

A. REMACRE

## CONDITIONNEMENT UNIFORME

SCIENCES DE LA TERRE, Série "Informatique Géologique", n° 18  
*"Quelques Etudes Géostatistiques"*, Pages 125-139  
Réunion organisée par le Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique  
Ecole des Mines - Fontainebleau  
2-3 Juin 1983

## CONDITIONNEMENT UNIFORME

A. REMACRE \*

### TABLE DES MATIERES

<i>RESUME - ABSTRACT</i> .....	128	<i>ZUSAMMENFASSUNG</i> .....	128
A - INTRODUCTION .....	129	2 - Variogrammes .....	134
B - POSITION DU PROBLEME .....	129	3 - Mise en oeuvre de l'estimation des réserves locales .....	134
C - THEORIE .....	129	4 - Comparaison des résultats .....	136
D - BANC D'ESSAI - CAS D'ETUDE .....	132	REFERENCES .....	139
1 - Histogrammes .....	133		

### ILLUSTRATIONS

Figure 1 - Position du problème .....	130
2 - a) Histogramme expérimental des données et ajustement de l'anamorphose .....	135
b) Histogramme des blocs et modèles prévu par l'anamorphose .....	
3 - Variogramme des données et ajustement .....	135
4 - Plan de voisinage .....	136
5 - Comparaison globale des courbes tonnage et quantité de métal en fonction de la teneur de coupure .....	137
6 - Comparaison locale pour une zone pauvre .....	137
7 - Comparaison locale pour une zone riche .....	138
8 - Comparaison locale pour une zone mixte .....	138

\* - Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique - Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Fontainebleau - France.

## **RESUME**

Cet article décrit la mise en pratique d'une méthode issue d'une recherche de simplification des calculs de fonctions de récupération.

Nous connaissons actuellement comme méthodes le Krigeage Disjonctif (KD) et la méthode multi-gaussienne (MG), toutes deux basées sur les lois conditionnelles.

La méthode proposée ici est beaucoup plus simple et plus rapide que les deux autres; elle n'exige qu'un seul krigeage, estime de vraies lois de distribution, et elle a donné, dans le cas d'étude présenté dans cet article, les mêmes résultats que les deux autres méthodes.

## **ABSTRACT**

### *Uniform conditioning*

This paper describes the practical application of a method originated from a research to simplify the calculation of recovery functions.

At present, the methods known are the Disjunctive Kriging (DK) and the multi-gaussian method, both based on conditional distributions.

The method proposed in this paper is much simpler and quicker than the two mentioned above; it requires only one kriging, it estimates true distribution laws, and it gave the same results as the other two methods in the case-study presented here.

## **ZUSAMMENFASSUNG**

### *Uniforme Konditionierung*

Dieser Aufsatz beschreibt die praktische Umsetzung einer Methode zur Vereinfachung der Berechnung von Ausbringensfunktionen.

Die Methoden, die bislang bekannt waren, das disjunktive Kriging (DK) und die multi-Gaussche (MG) Methode, basieren beide auf bedingten Verteilungsgesetzen.

Die hier vorgeschlagene Methode ist wesentlich einfacher und wesentlich schneller als jene; sie verlangt nur ein krigeage, führt zur Schätzung echter Verteilungsgesetze und hat in der vorgestellten Fallstudie die selben Ergebnisse wie die beiden anderen Methoden erbracht.

## A - INTRODUCTION

Nous ferons d'abord la mise au point des objectifs envisagés, ensuite on explicitera l'approche en termes théoriques, et pour finir, on décrira un cas d'étude permettant de comparer les résultats de cette méthode avec la connaissance d'un banc de mine d'un porphyre cuprifère déjà exploité.

Nous nous plaçons dans le cas où l'on arrive à construire à partir de la variable  $Z$  (teneur en cuivre dans ce cas) une anamorphose gaussienne préalable avec modèles isofactoriels. (Dans certains cas, on aura quelques difficultés à obtenir cette anamorphose, par exemple lorsqu'on a des atomes dans l'histogrammes de  $Z$ , en général à l'origine (effet zéro)).

Nous n'aborderons pas ici le formalisme du changement de support qui est évident; nous nous contenterons de l'utiliser sans le développer (cf. [2], [3], [4]). On se place dans le cas d'une sélection libre (sans contraintes géométriques) et on se contente de calculer les fonctions de récupération.

## B - POSITION DU PROBLEME

Supposons qu'on dispose d'une maille de sondage de 100 m x 10 m et que l'unité de sélection au moment de l'exploitation soit faite sur des blocs de 5 m x 5 m. On peut se demander s'il est possible d'anticiper, avec la seule information actuelle, le résultat d'une sélection qui sera faite à partir d'une information beaucoup plus riche (trous de tir, par exemple) non encore disponible; anticiper signifie estimer la loi de distribution des blocs  $v$  contenus dans les panneaux  $V$ , c'est-à-dire estimer la loi de probabilité d'un estimateur futur (celui des trous de tir), ou encore, plus simplement, estimer l'histogramme des blocs  $v_i \subset V$  (Fig. 1).

Nous ferons au passage deux remarques dont il faudra autant que possible tenir compte : d'abord, peut-on effectuer les calculs sans les faire spécifiquement en fonction des teneurs de coupure? Ensuite, peut-on changer de support pour étudier son impact sur la sélectivité liée à la méthode d'exploitation, ceci sans être obligé de refaire l'estimation? La réponse à ces questions est positive dans le cas des modèles isofactoriels.

