédances et des amplitudes sont ajustées. En effet, ces covariances sont les seules nécessaires pour le cokrigage conditionnant du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées.

Reste à noter que les relations ont été calculées à l'aide des amplitudes modélisées et non des amplitudes mesurées. Les relations entre les covariances sont donc tout d'abord testées sur des données qui sont exactement liées par les relations (9) et (12), à savoir : la covariance du logarithme des impédances, celle des coefficients de réflexion, celle des amplitudes modélisées et la covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées. Il faut donc garder à l'esprit qu'une erreur, induite par la présence d'un résidu, existe dans l'ajustement de la covariance de l'amplitude mesurée et de la covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées.

L'ajustement de la covariance verticale des coefficients de réflexion permet, à ce stade de l'étude, de faire un choix concernant la relation entre les coefficients de réflexion et le logarithme de l'impédance à utiliser.

Dans la suite de ce paragraphe, les covariances expérimentales sont représentées en lignes pointillées et les modèles de covariance en lignes continues.

3.2.1. Test des relations entre les covariances des données

Les tests des relations entre les covariances sont effectuées en deux phases :

- ◆ La première phase consiste à ajuster simultanément les covariances simples et croisées verticales.
- ◆ Puis, dans une seconde phase, les covariances horizontales sont ajustées en utilisant l'ajustement des covariances verticales.

En effet, des covariances verticales apparaissent dans les relations qui lient les covariances horizontales, alors que dans les expressions qui lient les covariances verticales, seules des covariances verticales interviennent. Par conséquent, les covariances horizontales sont dépendantes des covariances verticales.

3.2.1.1. Test des relations entre les covariances verticales des données

Les covariances verticales sont ajustées simultanément en utilisant, soit les relations "continues", soit les relations discrètes. L'utilisation de ces deux types de relations permet de faire un choix pour la relation liant les coefficients de réflexion aux logarithmes des impédances qui sera utilisée dans la suite de cette étude et donc de choisir les relations liant la covariance des

coefficients de réflexion et la covariance croisée du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances qui seront conservées.

◆ Approximations “continues”

L'utilisation de la relation “continue” (10) liant les coefficients de réflexion au logarithme des impédances, réduit de beaucoup le nombre de modèles de covariance utilisables. En effet, un grand nombre de modèles de covariance ne peuvent plus, après avoir été dérivés une ou deux fois, être considérés comme une covariance. Une étude des dérivées premières et secondes de quelques modèles de covariances usuellement utilisés en géostatistique est effectuée dans l'annexe 5 afin de déterminer quelles sont les covariances qui peuvent être utilisées pour ajuster la covariance expérimentale du logarithme des impédances.

Le modèle de covariance qui a été choisi est une covariance gaussienne de portée 1,4 millisecondes et de palier 1. Les ajustements des différentes covariances sont les suivants :

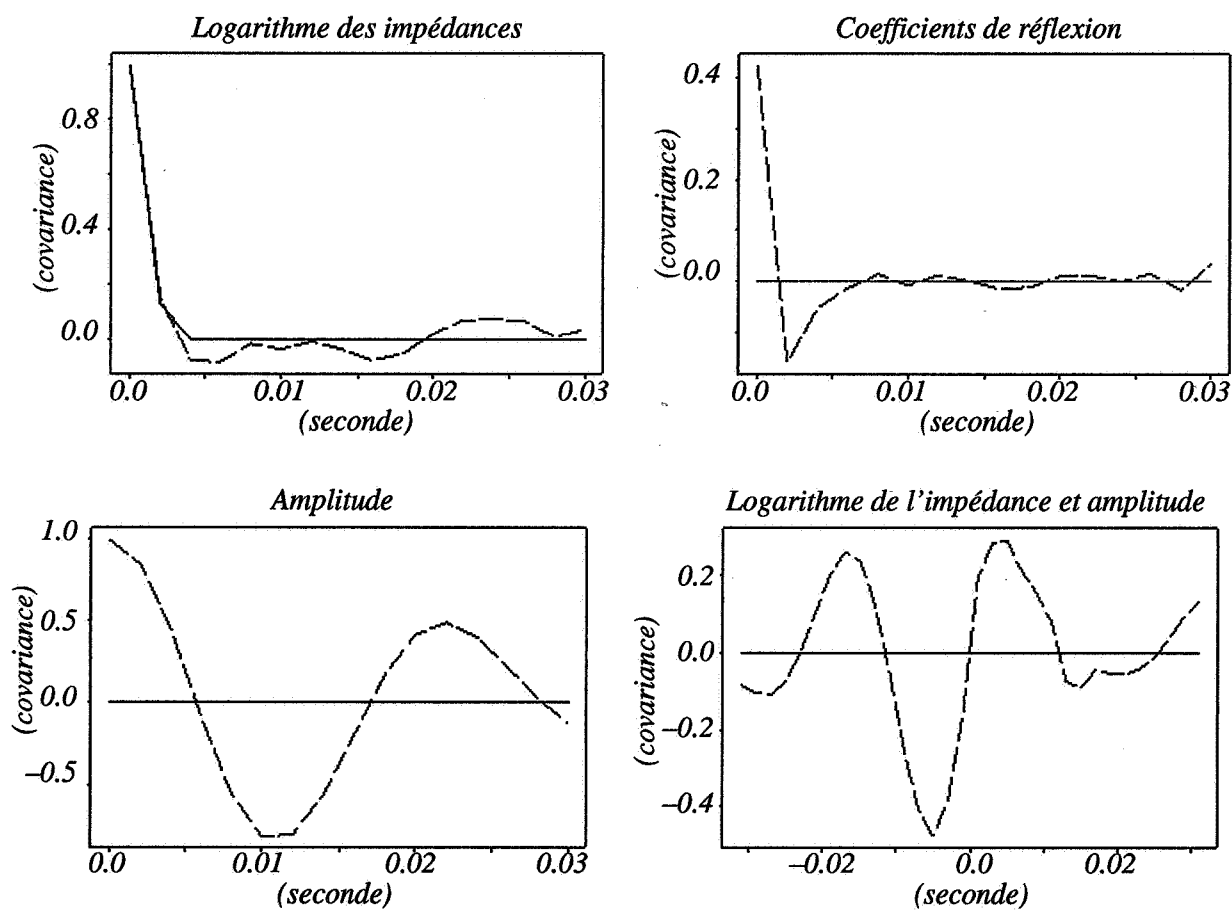


Fig. 49 : Test sur l'ajustement des covariances verticales 1

Seule la covariance expérimentale du logarithme des impédances a un ajustement correct. Les deux autres modèles de covariances ont des variances beaucoup trop faibles par rapport aux variances expérimentales. Ceci indique que la relation “continue” (16) liant la covariance verticale du logarithme des impédances à la covariance verticale des coefficients de réflexion n'est pas vérifiée expérimentalement et par conséquent que l'approximation de la relation du modèle

convolutif liant les impédances aux coefficients de réflexion par l'expression "continue" (10) n'est pas une bonne approximation, et que l'approximation discrète semble préférable.

◆ Approximations discrètes

L'utilisation de la relation discrète (11) permet d'utiliser n'importe quel modèle de covariance. La covariance expérimentale du logarithme des impédance a donc été ajustée à l'aide d'un modèle de covariance exponentielle de portée 1,2 millisecondes et de palier 1. Les différentes covariances s'ajustent alors de la façon suivante :

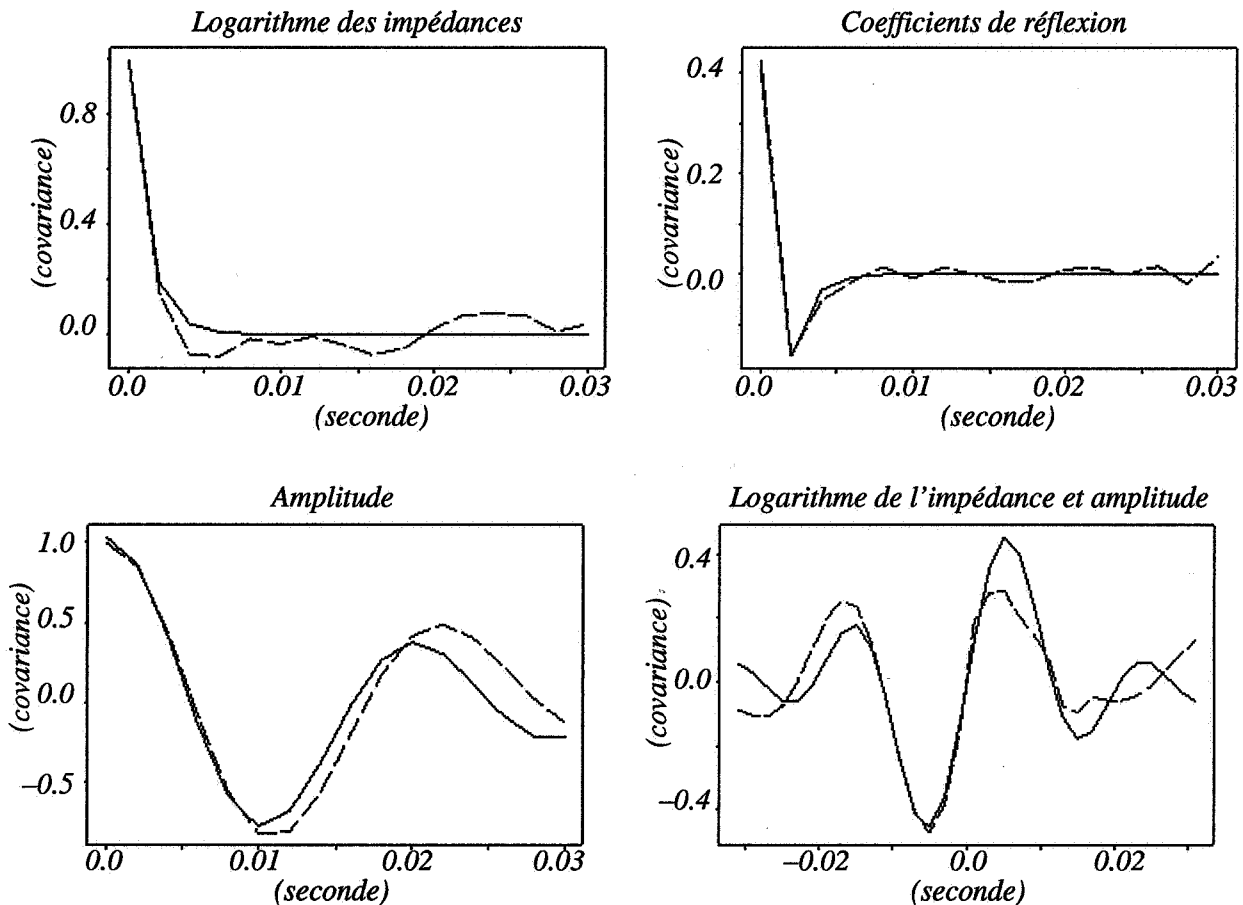


Fig. 50 : Test sur l'ajustement des covariances verticales 2

Désormais, les covariances verticales simples du logarithme des impédances, des coefficients de réflexion et des amplitudes modélisées et la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et de l'amplitude modélisée sont relativement bien ajustées, malgré le léger décalage dans l'ajustement de la covariance de l'amplitude modélisée. Il a été constaté expérimentalement (en jouant avec les différents modèles de covariances et des portées variables), que le respect des trois ou quatre premiers points de la covariance expérimentale des coefficients de réflexion avait une importance considérable sur le respect des covariances expérimentales simple et croisée des amplitudes modélisées. L'utilisation de la relation discrète permet de restituer l'important effet de trou de la covariance expérimentale des coefficients de réflexion, ce que ne permettait pas l'utilisation de la relation continue. Ceci explique le choix de la relation discrète (11) et non de

la relation “continue” (10) pour approximer la relation modélisée (9) liant les impédances aux coefficients de réflexion.

Finalement, les relations discrètes semblent mieux appropriées à cette étude que les relations “continues”. Ceci est lié au fait que la relation modélisée liant les coefficients de réflexion aux impédances est elle même une relation discrète.

Dans la suite de l’étude, seules les relations discrètes sont utilisées. C’est donc à l’aide de ce second ajustement de la covariance verticale du logarithme des impédances par un modèle de covariance exponentielle de portée 1,2 millisecondes et de palier 1, que les relations liant les covariances horizontales sont testées.

3.2.1.2. Test des relations entre les covariances horizontales des données

Etant donné l’aspect de la covariance horizontale expérimentale du logarithme des impédances, il a été choisi de l’ajuster à l’aide de la somme de deux modèles de covariance, tous les deux exponentiels : l’un de portée 62,5 mètres et de palier 0,7 et l’autre de portée 625 mètres et de palier 0,3. L’ajustement obtenu est le suivant :

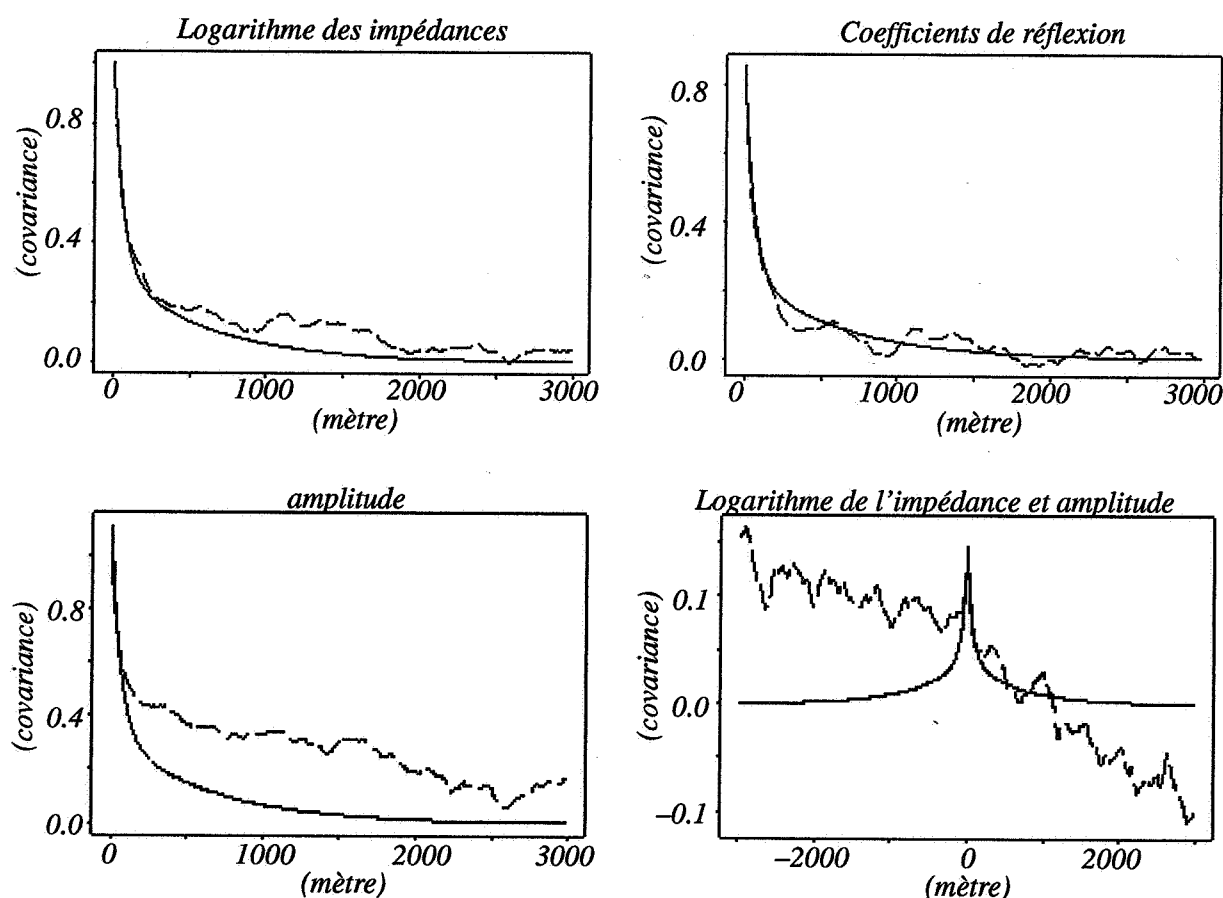


Fig. 51 : Test sur l’ajustement des covariances horizontales

Bien que les covariances simples du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion soient bien ajustées par le modèle, ce n’est pas le cas des covariances simple et croisée expéri-

mentales des amplitudes modélisées. Cette différence pourrait être la conséquence de l'une ou de l'autre des deux approximations qui ont été faites précédemment lors du calcul des amplitudes modélisées ou lors du calcul des modèles de covariances simple et croisée des amplitudes modélisées en fonction du modèle de covariance du logarithme des impédances.

- ◆ Pour calculer les amplitudes modélisées, la section en coefficients de réflexion (et donc la section en logarithme de l'impédance) a été placée dans un **encaissant nul**. L'encaissant en coefficient de réflexion étant nul, l'encaissant en logarithme de l'impédance est constant suivant la verticale. Suivant l'horizontale, il prend les valeurs de la première ligne (pour l'encaissant supérieur) ou de la dernière ligne (pour l'encaissant inférieur) de la section en logarithme de l'impédance. L'ensemble section en logarithme de l'impédance et encaissant n'a donc pas la même covariance suivant la verticale que la section en logarithme de l'impédance seule. Or, les amplitudes modélisées sont calculées à l'aide des impédances de l'ensemble section en impédance et encaissant. Le modèle de covariance horizontale des amplitudes modélisées et le modèle de covariance horizontal croisé du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées sont calculés à l'aide des covariances horizontale et verticale du logarithme de l'impédance de la section uniquement.

- ◆ La seconde hypothèse simplificatrice concerne le calcul des modèles de covariance simple et croisé des amplitudes modélisées en fonction du modèle de covariance du logarithme des impédances. Ce calcul repose sur le fait que le milieu en logarithme des impédances est un milieu à **covariance factorisable**. De même que pour l'hypothèse précédente, le non respect de cette hypothèse peut induire un non respect des relations entre les covariances des différentes données.

Dans cet exemple, il est montré au paragraphe 2.3.1.3. que le milieu en logarithme de l'impédance est à covariance factorisable. L'hypothèse simplificatrice qui n'est pas respectée ici paraît donc être la nature de l'encaissant en logarithme de l'impédance utilisée pour calculer les amplitudes modélisées. Or, il est montré dans l'annexe 8 que le fait d'utiliser un encaissant en logarithme de l'impédance constant sur la verticale afin de calculer les amplitudes modélisées n'interfère pas (ou plus exactement interfère de façon négligeable) dans l'ajustement des covariances simples et croisées de l'amplitude modélisée par le modèle calculé à partir de la covariance de la section en logarithme de l'impédance. Aucune de ces deux hypothèses n'étant contestable, il semble qu'un autre phénomène interfère dans l'ajustement de ces covariances horizontales.

Ce phénomène est lié à l'ondelette qui entre en résonance avec la section en logarithme des impédances. En effet, sur la covariance verticale du logarithme des impédances, rien ne fait apparaître une périodicité quelconque. Or, sur la section en impédance (figure 34), des couches d'impédance moyenne (environ $6500 \text{ g/cm}^3 \cdot \text{m/s}$) apparaissent de façon assez régulière, séparées de 10 à 14 pas de temps. De plus, il s'avère que l'ondelette disponible ici présente une longueur d'onde λ (figure 38) de 12 pas de temps. Le fait que l'ondelette et les impédances aient des fréquences voisines accentue les amplitudes modélisées et modifie leurs covariances simples et croisées, horizontales et verticales. C'est donc ce phénomène de résonance qui explique les mauvais ajustements des covariances simple et croisée horizontales et le léger décalage de l'ajustement de la covariance verticale des amplitudes modélisées observé sur la figure 50. L'influence de la longueur d'onde de l'ondelette sur l'ajustement des covariances verticales et horizontales, est exposée dans l'annexe 7.

En pratique, lorsque la longueur d'onde de l'ondelette est proche de la périodicité visible sur les amplitudes, il faut revenir à l'analyse géophysique pour déterminer une meilleure ondelette. En effet, l'ajustement de la covariance du logarithme des impédances à l'aide de l'ajustement de la covariance des amplitudes mesurées et de l'ondelette en question ne correspondrait pas à la distribution réelle du logarithme des impédances.

3.2.2. Ajustement des covariances des données

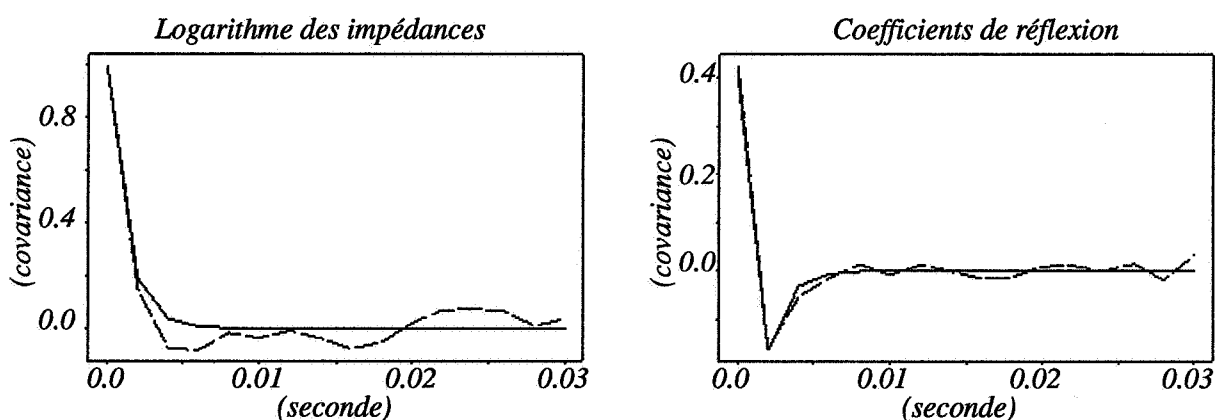
Les relations étant testées, reste à les utiliser afin d'ajuster les différentes covariances nécessaires au cokrigage. Ces covariances sont :

- ◆ les covariances verticale et horizontale du logarithme des impédances,
- ◆ les covariances verticale et horizontale des amplitudes mesurées,
- ◆ et les covariances croisées verticale et horizontale du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées.

Les covariances expérimentales utilisées pour ces ajustements sont donc celles du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées (et non plus les amplitudes modélisées comme précédemment lors du test des relations).

3.2.2.1. Ajustement des covariances verticales des données

Les covariances verticales sont ajustées en choisissant un modèle de covariance exponentiel de palier 1 et de portée 1,2 millisecondes. Les ajustements obtenus sont les suivants :



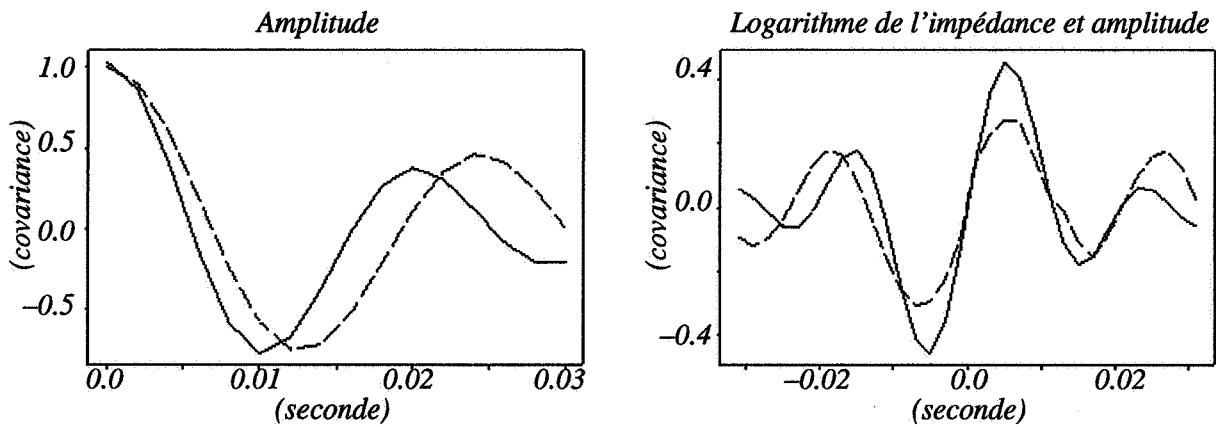
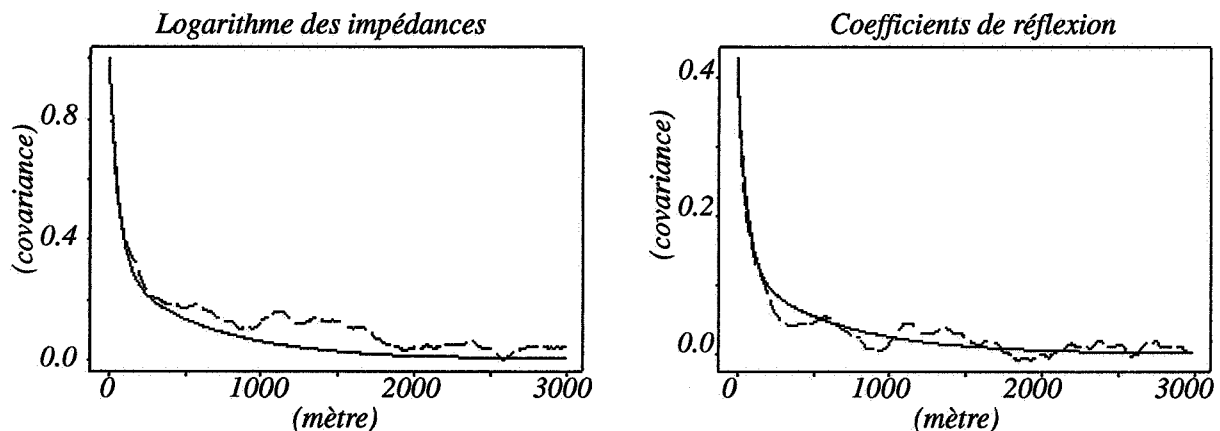


Fig. 52 : Ajustement des covariances verticales

L'ajustement de toutes les covariances simple et croisée semble satisfaisant. Malgré le léger décalage dans l'ajustement de l'effet de trou de la covariance des amplitudes mesurées qui est d'un demi à un pas de temps plus grand que celui qui peut être observé sur la figure 50 entre la covariance expérimentale des amplitudes modélisées et le modèle. Ce décalage peut être induit par un mauvais choix de l'ondelette. En effet, il semble que cette ondelette n'ait pas été déterminée sur l'unité d'étude uniquement, mais en tenant compte des amplitudes mesurées et des impédances des unités l'entourant. Cette remarque est confirmée par l'observation du résidu effectuée au paragraphe 3.3.

3.2.2.2. Ajustement des covariances horizontales des données

L'ajustement des covariances horizontales se fait en utilisant le même modèle de covariance horizontale pour le logarithme des impédances que lors du test des relations liant les covariances horizontales : un modèle gigogne composé de deux covariances exponentielles, la première de palier 0,7 et de portée 62,5 mètres et la seconde de palier 0,3 et de portée 625 mètres.



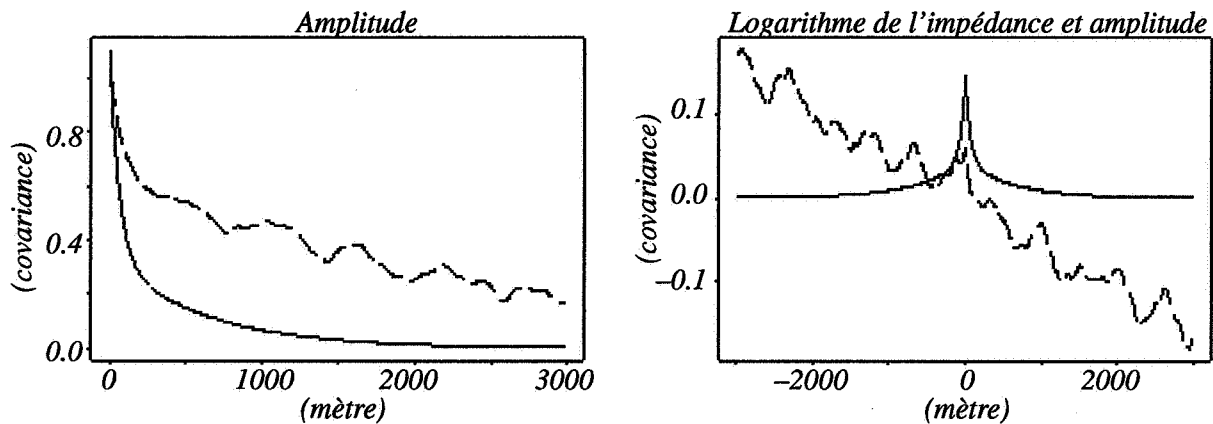


Fig. 53 : Ajustement des covariances horizontales

La covariance croisée expérimentale du logarithme des impédances et de l'amplitude mesurée est tout à fait comparable à la covariance croisée expérimentale du logarithme de l'impédance et de l'amplitude modélisée. Son ajustement par le modèle de covariance croisée du logarithme de l'impédance et de l'amplitude est le même que celui de la figure 51. La raison de ce mauvais ajustement est également liée à la résonance de l'ondelette avec la section en impédance, comme il est expliqué au paragraphe 3.2.1.2. En ce qui concerne l'ajustement de la covariance horizontale de l'amplitude mesurée, il est encore moins bon que celui de la covariance horizontale de l'amplitude modélisée de la figure 51. L'hypothèse de l'ondelette qui entre en résonance avec les impédances, exprimée au paragraphe 3.2.1.2., et la présence d'un résidu ne suffisent pas à expliquer ce mauvais ajustement. Il semble donc qu'une nouvelle anomalie interfère dans les relations entre les covariances qui ont été calculées ici. Cette anomalie semble être la nature de l'encaissant réel. En effet, une expérience effectuée dans l'annexe 8 montre qu'un encaissant fortement non stationnaire peut induire de telles anomalies. Pour résoudre ce problème, des informations sur les sections situées au dessus et au dessous de cette section d'étude ou d'une ondelette déterminée en tenant uniquement compte des informations de l'unité en question, auraient été nécessaires.

Le problème de l'ondelette qui entre en résonance avec la section en impédance rencontrée sur cette étude synthétique du Mesa Verde, ainsi que la présence d'un encaissant, utilisé pour l'obtention de la section en amplitude, fortement non stationnaire, ne permettent pas de procéder à la cosimulation du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées conditionnées par un cokrigage.

Afin de comprendre pourquoi les ajustements des covariances horizontales et verticales expérimentales des amplitudes mesurées ne permettent pas le calcul de la covariance du résidu dont il est question dans la relation (40), une étude du résidu et de ses covariances a été effectuée.

3.3. Le résidu

Après avoir comparé les sections en amplitudes modélisées et mesurées globalement puis de façon plus fine, le résidu a été calculé en faisant la différence des deux sections amplitudes modélisée et mesurée. Ceci pour avoir une vision globale du résidu qui est la suivante :

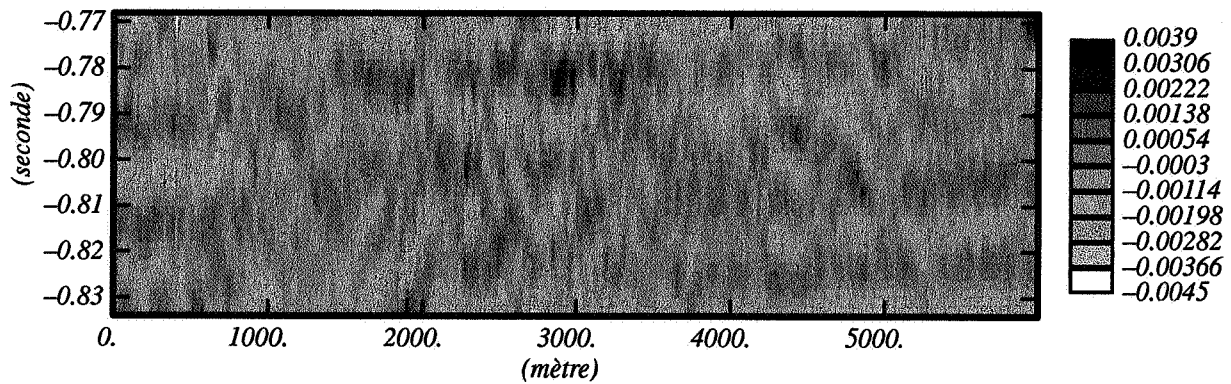


Fig. 54 : Résidu sur les amplitudes sismiques mesurées

Cette figure montre que le résidu, contrairement à ce qui est envisagé, n'est pas sans structure, mais qu'il présente des surfaces horizontales assez marquées. Pour voir l'importance de ces structures, quelques statistiques globales ont été effectuées :

<i>minimum</i>	$-4,49.10^{-3}$
<i>maximum</i>	$3,95.10^{-3}$
<i>moyenne</i>	$-2,76.10^{-5}$
<i>variance</i>	$6,9.10^{-7}$

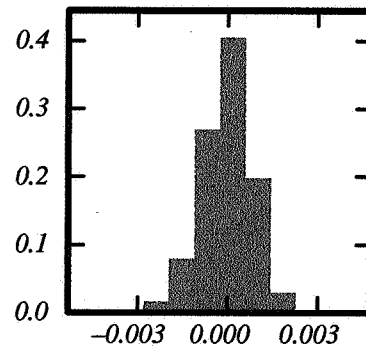


Fig. 55 : Statistiques globales et histogramme du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées

Ces statistiques montrent que le résidu est du même ordre de grandeur que les amplitudes modélisées et mesurées. Il est donc loin d'être négligeable. Ceci tend à prouver que l'ondelette utilisée pour calculer les amplitudes modélisées n'est pas la meilleure ondelette possible. Cette réflexion est confirmée par les covariances simples et croisées horizontales et verticales du résidu. Comme il est expliqué au paragraphe 3.1.3.4., ces covariances sont calculées sur les données normées à cause de différences d'ordre de grandeur importante des données brutes.

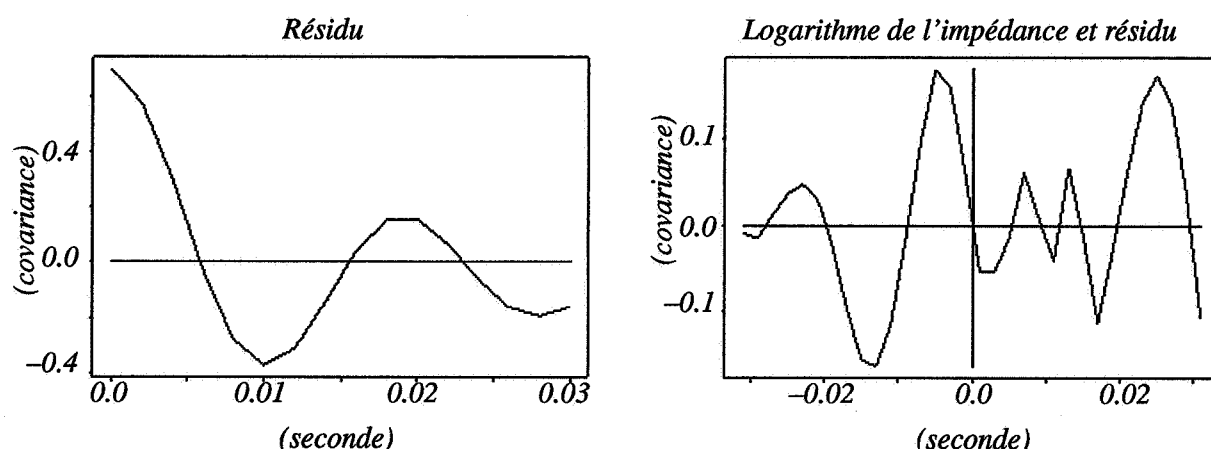


Fig. 56 : Covariances verticales du résidu sur les amplitudes sismiques mesurées

La covariance expérimentale verticale du résidu et la covariance expérimentale croisée du logarithme des impédances et du résidu montre des structures semblables à celles observées sur la figure 50, pour la covariance expérimentale verticale des amplitudes modélisées et la covariance expérimentale verticale croisée du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées. Ceci incite à penser que le résidu calculé ici n'est pas seulement un résidu, mais qu'il reste une composante liée à la convolution du logarithme des impédances par une ondelette inconnue. Ce qui suggère que l'ondelette disponible ici n'est pas la meilleure possible pour la zone étudiée ici. Cette ondelette correspondrait donc plutôt à une autre échelle d'observation.

Sur la direction horizontale, les covariances expérimentales du résidu sont tout à fait différentes :

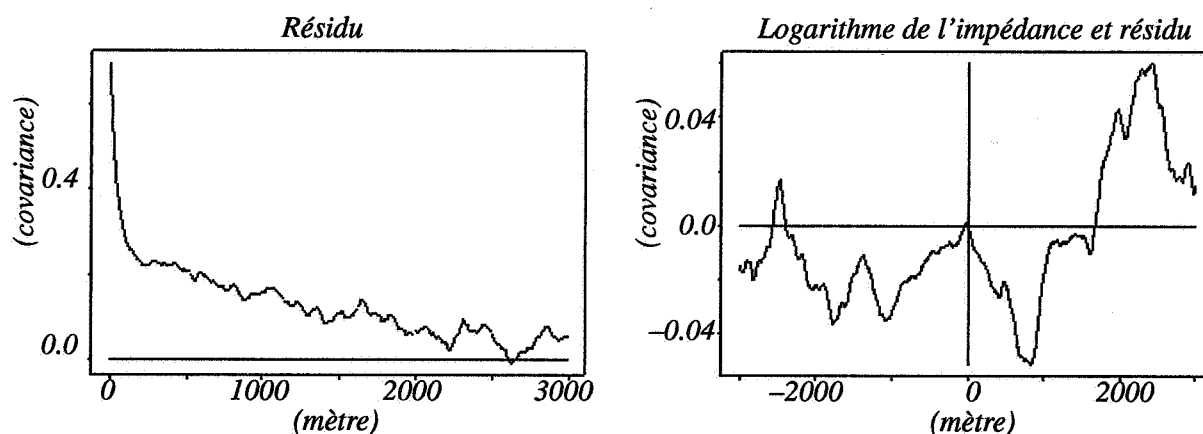


Fig. 57 : Covariances horizontales sur les amplitudes sismiques mesurées

Le résidu a des covariances horizontales expérimentales qui ne sont pas liées aux autres covariances expérimentales par la relation (40). En effet, le résidu et le logarithme des impédances sont corrélés sur la direction verticale. De plus, l'encaissant réel des impédances est fortement non stationnaire. En effet, cette unité du Mesa Verde a pour encaissant deux autres unités, dont l'unité supérieure présentée dans la partie 1 au paragraphe 3.1.1. qui présente une non stationnarité notable. Malheureusement, cette non stationnarité n'est pas restituée par l'ondelette.

Pour que les données d'impédances et d'amplitudes mesurées de cette étude soient utilisables pour effectuer une cosimulation conditionnée par un cokrigeage, il aurait fallu que l'ondelette prenne en compte la non stationnarité de l'encaissant des impédances ou que les encaissants soient donnés et utilisés lors du calcul des modèles de covariances simples et croisées des amplitudes. Il aurait également fallu que l'ondelette ne rentre pas en résonance avec la section en logarithme de l'impédance et soit plus représentative de la zone étudiée.

4. Application

Afin de tester cette méthode de simulation du logarithme des impédances contraintes par un cokrigage du logarithme des impédances aux puits et des amplitudes mesurées sur l'ensemble du champ, un nouveau jeu de données a été construit au Centre de Géostatistique. Le but de ce chapitre est de montrer :

- ◆ d'une part, que connaissant les amplitudes mesurées, l'ondelette et quelques puits en impédance, il est possible de retrouver la covariance des impédances et celle du résidu,
- ◆ et d'autre part, qu'un cokrigage permet de contraindre une simulation d'impédance par des impédances aux puits et des amplitudes mesurées.

Après une présentation et une analyse variographique des données, une simulation des impédances contrainte par un cokrigage des impédances aux puits et des amplitudes mesurées est effectuée.

4.1. Présentation des données

Les données construites au Centre de Géostatistique sont composées :

- ◆ d'une section en impédances à partir de laquelle cinq puits sont extraits,
- ◆ d'une ondelette,
- ◆ et d'une section en amplitude mesurée.

Ce jeu de données est le résultat d'une cosimulation non conditionnelle des impédances et des amplitudes mesurées dont la méthode est expliquée au paragraphe 2.1. Afin que les problèmes rencontrés sur le jeu de données du Mesa Verde soient évités, ce nouveau jeu de données est construit de telle sorte que :

- ◆ Le milieu en logarithme de l'impédance a une distribution gaussienne,
- ◆ il est à covariance factorisable,
- ◆ et est stationnaire d'ordre 2.
- ◆ L'encaissant en logarithme de l'impédance est également stationnaire.
- ◆ L'ondelette choisie n'entre pas en résonnance avec le milieu en impédance.
- ◆ Le logarithme des impédances et le résidu sont sans corrélation,
- ◆ et le résidu est non corrélé trace à trace.

4.1.1. La section en impédances acoustiques et les puits

Tout d'abord, une section en logarithme de l'impédance est simulée avec des paramètres inconnus répondant aux précédentes conditions. Cette section permet le calcul de la section en impédance suivante :

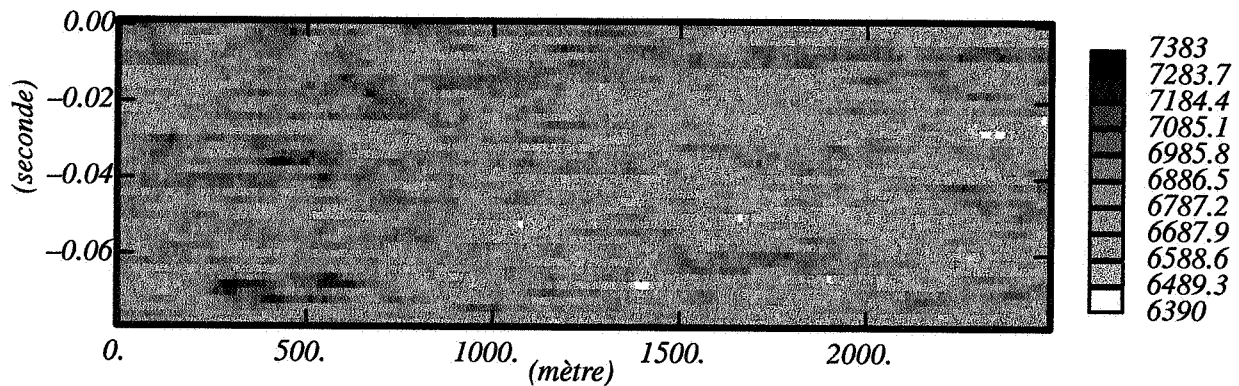


Fig. 58 : Section en impédance acoustique

Cette section compte 200 échantillons espacés de 12,5 mètres sur l'horizontale et 40 échantillons espacés de 2 millisecondes suivant la verticale. Les statistiques globales calculées sur cette section et son logarithme sont les suivantes :

	<i>impédance</i>	<i>logarithme de l'impédance</i>
<i>minimum</i>	6389,99	8,76
<i>maximum</i>	7383,8	8,91
<i>moyenne</i>	6855,64	8,83
<i>variance</i>	17719,34	$3,76 \cdot 10^{-4}$

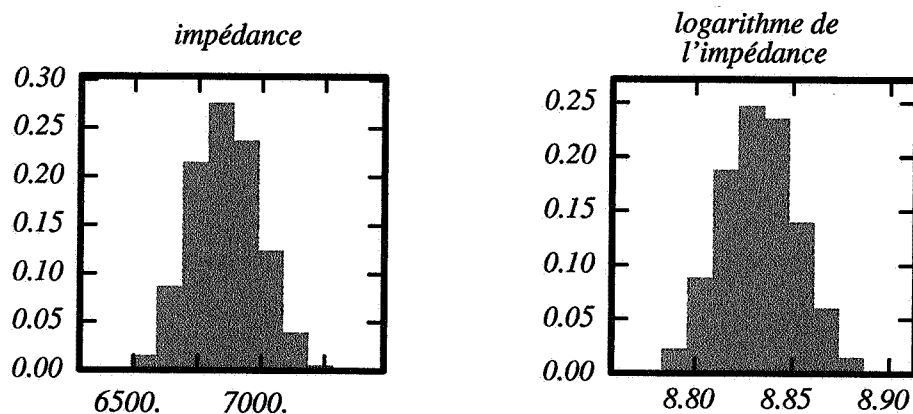


Fig. 59 : Statistiques globales et histogrammes de l'impédance acoustique et de son logarithme

Ces statistiques montrent une distribution gaussienne du logarithme des impédances. Distribution qui rend possible la contrainte de la simulation du logarithme des impédances par un cokrigage.

A partir de la section en impédance précédente, cinq puits ont été extraits :

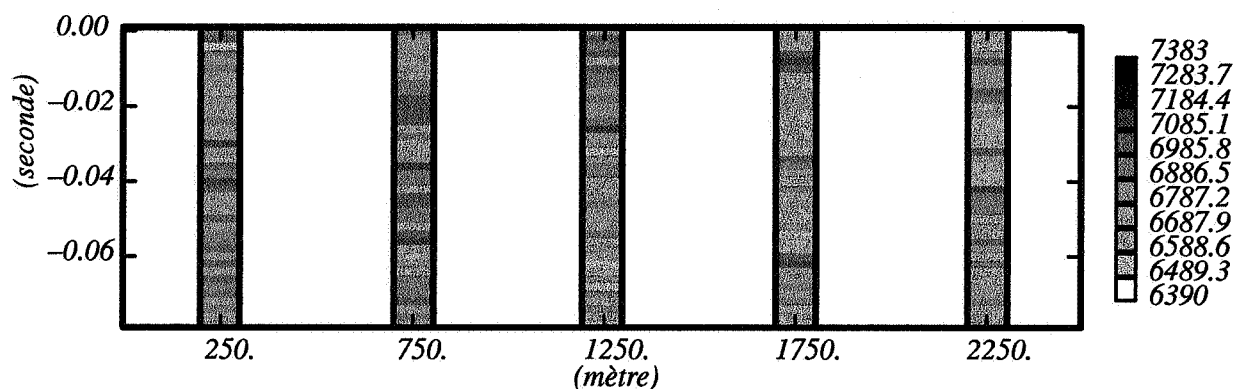


Fig. 60 : Les impédances acoustiques aux puits

Ce sont uniquement ces cinq puits qui sont utilisés comme données d'impédances lors du cokrigage conditionnant. Les statistiques globales effectuées sur ces puits et leurs logarithmes sont les suivantes :

	<i>impédance</i>	<i>logarithme de l'impédance</i>
<i>minimum</i>	6548,52	8,79
<i>maximum</i>	7180,78	8,88
<i>moyenne</i>	6852,25	8,83
<i>variance</i>	16421,4	$3,49.10^{-4}$

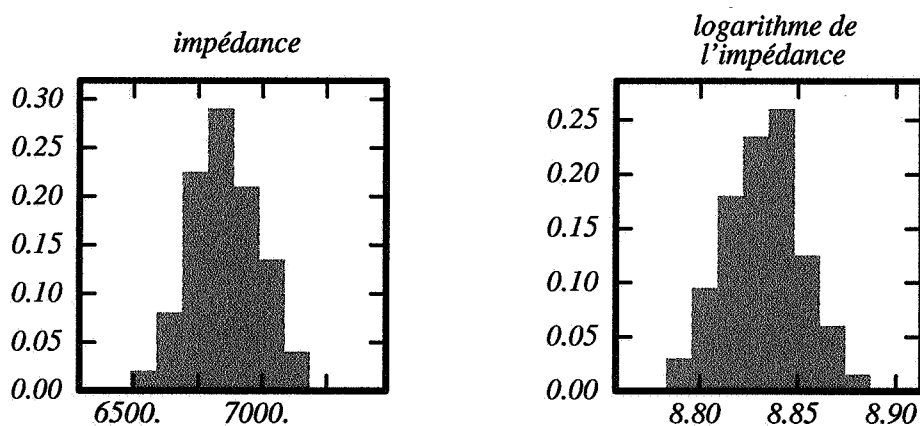


Fig. 61 : Statistiques globales et histogrammes de l'impédance acoustique aux puits et de son logarithme

Ces statistiques montrent que les statistiques obtenues avec les puits seuls sont relativement proches de celles calculées avec la section en impédance complète, malgré une variance légèrement plus faible. Les puits seuls permettent donc d'avoir une estimation de la moyenne et de la variance qui soit fiable.

La section en impédance (figure 58) est utilisée pour calculer une section en coefficients de réflexion. Cette nouvelle section compte 200 échantillons suivant l'horizontale et 39 suivant la verticale. Le pas d'espace est de 12,5 mètres suivant l'horizontale et le pas de temps est de 2 millisecondes suivant la verticale.

4.1.2. L'ondelette sismique

A l'aide de la section en coefficients de réflexion précédente, une section en amplitude modélisée a été calculée. Pour cela, l'ondelette suivante a été choisie :

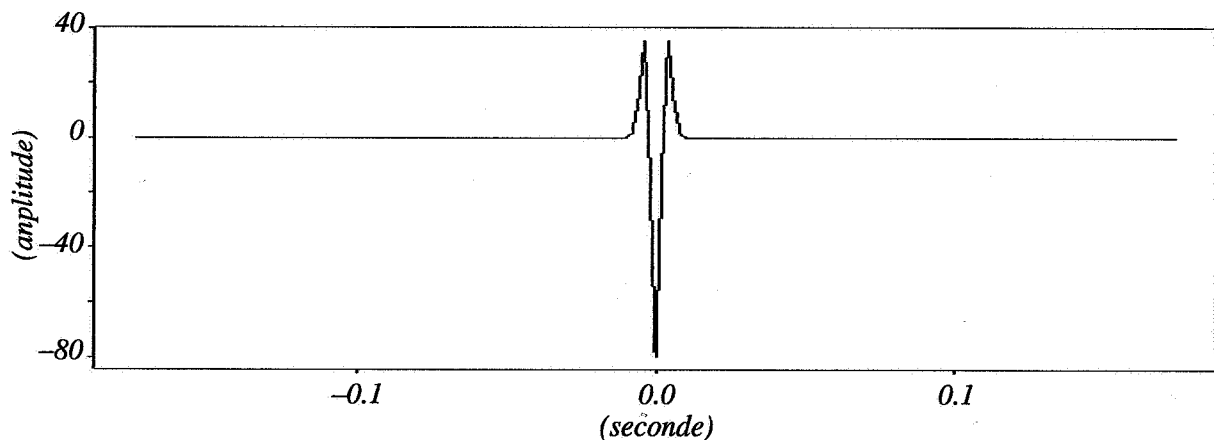


Fig. 62 : Ondelette sismique

La longueur d'onde de cette ondelette ($5 \Delta t$, soit 10 millisecondes) a été choisie afin que l'ondelette n'entre pas en résonnance avec le logarithme des impédances. La longueur dynamique de l'ondelette est environ de $14 \Delta t$ (70 millisecondes). Elle est très légèrement inférieure à la moitié de la hauteur de la section en coefficient de réflexion. La section en amplitude sismique ainsi calculée compte 200 échantillons suivant l'horizontale espacés de 12,5 mètres et 39 échantillons espacés de 2 millisecondes suivant la verticale.

4.1.3. La section en amplitude sismique mesurée

A partir de la section en amplitude modélisée et d'un résidu de moyenne nulle, la section en amplitude mesurée suivante a été obtenue :

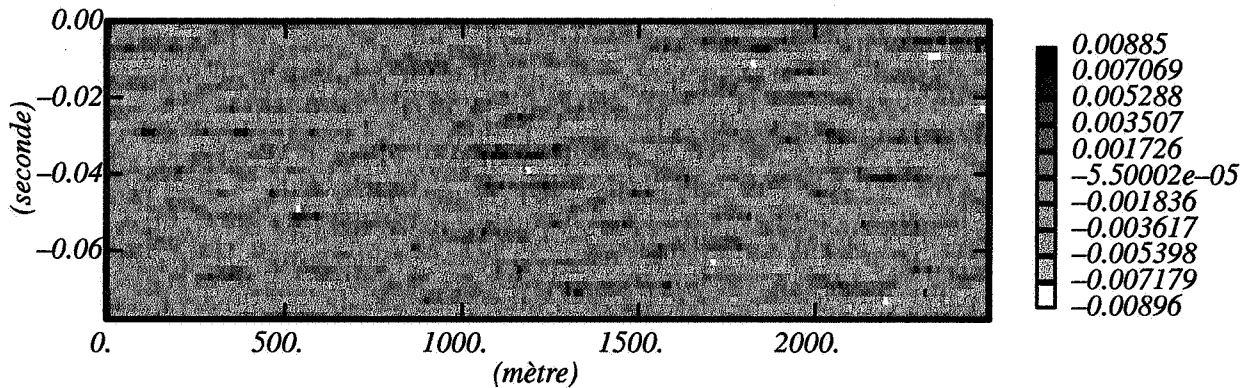


Fig. 63 : Section en amplitudes sismiques mesurées

Cette section compte également 200 échantillons espacés de 12,5 mètres suivant l'horizontale et 39 échantillons espacés de 2 millisecondes sur la direction verticale. Les statistiques globales effectuées sur cette section sont les suivantes :

<i>minimum</i>	$-8,96.10^{-3}$
<i>maximum</i>	$8,85.10^{-3}$
<i>moyenne</i>	$-1,9.10^{-5}$
<i>variance</i>	$5,66.10^{-6}$

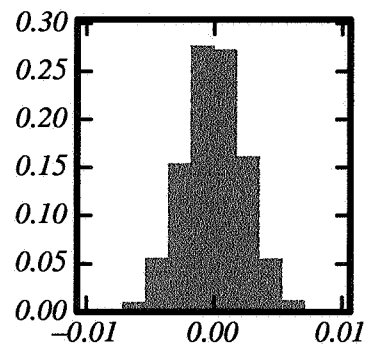


Fig. 64 : Statistiques globales et histogramme de l'amplitude sismique mesurée

Ces statistiques montrent que les amplitudes mesurées sont gaussiennes et que leur ordre de grandeur est très différent de celui du logarithme des impédances. Pour la suite de l'étude (c'est-à-dire pour l'analyse variographique des données et la simulation du logarithme des impédances contrainte par un cokrigage du logarithme des impédances aux puits et des amplitudes mesurées), les données précédentes sont donc normées, suivant la méthode indiquée au paragraphe 3.1.3.3.

4.2. L'analyse variographique

Une analyse variographique de ces données a été effectuée à l'aide de la section en logarithme des impédances complètes puis uniquement à l'aide des puits, afin d'observer si les puits seuls permettent de retrouver l'ensemble des covariances nécessaires à la cosimulation du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées, puis à la contrainte de cette cosimulation par un cokrigage des données.

4.2.1. Avec la section en impédance acoustique complète

Pour commencer, l'analyse variographique des données complètes permet d'observer si les covariances simples et croisées des données sont bien liées par les relations déterminées au paragraphe 2.3.1. Les covariances simples et croisées verticales sont donc tout d'abord ajustées, puis leurs ajustements sont utilisés pour ajuster les covariances simples et croisées horizontales.