## C - THEORIE

Le problème initial consiste à examiner une solution rigoureuse mais qui se révèle assez lourde à mettre en pratique. Il s'agit de la méthode basée sur les lois conditionnelles. En effet, plaçons-nous dans le cas d'une sélection des blocs  $v_i$ . On cherche alors à estimer les quantités de minerai et de métal récupérées dans un panneau  $V$  quand on coupe sur les blocs. La lourdeur de la méthode vient du fait que, pour chaque  $Y_{v_i}$ ,  $v_i \subset V$ , l'espérance conditionnelle est de la forme  $\lambda^\alpha(v_i)Y_\alpha$ , les  $\lambda_\alpha(v_i)$  étant fonction de la position de  $v_i$  dans  $V$ .

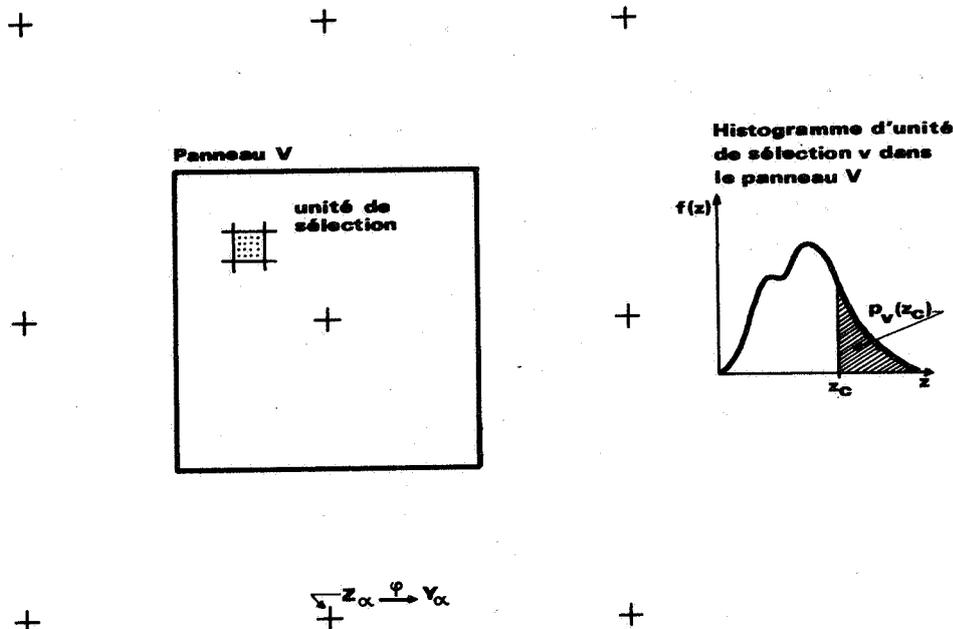


Figure 1. Position du problème.

Pour  $v$  fixé :

$$E[Y_v | Y_\alpha] = \sum \lambda_\alpha Y_\alpha$$

$$D^2[Y_v | Y_\alpha] = \sigma_K^2(v) = 1 - \sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_{\alpha v}$$

A  $(Y_\alpha, \dots, Y_\beta)$  fixés, on aura pour  $Y_v$  la densité moyenne en  $V$

$$f(y) = \frac{1}{V} \int_V g\left(\frac{y - y_K(v)}{\sigma_K(v)}\right) \frac{p(dv)}{\sigma_K(v)}$$

lorsque  $v$  décrit  $V$ . Ensuite on calculera les estimateurs  $P^*$  et  $Q^*$  des quantités de minerai et de métal  $P$  et  $Q$ .

On voit donc que pour établir toute "contribution" d'un panneau  $V$ , il est nécessaire de kriger les  $N$  blocs  $v$  du panneau, c'est-à-dire qu'on devra résoudre les  $N$  systèmes de krigeage pour obtenir  $Y^K(v)$  et ensuite sommer les densités  $g(y - y_K(v))/\sigma_K(v)$ . Notons en toute rigueur que chaque combinaison  $\sum_\alpha \lambda_\alpha(v)$  apportera la contribution différentielle donnée pour la position de  $v$  par rapport aux  $Y_\alpha$ . Mais si on renonce à cet apport différentiel (qui de toute façon va être moyenné par la suite) donné par chaque  $Y_\alpha$ , et qu'on se contente d'une seule combinaison linéaire liée au panneau  $\sum_\alpha \lambda_\alpha Y_\alpha$  lui-même, on voit qu'une approximation est possible.

Prenons comme combinaison linéaire la suivante :

$$Y_K = \sum_\alpha \lambda_\alpha Y_\alpha / S$$

avec les  $\lambda_\alpha$  sortie du système :

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_i \rho_{\alpha v_i}$$

et

$$S^2 = \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \rho_{\alpha\beta}$$

Calculons la loi de  $Y_v$  conditionnée à cette combinaison linéaire  $Y_K$  fixée ( $Y_v | Y_K$ ). Notons que pour  $v$  fixé, le couple  $(Y_v, Y_K)$  suit une loi gaussienne à 2 variables caractérisées par leur espérance nulle et leur variance unitaire avec le coefficient de corrélation :

$$\text{Cov}(Y_v, Y_K) = \rho_{vK} = \frac{1}{S} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \rho_{\alpha v}$$