4.2.1.1. Ajustement des covariances verticales

Suivant la verticale, les covariances expérimentales des données (en lignes pointillées) peuvent être ajustées par les modèles de covariance (en lignes continues) suivants :

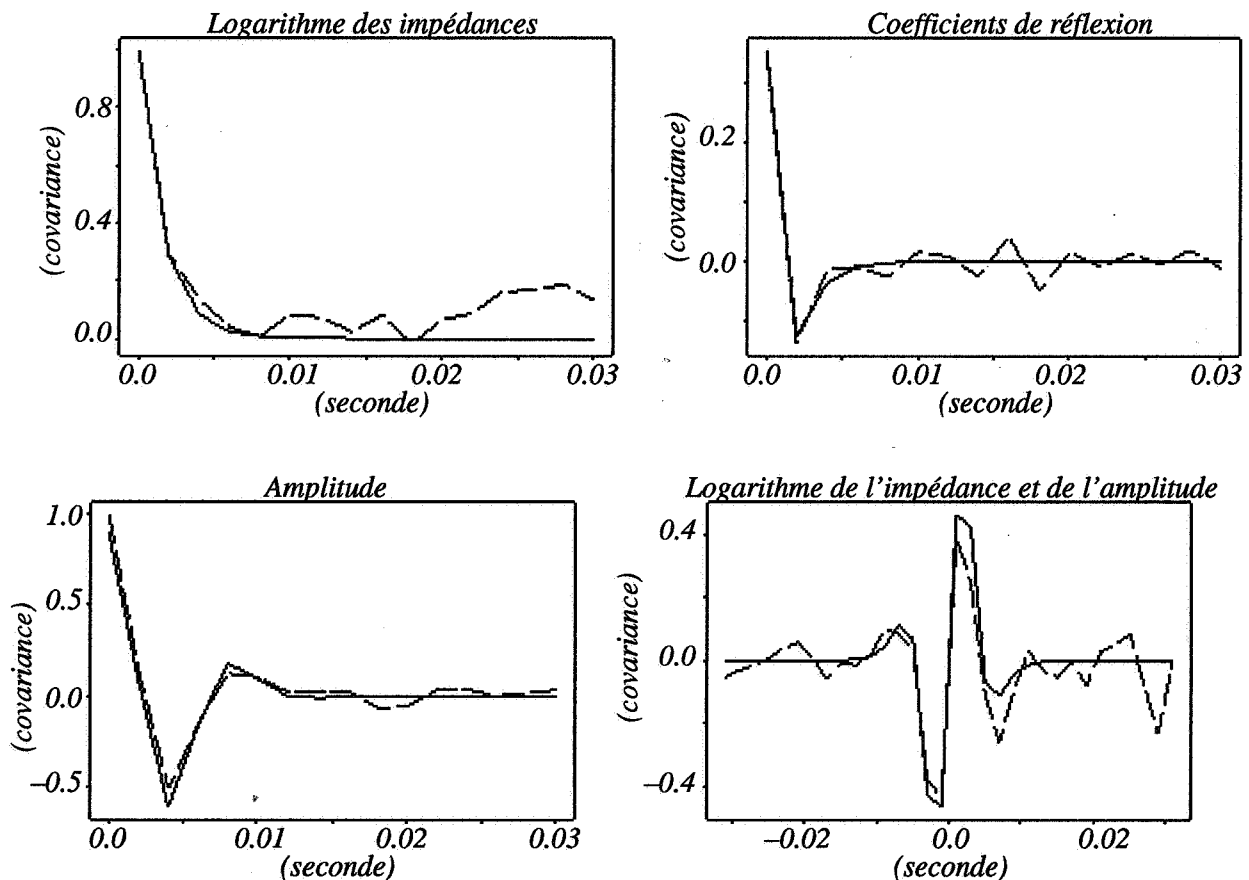


Fig. 65 : Ajustement des covariances verticales des données complètes

Dans ce cas, le modèle choisi pour modéliser le logarithme des impédances est une covariance exponentielle de palier 1 et de portée 16 millisecondes. L'ajustement de la covariance expérimentale des coefficients de réflexion est tout à fait acceptable. Celui de la covariance expérimentale des amplitudes mesurées permet de déterminer la covariance verticale du résidu.

4.2.1.2. Ajustement des covariances horizontales

L'utilisation du modèle de covariance exponentiel de palier 1 et de portée 14 millisecondes pour ajuster la covariance expérimentale verticale du logarithme des impédances et d'un modèle gigogne composé de deux covariances exponentielles l'une de palier 0,7 et de portée 62,5 mètres et l'autre de palier 0,3 et de portée 375 mètres pour ajuster la covariance expérimentale horizontale du logarithme des impédances donne le résultat suivant :

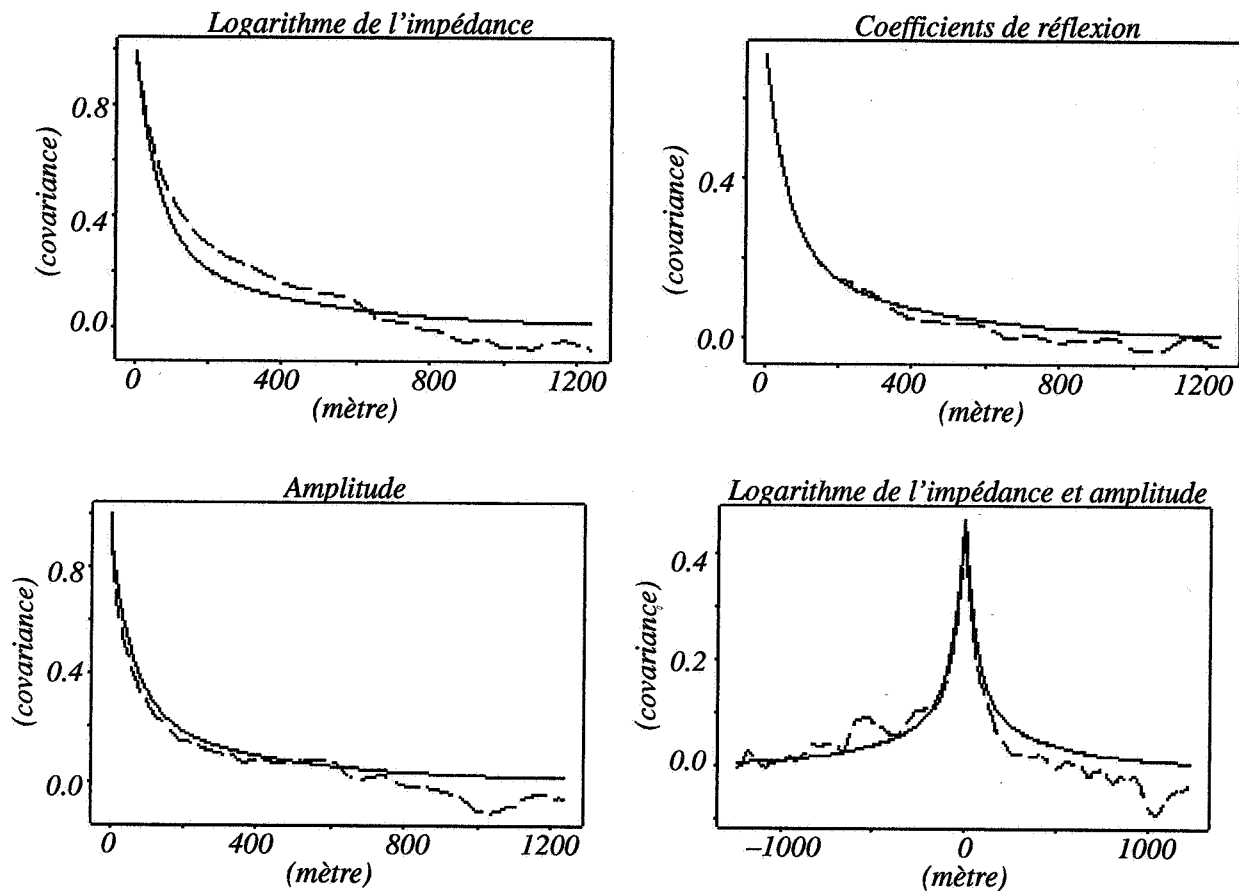


Fig. 66 : Ajustement des covariances horizontales des données complètes

L'ensemble des covariance est bien ajusté. L'ajustement de la covariance expérimentale des amplitudes mesurées, laisse entrevoir la covariance du résidu : un effet de pépite.

4.2.2. Avec les impédances acoustiques aux puits

Reste maintenant à observer si les données en logarithme des impédances aux puits seules permettent de faire de tels ajustements. Les données utilisées dans ce paragraphe pour calculer les covariances expérimentales sont donc les impédances aux puits, les coefficients de réflexion aux puits, et les amplitudes mesurées. Ces différentes données étant bien entendu normées. L'ondelette qui est utilisée pour calculer les covariances simples et croisées des amplitudes modéli-

sées est l'ondelette normée à l'aide de la covariance du logarithme des impédances aux puits et de celle des amplitudes mesurées sur l'ensemble du champ. Comme précédemment, les covariances expérimentales verticales sont tout d'abord ajustées, puis leur ajustement est utilisé pour ajuster les covariances expérimentales horizontales.

4.2.2.1. Ajustement des covariances verticales

Le modèle de covariance utilisé pour ajuster la covariance expérimentale du logarithme des impédances est un exponentiel de palier 1 et de portée 14 millisecondes. C'est le même modèle que celui qui est utilisé au paragraphe 4.2.1.1. pour ajuster la covariance expérimentale verticale du logarithme des impédances calculée sur l'ensemble du champ. Les ajustements des différentes covariances expérimentales verticales obtenus sont les suivants :

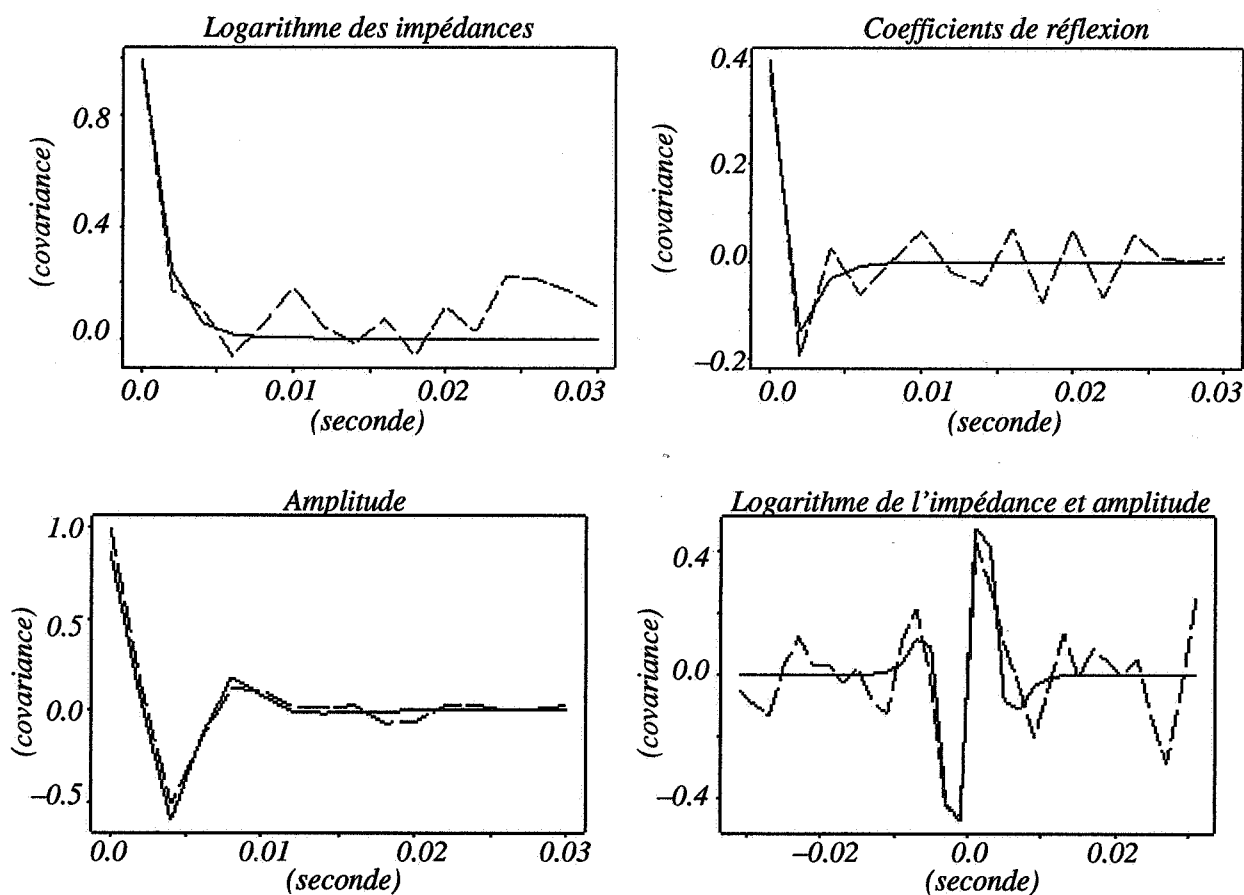


Fig. 67 : Ajustement des covariances verticales des données aux puits

Les ajustements des différentes covariances expérimentales verticales sont aussi bons que ceux des covariances expérimentales calculées avec l'ensemble des données d'impédance. La covariance du résidu (la différence entre le modèle qui serait choisi pour ajuster la covariance expérimentale du résidu et le modèle de covariance de l'amplitude modélisée) est, malgré le faible nombre de données d'impédance utilisées ici, tout à fait accessible. Les impédances aux puits et les amplitudes sismiques sur l'ensemble du champ permettent donc de déterminer les modèles de covariance à utiliser pour modéliser les différentes données.

4.2.2.2. Ajustement des covariances horizontales

Les covariances expérimentales horizontales sont ajustées en utilisant le modèle précédent (exponentiel de palier 1 et de portée 14 millisecondes) pour ajuster la covariance expérimentale verticale du logarithme des impédances. Le modèle de covariance choisi pour ajuster la covariance expérimentale horizontale du logarithme des impédances doit être tel que le modèle de covariance horizontale de l'amplitude modélisée (calculé à l'aide du modèle de covariance du logarithme de l'impédance et de l'ondelette) ajuste au mieux la covariance expérimentale des amplitudes mesurées. Ce modèle est un modèle gigogne composé de deux covariances exponentielles de paliers 0,7 et 0,3 et de portées respectives 50 mètres et 375 mètres. Les ajustements obtenus sont les suivants :

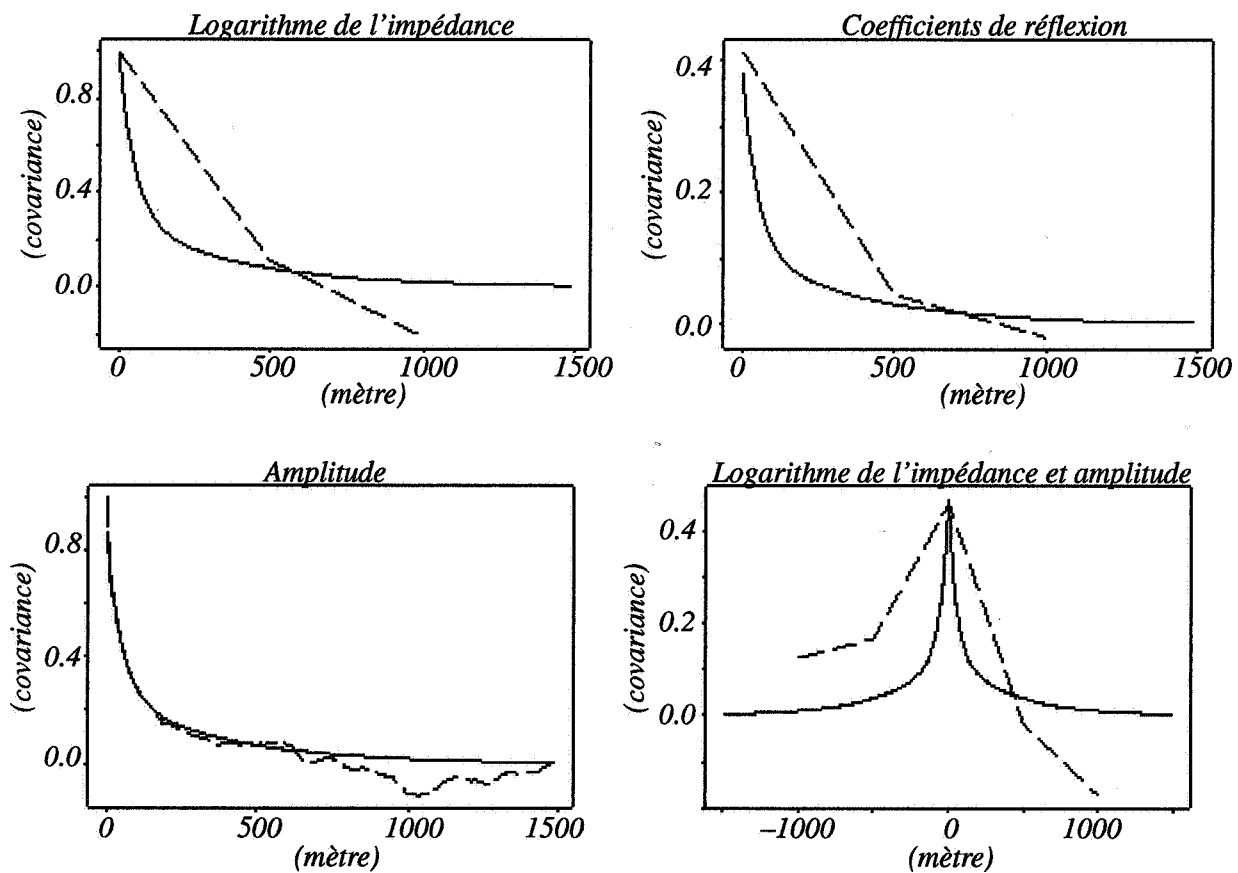


Fig. 68 : Ajustement des covariances horizontales des données aux puits

La covariance expérimentale horizontale de l'amplitude mesurée est bien ajustée. Pour les covariances expérimentales du logarithme des impédances, des coefficients de réflexion et pour la covariance croisée du logarithme de l'impédance et de l'amplitude mesurée, il est très difficile de juger leur ajustement, étant donné le faible nombre de points de ces covariances expérimentales. Néanmoins, le modèle qui est choisi ici est le même que celui qui a été choisi au paragraphe 4.2.1.2., afin d'ajuster la covariance expérimentale horizontale du logarithme des impédances calculée sur l'ensemble du champ. Ceci tend à montrer que les données d'amplitude et leur cova-

riance expérimentale horizontale permettent de retrouver la covariance horizontale du logarithme des impédances.

L'ensemble des covariances horizontales et verticales, simples et croisées du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées est déterminé. Il reste maintenant à ajuster la covariance du résidu.

4.2.2.3. La covariance du résidu

Comme l'indique la relation (40), la covariance du résidu utilisée pour ajuster la covariance expérimentale des amplitudes mesurées et le modèle de covariance des amplitudes modélisées calculé à l'aide de modèle de covariance du logarithme des impédances et de l'ondelette. Comme pour le reste de l'étude, et parce que le résidu est supposé sans corrélation trace à trace, deux directions sont privilégiées pour l'ajustement de la covariance du résidu, la direction verticale et la direction horizontale :

♦ Suivant la verticale

Etant donné la forme de la covariance expérimentale de l'amplitude mesurée, il est très difficile de trouver un modèle de covariance pour l'ajuster. En pratique, il est donc supposé que la covariance verticale du résidu est la différence entre la covariance expérimentale verticale de l'amplitude mesurée et le modèle de covariance de l'amplitude modélisée. La "covariance expérimentale" du résidu est donc supposée être l'erreur d'ajustement de la covariance expérimentale de l'amplitude mesurée par le modèle de covariance de l'amplitude modélisée. Cette erreur d'ajustement peut-être ajustée de la façon suivante :

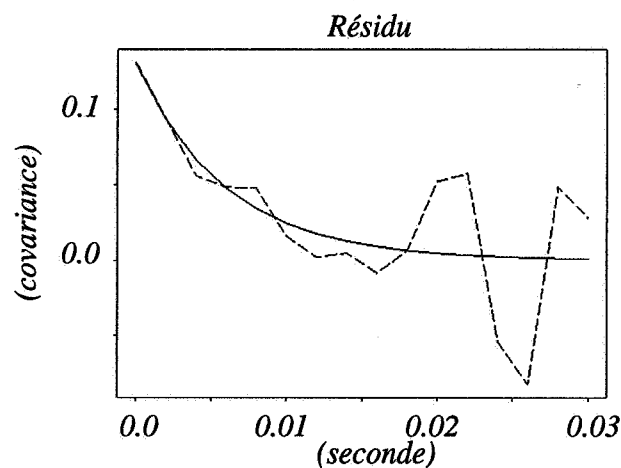


Fig. 69 : Ajustement de la covariance verticale du résidu

Le modèle utilisé pour ajuster la covariance du résidu est un exponentiel de palier 0,13 et de portée 6 millisecondes.

♦ Suivant l'horizontale

Suivant l'horizontale, la covariance du résidu est, par hypothèse, un effet de pépité. C'est bien ce qui est observé sur la figure 68. La différence entre le modèle de covariance qui ajusterait la

covariance horizontale des amplitudes mesurées et le modèle de covariance de l'amplitude modélisée est bien un effet de palier de 0,13.

Les impédances aux puits et les amplitudes mesurées sur l'ensemble du champ sont donc suffisantes pour l'ajustement de l'ensemble des covariances expérimentales nécessaires à la cosimulation et à la contrainte de cette cosimulation par un cokrigage.

4.3. Simulation conditionnée des impédances acoustiques

La simulation des impédances s'effectue en deux étapes :

- ◆ Dans une première étape, les impédances (ou plus exactement le logarithme des impédances) et les amplitudes mesurées sont cosimulées.
- ◆ Dans une seconde étape, la simulation des impédances est contrainte par un cokrigage du logarithme des impédances aux puits et des amplitudes mesurées.

Ces deux étapes font l'objet des paragraphes suivants.

4.3.1. Cosimulation des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées

Pour cosimuler les impédances et les amplitudes mesurées, c'est tout d'abord le logarithme des impédances qui est simulé. Un modèle gigogne composé de deux exponentiels factorisés est simulé :

- ◆ l'un des modèles a un palier de 0,7, une portée de 50 mètres suivant l'horizontale et une portée verticale de 14 millisecondes,
- ◆ le second modèle a un palier de 0,3, une portée horizontale de 375 mètres et une portée de 14 millisecondes suivant la verticale.

Cette simulation du logarithme des impédances est effectuée sur une grille régulière de 200 mailles de 12,5 mètres suivant l'horizontale et 40 mailles de 2 millisecondes suivant la verticale.

Une fois le logarithme des impédances simulé, cette section est "dénormalisée". C'est-à-dire que sa variance et sa moyenne lui sont rendues. Pour cela, la relation (41) est utilisée. Le logarithme des impédances ayant les "bonnes" variance et moyenne, les impédances sont calculées en prenant l'exponentiel de la section en logarithme de l'impédance. La section suivante est alors obtenue :

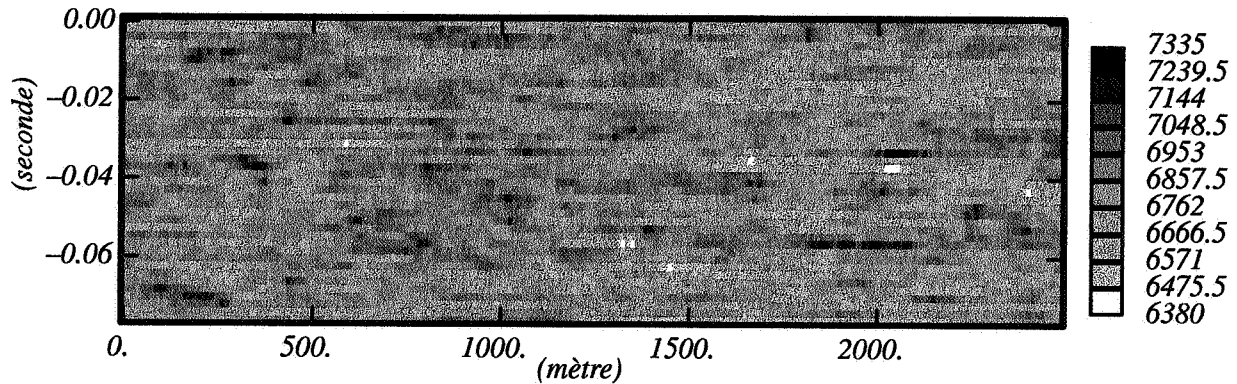


Fig. 70 : Simulation non conditionnée des impédances acoustiques

A partir de la précédente section, une section en coefficients de réflexion est calculée à l'aide de la formule (9). Cette section compte toujours 200 échantillons suivant l'horizontale, mais seulement 39 échantillons (au lieu de 40) suivant la verticale.