On écrit donc :

$$f(Y_v | Y_K) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{vK}^2}} g\left(\frac{Y_v - \rho_{vK} Y_K}{\sqrt{1 - \rho_{vK}^2}}\right)$$

ou, en termes de développement hermitien, en passant par :

$$E[H_n(Y_v) | Y_K] = \rho_{vK}^n \cdot H_n(Y_K)$$

on écrit l'espérance de n'importe quelle expression du type  $1/N \sum f(Y_v)$  conditionnée par l'unique variable  $Y_K$ , posant :

$$H_n^* = \frac{1}{N} \sum_i \rho_{v_i K}^n H_n(Y_K)$$

et finalement la densité :

$$f_{cu}^*(Y_v | Y_K) = g(y) \frac{H_n^* H_n(y_v)}{n!}$$

En utilisant ce résultat, on calculera les quantités  $P^*$  et  $Q^*$  de la façon habituelle

$$P^* = \int_{y_c}^{\infty} f_{cu}^*(y) dy ; \quad Q^* = \int_{y_c}^{\infty} \phi(y) f_{cu}^*(y) dy$$

On a donc à faire :

- 1) à un krigeage des anamorphoses. On aura  $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Y_{\alpha}$ ,  $S$
- 2) à un calcul de la covariance  $(Y_{v_i}, Y_K)$  à la puissance  $n$

$$\rho_{\alpha v}^n = \frac{1}{N} \sum_i \left( \frac{\lambda_{\alpha} \rho_{\alpha v_i}}{S} \right)^n$$

qui peut être précalculé pour la configuration de krigeage plus fréquente

- 3) au calcul des  $[H_n^*]_{cu}$  pour

$$[H_n^*]_{cu} = \rho_{\alpha v}^n H_n(Y_K)$$

On a ainsi l'estimation de la loi des blocs dans le panneau. En pratique, on s'arrange pour calculer la loi des points dans le panneau de telle façon qu'on puisse ensuite passer au support  $v$  qu'on désire. Pour cela il suffit de diviser les  $H_n^*$  relatifs aux points par  $r^n$ , le coefficient de changement de support [4].

## 1 - AVANTAGES ET INCONVENIENTS - REMARQUES

a) La première remarque, déjà évoquée, est que l'on renonce à l'information individuelle de chaque  $Y_{\alpha}$  en se contentant de la valeur krigée. Il faut noter que cet apport individuel est moyenné à l'intérieur du panneau.

b) Une seconde remarque est que pour une même valeur krigée et une même variance de krigage, deux panneaux auront la même loi, alors qu'ils auront la même loi seulement quand ils ont même voisinage et mêmes valeurs dans les points de ce voisinage. Mais cela ne constitue pas un handicap. Il semble normal que dans un gisement où on estime plusieurs centaines de lois, on trouve une certaine ressemblance entre ces lois. Cela ne semble pas avoir trop d'importance en pratique.

c) Variance d'estimation non conditionnelle. On s'intéresse ici au calcul de la variance non conditionnelle  $D^2(Z-Z^*)$ . Notons que par construction  $E[Z|Z^*] = Z^*$ , ce qui implique  $E[Z.Z^*] = E[Z.E(Z|Z^*)] = E[Z^*Z^*] = E[Z^*^2]$ .

Donc :

$$\begin{aligned} D^2(Z - Z_{cu}^*) &= D^2(Z) - D^2(Z_{cu}^*) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\phi_n^2}{n!} \left[ \overline{\rho^n(V,V)} - \left( \frac{1}{N} \sum \rho_{vK}^n \right)^2 \right] \end{aligned}$$

les  $\phi_n$  étant les coefficients de l'anamorphose  $\phi$ .

En pratique, on observe que :

$$D^2(Z - Z_{cu}^*) < D^2(Z - Z_{KD}^*)$$

d) les hypothèses intervenant pour les méthodes citées précédemment sont :

MG - loi multivariable

CU - loi bivariable du couple  $(Y_v, Y_K)$

KD - loi bivariable du couple  $(Y_{\alpha}, Y_{\beta})$

Dans le MG et le CU les distributions estimées sont de véritables lois de probabilités tandis que pour le KD, ce sont de pseudo-lois.

## D - BANC D'ESSAI - CAS D'ETUDE

Les données étudiées proviennent d'un banc de mine dont on connaît les analyses de trous de tir (teneur en cuivre), qu'on va considérer comme représentant la réalité. Plus précisément les données correspondent à un banc de 13 m d'épaisseur dans un gisement du type "porphyre cuprifère", réduit donc à deux dimensions. On observe une zonalité (ici un léger enrichissement vers le sud du banc), ce qui confirme le type de gisement mentionné.

On dispose des résultats de 2 095 trous de tir. Afin de pouvoir constituer les données de base pour l'estimation, on a classé ceux-ci sur un réseau régulier de panneaux de 30 m x 30 m. En prenant l'échantillon le plus central de chaque panneau, on a obtenu 173 trous de tir. Pour constituer la "réalité" de référence, on a défini les mêmes 2 095 données dans un réseau de blocs de 10 m x 10 m (= unité de sélection). Dans ce réseau, on a pris en compte les blocs dans lesquels se trouvaient au moins deux trous de tir. Ensuite, on a calculé la moyenne pour ces blocs et on les a reclassés pour constituer les panneaux de 30 x 30 m. Un panneau n'est retenu que s'il contient plus de 5 blocs ainsi informés.

Nous devons noter que l'étude portera toujours sur trous de tir, évitant ainsi la tâche toujours difficile d'avoir des données originaires de deux sources différentes, l'une les sondages et l'autres les trous de tir.

On dispose ainsi de deux fichiers : l'un contenant les données de base, l'autre la "réalité". Avec les données de base, on va estimer les fonctions de récupération de blocs de 10 m x 10 m à l'aide des méthodes citées précédemment, et on comparera ces résultats au contenu du deuxième fichier.

On a ainsi obtenu : 173 données de base, 583 blocs et 50 panneaux avec 281 blocs à l'intérieur.

## 1 - HISTOGRAMMES

Seuls les principaux histogrammes sont présentés ici. La figure 2-a montre l'histogramme des 173 données, ainsi que la modélisation obtenue par l'anamorphose  $\phi$ .

En utilisant les formules de changement de support (4), on peut déduire de  $\phi$  l'anamorphose  $\phi_r$  correspondant à des blocs de 10 x 10,  $r$  étant un coefficient (inférieur à 1) permettant de passer de la variance des 173 données à la variance des blocs prévue par le modèle. Lorsque la réalité n'est pas connue, c'est ainsi que l'on procède pour estimer la distribution des teneurs de blocs inconnues et donc la courbe tonnage-teneur (récupérable global).

Dans notre cas, on peut comparer sur la Figure 2-b, la distribution prévue par le modèle à l'histogramme expérimental des 583 blocs. Les variances coïncident (2,123 prévue par le modèle, 2,155 expérimentale).

Le Tableau 1 montre les principales statistiques des différentes populations :

- (1) ensemble des trous de tir
- (2) ensemble des blocs
- (3) trous de tir retenus comme information pour l'estimation
- (4) ensemble des panneaux dont on estimera le récupérable
- (5) ensemble des blocs à l'intérieur de ces panneaux

Moyennes et variances de (1) et (3) coïncident bien, ce qui montre que les trous de tir utilisés comme données de base sont bien représentatifs de l'ensemble des trous de tir. La moyenne de blocs (2) est bien égale à celle des trous de tir (1) ou (3).

TABLEAU 1

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
NOMBRE DE DONNEES	2 095	583	173	70	281
MOYENNE	2.315	2.321	2.304	2.453	2.450
VARIANCE	2.755	2.155	2.657	1.713	2.437

Par contre, les panneaux (4) et les blocs qui y sont inclus (5) ont une moyenne de 2.45 supérieure à celle des populations (1), (2) ou (3). La variance de (5) est supérieure à celle de (2). Par conséquent, les panneaux bien échantillonnés, sur lesquels seront faits les tests, correspondent à des parties du banc un peu plus riches et plus variables que l'ensemble du banc qui sert à déterminer le modèle d'anamorphose.

## 2 - VARIOGRAMMES

Les variogrammes expérimentaux de la variable anamorphosée (Figure 3) ont été ajustés par un modèle bidimensionnel anisotrope. Les directions principales d'anisotropie sont :

- la direction N-NE (67.5° d'angle trigonométrique) correspondant à la variabilité de la minéralisation la plus forte;
- la direction W-NW (157.5°) où la variabilité est la plus faible.

Le modèle est une somme de 3 schémas sphériques :

$$\gamma(h) = 0.32 \text{ Sph } 1 + 0.29 \text{ Sph } 2 + 0.39 \text{ Sph } 3$$

- Le premier schéma Sph 1 est isotrope, de portée 12 m.
- Sph 2 a une portée de 100 m dans la direction N-NE et 300 m en W-NW (anisotropie géométrique).
- Sph 3 n'existe que dans la direction N-NE où il a une portée de 350 m (anisotropie "zonale").

Pour l'estimation, le modèle sera utilisé jusqu'à des distances égales à 120 m, pour lesquels points expérimentaux et modèles concordent assez bien.

Aux plus grandes distances, le variogramme expérimental montre une dérive à grande échelle qui traduit la zonéographie du banc.

## 3 - MISE EN OEUVRE DE L'ESTIMATION DES RESERVES LOCALES

Les informations utilisées pour l'estimation des réserves d'un panneau sont situées à l'intérieur d'un voisinage de 5 x 5 panneaux. Treize pondérateurs ont été pris pour effectuer les krigeages nécessaires à l'estimation des réserves, selon le plan (Fig. 4) :