Cette section en coefficients de réflexion est ensuite convoluée par l'ondelette non normée (figure 62). La section obtenue est la section en amplitude modélisée suivante :

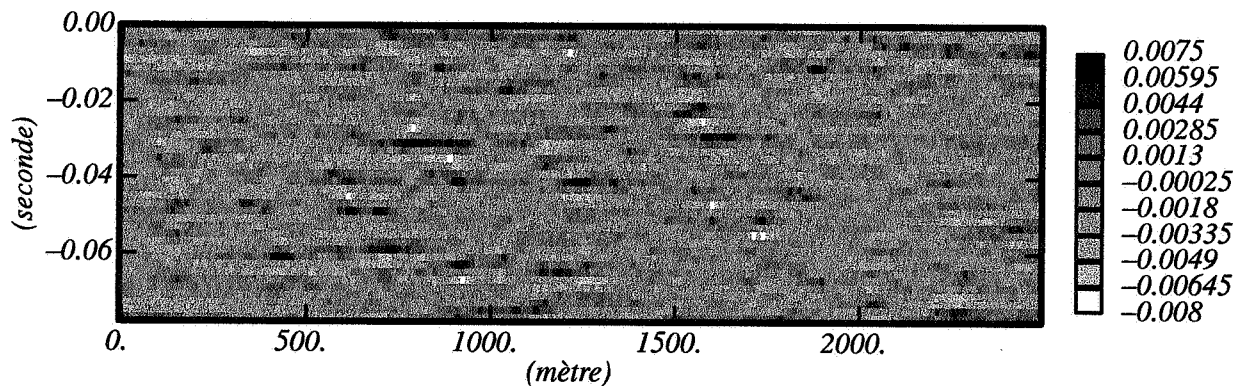


Fig. 71 : Simulation des amplitudes sismiques modélisées

Pour obtenir la section en amplitude mesurée, il ne reste plus qu'à simuler un résidu. Le modèle utilisé pour cette simulation est un exponentiel factorisé de palier 0,13 de portée 6 millisecondes suivant la verticale et de portée horizontale extrêmement courte de sorte que cet exponentiel puisse se confondre, sur l'horizontale, (au pas d'échantillonnage 12,5 mètres) avec un effet de pépite. Cette simulation est effectuée sur une grille régulière de 200 mailles de 12,5 mètres suivant l'horizontale et de 39 mailles de 2 millisecondes suivant la verticale. Le résidu ainsi obtenu est de moyenne nulle et de variance 0,13. De même que pour la section en logarithme de l'impédance, il faut "dénormaliser" ce résidu afin qu'il soit à l'échelle des amplitudes modélisées. L'opération suivante est alors effectuée :

$$\text{Res}(x, t) = \text{NormRes}(x, t) \cdot \sqrt{\sigma_A^2}$$

Ce résidu est tel que :

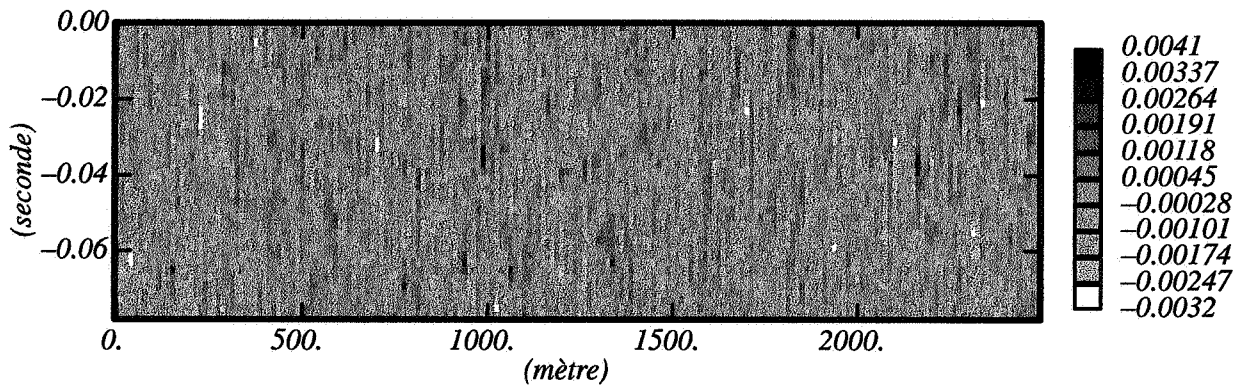


Fig. 72 : Simulation d'un résidu

En ajoutant ce résidu (figure 72) aux amplitudes modélisées (figure 71), les amplitudes mesurées suivantes sont obtenues :

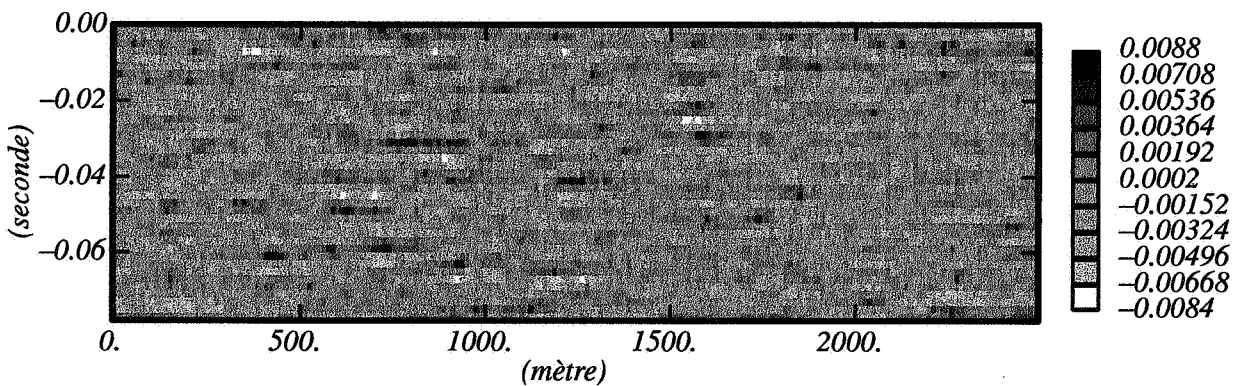


Fig. 73 : Simulation des amplitudes sismiques mesurées

Ces amplitudes mesurées ont alors les caractéristiques voulues :

- ◆ elles sont liées aux impédances acoustiques par les relations désirées,
- ◆ leurs covariances simples et croisées avec le logarithme de l'impédance sont également celles qui sont désirées. En effet, une fois les données normées, comme expliqué au paragraphe 3.1.3.3., leurs covariances sont telles que :

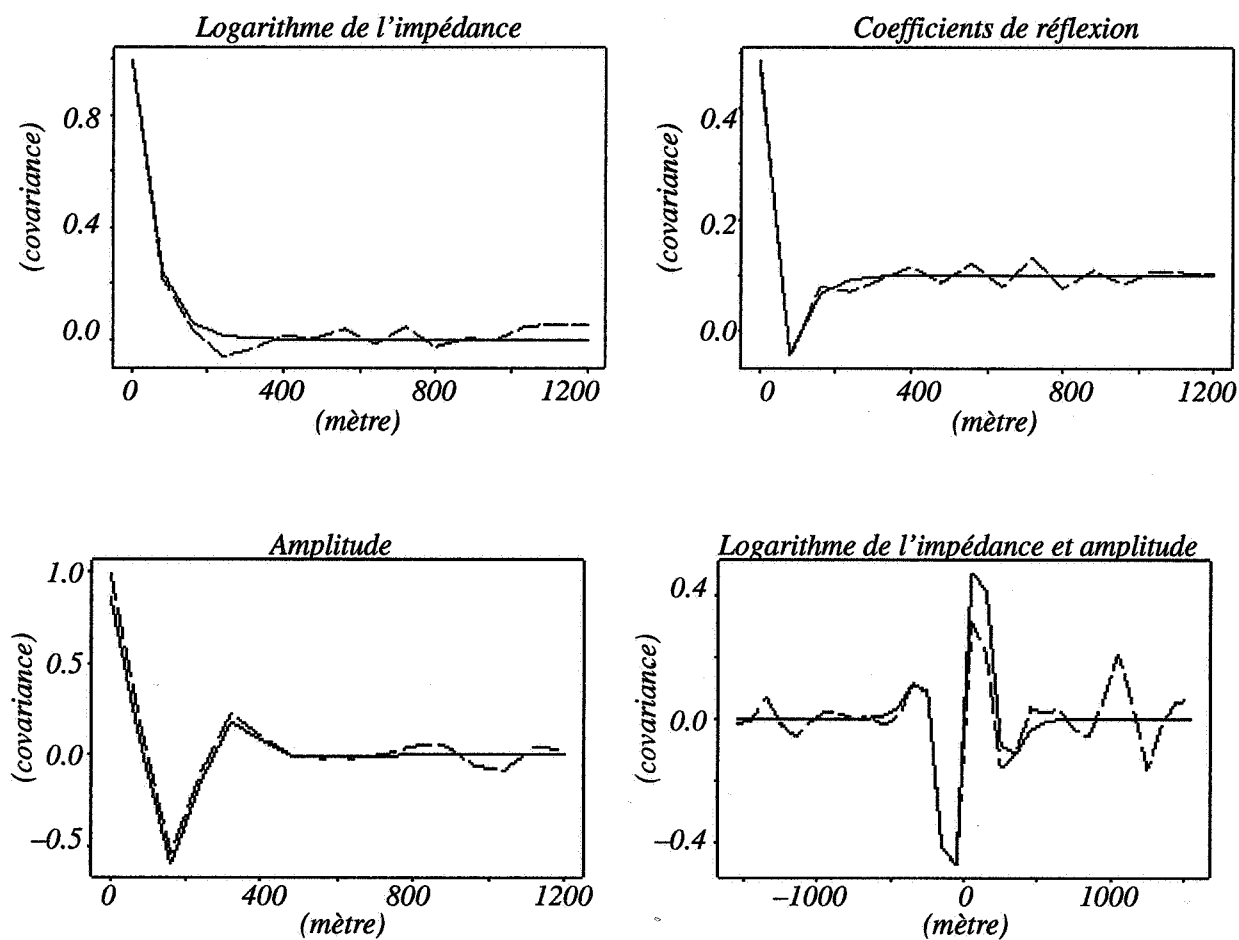
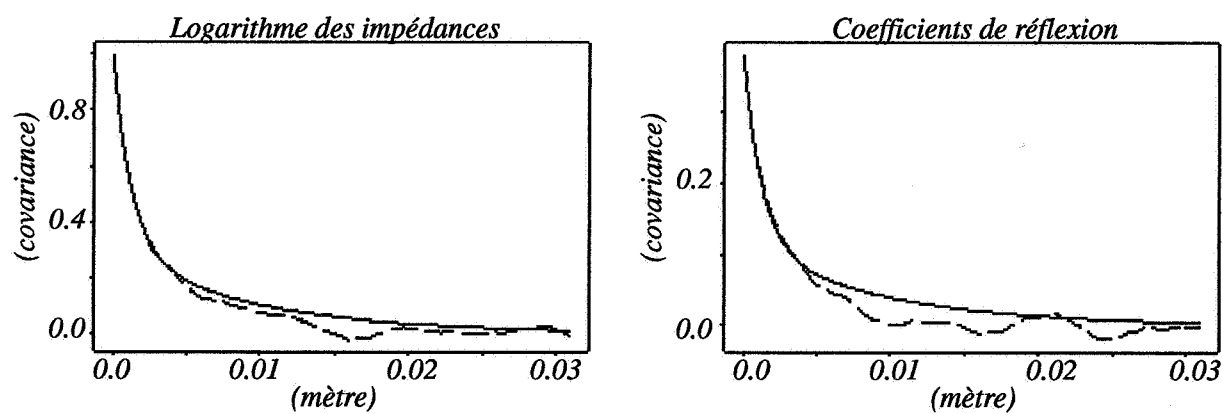


Fig. 74 : Covariances simples et croisée verticales de la cosimulation



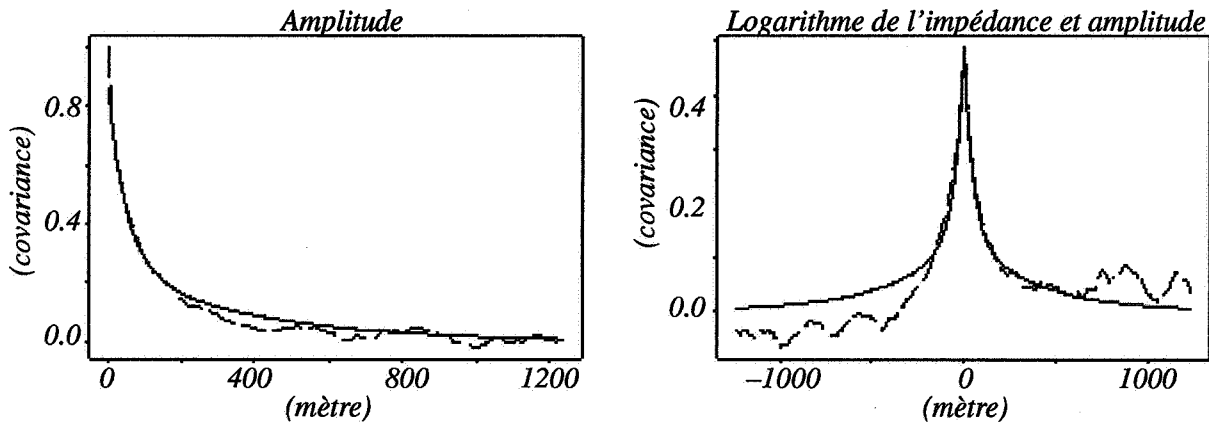


Fig. 75 : Covariances simples et croisée horizontales de la cosimulation

Cette cosimulation des impédances et des amplitudes mesurées est donc adaptée à sa contrainte par un cokrigage des données.

4.3.2. Contrainte de la simulation des impédances acoustiques par un cokrigage

La contrainte de la cosimulation précédente s'effectue comme indiqué au paragraphe 2.2.2. Les covariances utilisées pour le cokrigage sont :

- ◆ Le modèle choisi précédemment pour le logarithme des impédances : à savoir un modèle gigogne composé de deux covariances exponentielles de palier 0,7 et 0,3 de portées horizontales respectives 50 mètres et 375 mètres et de portée verticale 14 millisecondes.
- ◆ Pour les amplitudes mesurées, le modèle choisi est le modèle des amplitudes modélisées calculé à l'aide du modèle de covariance du logarithme des impédances et de l'ondelette auquel s'ajoute le modèle de covariance du résidu : un exponentiel factorisé de palier 0,13, de portée 6 millisecondes suivant la verticale et de portée horizontale extrêmement courte.
- ◆ Pour la covariance croisée du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées, le modèle de covariance choisi est le modèle de covariance croisée entre le logarithme de l'impédance et l'amplitude modélisée calculée à l'aide de la covariance du logarithme des impédances et de l'ondelette.

Le voisinage de cokrigage choisi est :

- ◆ 57 mailles dans la direction horizontale et 3 dans la direction verticale pour le logarithme des impédances,
- ◆ et 27 mailles suivant l'horizontale et 2 suivant la verticale pour les amplitudes mesurées.

Ce voisinage a été choisi en relation avec les portées des différentes covariances. Le résultat de la contrainte de la cosimulation par cokrigage est le suivant :

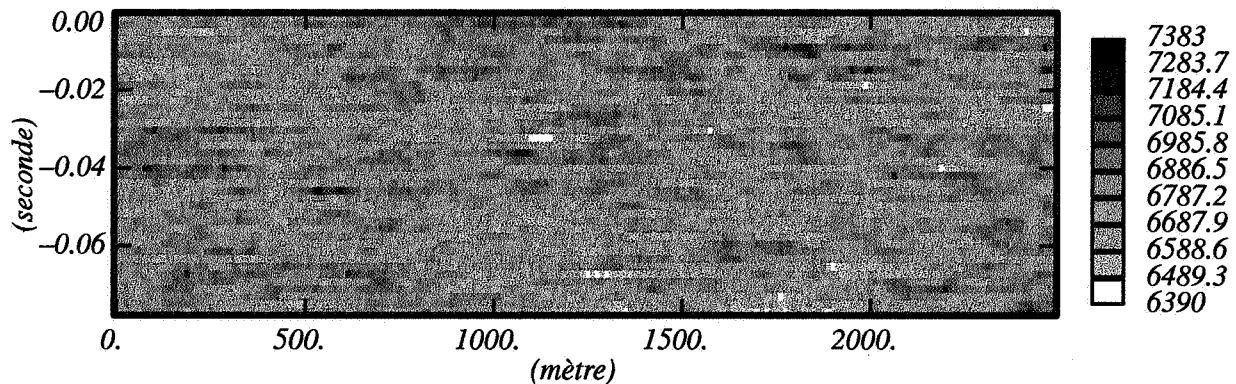


Fig. 76 : Simulation conditionnée des impédances acoustiques

Cette simulation des impédances conditionnée par un cokrigeage du logarithme des impédances et des amplitudes mesurées donne un résultat satisfaisant. En effet, les impédances aux puits sont bien restituées, de même que la covariance du logarithme des impédances et la covariance croisée du logarithme des impédances et de l'amplitude mesurée. En effet, sur la direction verticale, l'ensemble des covariances s'ajuste de la façon suivante :

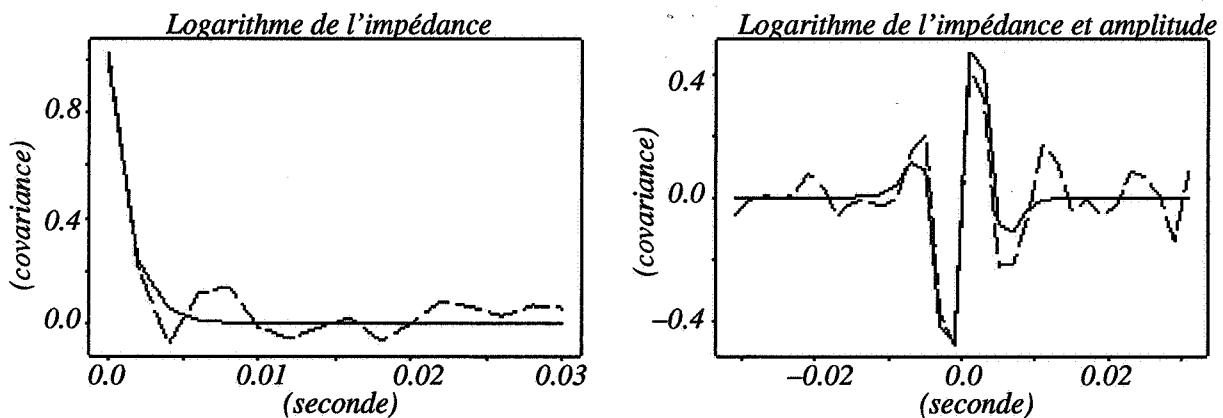


Fig. 77 : Covariances simple et croisée verticales de la cosimulation conditionnée

Les covariances expérimentales verticales simple et croisée du logarithme des impédances sont bien ajustées. De même, suivant l'horizontale, les covariances s'ajustent de la façon suivante :

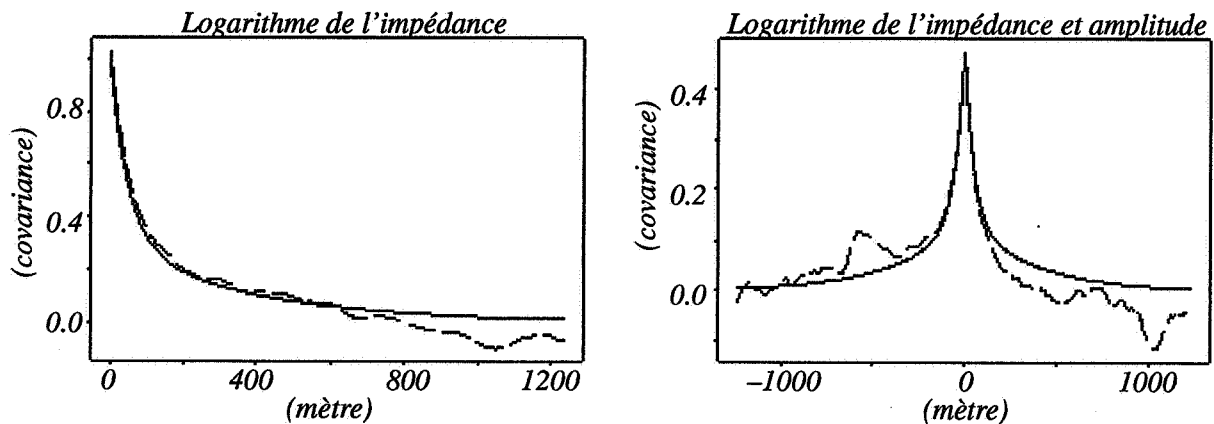


Fig. 78 : Covariances simple et croisée horizontales de la cosimulation conditionnée

Les covariances expérimentales horizontales simple et croisée du logarithme des impédances sont également bien restituées.

Cette simulation des impédances contrainte par un cokrigage des données d'impédance et d'amplitude mesurée (figure 76) a bien toutes les caractéristiques désirées :

- ◆ elle est contrainte aux points de données,
- ◆ elle a la covariance voulue,
- ◆ la covariance croisée entre la donnée d'amplitude mesurée (donnée) et le logarithme de l'impédance (simulé puis contraint par un cokrigage) est également celle qui est désirée.

Conclusion

La méthode de cosimulation des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées contrainte par un cokrigage des données aux puits et de l'information sismique est basée sur les relations liant les données. Cette méthode de simulation conditionnée des impédances acoustiques comporte **deux phases** :

- ◆ La cosimulation des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques mesurées,
- ◆ et la contrainte de cette cosimulation par un cokrigage à moyenne connue des données.

Cette méthode de simulation conditionnée a nécessité de faire un certain nombre d'**hypothèses** :

- ◆ Pour pouvoir ajuster la covariance des impédances acoustiques à l'aide de celle des amplitudes sismiques mesurées, le milieu en logarithme de l'impédance a été supposé à covariance factorisable.
- ◆ Les données en logarithme de l'impédance et en amplitude sismique mesurée ont été supposées stationnaire d'ordre 2,
- ◆ la moyenne du logarithme des impédances est supposée connue,
- ◆ et les données sont supposées gaussiennes.
- ◆ Pour terminer, le logarithme de l'impédance acoustique est supposé sans corrélation avec le résidu sur les amplitudes sismiques mesurées.
- ◆ Et le résidu est supposé non corrélé trace à trace.

Ceci, pour que le cokrigage conditionnant à moyenne connue, soit envisageable.

L'application de cette méthode sur l'unité centrale du Mesa Verde a permis de mettre à jour quelques **problèmes** et d'étudier leurs solutions.

- ◆ Le premier est lié au fait que cette étude étant synthétique, les données d'impédances acoustiques ne prennent que quatre valeurs et ne sont donc pas gaussiennes. Ceci interdit l'utilisation d'un cokrigage conditionnant. Dans un cas réel, ce problème ne devrait pas se poser, puisque dans ce cas, un faciès n'a pas une impédance constante.
- ◆ Le second problème est induit par les différences d'ordre de grandeur important entre les données, ce qui risque de produire des erreurs lors des calculs. Ce problème est contourné de façon extrêmement simple en normant les différentes données.
- ◆ Un problème d'ondelette qui entre en résonance avec le milieu en impédance s'est ensuite posé. Aucune solution n'a été trouvée pour résoudre ce problème. Il faut cependant noter que lorsque la longueur d'onde de l'ondelette est proche de la distance de périodicité de la section en amplitude, les relations entre les covariances des différentes données ne sont plus vérifiées.

- ◆ Pour terminer, un problème d'encaissant non stationnaire s'est posé. Ce problème peut être résolu en utilisant une ondelette qui est uniquement déterminée dans l'unité d'étude et si c'est nécessaire (c'est-à-dire si l'ondelette est trop variable suivant l'horizontale) de partager l'unité d'étude en plusieurs zones, pour que l'ondelette soit constante par zone.

La plupart de ces problèmes étant contournés, cette **méthode de simulation** des impédances acoustiques conditionnées par des impédances acoustiques aux puits et des amplitudes sismiques mesurées est **extensible à d'autres cas**. En effet :

- ◆ L'hypothèse d'un milieu à covariance factorisable peut être "remplacée" par l'hypothèse d'un milieu en impédance ayant une anisotropie géométrique. Ceci nécessiterait de calculer à nouveau les relations entre les covariances.
- ◆ Cette méthode pourrait également être étendue aux cas où les données sont non stationnaires et leurs moyennes inconnues, en utilisant un cokrigage conditionnant en FAI-k au lieu du cokrigage à moyenne connue.

Pour terminer, il serait intéressant d'appliquer cette méthode sur un jeu de données réelles afin de connaître sa validité et son applicabilité réelle – ainsi que de tester l'influence d'un mauvais calage (suivant la verticale) de la sismique par rapport aux puits.

Conclusion générale

Les simulations probabilistes de réservoir ont pour but d'obtenir une image de réservoir en lithofaciès et/ou en propriétés pétrophysiques à l'aide des informations de puits et de la connaissance géologique. Afin de mieux contraindre les simulations, il est nécessaire d'ajouter l'information sismique aux données précédentes. En effet, celle-ci, bien que liée indirectement aux variables recherchées donne des informations sur la variabilité latérale du réservoir. La prise en compte de ces deux types d'information (données de puits et information sismique) permet d'obtenir des images de réservoir qui sont plus représentatives du sous-sol.

L'intégration d'une information sismique dans la simulation probabiliste des réservoirs peut se faire de façon multiple. En effet, le choix des méthodes de simulation et d'intégration de l'information sismique doit se faire en fonction de :

- ◆ la nature de l'information sismique (porosité ou perméabilité cumulées, épaisseurs cumulées d'un ou plusieurs faciès, rapport des épaisseurs de deux faciès, amplitude sismique ...),
- ◆ la fiabilité de cette information sismique (doit-elle être restituée exactement ou non ?),
- ◆ la nature des données de puits (faciès géologique, impédance acoustique...),
- ◆ les caractéristiques des variables disponibles (moyennes connues ou non, stationnarité d'ordre 2 ou non stationnarité...),
- ◆ et la nature du résultat de la simulation (des faciès, des impédances acoustiques...).

Dans cette thèse, deux méthodes d'intégration ont été présentées.

- ◆ La première méthode permet d'intégrer une information déduite de la sismique (porosité ou perméabilité cumulées suivant la verticale, épaisseurs cumulées d'un ou plusieurs faciès ou rapport des épaisseurs de deux lithofaciès) lors de la simulation des faciès. Les faciès sont simulés à l'aide de la méthode des Gaussiennes Seuillées. L'information déduite de la sismique est intégrée au niveau de l'estimation des proportions des différents lithofaciès (proportions qui sont liées aux seuils de coupure de la variable aléatoire gaussienne) par un krigeage ou un cokrigeage.

L'estimation des proportions par krigeage est à utiliser lorsque l'information déduite de la sismique est une carte horizontale 2D concernant l'épaisseur cumulée d'un ou plusieurs faciès ou les rapports des épaisseurs de deux faciès. Cette épaisseur est une contrainte forte pour l'estimation des proportions. Le krigeage des proportions est un krigeage par plan sous contrainte d'agrégation.

Le cokrigeage peut être utilisé quelle que soit la nature de l'information déduite de la sismique, qui sera restituée d'autant plus fidèlement que la corrélation avec les variables d'intérêt est forte. Il s'agit d'un cokrigeage par plan.

La mise en oeuvre de cette méthode nécessite un certain nombre de choix au niveau des modèles de covariance, car expérimentalement, les covariances horizontales

simples et croisées des proportions des différents faciès ne peuvent pas toutes être ajustées.

Une évolution en cours de cette méthode consiste à sa mise en oeuvre lorsque l'information déduite de la sismique est à trois dimensions.

♦ La seconde méthode d'intégration de la sismique dans la simulation des réservoirs permet d'intégrer les amplitudes sismiques lors de la simulation des impédances acoustiques. Cette méthode est basée sur le modèle convolutif qui lie les amplitudes sismiques aux impédances acoustiques, par l'intermédiaire de l'ondelette sismique. Une cosimulation des impédances acoustiques et des amplitudes sismiques est tout d'abord effectuée. Puis cette cosimulation est contrainte par les données à l'aide d'un cokrigeage.

Cette méthode s'applique à des variables gaussiennes stationnaires d'ordre 2. De plus, le modèle de covariance des logarithmes des impédances a été choisi de type factorisé. Ces hypothèses, bien que relativement limitatives peuvent s'appliquer, dans une première approche, à un grand nombre de réservoirs. Deux généralisations sont envisageables, d'une part permettre d'autres modèles de covariances pour les logarithmes des impédances et d'autre part lever l'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 en cokrigeant en FAI-k .

Au cours de la mise en oeuvre de cette méthode d'intégration de la sismique dans la simulation des réservoirs, un certain nombre de problèmes se sont posés. Ces problèmes ont permis, en particulier, de mettre en évidence l'impact d'un encaissant non stationnaire et d'une ondelette qui entre en résonance avec la section en impédance sur la structure des amplitudes mesurées.

Ces deux méthodes ont été testées sur le jeu de données synthétiques du Mesa Verde et donnent des résultats prometteurs. La première méthode a déjà été utilisée industriellement sur plusieurs jeux de données réels et apporte satisfaction aux utilisateurs. La suite logique de ce travail est la mise en oeuvre de la seconde méthode d'intégration de la sismique lors de la simulation des réservoirs sur un cas réel.

ANNEXES

ANNEXE 1 : Intégration d'une information déduite de la sismique dans la simulation stochastique de réservoir par la méthode des Gaussiennes Seuillées [14]

INTEGRATION OF SEISMIC DERIVED INFORMATION IN RESERVOIR STOCHASTIC MODELLING USING TRUNCATED GAUSSIAN APPROACH

D. MOULIERE⁽¹⁾, H. BEUCHER⁽¹⁾, L.Y. HU⁽²⁾, F. FOURNIER⁽²⁾,
P. TERDICH⁽³⁾, F. MELCHIORI⁽³⁾ et G. GRIFFI⁽³⁾.

(1) *Centre de Géostatistique, ENSMP, 35 rue St Honoré,
77305 Fontainebleau, France.*

(2) *Institut Français du Pétrole, 1&4 av. du Bois-Préau,
92508 Rueil Malmaison, France.*

(3) *AGIP, 20097 S. Donato Milanese, PO Box 12069,
Milano, Italy.*

Abstract

A detailed reservoir model is an essential requirement for the most effective recovery of hydrocarbons in place. For this purpose, the internal reservoir characterization has to be based not only on well data but also constrained by seismic information.

The methodology for integrating seismic data using the truncated Gaussian method is based on the non stationary approach. This approach, presented at the previous geostatistical congress, consists in using 3D proportion blocks instead of vertical proportion curves in the horizontal stationary approach. The first step of the integration methodology is the calibration of seismic attributes at the reservoir level into geological information related to lithotypes. The second step is the estimation of the corresponding lithotypes proportion blocks using both well data and seismic derived geological information. This paper discusses this second step.