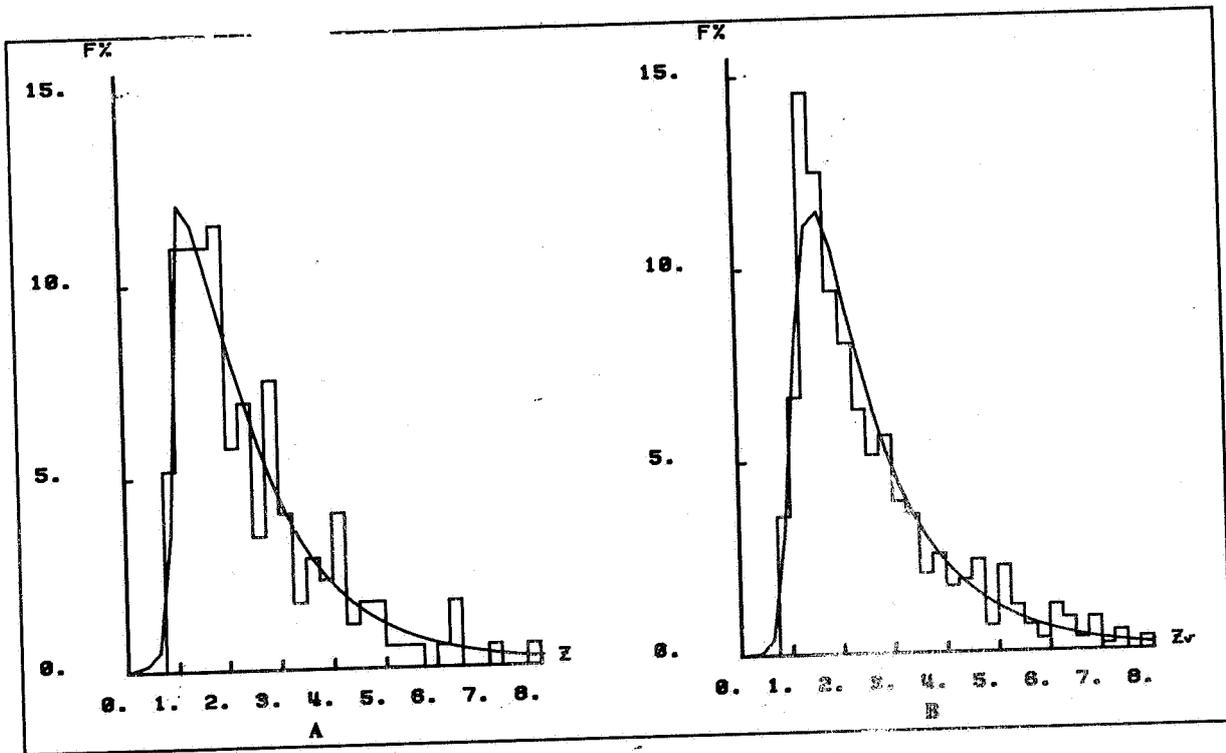


Figure 2 - a) Histogramme expérimental des données et ajustement de l'anamorphose  
 b) Histogramme des blocs et modèle prévu par l'anamorphose.

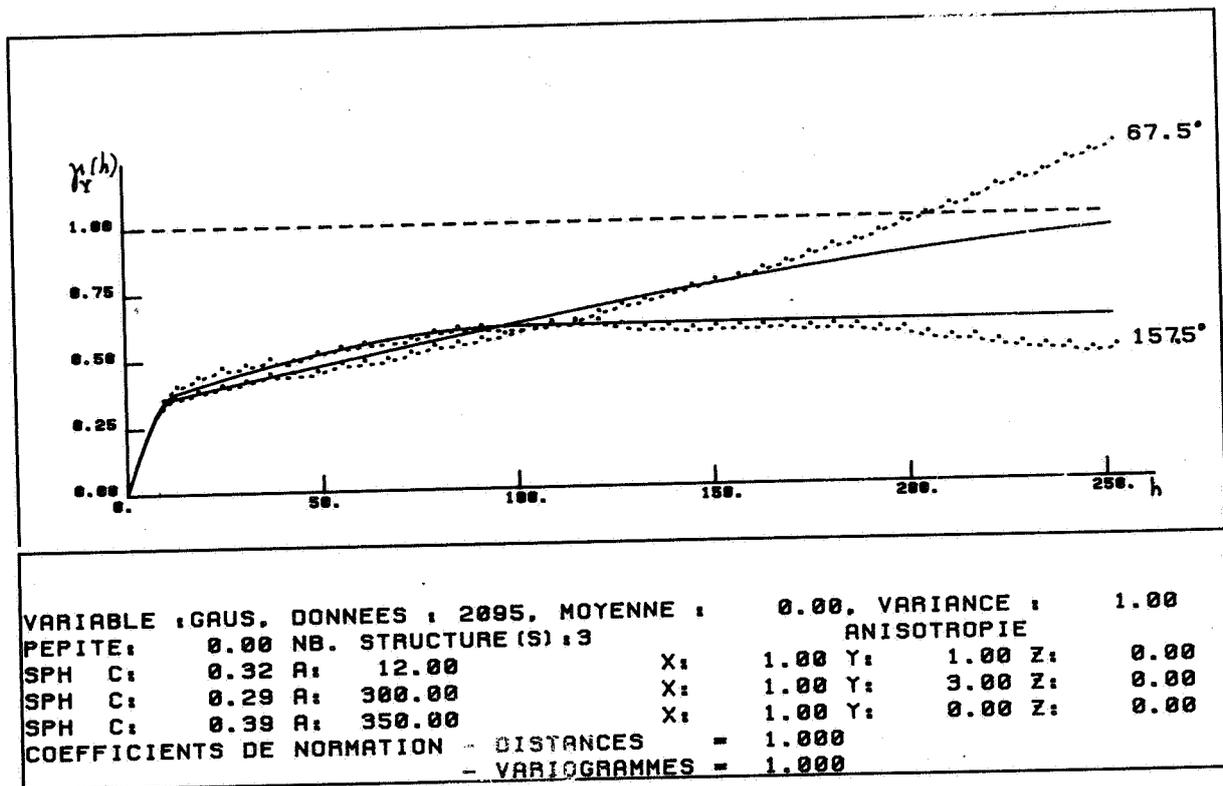


Figure 3. Variogramme des données et ajustement.

	11			
10	2	5	7	12
	3	1	8	
	4	6	9	
	13			

Figure 4. Plan de voisinage.

Pour chaque panneau, on obtient alors une estimation, par chaque méthode, des quantités de minerai P et de métal Q récupérées, en fonction de la teneur de coupure portant sur les blocs. A noter que pour la teneur de coupure nulle, le rapport Q/P représente la teneur de l'ensemble du panneau, estimée par la méthode correspondante.

#### 4 - COMPARAISON DES RESULTATS

On a choisi de comparer les résultats selon des zones géographiques. Cela permet d'apprécier l'adaptabilité de la méthode par rapport à la zonalité existante. Si on prenait une population définie d'après sa teneur réelle, la comparaison ne serait pas possible puisque nous connaissons l'effet de lissage lié aux estimateurs, et les quantités estimées seront alors plus faibles que les réelles. On pourrait aussi prendre des populations définies d'après les valeurs estimées. En cas de comparaison des méthodes [1] chacune donnerait des résultats différents et il serait alors impossible de les différencier.

Dans le Tableau suivant, on montre les résultats pour une teneur de coupure nulle. On a rajouté dans la 3ème colonne les valeurs estimées par krigeage ordinaire; sachant qu'il se cale aux données du voisinage, il est intéressant de l'utiliser comme critère dans le cas où on ne connaît pas la réalité, toujours bien entendu pour une teneur de coupure nulle.

Quatre populations ont été prises :

- D'abord, l'ensemble des 50 panneaux bien informés, dont on sait déjà qu'ils diffèrent, par la moyenne et la variance des teneurs, de l'ensemble des données ayant défini le modèle d'anamorphose gaussienne.
- Les 12 panneaux d'une zone située dans le Nord du banc. La teneur est faible (< 1.5%).
- Les 6 panneaux d'une zone située dans une partie riche du banc (teneurs > 3.2%).
- Les 15 panneaux d'une zone moyenne (8 panneaux ont des teneurs entre 1.5 et 3.2%; 7 ont des teneurs plus riches).

Les résultats sont présentés sur les Figures 5, 6, 7 et 8. Pour chacune des populations, on a indiqué, en fonction de la teneur de coupure du bloc :

- la quantité de minerai récupérable, définie en pourcentage de tonnage global de la population des panneaux.
- la quantité de métal récupérable, en prenant comme unité le tonnage d'un panneau complet.

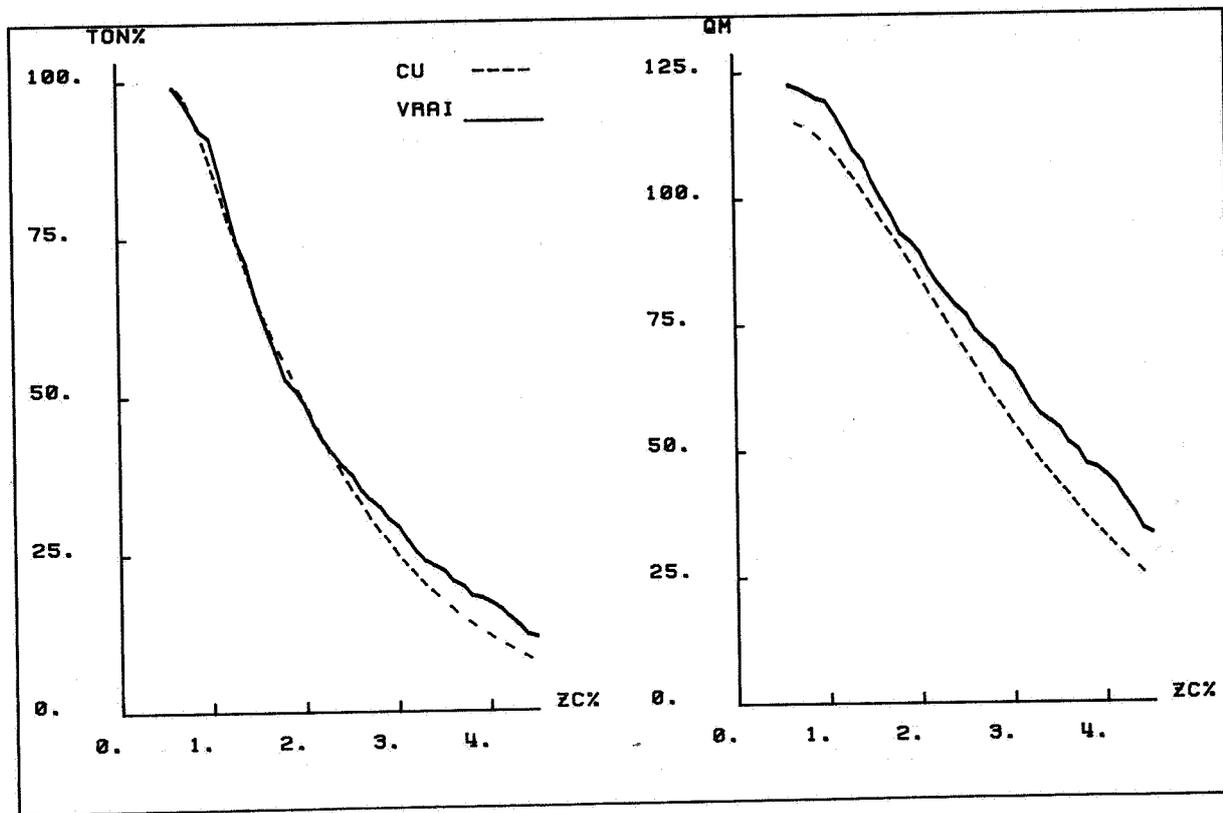


Figure 5. Comparaison globale des courbes tonnage et quantité de métal en fonction de la teneur de coupure.