Depending on the available information, different geostatistical methods for the proportion image estimations are proposed. These methods have to take account of the following aspects :

- The seismic derived information either gives proportions of the studied lithotypes or determines zones of fixed vertical proportion curves.
- The data are related to different supports : punctual lithofacies for the well, with high vertical resolution and a sparse areal coverage, blocks for the seismic data but dense in the 2D space.

Then to illustrate the integration of seismic data in lithofacies simulations, an application to a real case is presented.

1. Introduction

In oil industry, an effective recovery of hydrocarbons requires a detailed reservoir model. To obtain the most representative model of the reservoir under study, it is necessary to take account of all available information, especially seismic information. This paper presents a method for the integration of seismic information with the Truncated Gaussian method.

In this model, the lithofacies simulation is made with a stationary simulation of a Gaussian random function and by using the thresholds, which are directly linked to the lithofacies proportions in the reservoir. Until now, the estimation of lithofacies proportions was only obtained from well information. Here we propose to integrate the seismic information. As the proportions obtained in this way vary in all the space, the lithofacies simulation is non stationary. Fitting the lithofacies indicator variogram in this framework was presented at the previous congress [Beucher, 1].

Seismic data integration in stochastic simulations is a key point since these data can provide reservoir information with an excellent areal coverage. Therefore, it helps reduce the uncertainties on the distribution of reservoir properties between wells. But this integration is difficult, mainly because seismic and well data are measured at a very different scale and because the relationship between the reservoir properties and the seismic response is complex and indirect. A conservative approach for integration is proposed where calibration techniques in the neighborhood of wells are used to turn seismic attributes into average reservoir information.

We now propose some methods which make it possible to take account of the different types of derived seismic information, to estimate the lithofacies proportions. An application on a real case illustrates this approach.

2. Data

2.1. WELL DATA

The well data used in our approach, are lithotype data. These lithotypes are derived by using an integrated petrophysical interpretation of log and core data, via an algorithm of cluster analysis.

These data will be used for the 3D proportion block estimation, either directly like lithotype indicators, or already synthesized as proportions (i.e. mean values calculated on a chosen well set).

2.2. SEISMIC DATA

The calibration techniques of seismic attributes in terms of geological information can be performed in two ways [Fournier, 2] :

Firstly, seismic facies analysis can be carried out for defining the lateral extension of areas with the same geological behavior. Seismic facies analysis is based on statistical pattern recognition techniques applied to the portions of traces corresponding to the reservoir interval. The traces are characterized by a set of seismic attributes. Geological interpretation of seismic facies is done through well information. For the proposed integration, seismic facies are interpreted in terms of the various types of proportion curves defined from wells. This calibration gives 2D maps of qualitative information which could be used to estimate the 3D proportions blocks.

Secondly, statistical calibration techniques can be used to analyze the possible relations between some seismic attributes computed at the reservoir level and reservoir properties of interest. These relationships are then applied between wells to map estimates and attached uncertainties of the reservoir properties. For the proposed integration, reservoir properties correspond to the thicknesses of the various lithofacies cumulated on the reservoir interval. These thicknesses are derived from the seismic attributes whenever possible. Then, this 2D seismic derived information helps constrain the 3D proportion block construction.

3. Simulation method

3.1. TRUNCATED GAUSSIAN METHOD

The lithotype simulation using the truncated Gaussian method is carried out in two steps. The first step is the simulation of a Gaussian random function of which the variogram is linked to the thresholds and to the simple and cross variograms of the lithotypes. The second step of the simulation consists in attributing, with the thresholds, a lithotype for each Gaussian value [Matheron, 3] [Ravenne, 4].

3.2. THE 3D PROPORTION BLOCK

The 3D proportion block could be constructed in different ways, depending on the type of seismic information available.

3.2.1. *By zone*

This approach can be used when the derived seismic information is qualitative, i.e. 2D maps divided into homogeneous areas. These areas are deduced from the seismic facies analysis. The construction of the 3D proportion block is simply made by assigning to each area the corresponding vertical proportion curve.

3.2.2. *From vertical proportion curves*

This second construction method of the 3D proportion block uses local vertical proportion curves calculated on groups of wells adding eventually geological knowledge. These local vertical proportion curves are considered as defined on a support of constant size. We will note X_α the proportion support located at the point x_α .

In this case, the derived seismic information is a 2D map of a lithotype proportion deduced from the statistical calibration. The calculation method of the 3D proportion block is kriging with a constraint on the vertical sum.

In this method, the proportion $P_{f,z}(X_0)$ of the lithotype f at the level z in X_0 is estimated by an ordinary kriging of the proportion data on this same plane, with an additional constraint which comes from seismic information. For each lithotype f and for each plane z , $P_{f,z}(X_0)$ is estimated by :

$$P_{f,z}^*(X_0) = \sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha P_{f,z}(X_\alpha) \quad (1)$$

(with nb_cpv the number of vertical proportion curves, that is the number of proportion data), so that $\text{Var}[P_{f,z}^*(X_0) - P_{f,z}(X_0)]$ is minimum with two constraints :

- the universality constraints (a constraint for each plane z and for each lithotype f) :

$$\sum_{\alpha=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^\alpha = 1 \quad (2)$$

• the seismic constraint for each location X_0 and for each lithotype f which has seismic data :

$$\sum_{z=1}^{nb_z} P_{f,z}^*(X_0) = S_f(x_0) \quad (3)$$

with $S_f(x_0)$ the seismic information for the lithotype f at x_0 .

For all the lithotypes with seismic information constraint, the kriging system is :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_{cpv}} \lambda_{f,z}^{\beta} \gamma_P^{f,z}(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \mu_{f,z} + v_f P_{f,z}(X_{\alpha}) = \gamma_P^{f,z}(x_0 - x_{\alpha}) & \forall z \text{ et } \forall \alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{nb_{cpv}} \lambda_{f,z}^{\alpha} = 1 & \forall z \\ \sum_{z=1}^{nb_z} \sum_{\alpha=1}^{nb_{cpv}} \lambda_{f,z}^{\alpha} P_{f,z}(X_{\alpha}) = S_f(x_0) \end{cases} \quad (4)$$

with $\gamma_P^{f,z}$ the horizontal proportion variogram of the level z .

For the lithotypes on which there is no seismic information, the proportions are estimated in each 3D block by ordinary kriging. Strictly speaking, the estimation should be made in 3D, but in order to minimize the variogram fitting, the estimation will be made plane by plane. The vertical correlation is given by a first moving average of the vertical proportion curves on several levels. So, although the kriging uses the vertical proportion curves on only one plane, it takes into account the well data on three or five planes. This method, apart from the tedious calculation, avoids calculating the proportion variogram between two planes.

3.2.3. From wells

In this method, the well data are the lithotype indicators, denoted $I_f(x)$. These are punctual data. The proportions that we want to calculate are mean values on a block. The derived seismic information can be of two types : 2D maps of lithotype proportions as in the previous case, or 3D data.

In the case where the seismic data are 2D, the 3D proportion block calculation is also made by kriging with a constraint on the vertical sum. The estimation of the lithotype f proportion on a plane z at X_0 , $P_{f,z}(X_0)$, is written :

$$P_{f,z}^*(X_0) = \sum_{\alpha=1}^{nb_wells} \lambda_{f,z}^{\alpha} I_{f,z}(x_{\alpha}) \quad (5)$$

with nb_wells , the well number.

For each lithotype, with the same constraints as in the previous method, the kriging system is :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\beta} \gamma_{fz}^{fz}(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \mu_{fz} + v_{fz} I_{fz}(x_{\alpha}) = \bar{\gamma}_I^{fz}(X_0, x_{\alpha}) & \forall z \text{ et } \forall \alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\alpha} = 1 & \forall z \\ \sum_{z=1}^{nb_z} \sum_{\alpha=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\alpha} I_{fz}(x_{\alpha}) = S_f(x_0) \end{cases} \quad (6)$$

In this system the lithotype indicator variograms and the point-block mean variogram play a part.

In the case of 3D seismic information, the proportion block calculation is made by cokriging. The estimation of $P_{fz}(X_0)$ is :

$$P_{fz}^*(X_0) = \sum_{\alpha=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\alpha} I_{fz}(x_{\alpha}) + \sum_{a=1}^{nb_seis} \mu_{fz}^a S_f(x_a) \quad (7)$$

with nb_seis , the number of seismic data. The cokriging system for the lithotypes on which there is seismic information, obtained by minimizing the estimated variance is :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\beta} \gamma_{fz}^{fz}(x_{\alpha} - x_{\beta}) + \sum_{b=1}^{nb_seis} \mu_{fz}^b \gamma_{fz}^{fz}(x_{\alpha} - x_b) + v_{fz}^1 = \bar{\gamma}_I^{fz}(X_0, x_{\alpha}) & \forall \alpha \\ \sum_{\beta=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\beta} \gamma_{fz}^{fz}(x_a - x_{\beta}) + \sum_{b=1}^{nb_seis} \mu_{fz}^b \gamma_{fz}^{fz}(x_a - x_b) + v_{fz}^2 = \bar{\gamma}_{IS}^{fz}(X_0, x_a) & \forall a \\ \sum_{\alpha=1}^{nb_wells} \lambda_{fz}^{\alpha} = 1 \\ \sum_{a=1}^{nb_seis} \mu_{fz}^a = 0 \end{cases} \quad (8)$$

with γ_s^{fz} the variogram of the seismic information concerning the lithotype f on the plane z and γ_{IS}^{fz} the cross-variogram between the seismic information and the indicator of the lithotype f on the plane z . In this case, the number of seismic data is often very important, so it is advisable to use a moving neighborhood for the estimation.

4. Example

4.1. DATA

The chosen reservoir is situated in a silico-clastic formation, composed of braided and meandering fluvial deposits [Terdich,5]. The reservoir is limited at the bottom by an unconformity and its top is represented by a maximum flooding surface. This reservoir is divided (using the seismic data) into several units. It is only on the upper unit that the following study will be made.

In this unit, there are 14 wells. An accurate petrophysical interpretation of the log and core data was carried out, using cluster analysis. This analysis led to the definition of five lithotypes which range from shale to sandstone (very fine to coarse) and to pebbly conglomerate. To use the "from vertical proportion curve" method, these 14 wells were grouped into three sets which will be used to calculate three proportion curves (fig. 1).

The seismic information consists of about 20 good quality migrated seismic lines from which the shale thickness was derived. For the following application, the shale thickness map has been obtained by kriging this thickness computed on the wells (fig.2). This map is then considered as the additional constraint.

To better account for the differential compaction affecting the unit, we have chosen to work in relative thickness.

4.2. SIMULATIONS

In the following examples, the simulations will be carried out on the reservoir part (the non reservoir part is in black in figure 2). To compare the different approaches, the 3D proportion blocks and the simulation views correspond to the same cross section. The simulations are performed with the same seed and are conditioned by all the wells. Moreover, the cumulated shale thickness is computed and compared to the previous constraint on the shale.

4.2.1. Horizontal stationary case

It should be noted that in the stationary case, the simulation is carried out with only one vertical proportion curve, obtained from all the wells. This simulation result is presented in figure 4, and shale thickness of this simulation in figure 3. We see that this thickness is very different from the constraint. It is obvious that in that case the stationary hypothesis is not available, even if the shale proportion information is partially present in the well data.

4.2.2. Non stationary case without seismic information

The 3D proportion block construction without additional information is carried out as was previously explained, by an ordinary kriging for each horizontal plane.

From wells : The 3D proportion block is estimated by a lithotype indicator kriging (fig. 5). A simulation section is presented in figure 6 and the shale thickness in figure 7. We note that without additional information, the shale thickness map is rather similar to the additional information. This is mainly due to the fact that the lithotype indicator kriging reconstitute the information on the shale distribution because of the construction of this constraint. In case of a real derived seismic information, the well data do not entirely contain this additional information.

From vertical proportion curves : The 3D proportion block is estimated by a lithotype proportion kriging (fig. 9). A simulation section is represented in figure 10 and the shale thickness in figure 8. Just as for the "from wells" method, without additional information, this thickness also looks rather similar to the additional information, but less precise than in the previous case due to the fact that we only use three vertical proportion curves which do not contain all the variability of the shale distribution.

4.2.3. Non stationary case with seismic information

The 3D proportion block is now carried out with an additional quantitative constraint.

The images corresponding to the 3D proportion blocks, simulation sections and shale thicknesses are presented respectively in figures 11, 12 and 13 for the *From wells* method and in figures 14, 15 and 16 for the *From vertical proportion curves* method.

As expected, the results obtained using additional information are better than in the previous simulations. Using the *From wells* method, the shale thickness map is slightly

improved comparing to the previous result in particular around the southern part. *From vertical proportion curves* method, the improvement is more evident.

5. Conclusions

The choice of the 3D proportion block construction methods depends only on the available data. The *From wells* method seems to give good results even without additional information, but this method is not useful when the well information does not describe the whole reservoir that is for instance when lithotype data are not present at all the horizontal planes. In that case, we need to add geological information which is impossible in this method. On the other hand, the *From vertical proportion curves* method seems more precise but allows us to add geological information to complete the existing vertical proportion curves or to create new vertical proportion curves.

However, for the two methods, adding derived seismic information in the Truncated Gaussian Simulation Method is relatively easy. The improvement of the lithotypes simulations obtained using additional constraints depends on the number and on the quality of the derived seismic information (that is concerning one or several lithotypes). As we have seen on the application, more the constraint contains additional information comparing to the well data more the simulations are improved.

Appendix : About the Variography

"From vertical proportion curves" estimation : the variogram used for kriging is the lithotype proportions variogram. But as there are not many vertical proportion curves, the proportion variogram cannot be calculated. However, there are enough seismic data to calculate the seismic variogram (one variogram for each lithotype), and there are relations between the seismic and the proportion variograms :

$$\sum_{i=1}^{nb_z} \sum_{j=1}^{nb_z} \gamma_p^{f,ij}(h) = \sum_{i=1}^{nb_z} \gamma_{sp}^{fi}(h) = \gamma_s^f(h) \quad (9)$$

with γ_s^f the seismic variogram concerning the lithotype f , $\gamma_p^{f,ij}$ the proportion variogram between planes i and j and γ_{sp}^{fi} the cross-variogram of lithotype f seismic and the same lithotype proportions at the level i . There are also relations between the proportion variograms of different lithotypes. For instance, we have the following relation :

$$\sum_{e=1}^{nb_facies} \sum_{f=1}^{nb_facies} \gamma_p^{ef,ij}(h) = 0 \quad (10)$$

with $\gamma_{sp}^{ef,ij}$ the variogram between the lithotype_e proportions at the plane i and the lithotype_f proportions at the plane j .

"From wells" estimation : As for the proportion variograms, the indicator variograms must respect several relations [Matheron, 6] [Rivoirard, 7]. To start with, the indicator variograms must satisfy the triangular inequality :

$$\gamma_I^{fz}(a+b) \leq \gamma_I^{fz}(a) + \gamma_I^{fz}(b) \quad (11)$$

Moreover, the authorized variograms for the indicators are bounded. Other relations which are similar to those found for the proportion variograms must also be checked :

$$\sum_{e=1}^{nb_facies} \sum_{f=1}^{nb_facies} \gamma_I^{ef,ij}(h) = 0 \quad (12)$$

with $\gamma_i^{ef,ij}$ the cross-variogram between the lithotype_e indicator at the plane i and that of the lithotype_f indicator at the plane j.

In the case of a 2D seismic data, we have the following relation between the indicator variogram and that of the seismic information:

$$\sum_{i=1}^{nb_z} \sum_{j=1}^{nb_z} \gamma_i^{ef,ij}(h) = \sum_{i=1}^{nb_z} \gamma_{SI}^{fi}(h) = \gamma_s^f(h) \quad (13)$$

6. References

1. Beucher H., Galli A., Le Loc'h G., Ravenne C. & Heresim Group., *Including a regional trend in reservoir modelling using the truncated Gaussian method*. In A. Soares (Ed.), Geostat Tróia '92, Kluwer Academic Publ., 1993, Vol. 1, 555–566.
2. Fournier F., Derain J.F., A statistical methodology for deriving reservoir properties from seismic data, 1995, Geophysics, vol 60,no5.
3. Matheron G. et al. *Conditional simulation of the geometry of fluvio-deltaic reservoirs*. SPE 1987 Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, 27–30 Sept. 1987, 591–599. SPE 16753.
4. Ravenne C., Eschard R., Galli A. et al. *Heterogeneities and Geometry of Sedimentary Bodies in a Fluvio-Deltaic Reservoir* SPE 1987 Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, 27–30 Sept. 1987. Vol. X, 115–122. SPE 16752.
5. Terdich P., Valenti G., Ravenne C., Richard V. et Galli A. *Integration of seismic data in the reservoir characterization*. Special Publication of Technology Research Center, JNOC., No. 5, 1995.
6. Matheron G., *The internal consistency of models in Geostatistics*. Proc. of the third International Geostatistics Congress, Sept 5–9 1988 Avignon, France. Kluwer Academic Publishers.
7. Rivoirard J., *Relation between the indicators related to a regionalized variable*. Proc. of the fourth International Geostatistics Congress, Troia 1992. Kluwer Academic Publishers.

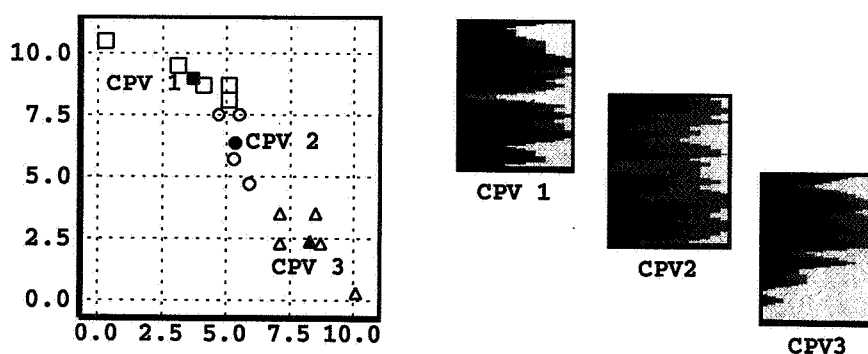


fig.1 : Location base map and vertical proportion curves

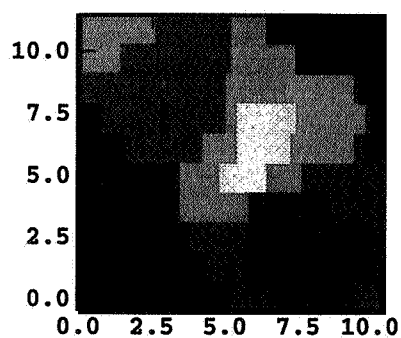


fig. 2 : Map of shale thickness : input constraint.

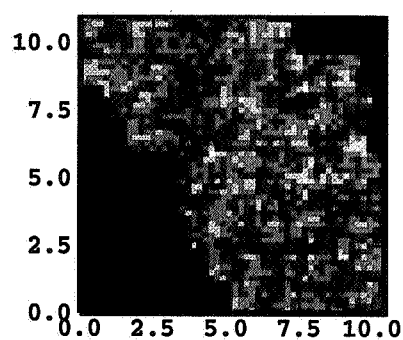


fig. 3 : Shale thickness for the horizontal stationary simulation.



fig. 4 : Horizontal stationary simulation extract.

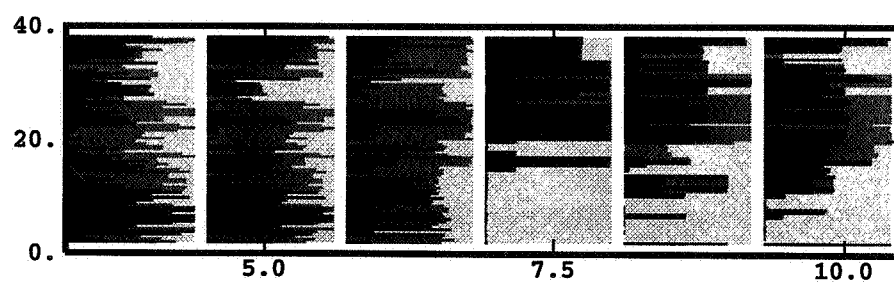


fig. 5 : 3D proportion block extract of "from wells" method without seismic.

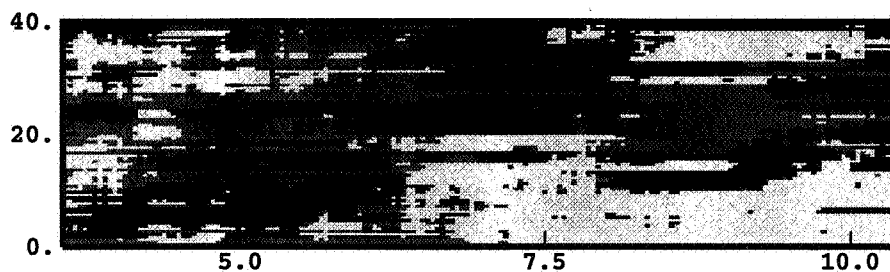


fig. 6 : simulation extract of "from wells" method
without seismic.

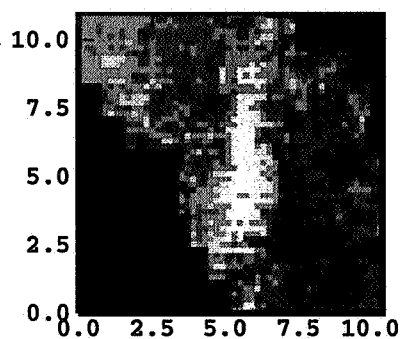


fig. 7 : Shale thickness
of "from wells" method
without seismic.

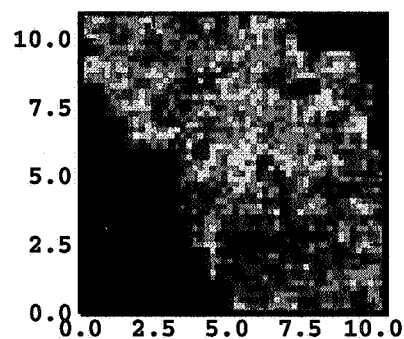


fig. 8 : Shale thickness
of "from vertical propor-
tion curves" method
without seismic.

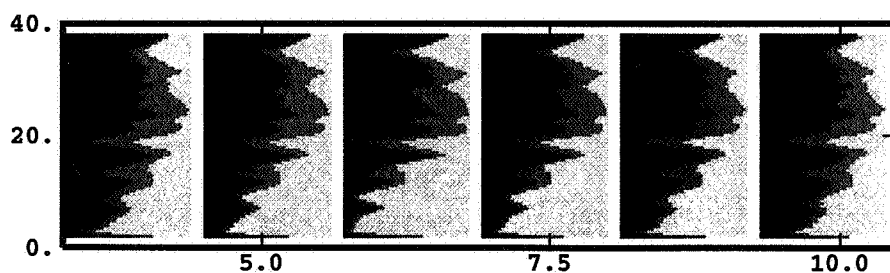


fig. 9 : 3D proportion block extract
of "from vertical proportion curves" method without seismic.



fig. 10 : simulation extract
of "from vertical proportion curves" method without seismic.

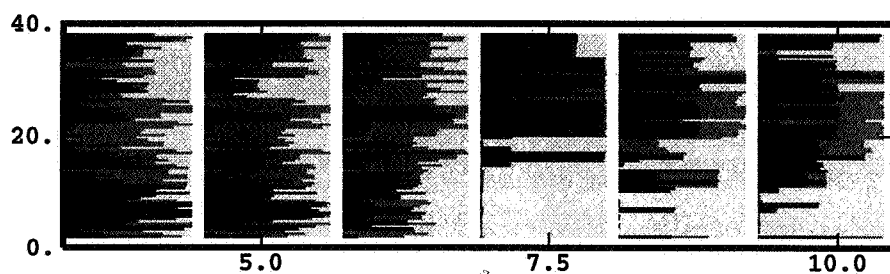


fig. 11 : 3D proportion block extract
of "from wells" method with seismic.

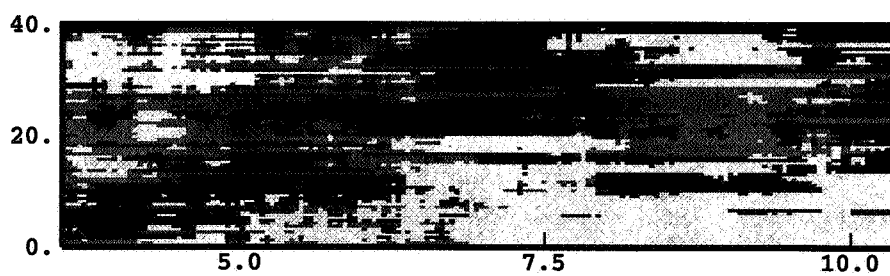


fig. 12 : simulation extract
of "from wells" method with seismic.

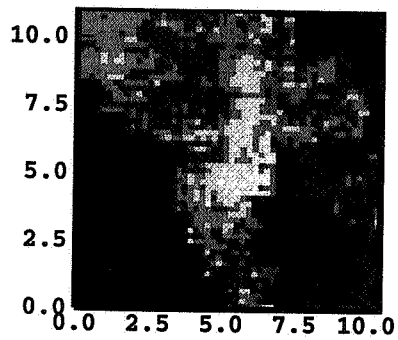


fig. 13 : Shale thickness
of "from wells" method
with seismic.

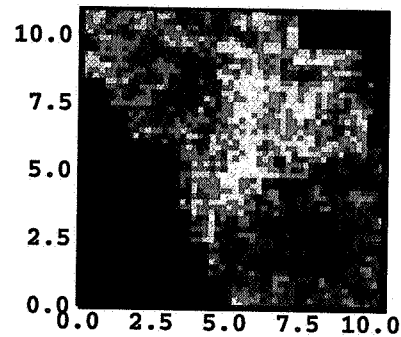


fig. 14 : Shale thickness
of "from vertical propor-
tion curve" method
with seismic.

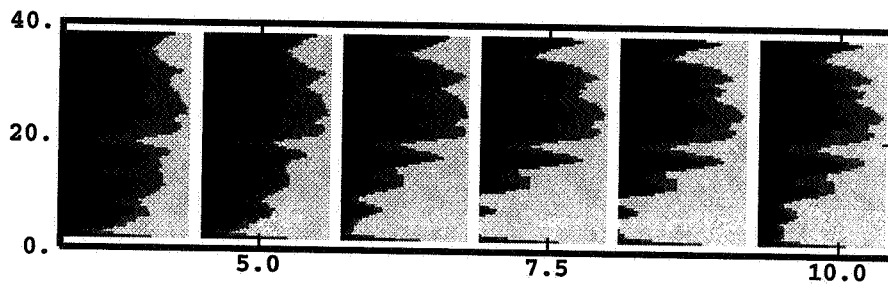


fig. 15 : 3D proportion block extract
of "from vertical proportion curve" method with seismic.

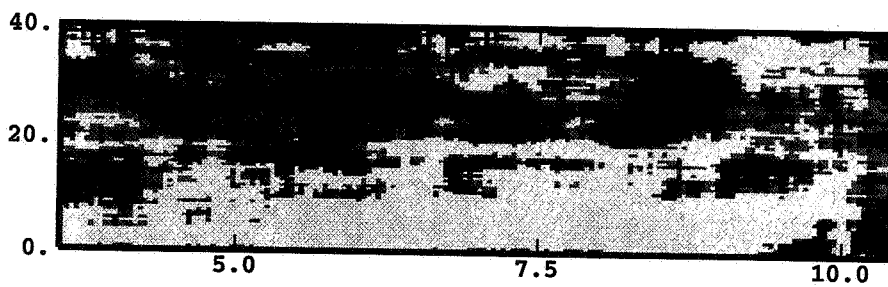


fig. 16 : simulation extract
of "from vertical proportion curve" method with seismic.

ANNEXE 2 : Résolution simplifiée du système de krigeage (6).

La résolution du système de krigeage :

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} C_{f,z}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) + \mu_{f,z} + v_f P_{f,z}(X_{\alpha}) = C_{f,z}^P(X - X_{\alpha}) & \forall z = 1, \dots, NZ \\ \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} = 1 & \forall \alpha = 1, \dots, nb_cpv \\ \sum_{z=1}^{NZ} \sum_{\beta=1}^{nb_cpv} \lambda_{f,z}^{\beta} P_{f,z}(X_{\beta}) = NZ.S_f(X) & \forall z = 1, \dots, NZ \end{cases} \quad (6)$$

peut être simplifiée en évitant l'inversion d'une matrice de taille $NZ(nb_cpv + 1) + 1$ par une astuce de calcul.

Afin de simplifier les écritures des différents systèmes de krigeage, les notations suivantes sont utilisées :

♦ La matrice $\begin{bmatrix} C_{f,1}^P(X_{\alpha} - X_{\beta}) & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \\ \hline 1 \dots\dots 1 & 0 \end{bmatrix}$ est notée C_z ,

♦ le vecteur $\begin{bmatrix} \lambda_{f,1}^{\beta} \\ \mu_{f,1} \end{bmatrix}$ est noté λ_z ,

♦ le vecteur $\begin{bmatrix} P_{f,1}(X_{\alpha}) \\ 0 \end{bmatrix}$ est noté P_z ,

◆ le vecteur $\begin{bmatrix} C_{f,1}^P(X_a - X) \\ I \end{bmatrix}$ est noté $\tilde{C}_z(x)$

◆ et v_f est noté v .

Le système de krigeage précédent se réduit donc à :

$$\begin{cases} C_z \lambda_z + v P_z = \tilde{C}_z(x) & \forall z = 1, \dots, NZ \\ \sum_{z=1}^{NZ} P_z^t \lambda_z = NZ.S(x) \end{cases}$$

Or, la première ligne de ce système peut s'écrire :

$$\lambda_z = C_z^{-1} [\tilde{C}_z(x) - v P_z] \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

Ce qui induit que :

$$\begin{aligned} P_z^t \lambda_z &= P_z^t C_z^{-1} [\tilde{C}_z(x) - v P_z] = \\ &= P_z^t C_z^{-1} \tilde{C}_z(x) - v P_z^t C_z^{-1} P_z \quad \forall z = 1, \dots, NZ \end{aligned}$$

Or, la présence d'une information sismique (seconde ligne du système de krigeage précédent) implique que :

$$\sum_{z=1}^{NZ} P_z^t \lambda_z = NZ.S(x)$$

Donc :

$$\sum_{z=1}^{NZ} [P_z^t C_z^{-1} \tilde{C}_z(x)] - v \sum_{z=1}^{NZ} [P_z^t C_z^{-1} P_z] = NZ.S(x)$$

v est donc calculable par la relation :

$$v = \frac{\sum_{z=1}^{NZ} [P_z^t C_z^{-1} \tilde{C}_z(x)] - NZ.S(x)}{\sum_{z=1}^{NZ} [P_z^t C_z^{-1} P_z]}$$

et les λ_z sont déduits de la relation :

$$\lambda_z = C_z^{-1} [\tilde{C}_z(x) - v P_z] \quad \forall z = 1, \dots, NZ$$

La résolution du système de krigeage (1) se réduit donc à l'inversion d'une matrice de taille $(nb_cpv + 1)$ et à quelques produits de matrices et de vecteurs.

ANNEXE 3 : Comparaison des relations (9) et (11).

Afin de savoir si les relations (9) : $Cr(x, t + \Delta t/2) = \frac{Imp(x, t + \Delta t) - Imp(x, t)}{Imp(x, t + \Delta t) + Imp(x, t)}$ et

(11) : $Cr(x, t + \Delta t/2) = \frac{\ln I(x, t + \Delta t) - \ln I(x, t)}{2}$ peuvent être considérées comme équivalentes, il a été choisi de les comparer sur des données d'impédances réelles. Trois puits ont donc été extraits de la section en impédance, et les coefficients de réflexion ont été calculés par les deux méthodes. Les impédances acoustiques disponibles ici étant synthétiques, un grand nombre de coefficients de réflexion calculés par ces deux méthodes seront nuls. Afin de ne pas surcharger le tableau de résultats, seuls les coefficients de réflexion non nuls par l'une et l'autre des deux méthodes y sont répertoriés.

	relation (9)	relation (11)	erreur
puits 120 :	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
puits 240 :	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,16729110	0,16887846	0,9%
	-0,11439631	-0,11489928	0,4%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,16729110	0,16887846	0,9%
	-0,16729110	-0,16887846	0,9%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%

puits 360 :	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,05392682	0,05397918	0,1%
	-0,05392682	-0,05397918	0,1%
	0,16729110	0,16887846	0,9%
	-0,16729110	-0,16887846	0,9%
	0,05392682	0,05397918	0,1%

La quatrième colonne du tableau présente l'erreur induite par l'utilisation de la relation (11) à la place de la relation (9). Ces résultats sont exprimés en pourcentage du coefficient de réflexion exact :

$$\text{erreur} = \frac{|Cr_{10} - Cr_g|}{|Cr_g|} \cdot 100$$

Cette erreur est toujours inférieure à 1%, il semble donc que la relation (11) donne des résultats peu différents de ceux donnés par la relation (9). La relation (11) pourra donc, le cas échéant, remplacer la relation (9).

ANNEXE 4 : Démonstration des relations mathématiques entre les covariances des données

1. Relations entre les covariances verticales des données

1.1. Relation liant la covariance verticale des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances

♦ Approximation “continue”

La relation (10) implique que :

$$\begin{aligned}
 C_{Cr}^V(h) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x, t + h)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t + h)\right] = \\
 &= \frac{\Delta t^2}{4} \text{Cov}\left[\frac{d \ln I}{dt}(x, t); \frac{d \ln I}{dt}(x, t + h)\right] \\
 C_{Cr}^V(h) &= \frac{\Delta t^2}{4} C_{\frac{d \ln I}{dt}}^V(h)
 \end{aligned}$$

Or la relation qui lie la covariance d’une variable aléatoire Y à celle de sa dérivée est connue :

$$C_{\frac{dY}{dt}}(h) = - \frac{d^2 C_Y}{dt^2}(h) \quad (42)$$

([20] Matheron G. : “La théorie des variables régionalisées et ses applications”). Ce qui permet de déduire une relation continue liant la covariance des coefficients de réflexion à celle du logarithme des impédances :

$$C_{Cr}^V(h) = - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I}^V}{dt^2}(h) \quad (16)$$

♦ Approximation discrète

La relation discrète (11) liant les coefficients de réflexion au logarithme des impédances implique que :

$$\begin{aligned}
 C_{Cr}^V(h) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x, t + h)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\frac{\ln I(x, t + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \Delta t/2)}{2}; \frac{\ln I(x, t + h + \Delta t/2) - \ln I(x, t + h - \Delta t/2)}{2}\right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x, t + h + \Delta t/2)] + \\
&- \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x, t + h - \Delta t/2)] - \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x, t + h + \Delta t/2)] + \\
&+ \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x, t + h - \Delta t/2)] \} = \\
&= \frac{1}{4} \{ C_{\ln I}^V(h) - C_{\ln I}^V(h - \Delta t) - C_{\ln I}^V(h + \Delta t) + C_{\ln I}^V(h) \} \\
C_{Cr}^V(h) &= -\frac{1}{4} \{ C_{\ln I}^V(h + \Delta t) - 2C_{\ln I}^V(h) + C_{\ln I}^V(h - \Delta t) \} \quad (17)
\end{aligned}$$

1.2. Relation liant la covariance verticale des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale des coefficients de réflexion

La relation qui lie la covariance verticale des amplitudes modélisées à celle des coefficients de réflexion se détermine de la même façon que l’expression précédente à l’aide de la relation (12) :

$$\begin{aligned}
C_a^V(h) &= \text{Cov}[a(x, t); a(x, t + h)] = \\
&= \text{Cov}[Cr * s(x, t); Cr * s(x, t + h)] = \\
&= \text{Cov} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x, t - \tau) s(\tau) d\tau; \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x, t + h - \tau') s(\tau') d\tau' \right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[Cr(x, t - \tau); Cr(x, t + h - \tau')] s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}^V(h - \tau' + \tau) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau'
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = \tau' - \tau$, l’expression précédente s’écrit :

$$\begin{aligned}
C_a^V(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}^V(h - u) s(\tau) s(u + \tau) d\tau du = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}^V(h - u) \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(u + \tau) d\tau du
\end{aligned}$$

avec : $\hat{s}(u) = s(-u)$, le symétrique de l’ondelette $s(t)$

Soit $S(u) = s * \hat{s}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u + \tau) s(\tau) d\tau$ l’autoconvolué de l’ondelette $s(t)$, l’expression devient alors :

$$C_a^V(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}^V(h-u)S(u) du$$

$$C_a^V(h) = C_{Cr}^V * S(h) \quad (18)$$

1.3. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances

♦ Approximation “continue”

$$C_{\ln I Cr}^V(h) = \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x, t + h)] =$$

$$= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t + h)\right] =$$

$$= \frac{\Delta t}{2} \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{d \ln I}{dt}(x, t + h)\right]$$

$$C_{\ln I Cr}^V(h) = \frac{\Delta t}{2} C_{\ln I \frac{d \ln I}{dt}}(h)$$

Or, la relation qui lie la covariance croisée d'une variable aléatoire Y et sa dérivée à la covariance de Y est connue :

$$C_{Y \frac{dY}{dt}}(h) = - \frac{d C_Y}{dt}(h) \quad (43)$$

([20] Matheron G. : “La théorie des variables régionalisées et ses applications”). Cette relation permet d'écrire une expression liant la covariance croisée verticale du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion à la covariance verticale du logarithme des impédances :

$$C_{\ln I Cr}^V(h) = - \frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(h) \quad (19)$$

♦ Approximation discrète

La relation (11) permet de calculer le lien liant la covariance croisée verticale des coefficients de réflexion et du logarithme des impédances à la covariance verticale du logarithme des impédances.

$$C_{\ln I Cr}^V(h) = \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x, t + h)] =$$

$$= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{\ln I(x, t + h + \Delta t/2) - \ln I(x, t - h - \Delta t/2)}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x, t + h + \Delta t/2)] - \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x, t - h - \Delta t/2)] \}$$

$$C_{\ln I Cr}^V(h) = \frac{1}{2} \{ C_{\ln I}^V(h + \Delta t/2) - C_{\ln I}^V(h - \Delta t/2) \} \quad (20)$$

1.4. Relation liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance verticale du logarithme des impédances

La relation entre la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées est établie à l’aide de la relation (12) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln I a}^V(h) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); a(x, t + h)] = \\
 &= \text{Cov} \left[\ln I(x, t); \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x, t + h - \tau) s(\tau) d\tau \right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x, t + h - \tau)] s(\tau) d\tau \\
 C_{\ln I a}^V(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I Cr}^V(h - \tau) s(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

♦ Approximation “continue”

Si la relation “continue” (19) est utilisée, l’expression précédente s’écrit :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln I a}^V(h) &= -\frac{\Delta t}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(h - \tau) s(\tau) d\tau \\
 C_{\ln I a}^V(h) &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt} * s(h)
 \end{aligned} \tag{21}$$

♦ Approximation discrète

Si la relation discrète (20) est utilisée, l’expression liant la covariance croisée verticale du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées à celle du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion s’écrit :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln I a}^V(h) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_{\ln I}^V(h + \Delta t/2 - \tau) - C_{\ln I}^V(h - \Delta t/2 - \tau)] s(\tau) d\tau \\
 C_{\ln I a}^V(h) &= \frac{1}{2} [C_{\ln I}^V * s(h + \Delta t/2) - C_{\ln I}^V * s(h - \Delta t/2)]
 \end{aligned} \tag{22}$$

2. Relations entre les covariances horizontales des données

2.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances

♦ Approximation “continue”

La relation “continue” liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances est construite en utilisant la relation “continue” (10) :

$$\begin{aligned}
 C_{Cr}^H(h) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x + h, t)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} C_{\ln I}(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} C_{\ln I}(x + h, t)\right] = \\
 &= \frac{\Delta t^2}{4} \text{Cov}\left[\frac{d}{dt} C_{\ln I}(x, t); \frac{d}{dt} C_{\ln I}(x + h, t)\right] = \\
 &= \frac{\Delta t^2}{4} C_{\frac{d \ln I}{dt}}(h, 0) \\
 C_{Cr}^H(h) &= -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I}}{dt^2}(h, 0) \tag{23}
 \end{aligned}$$

d’après la relation (42).

♦ Approximation discrète

La relation discrète liant la covariance croisée horizontale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion est construite en utilisant la relation discrète (11) pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances :

$$\begin{aligned}
 C_{Cr}^H(h) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x + h, t)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\frac{\ln I(x, t + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \Delta t/2)}{2}; \frac{\ln I(x + h, t + \Delta t/2) - \ln I(x + h, t - \Delta t/2)}{2}\right] = \\
 &= \frac{1}{4} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x + h, t + \Delta t/2)] + \\
 &- \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x + h, t - \Delta t/2)] - \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x + h, t + \Delta t/2)] + \\
 &+ \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x + h, t - \Delta t/2)] \} = \\
 &= \frac{1}{4} \{ C_{\ln I}^H(h) - C_{\ln I}(h, -\Delta t) - C_{\ln I}(h, \Delta t) + C_{\ln I}^H(h) \} \\
 C_{Cr}^H(h) &= -\frac{1}{4} \{ C_{\ln I}(h, \Delta t) - 2C_{\ln I}^H(h) + C_{\ln I}(h, -\Delta t) \} \tag{24}
 \end{aligned}$$

2.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance des coefficients de réflexion

Le calcul de la relation entre la covariance horizontale des amplitudes modélisées et la covariance des coefficients de réflexion est le suivant :

$$\begin{aligned}
 C_a^H(h) &= \text{Cov}[a(x, t); a(x + h, t)] = \\
 &= \text{Cov}[C_r * s(x, t); C_r * s(x + h, t)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_r(x, t - \tau)s(\tau) d\tau; \int_{-\infty}^{+\infty} C_r(x + h, t - \tau')s(\tau') d\tau'\right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[C_r(x, t - \tau); C_r(x + h, t - \tau')]s(\tau)s(\tau') d\tau d\tau' = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}(h, \tau - \tau')s(\tau)s(\tau') d\tau d\tau'
 \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = \tau' - \tau$ conduit à la relation :

$$\begin{aligned}
 C_a^H(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}(h, -u)s(\tau)s(u + \tau) d\tau du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}(h, -u) \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)s(u + \tau) d\tau du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}(h, -u)S(u) du =
 \end{aligned}$$

avec : $S(u)$ l'autoconvoluée de l'ondelette $s(t)$.

La relation peut enfin s'écrire :

$$C_a^H(h) = C_{Cr} * S(h, 0) \quad (25)$$

2.3. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances

♦ Approximation “continue”

La relation “continue” liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances est déterminée comme toutes les relations “continues” précédentes en utilisant la relation (10) pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances :

$$\begin{aligned}
C_{\ln I Cr}^H(h, \Delta t/2) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x + h, t + \Delta/2)] = \\
&= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x + h, t + \Delta/2)\right] = \\
&= \frac{\Delta t}{2} \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{d \ln I}{dt}(x + h, t + \Delta/2)\right] = \\
&= \frac{\Delta t}{2} C_{\ln I \frac{d \ln I}{dt}}(h, \Delta t/2) \\
C_{\ln I Cr}^H(h) &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I}}{dt}(h, \Delta t/2)
\end{aligned} \tag{26}$$

d'après la relation (43).

♦ Approximation discrète

La relation discrète liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances est construite en utilisant la relation discrète (11) pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances.

$$\begin{aligned}
C_{\ln I Cr}^H(h, \Delta t/2) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x + h, t + \Delta/2)] = \\
&= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{\ln I(x + h, t + \Delta) - \ln I(x + h, t)}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x + h, t + \Delta)] - \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x + h, t)] \} \\
C_{\ln I Cr}^H(h, \Delta t/2) &= \frac{1}{2} \{ C_{\ln I}(h, \Delta t) - C_{\ln I}(h, 0) \}
\end{aligned} \tag{27}$$

2.4. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques “modélisées” à la covariance croisée du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion

La relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des amplitudes modélisées à la covariance du logarithme des impédances est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); a(x + h, t + \Delta/2)] = \\
&= \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr * s(x + h, t + \Delta/2)] = \\
&= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x + h, t + \Delta/2 - \tau) s(\tau) d\tau\right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x + h, t + \Delta/2 - \tau)] s(\tau) d\tau =
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I_{Cr}}(h, \Delta t/2 - \tau) s(\tau) d\tau$$

$$C_{\ln I_a}^H(h, \Delta t/2) = C_{\ln I_{Cr}} * s(h, \Delta t/2) \quad (28)$$

3. Cas particulier d'un milieu de covariance factorisable

3.1. Relation liant la covariance horizontale des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

♦ Approximation "continue"

La relation "continue" (23) devient :

$$C_{Cr}^H(h) = - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I}}{dt^2}(h, 0) =$$

$$= - \frac{\Delta t^2}{4 \text{Var}[\ln I]} \frac{d^2 C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^V(0)}{dt^2}$$

$$C_{Cr}^H(h) = - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{\text{Var}[\ln I]} \frac{d^2 C_{\ln I}^V}{dt^2}(0) \quad (33)$$

En effet, $C_{\ln I}^H(h)$ est indépendante de t .

♦ Approximation discrète

Désormais, la relation discrète (24) s'écrit :

$$C_{Cr}^H(h) = - \frac{1}{4} \{ C_{\ln I}(h, \Delta t) - 2C_{\ln I}^H(h) + C_{\ln I}(h, -\Delta t) \} =$$

$$= - \frac{1}{4} \left\{ \frac{C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^V(\Delta t)}{\text{Var}[\ln I]} - 2C_{\ln I}^H(h) + \frac{C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^V(-\Delta t)}{\text{Var}[\ln I]} \right\} =$$

$$= - \frac{C_{\ln I}^H(h)}{4} \left\{ \frac{C_{\ln I}^V(\Delta t) + C_{\ln I}^V(-\Delta t)}{\text{Var}[\ln I]} - 2 \right\}$$

Or la covariance simple est une fonction paire : $C_{\ln I}^V(\Delta t) = C_{\ln I}^V(-\Delta t)$, ce qui implique que :

$$C_{Cr}^H(h) = - \frac{C_{\ln I}^H(h)}{2} \left\{ \frac{C_{\ln I}^V(\Delta t)}{\text{Var}[\ln I]} - 1 \right\} \quad (34)$$

3.2. Relation liant la covariance horizontale des amplitudes sismiques “modélisées” aux covariances horizontale et verticale des coefficients de réflexion

De la même façon, la relation (28) permet d’écrire une expression relativement simple liant la covariance horizontale des amplitudes modélisées aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances :

$$\begin{aligned}
 C_a^H(h) &= C_{Cr} * S(h, 0) = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}(h, -\tau) S(\tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_{Cr}^H(h) C_{Cr}^V(-\tau)}{\text{Var}[Cr]} S(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{C_{Cr}^H(h)}{\text{Var}[Cr]} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{Cr}^V(-\tau) S(\tau) d\tau \\
 C_a^H(h) &= \frac{C_{Cr}^H(h)}{\text{Var}[Cr]} C_{Cr}^V * S(0)
 \end{aligned} \tag{35}$$

3.3. Relation liant la covariance croisée “horizontale” du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

◆ Approximation “continue”

La relation “continue” (26) peut être légèrement simplifiée dans le cas d’un milieu à covariance factorisable. Elle s’écrit en effet :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln Cr}^H(h, \Delta t/2) &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} C_{\ln I}(h, \Delta t/2) = \\
 &= -\frac{\Delta t}{2 \text{Var}[\ln I]} \frac{d}{dt} C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^V(\Delta t/2) \\
 C_{\ln Cr}^H(h, \Delta t/2) &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{\text{Var}[\ln I]} \frac{d}{dt} C_{\ln I}^V(\Delta t/2)
 \end{aligned} \tag{36}$$

car $C_{\ln I}^H(h)$ est indépendante de t .

◆ Approximation discrète

Le fait que le milieu en logarithme de l’impédance soit à covariance factorisable va grandement simplifier la relation discrète qui lie la covariance croisée horizontale du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion à la covariance du logarithme des impédances. En effet :

$$C_{\ln Cr}^H(h, \Delta t/2) = \frac{1}{2} [C_{\ln I}(h, \Delta t) - C_{\ln I}(h, 0)] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^H(\Delta t)}{\text{Var}[\ln I]} - \frac{C_{\ln I}^H(h) C_{\ln I}^V(0)}{\text{Var}[\ln I]} \right\}$$

$$C_{\ln I \text{ Cr}}^H(h, \Delta t/2) = \frac{C_{\ln I}^H(h)}{2 \text{Var}[\ln I]} \{C_{\ln I}^V(\Delta t) - C_{\ln I}^V(0)\} \quad (37)$$

Car, comme il a été rappelé précédemment, les covariances simples sont des fonctions paires. Cette relation permet d'écrire très simplement la relation (28) :

3.4. Relation liant la covariance croisée "horizontale" du logarithme des impédances et des amplitudes sismiques "modélisées" aux covariances horizontale et verticale du logarithme des impédances

$$\begin{aligned} C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= C_{\ln I \text{ Cr}} * s(h, \Delta t/2) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I \text{ Cr}}(h, \Delta t/2 - \tau) s(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_{\ln I \text{ Cr}}^H(h, \Delta t/2) C_{\ln I \text{ Cr}}^V(\Delta t/2 - \tau)}{C_{\ln I \text{ Cr}}^H(0, \Delta t/2)} s(\tau) d\tau \\ C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= \frac{C_{\ln I \text{ Cr}}^H(h, \Delta t/2)}{C_{\ln I \text{ Cr}}^H(0, \Delta t/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I \text{ Cr}}^V(\Delta t/2 - \tau) s(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Les covariances croisées "horizontale" et verticale du logarithme de l'impédance et de l'amplitude modélisée peuvent s'écrire de deux façons : l'une "continue", l'autre discrète. Cette expression de la covariance croisée "horizontale" du logarithme de l'impédance et de l'amplitude modélisée a donc deux écritures.

♦ Approximation "continue"

En remplaçant les covariances croisées "horizontale" et verticale du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion par les expressions continues (19) et (36), l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= \frac{\frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{\text{Var}[\ln I]} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(\Delta t/2)}{\frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(0)}{\text{Var}[\ln I]} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(\Delta t/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt}(\Delta t/2 - \tau) s(\tau) d\tau \\ C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{C_{\ln I}^H(h)}{C_{\ln I}^H(0)} \frac{d C_{\ln I}^V}{dt} * s(\Delta t/2) \end{aligned} \quad (38)$$

♦ Approximation discrète

De même, en remplaçant les covariances croisées "horizontale" et verticale du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion par les expressions discrètes (20) et (37), elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= \frac{\frac{C_{\ln I}^H(h)\{C_{\ln I}^V(\Delta t) - C_{\ln I}^V(0)\}}{2\text{Var}[\ln I]}}{\frac{C_{\ln I}^H(0)\{C_{\ln I}^V(\Delta t) - C_{\ln I}^V(0)\}}{2\text{Var}[\ln I]}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \{C_{\ln I}^V(\Delta t - \tau) - C_{\ln I}^V(-\tau)\} s(\tau) \, d\tau \\
C_{\ln I a}^H(h, \Delta t/2) &= \frac{C_{\ln I}^H(h)}{2C_{\ln I}^H(0)} \{C_{\ln I}^V * s(\Delta t) - C_{\ln I}^V * s(0)\} \tag{39}
\end{aligned}$$

ANNEXE 5 : Etude des dérivées de quelques covariances

L'utilisation de la relation liant la covariance d'une donnée à celle de sa dérivée :

$$C_{\frac{dY}{dh}}(h) = - \frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h)$$

limite de manière importante le nombre de covariances utilisables pour la variable Y. En effet, la covariance de $\frac{dY}{dh}$ doit aussi avoir les propriétés d'une covariance. C'est à dire qu'elle doit être symétrique, indépendante de x. La covariance doit également être une fonction de type positif et doit vérifier l'inégalité de Schwartz ([20] Matheron G. : "La théorie des variables régionalisées et ses applications").

De la même façon, l'utilisation de la relation liant la covariance d'une donnée à la covariance croisée de cette même donnée et de sa dérivée :

$$C_{Y \frac{dY}{dh}}(h) = - \frac{d C_Y}{dh}(h)$$

impose à la covariance croisée de Y et de $\frac{dY}{dh}$ d'avoir les propriétés d'une covariance croisée. Ces propriétés étant d'être indépendantes de x et de type positif ([21] Wackernagel H. : "Multivariate geostatistics : an introduction with applications").

♦ Si la variable Y est à covariance sphérique, on a :

$$C_Y(h) = \begin{cases} w \left(1 - \frac{3|h|}{2a} + \frac{1|h|^3}{2a^3} \right) & \text{si } |h| \leq a \\ 0 & \text{si } |h| > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dC_Y}{dh}(h) = \begin{cases} \frac{w}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{3h^2}{2a^2} \right) & \text{si } -a \leq h < 0 \\ \frac{w}{a} \left(-\frac{3}{2} + \frac{3h^2}{2a^2} \right) & \text{si } 0 \leq h \leq a \\ 0 & \text{si } a < |h| \end{cases}$$

$$\Rightarrow - \frac{dC_Y}{dh}(h) = \begin{cases} \frac{w}{a} \left(\frac{-3}{2} + \frac{3h^2}{2a^2} \right) & \text{si } -a \leq h < 0 \\ \frac{w}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{3h^2}{2a^2} \right) & \text{si } 0 \leq h \leq a \\ 0 & \text{si } a < |h| \end{cases}$$

qui doit être un modèle de covariance croisée admissible. Mais,

$$\frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) = \begin{cases} \frac{3w}{a^2} \frac{|h|}{a} & \text{si } |h| \leq a \\ 0 & \text{si } |h| > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) = \begin{cases} -\frac{3w|h|}{a^2} & \text{si } |h| \leq a \\ 0 & \text{si } |h| > a \end{cases}$$

qui n'est pas un modèle de covariance autorisé. En effet l'inégalité de Schwartz :

$$\left| C_{\frac{dY}{dh}}(h) \right| \leq C_{\frac{dY}{dh}}(0)$$

n'est pas vérifiée, car $C_{\frac{dY}{dh}}(0) = 0$.

Dans le cas de l'utilisation de la relation "continue" (10) pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances, la covariance du logarithme des impédances ne peut pas être sphérique.

♦ Si la variable **Y** est à covariance exponentielle, on a :

$$\begin{aligned} C_Y(h) &= w \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \\ \Rightarrow \frac{dC_Y}{dh}(h) &= -\frac{w}{a} \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \\ \Rightarrow -\frac{dC_Y}{dh}(h) &= \frac{w}{a} \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \end{aligned}$$

qui est un modèle de covariance croisée autorisé. Or,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) &= \frac{w}{a^2} \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \\ \Rightarrow -\frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) &= -\frac{w}{a^2} \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \end{aligned}$$

qui n'est pas un modèle de covariance admissible, car : $C_{\frac{dY}{dh}}(0) = -\frac{w}{a^2} < 0$. Par conséquent, la covariance du logarithme des impédances ne pourra pas être ajustée par un modèle exponentiel dans le cas de l'utilisation de la relation "continue" (10) pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances.