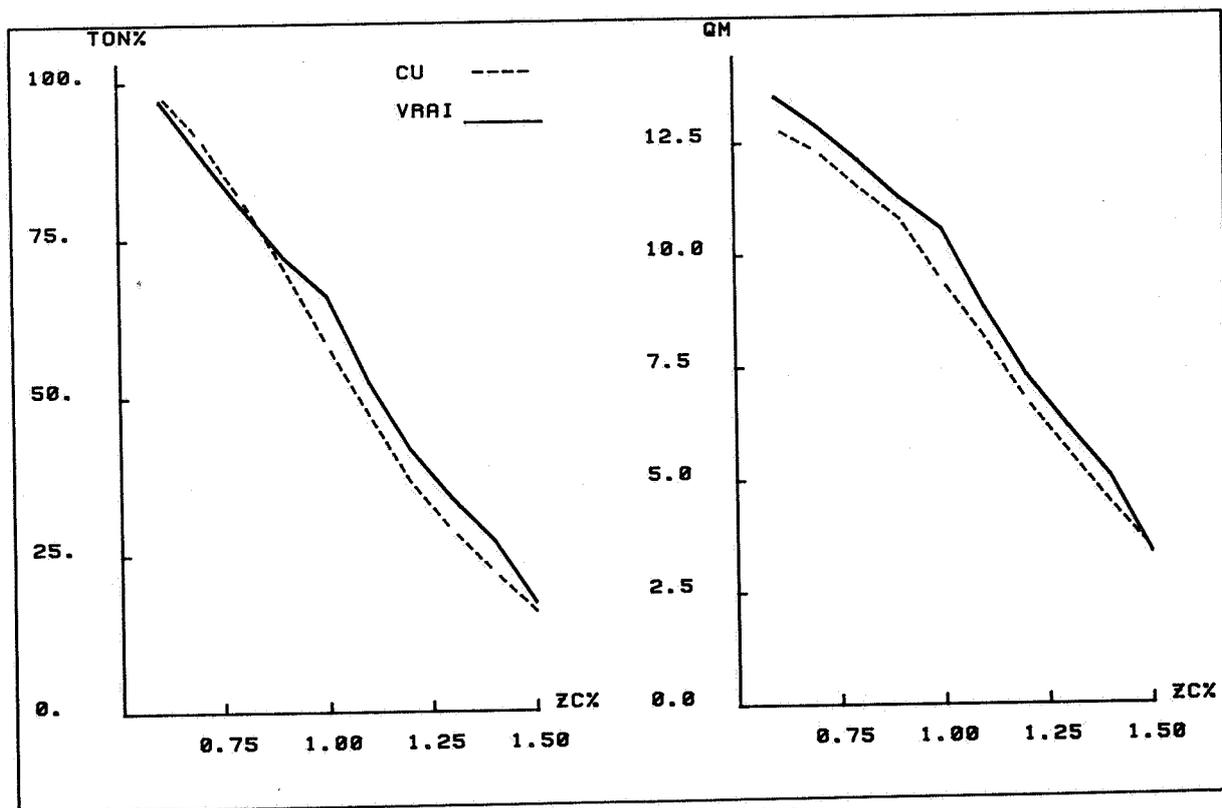


Figure 6. Comparaison locale pour une zone pauvre.

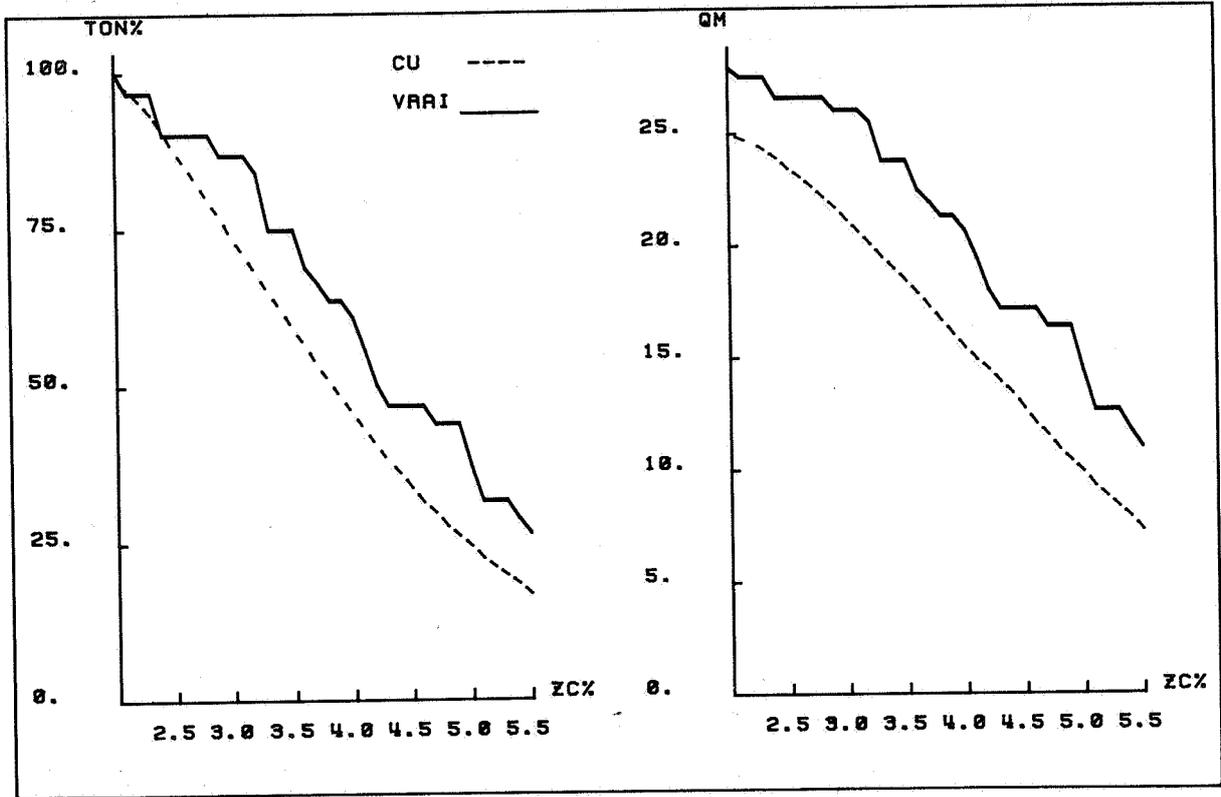


Figure 7. Comparaison locale pour une zone riche.