♦ Si la variable **Y** est à covariance gaussienne, on a :

$$\begin{aligned} C_Y(h) &= w \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{dC_Y}{dh}(h) &= -w \frac{2h}{a^2} \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \\ \Rightarrow -\frac{dC_Y}{dh}(h) &= \frac{2w}{a^2} h \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

qui est un modèle de covariance croisée autorisé.

$$\frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) = -\frac{2w}{a^2} \left[1 - \frac{2h^2}{a^2} \right] \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{d^2 C_Y}{dh^2}(h) = \frac{2w}{a^2} \left[1 - \frac{2h^2}{a^2} \right] \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right)$$

qui est un modèle de covariance admissible.

ANNEXE 6 : Les covariances factorisables.

Pour montrer qu'une covariance est factorisable, il suffit de montrer qu'elle peut s'écrire comme le produit de deux covariances :

$$C_Y(h_x, h_t) = C_{Y_1}(h_x)C_{Y_2}(h_t)$$

Si le milieu en logarithme de l'impédance est à covariance factorisable, l'expression suivante est vérifiée :

$$C_{\ln I}(h_x, h_t) = C_{\ln I_1}(h_x)C_{\ln I_2}(h_t)$$

La **covariance des coefficients de réflexion** peut alors s'écrire :

♦ Cas continu

La relation utilisée pour lier les coefficients de réflexion au logarithme de l'impédance est la relation (10).

$$\begin{aligned} C_{Cr}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x + h_x, t + h_t)] = \\ &= \text{Cov}\left[\frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x + h_x, t + h_t)\right] = \\ &= \frac{\Delta t^2}{4} \text{Cov}\left[\frac{d \ln I}{dt}(x, t); \frac{d \ln I}{dt}(x + h_x, t + h_t)\right] = \\ &= \frac{\Delta t^2}{4} C_{\frac{d \ln I}{dt}}(h_x, h_t) = \\ &= -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I}}{dt^2}(h_x, h_t) = \\ &= -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I_1}(h_x) C_{\ln I_2}(h_t)}{dt^2} \end{aligned}$$

Or, $C_{\ln I_1}(h_x)$ est indépendante de t . L'expression précédente peut donc s'écrire :

$$C_{Cr}(h_x, h_t) = -\frac{\Delta t^2}{4} C_{\ln I_1}(h_x) \frac{d^2 C_{\ln I_2}}{dt^2}(h_t)$$

En posant :

$$\begin{cases} C_{Cr_1}(h_x) = C_{\ln I_1}(h_x) \\ C_{Cr_2}(h_t) = -\frac{\Delta t^2}{4} \frac{d^2 C_{\ln I_2}}{dt^2}(h_t) \end{cases}$$

Ceci peut s'écrire :

$$C_{Cr}(h_x, h_t) = C_{Cr_1}(h_x)C_{Cr_2}(h_t)$$

Dans le cas où la relation utilisée pour lier les coefficients de réflexion aux impédances est la relation continue, le fait que la covariance du logarithme des impédance soit factorisable implique que bien que la covariance des coefficients de réflexion le soit aussi.

♦ Cas discret

La relation utilisée pour lier les coefficients de réflexion au logarithme de l'impédance est la relation (11).

$$\begin{aligned} C_{Cr}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[Cr(x, t); Cr(x + h_x, t + h_t)] = \\ &= \text{Cov}\left[\frac{\ln I(x, t + \Delta t/2) - \ln I(x, t - \Delta t/2)}{2}; \frac{\ln I(x + h_x, t + h_t + \Delta t/2) - \ln I(x + h_x, t + h_t - \Delta t/2)}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{4} \{ \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x + h_x, t + h_t + \Delta t/2)] + \\ &\quad - \text{Cov}[\ln I(x, t + \Delta t/2); \ln I(x + h_x, t + h_t - \Delta t/2)] + \\ &\quad + \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x + h_x, t + h_t + \Delta t/2)] + \\ &\quad + \text{Cov}[\ln I(x, t - \Delta t/2); \ln I(x + h_x, t + h_t - \Delta t/2)] \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ C_{\ln I}(h_x, h_t) - C_{\ln I}(h_x, h_t - \Delta t) - C_{\ln I}(h_x, h_t + \Delta t) + C_{\ln I}(h_x, h_t) \} = \\ &= \frac{1}{4} \{ C_{\ln I_1}(h_x)C_{\ln I_2}(h_t) - C_{\ln I_1}(h_x)C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t) - C_{\ln I_1}(h_x)C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t) + \\ &\quad + C_{\ln I_1}(h_x)C_{\ln I_2}(h_t) \} = \\ &= -\frac{C_{\ln I_1}(h_x)}{4} \{ C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t) - 2C_{\ln I_2}(h_t) + C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t) \} \end{aligned}$$

Qui, en posant :

$$\begin{cases} C_{Cr_1}(h_x) = \frac{C_{\ln I_1}(h_x)}{4} \\ C_{Cr_2}(h_t) = -C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t) + 2C_{\ln I_2}(h_t) - C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t) \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$C_{Cr}(h_x, h_t) = C_{Cr_1}(h_x)C_{Cr_2}(h_t)$$

La covariance des coefficients de réflexion est donc elle même factorisable dans le cas où la relation liant les coefficients de réflexion aux impédances est discrète.

En ce qui concerne la **covariance des amplitudes modélisées**, la relation suivante est vérifiée :

$$C_a(h_x, h_t) = \text{Cov}[a(x, t); a(x + h_x, t + h_t)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Cov}[\text{Cr} * s(x, t); \text{Cr} * s(x + h_x, t + h_t)] = \\
&= \text{Cov} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cr}(x, t - \tau) s(\tau) d\tau; \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cr}(x + h_x, t + h_t - \tau') s(\tau') d\tau' \right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[\text{Cr}(x + h_x, t + h_t - \tau); \text{Cr}(x + h_x, t + h_t - \tau')] s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\text{Cr}}(h_x, h_t - \tau' + \tau) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\text{Cr}_1}(h_x) C_{\text{Cr}_2}(h_t - \tau' + \tau) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' = \\
&= C_{\text{Cr}_1}(h_x) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\text{Cr}_2}(h_t - \tau' + \tau) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau'
\end{aligned}$$

Qui, en posant

$$\begin{cases} C_{a_1}(h_x) = C_{\text{Cr}_1}(h_x) \\ C_{a_2}(h_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\text{Cr}_2}(h_t - \tau' + \tau) s(\tau) s(\tau') d\tau d\tau' \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$C_a(h_x, h_t) = C_{a_1}(h_x) C_{a_2}(h_t)$$

La covariance des amplitudes est donc elle aussi factorisable.

Pour la **covariance croisée**, le principe est le même. La covariance croisée du logarithme des impédances et de l'amplitude modélisée peut s'écrire :

♦ Cas continu

La relation liant les coefficients de réflexion au logarithme de l'impédance utilisée ici est la relation (10).

$$\begin{aligned}
C_{\ln I \text{ Cr}}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); \text{Cr}(x + h_x, t + h_t)] = \\
&= \text{Cov} \left[\ln I(x, t); \frac{\Delta t}{2} \frac{d \ln I}{dt}(x + h_x, t + h_t) \right] = \\
&= \frac{\Delta t}{2} \text{Cov} \left[\ln I(x, t); \frac{d \ln I}{dt}(x + h_x, t + h_t) \right] = \\
&= \frac{\Delta t}{2} C_{\ln I \frac{d \ln I}{dt}}(h_x, h_t) = \\
&= -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I}}{dt}(h_x, h_t) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\Delta t}{2} \frac{d C_{\ln I_1}(h_x) C_{\ln I_2}(h_t)}{dt} = \\
&= -\frac{\Delta t}{2} C_{\ln I_1}(h_x) \frac{d C_{\ln I_2}(h_t)}{dt}
\end{aligned}$$

Car $C_{\ln I_1}(h_x)$ est indépendante de t . En posant

$$\begin{cases} C_{\ln I_{Cr_1}}(h_x) = \frac{\Delta t}{2} C_{\ln I_1}(h_x) \\ C_{\ln I_{Cr_2}}(h_t) = -\frac{d C_{\ln I_2}(h_t)}{dt} \end{cases}$$

cette relation peut s'écrire :

$$C_{\ln I_{Cr}}(h_x, h_t) = C_{\ln I_{Cr_1}}(h_x) C_{\ln I_{Cr_2}}(h_t)$$

Dans le cas où la relation continue liant les coefficients de réflexion au logarithme des impédances est utilisée, la covariance croisée du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion est factorisable.

♦ Cas discret

La relation utilisée pour lier les coefficients de réflexion au logarithme des impédances est la relation (11).

$$\begin{aligned}
C_{\ln I_{Cr}}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x + h_x, t + h_t)] = \\
&= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \frac{\ln I(x + h_x, t + h_t + \Delta t/2) - \ln I(x + h_x, t + h_t - \Delta t/2)}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x + h_x, t + h_t + \Delta t/2)] - \text{Cov}[\ln I(x, t); \ln I(x + h_x, t + h_t - \Delta t/2)] \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ C_{\ln I}(h_x, h_t + \Delta t/2) - C_{\ln I}(h_x, h_t - \Delta t/2) \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ C_{\ln I_1}(h_x) C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t/2) - C_{\ln I_1}(h_x) C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t/2) \right\} = \\
&= \frac{C_{\ln I_1}(h_x)}{2} \left\{ C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t/2) - C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t/2) \right\}
\end{aligned}$$

Qui, en posant :

$$\begin{cases} C_{\ln I_{Cr_1}}(h_x) = \frac{C_{\ln I_1}(h_x)}{2} \\ C_{\ln I_{Cr_2}}(h_t) = C_{\ln I_2}(h_t + \Delta t/2) - C_{\ln I_2}(h_t - \Delta t/2) \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$C_{\ln I_{Cr}}(h_x, h_t) = C_{\ln I_{Cr_1}}(h_x) C_{\ln I_{Cr_2}}(h_t)$$

Dans le cas discret la covariance croisée du logarithme de l'impédance et des coefficients de réflexion est également factorisable.

Par conséquent, la covariance croisée du logarithme de l'impédance et de l'amplitude modélisée peut s'écrire également :

$$\begin{aligned}
 C_{\ln I a}(h_x, h_t) &= \text{Cov}[\ln I(x, t); a(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr * s(x + h_x, t + h_t)] = \\
 &= \text{Cov}\left[\ln I(x, t); \int_{-\infty}^{+\infty} Cr(x + h_x, t + h_t - \tau)s(\tau) d\tau\right] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Cov}[\ln I(x, t); Cr(x + h_x, t + h_t - \tau)]s(\tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I Cr}(h_x, h_t - \tau)s(\tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I Cr_1}(h_x)C_{\ln I Cr_2}(h_t - \tau)s(\tau) d\tau = \\
 &= C_{\ln I Cr_1}(h_x) \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I Cr_2}(h_t - \tau)s(\tau) d\tau = \\
 &= C_{\ln I a_1}(h_x)C_{\ln I a_2}(h_t)
 \end{aligned}$$

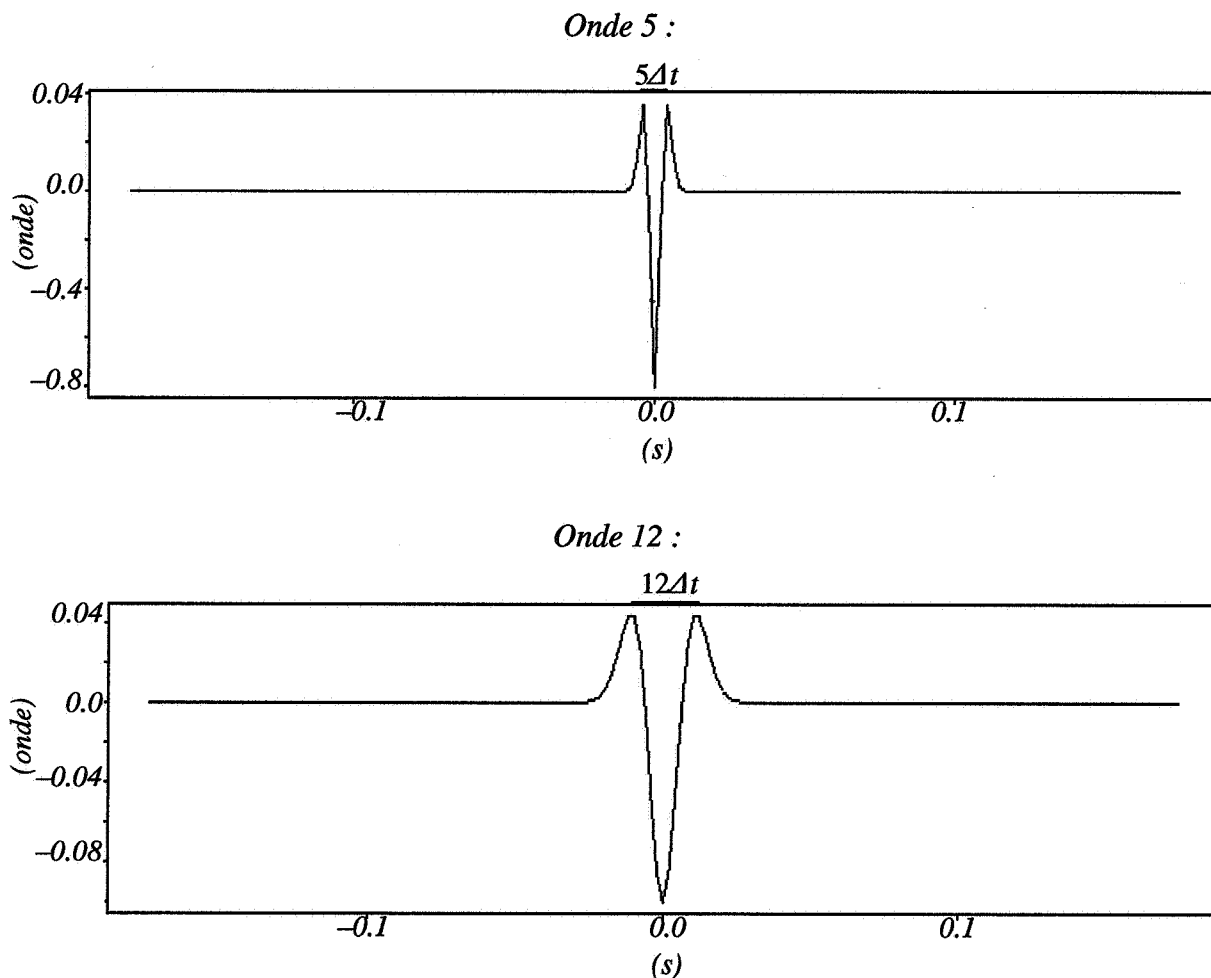
en posant :

$$\begin{cases} C_{\ln I a_1}(h_x) = C_{\ln I Cr_1}(h_x) \\ C_{\ln I a_2}(h_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\ln I Cr_2}(h_t - \tau)s(\tau) d\tau \end{cases}$$

Supposer que la covariance du logarithme de l'impédance est factorisée est donc suffisant pour que l'ensemble des covariances simples et croisées soient factorisables.

ANNEXE 7 : Influence de la longueur d'onde de l'ondelette sur les covariances de l'amplitude modélisée.

Afin d'observer l'influence de la longueur d'onde λ de l'ondelette sur les covariances des amplitudes modélisées, un certain nombre de section en amplitudes modélisées ont été calculées à l'aide des impédances acoustiques de l'unité centrale du Mesa Verde (qui présente une périodicité, suivant la verticale, de 10 à 14 pas de temps) et d'ondelette de différentes longueurs d'ondes. Ces ondelettes sont les suivantes :



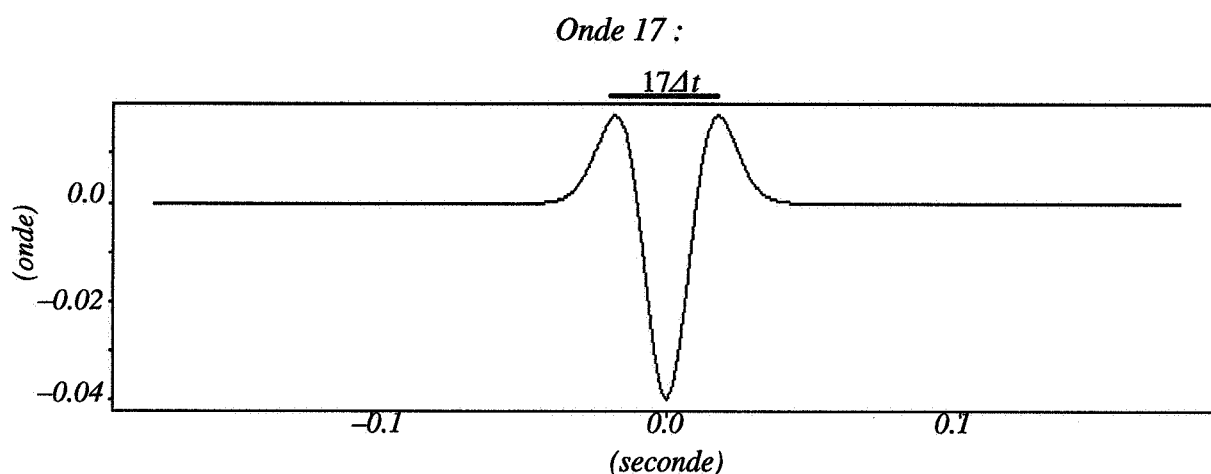


Fig. 79 : Les ondelettes de différentes longueur d'onde

Les covariances expérimentales des sections en amplitudes modélisées ont été calculées sur les directions verticales et horizontales. Ces covariances ont été ajustées par les modèles de covariance calculés en utilisant les différentes relations présentées précédemment en utilisant un modèle de covariance exponentiel de portée 1,2 ms et de palier 1 pour ajuster la covariance expérimentale verticale du logarithme de l'impédance :

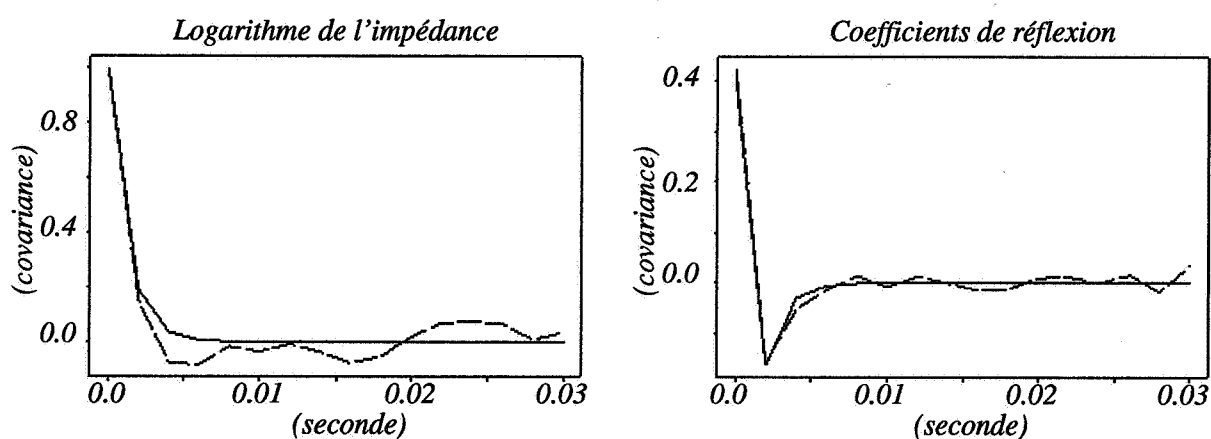


Fig. 80 : Ajustement de la covariance verticale du logarithme de l'impédance

Les ajustements des covariances verticales des différentes sections en amplitudes modélisées sont les suivants :

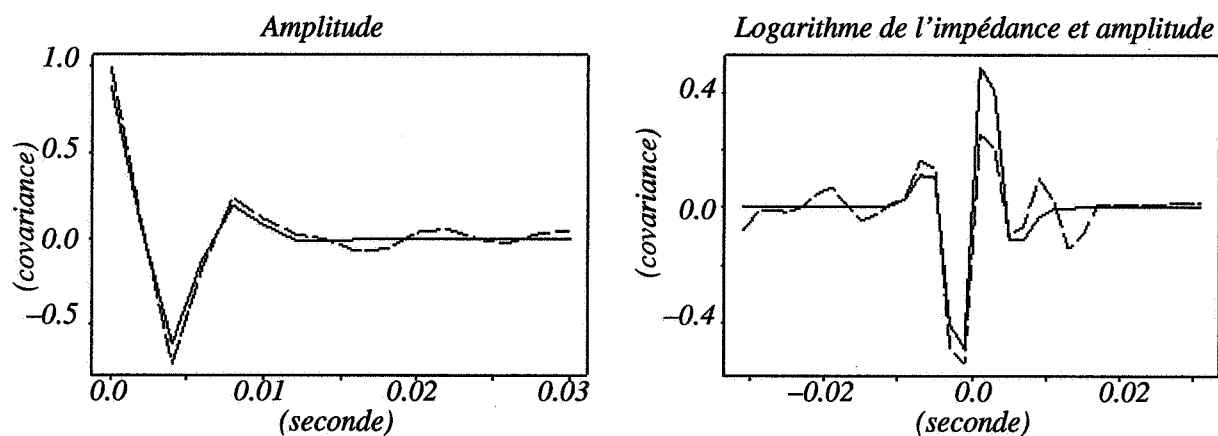
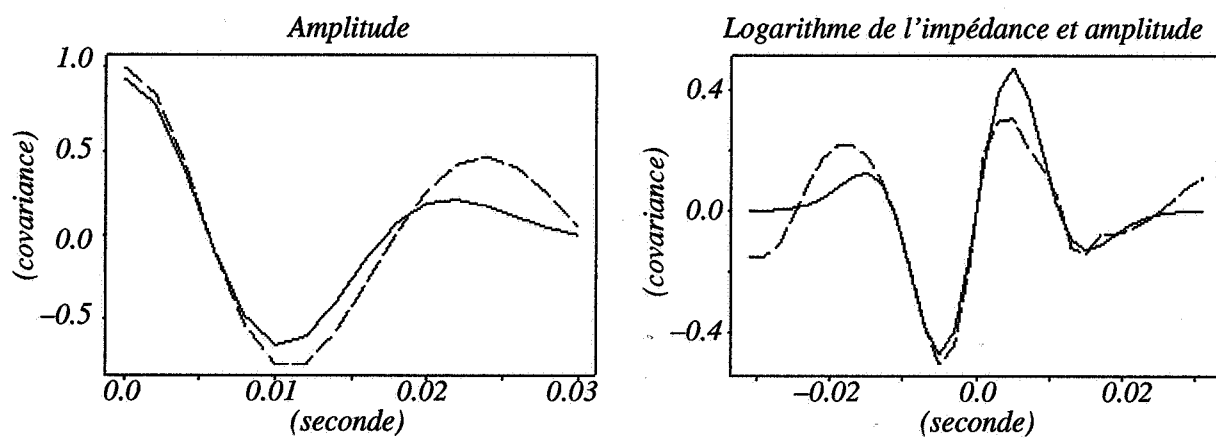
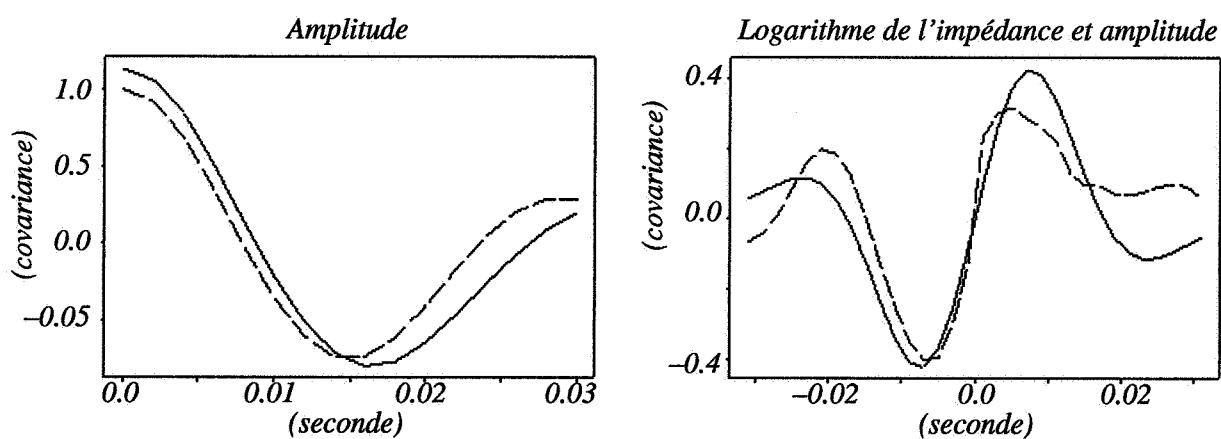
Onde 5 :*Onde 12 :**Onde 17 :*

Fig. 81 : Ajustement des covariances verticales des différentes sections en amplitudes modélisées

Un décalage transparait dans l'ajustement de la covariance verticale des amplitudes modélisées pour les ondelettes de longueur d'onde $12\Delta t$ et $17\Delta t$. Ce décalage est du :

- ◆ d'une part à la longueur dynamique de l'ondelette ($26\Delta t$ pour l'ondelette de longueur d'onde $12\Delta t$ et $38\Delta t$ pour l'ondelette de longueur d'onde $17\Delta t$) qui devient importante par rapport à l'épaisseur de la section en coefficient de réflexion ($33\Delta t$),
- ◆ et d'autre part à l'entrée en résonance de l'ondelette avec la section en impédance qui augmente la corrélation entre les amplitudes pour une distance de $12\Delta t$, soit pour une distance de 0,24 s. C'est ce second phénomène qui explique le décalage de la covariance verticale des amplitudes modélisées, calculées à l'aide de l'ondelette de longueur d'onde $12\Delta t$.