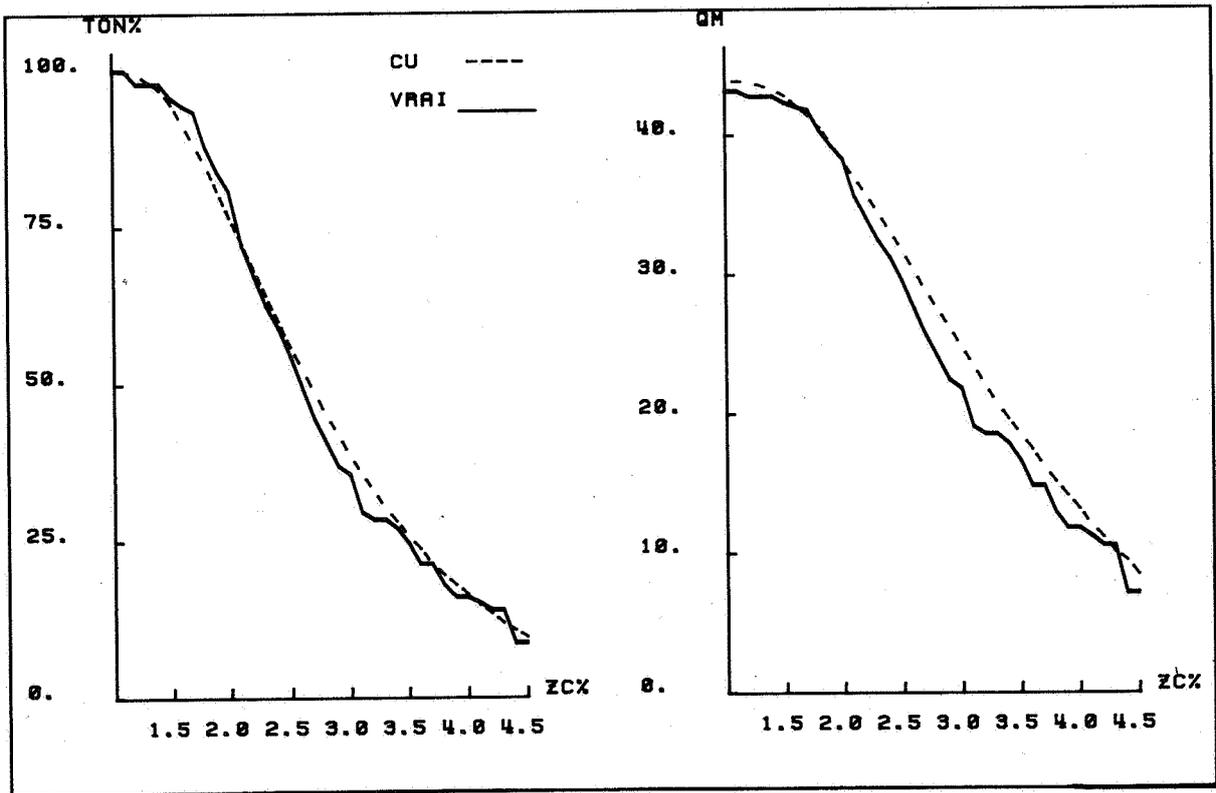


Figure 8. Comparaison locale pour une zone mixte.

TABLEAU 2 - Comparaison des teneurs de panneaux

(1) : teneurs réelles.

(2) : teneurs estimées pour le récupérable de teneur de coupure nulle.

(3) teneurs krigées.

	(1)	(2)	(3)
Ensemble des 50 panneaux	2.45	2.31	2.30
12 panneaux à faible teneur	1.16	1.07	1.12
6 panneaux à forte teneur	4.65	4.19	4.27
15 panneaux en zone moyenne	2.87	3.06	2.91

La comparaison à la réalité n'est pas toujours très bonne, en particulier sur la zone riche contenant seulement 6 panneaux. Ceci ne semble toutefois pas être un défaut de la méthode, mais indique plutôt qu'il n'est pas possible de reconstituer exactement la réalité à partir des informations. En effet, la comparaison entre teneurs vraies des panneaux, teneurs estimées par CU (à la teneur de coupure nulle), et teneurs krigées des panneaux, montre que les écarts entre le CU et la réalité sont identiques à ceux qui existent entre teneurs krigées et teneurs vraies.

Ceci signifie aussi que dans ce banc de gisement présentant une zonéographie, le CU n'est pas affecté par la zonéographie, et se cale bien aux valeurs locales.

Ceci est naturellement lié à la densité des informations (maille de 30 m) comparée à la structure géostatistique. Krigeages à moyenne connue et inconnue sont identiques, le poids de la moyenne étant voisin de zéro.

Ainsi, lorsque l'information est dense vis-à-vis de la structure ou, plus précisément, lorsque dans le krigeage le poids de la moyenne est faible, les méthodes d'estimation du récupérable local semblent s'adapter de façon satisfaisante à la non-homogénéité ou à la zonéographie du gisement.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Guibal, D., et Remacre, A., 1984, "Local estimation of the recoverable reserves comparing various methods with the reality on a porphyry copper deposit". Proc. of 2nd NATO A.S.I., Lake Tahoe, California.
2. Matheron, G., 1975, "Transfer functions and their estimation". Proc. of 1st NATO A.S.I., Rome.
3. Matheron, G., "Les fonctions de transfert des petits panneaux", CGMM, Fontainebleau, France.
4. Matheron, G., "Le krigeage disjonctif et le paramétrage local des réserves", Ecole d'Eté, C.G.M.M., Fontainebleau, France.