Pour la direction horizontale, le modèle de covariance choisi pour ajuster la covariance horizontale du logarithme des impédances est un modèle gigogne composé de 2 modèles exponentiels l'un de palier 0,7 et de portée 62,5 m et l'autre de palier 0,3 et de portée 625m :

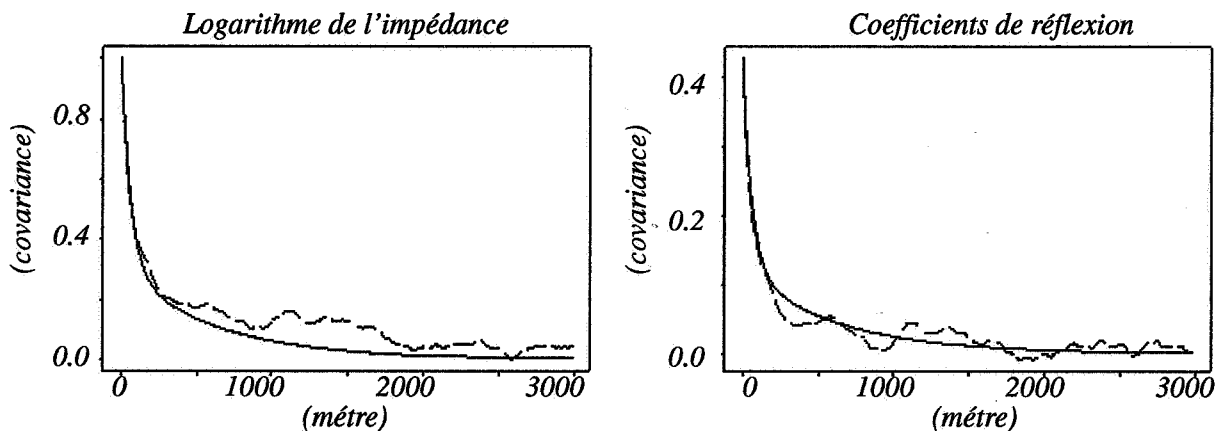


Fig. 82 : Ajustement de la covariance horizontale du logarithme de l'impédance

Les ajustements des covariances horizontales des différentes sections en amplitude modélisée sont les suivantes :

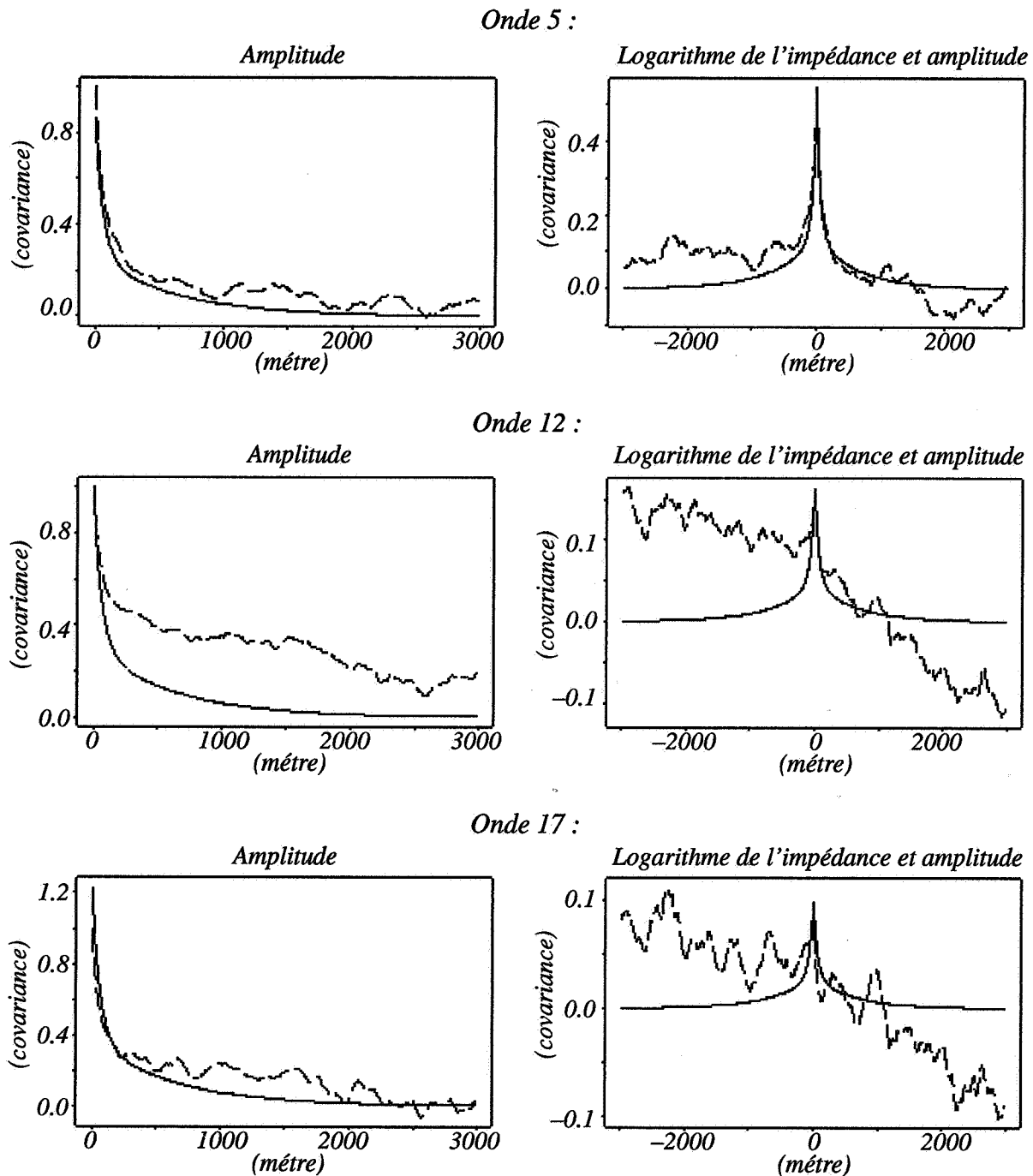


Fig. 83 : Ajustement de covariances horizontales des différentes sections en amplitudes modélisées

Il est évident sur ces figures qu'un problème se pose pour l'ajustement des covariances horizontales de l'amplitude modélisée calculée à l'aide de l'ondelette de longueur d'onde $12\Delta t$ (longueur d'onde qui est proche de période de la section en impédance acoustique) alors que les covariances des autres sections en amplitude modélisée sont ajustées de manière beaucoup plus satisfaisante.

ANNEXE 8 : Les conséquences de l'utilisation d'un encaissant.

Afin d'évaluer les conséquences de l'utilisation d'un encaissant, l'expérience suivante a été effectuée :

♦ Schéma de l'expérience

Une section en logarithme de l'impédance a été construite. Cette section a été placée dans trois encaissants différents.

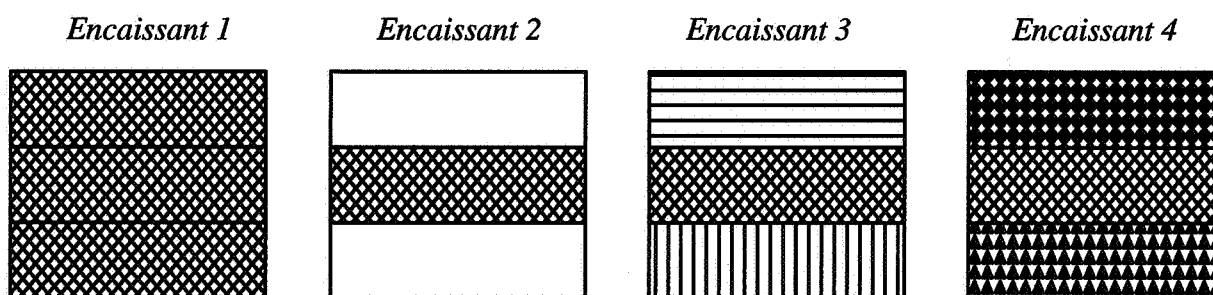


Fig. 84 : Les différents encaissants

Le premier encaissant est la "continuité" de la section. C'est à dire que c'est le cas idéal où la section est placée dans un encaissant ayant la même covariance que celle de la section.

Le second encaissant prend des valeurs constantes suivant la verticale. Ceci implique que la section en coefficient de réflexion correspondante sera placée dans un encaissant nul. C'est le cas de cette étude, lors du calcul des amplitudes modélisées.

Le troisième encaissant consiste en deux sections en logarithme de l'impédance de covariance stationnaire différente de celle de la section centrale. Cette section représente l'un des cas réels.

Un autre cas réel est restitué par le quatrième encaissant. Ce dernier encaissant est constitué de deux sections en logarithme de l'impédance de covariances différentes de la section centrale dont l'une au moins est non stationnaire.

Ces différents encaissants sont utilisés afin de calculer des sections en coefficients de réflexion, puis en amplitude modélisée. Les amplitudes modélisées ne sont calculées que sur la section d'intérêt. Une fois ces trois sections construites, les différentes covariances verticales et horizontales ont été calculées puis ajustées à l'aide des modèles calculés à partir du modèle de covariance du logarithme de l'impédance et de l'ondelette.

♦ Conséquence sur les covariances verticales

La covariance verticale du logarithme de l'impédance a été ajustée à l'aide d'un modèle de covariance exponentiel de portée 1,4 ms et de palier 1. L'ajustement obtenu est le suivant :

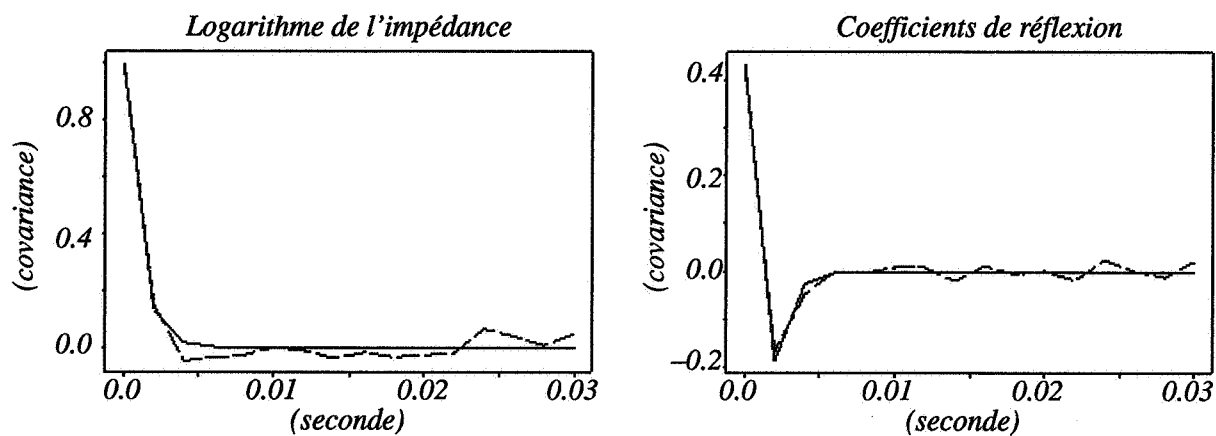
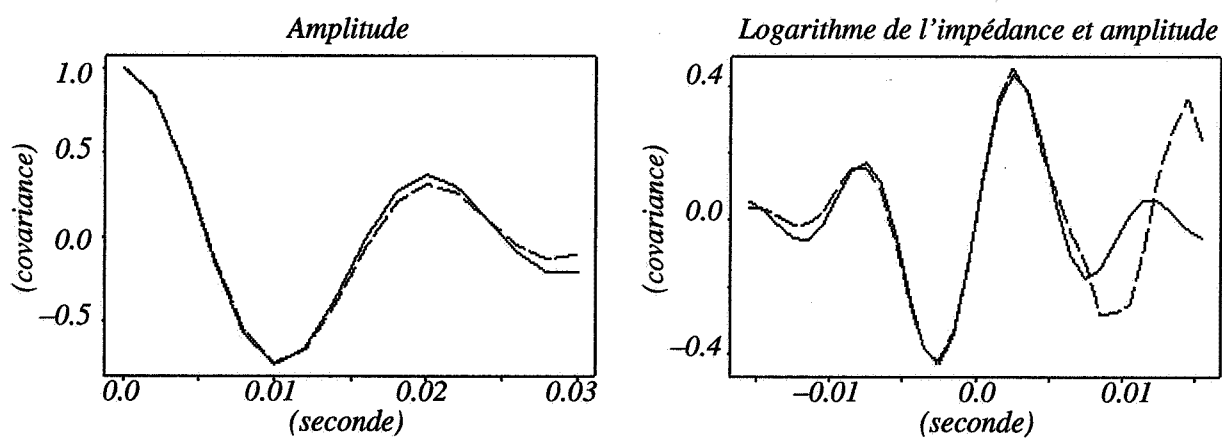


Fig. 85 : Ajustement des covariances verticales du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion

Les covariances expérimentales simples et croisées des amplitudes modélisées calculées avec les différents encaissants sont les suivantes :

Encaissant 1 :



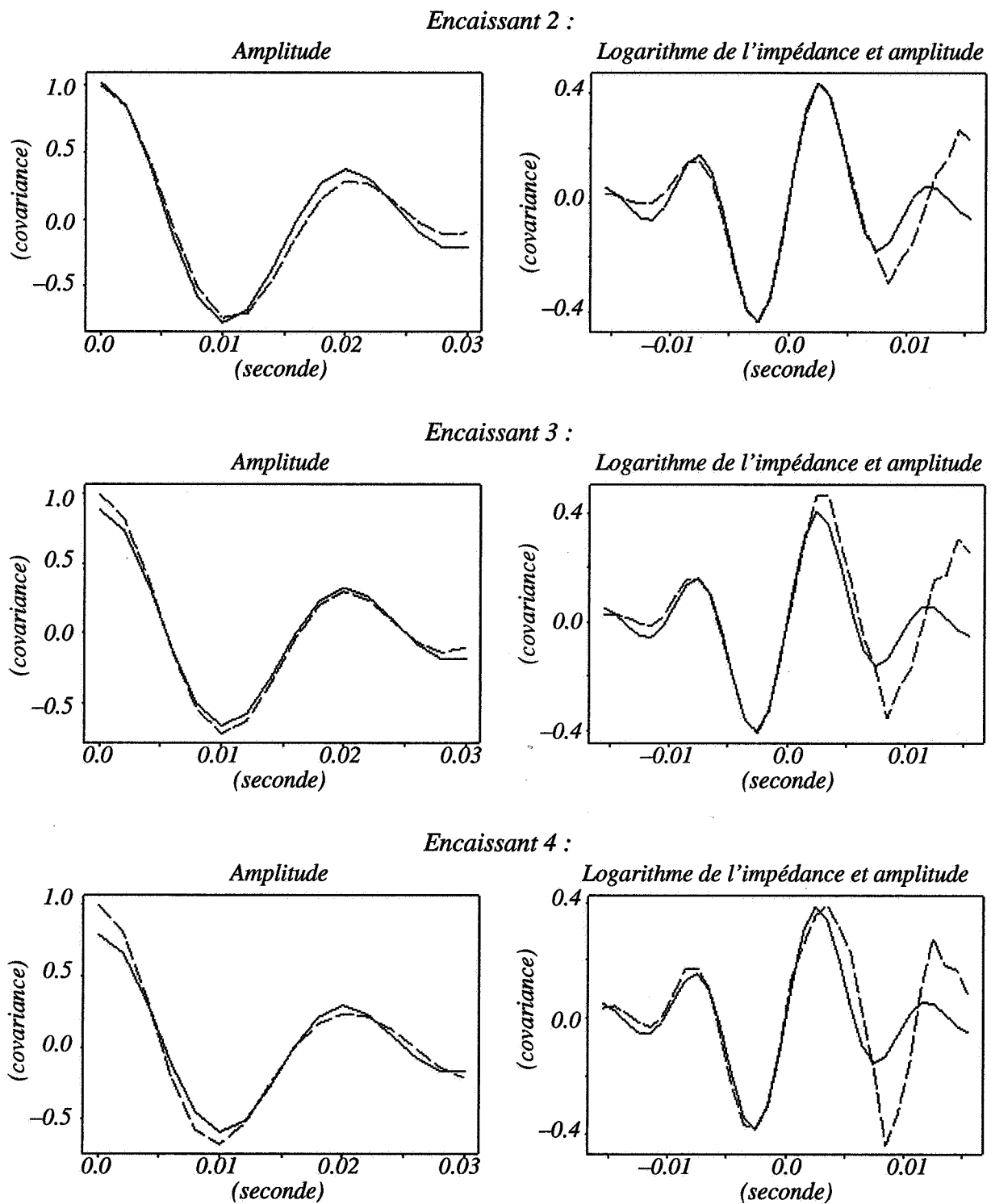


Fig. 86 : Ajustement des covariances verticales des amplitudes modélisées

Quelques soient les encaissants, les covariances expérimentales simple et croisée de l'amplitude calculée semblent proches des modèles de covariance calculés à l'aide des relations (17), (18)

et (22). Ceci semble indiquer que la covariance de l'encaissant en logarithme de l'impédance n'a pas d'effet sur les covariances simple et croisée verticales de l'amplitude. Il est tout de même à noter que les covariances expérimentales des amplitudes calculées à l'aide du quatrième encaissant sont très légèrement moins bien ajustés que celles des amplitudes calculées à l'aide des trois autres encaissants.

♦ Conséquence sur les covariances horizontales

La covariance horizontale du logarithme des impédances a été ajustée à l'aide d'un modèle gigogne constitué de deux modèles de covariance exponentiel, l'un de portée 50 m et de palier 0,6 et l'autre de portée 125 m et de palier 0,4. Les ajustements des covariances horizontales du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion obtenues sont les suivantes :

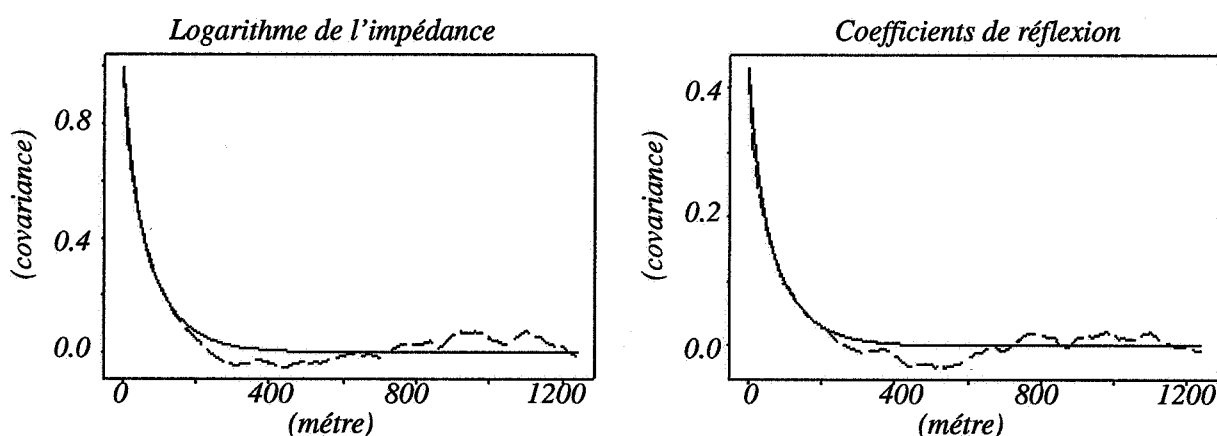
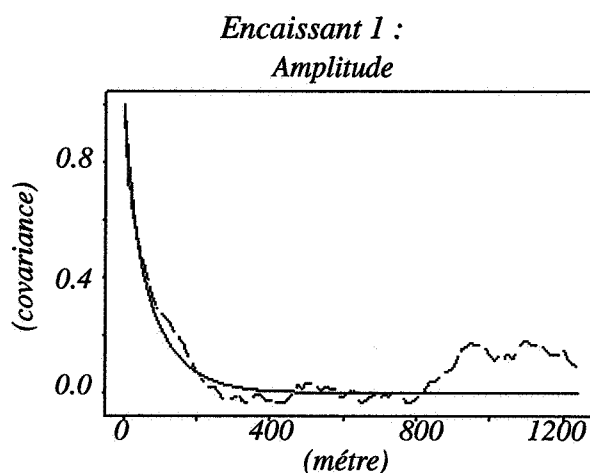


Fig. 87 : Ajustement des covariances horizontales du logarithme des impédances et des coefficients de réflexion

Les ajustements des covariances expérimentales horizontales simples et croisées des amplitudes modélisées dans les quatre cas d'expérience sont les suivants :



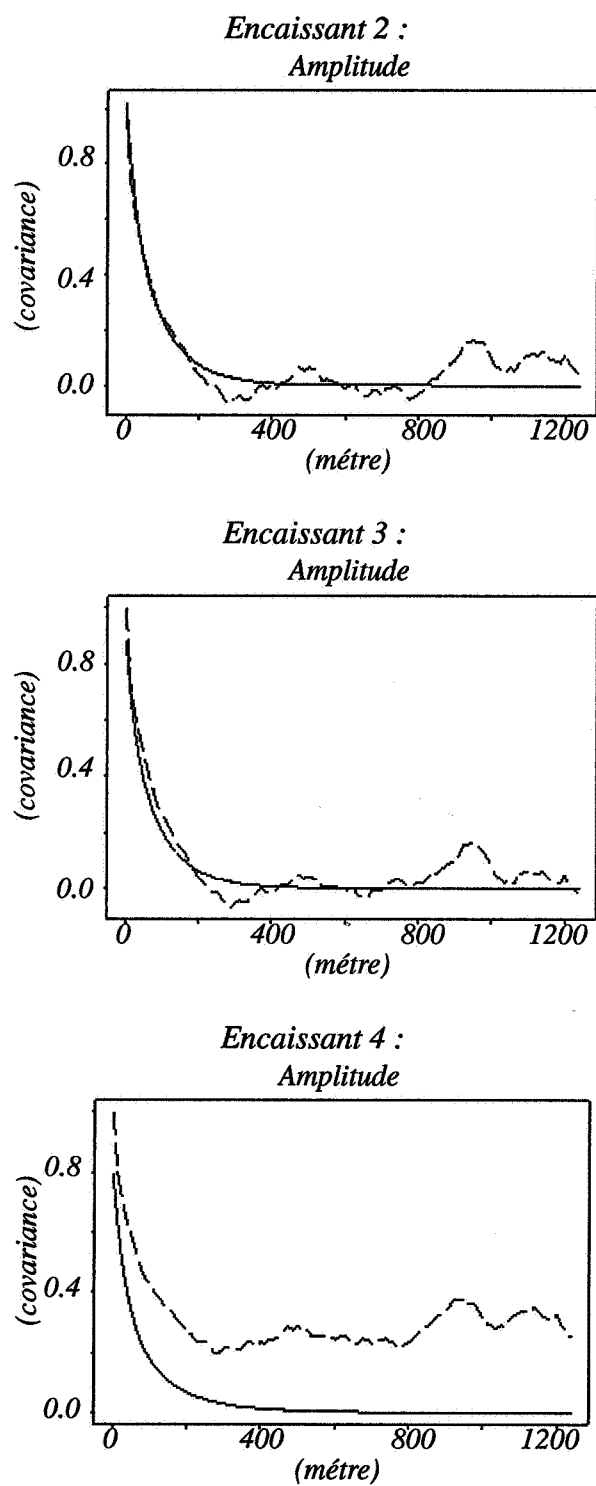


Fig. 88 : Ajustement des covariances horizontales des amplitudes modélisées

En ce qui concerne les ajustements des covariances horizontales simples et croisées des amplitudes calculées par les modèles de covariances calculés à l'aide des relations (34), (35) et (39), ils ne sont acceptables que pour les trois premiers encaissants. En effet, l'ajustement des covariances horizontales simple et croisée des amplitudes calculées à l'aide du quatrième encaissant est tout à fait décevant.

Deux remarques peuvent être extraites de cette expérience :

- ◆ La première remarque est qu'utiliser un encaissant en logarithme de l'impédance stationnaire ou constant lors du calcul des amplitudes mesurées n'a pas (ou très peu) d'influence sur les covariances expérimentales simples et croisées, verticales et horizontales des amplitudes modélisées. Dans le cas où l'encaissant réel de la section en logarithme de l'impédance est stationnaire, il est donc possible de remplacer cet encaissant par des valeurs constantes (second encaissant de cette expérience) qui simplifie de beaucoup le calcul des amplitudes modélisées.
- ◆ La seconde remarque est que l'un au moins des encaissants réels en logarithme de l'impédance est fortement non stationnaire, les covariances expérimentales simple et croisée de l'amplitude modélisée ne sont pas ajustées de façon correcte par les modèles de covariance. Dans l'exemple présenté ici, seules les covariances horizontales ne sont pas ajustées par les modèles de covariance. D'autres tests ont été effectués avec d'autres encaissants non stationnaires et ont aussi présenté des mauvais ajustements pour les covariances expérimentales verticales de l'amplitude modélisée. Dans le cas où l'encaissant en logarithme de l'impédance n'est pas stationnaire, la méthode de simulation du logarithme des impédances présentées ici doit donc être utilisée avec beaucoup de précautions.

Références bibliographiques

Introduction :

- [1] BEHRENS R.A., MACLEOD M.K., TRAN T.T. and ALIM I A.O. 1996. Incorporating seismic attribute maps in 3d reservoir models. In *1996 Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, 6–9 October 1996*. SPE 36499.
- [2] FROIDEVAUX R. 1993. Probability field simulation. In Soares (ed.) *Geostat Tróia '92*. Vol. 1, Dordrecht : Kluwer. p285–297.
- [3] GALLI A., MEUNIER G. 1987. Study of a gas reservoir using the external drift method. In Matheron et al. (ed.) *Geostatistical case studies*, Dordrecht : Reidel. p. 105–119.
- [4] HAAS A., DUBRULE O. 1994. Geostatistical inversion – a sequential method of stochastic reservoir modelling constrained by seismic data. *First break*, 12, Nr 11, p561–569.
- [5] SKARE Ø., SKORSTAD A., HAUGE R. and HOLDEN L. 1997. Conditioning fluvial model on seismic data. In Baafi et al. (eds.) *Geostatistics Wollongong '96*. Vol. 1, Dordrecht : Kluwer.
- [6] XU W. et TRAN T.T., SRIVASTAVA R.M. and JOURNEL A.G. 1992. Integrating seismic data in reservoir modeling : the collocated cokriging alternative. In *SPE 1992 Annual Technical Conference and Exhibition, Washington D.C.* SPE 24742.

Partie 1 :

- [7] BEUCHER H., GALLI A., LE LOC'H G., RAVENNE C. & HERESIM group. Including a regional trend in reservoir modelling using the truncated Gaussian method. In Soares (ed.) *Geostat Tróia '92*. Vol. 1, Dordrecht : Kluwer. p. 555–566.
- [8] ESCHARD R., DESAUBLIAUX G. 1992. Sequence stratigraphy of major regressive–transgressive littoral clastic wedge in the Mesa Verde area (Campanien, Colorado). *Field trip guide book IFP*, Rueil–Malmaison.
- [9] FOURNIER F., DERAÏN J.–F. 1995. A statistical methodology for deriving reservoir properties from seismic data. *Geophysics* vol. 60, no. 5, p. 1437–1450.
- [10] HU L.Y. 1995. *Vers un Heresim non stationnaire en 3D*. Rapport no. 41 943, février 1995, Institut Français du Pétrole, Rueil Malmaison.
- [11] HU L.Y. 1995. *Estimation des fonction 3D de proportions lithologiques avec des données de puits et des données sismiques. Etude de l'unité supérieure du Mesa Verde*. Rapport no. 42 276, août 1995, Institut Français du Pétrole, Rueil Malmaison.
- [12] JOHANN P., FOURNIER F., SOUZA O., ESCHARD R. and BEUCHER H. 1996. 3D stochastic reservoir modeling constrained by well and seismic data on a turbiditic field.

In 1996 *Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, 6–9 October 1996*. SPE 36501.

- [13] MATHERON G. et al. 1987. Conditional simulation of geometry of fluvio–deltaic reservoirs. In *SPE 1987 Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, 27–30 Sept. 1987*, p. 591–599. SPE 16753.
- [14] MOULIÈRE D., BEUCHER H., HU L.Y., FOURNIER F., TERDICH P., MELCHIORI F., and GRIFFI G. 1997. Integration of seismic derived information in reservoir stochastic modelling using truncated gaussian approach. In Baafi et al (eds.) *Geostatistics Wollongong '96*. Vol. 1, Dordrecht : Kluwer. p. 374–385.
- [15] MOULIÈRE D. & GROUPE HERESIM. 1995. *Alize, Guide d'utilisation*. Rapport N–20/95/G, Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.

Partie 2 :

- [16] BOURGEOIS A., DEQUIREZ P.Y., ESCHARD R., ETIENNE G., MACE D. and RICHARD V. 1994. The Mesa Verde outcrop : seismic modeling, processing and interpretation. In *64th Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophy., Los Angeles*, p. 333–361.
- [17] DALY C. 1991. *Applications de la géostatistique à quelques problèmes de filtrage*. Thèse de docteur en géostatistique, Ecole des Mines de Paris.
- [18] JEULIN D., RENARD D. 1992. Practical limits of the deconvolution of images by kriging. *Microsc. Microanal. Microstruct.*, 3, Aout 1992, p. 333–361.
- [19] LAVERGNE M. 1986. *Méthodes sismiques*. Ed. Technip, Paris et Institut Français du Pétrole, Rueil–Malmaison.
- [20] MATHERON G. 1970. *La théorie des variables régionalisées et ses applications*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, fasc. 5. Paris : Ecole des Mines de Paris. 212 p.
- [21] WACKERNAGEL Hans. 1995. *Multivariate geostatistics : an introduction with applications*. Berlin : Springer, 256 p.
- [22] ZHANG Z.Y. 1990. *Analyses géostatistiques de données sismiques*. Rapport S–267, Confidentiel. Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- [23] ZHANG Z.Y., GALLI A. 1993. Getting better quality seismic sections. In Soares (ed.), *Geostat Tróia '92*. Vol. 1, Dordrecht : Kluwer. p. 285–297.