

L'ESTIMATION DU RÉCUPÉRABLE LOCAL

LE CONDITIONNEMENT UNIFORME

THESE

présentée à

l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Armando ZAUPA-REMACRE

Ingénieur des Mines

pour obtenir le titre de

Docteur - Ingénieur

en Sciences et Techniques Minières - Option Géostatistique

Soutenue le 13 Juin 1984

devant le jury composé de :

MM. C. CHAMBON	Président
G. MATHERON	Rapporteur
A. MARECHAL	Examineur
Ch. LANTUEJOUL	Examineur
H. SANS	Examineur

A minha mãe

R E M E R C I E M E N T S

C'est avec grand plaisir que je remercie ici tous ceux qui m'ont permis d'entreprendre ce travail et qui m'ont aidé dans sa réalisation.

Je veux tout d'abord remercier Monsieur G.MATHERON, Directeur du Centre de Géostatistique et Directeur de ma thèse, qui m'a donné l'opportunité d'accomplir le présent mémoire au sein de son Centre.

J'adresse également mes remerciements à tous ceux qui ont suivi de près mes travaux, en particulier Daniel GUIBAL, Christian LANTUEJOL, Membre du Jury, Yves TOUFFAIT et, plus particulièrement, Jacques RIVOIRARD qui n'a pas mesuré ses efforts pour m'aider. Sans son appui ce travail n'aurait pu être accompli tel quel.

Mes remerciements vont encore à l'Ecole des Mines de OURO PRETO et au Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) grâce à qui des bourses d'étude ont pu m'être accordées, qui m'ont permis de poursuivre mes recherches en France.

Je tiens à exprimer ma vive gratitude aux Membres du Jury, tout particulièrement à Monsieur le Professeur C.CHAMBON qui en assure la Présidence, à MM.A.MARECHAL et H.SANS, qui m'ont prodigué nombre de conseils stimulants.

Je remercie enfin Mme J.MARTIN et Mme M.KREYBERG ainsi que Jacques LAURENT, qui se sont chargés de la réalisation matérielle de ce travail.



L'ESTIMATION DU RECUPERABLE LOCAL
LE CONDITIONNEMENT UNIFORME.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	1
CHAPITRE 1 - <u>MODELES ET METHODES D'ESTIMATION DES FONCTIONS DE RECUPERATION</u>	5
1-1 : <u>Fonctions de récupération ponctuelle</u>	5
1.1.1 - Cokrigeage des Indicatrices à moyenne connue	5
1.1.2 - Krigeage des indicatrices	6
1.1.3 - l'Espérance Conditionnelle	7
1.1.4 - Krigeage Disjonctif (KD)	8
1-2 : <u>Fonctions de récupération de blocs</u>	14
1.2.1 - Expression des Fonctions de Récupération des blocs	16
1.2.2 - Estimation par Espérance Conditionnelle	17
1.2.3 - Estimation par Conditionnement Uniforme	18
1.2.4 - Estimation par KD	19
CHAPITRE 2 - <u>METHODES STATIONNAIRES : CAS D'ETUDES</u>	21
2.1 : <u>Cas d'étude : CHUQUICAMATA</u>	21
2.1.1 - Conditions de départ	22
2.1.2 - Histogrammes	26
2.1.3 - Variogrammes	26
2.1.4 - Tests sur les couples de variable	29
2.1.5 - L'estimation des réserves récupérables locales	34
2.1.6 - Critères de comparaison entre estimateur et réalité	35
2.1.7 - Comparaison des résultats	35
2.1.8 - Comparaison des estimations de teneurs de panneaux	39

2.2 : <u>Cas d'étude : CC</u>	
2.2.1 - Présentation des données et du domaine minier	42
2.2.2 - Histogrammes et méthodes de pondération	45
2.2.3 - L'anamorphose	47
2.2.4 - Analyse structurale	51
2.2.5 - Estimation du récupérable local par les méthodes stationnaires	51
2.3 : <u>Conclusion</u>	60
CHAPITRE 3 - <u>METHODES LOCALEMENT STATIONNAIRES</u>	
3.1 : <u>Condition de non biais</u>	62
3.1.1 - En krigeage linéaire	62
3.1.2 - En cokrigeage des indicatrices	62
3.1.3 - En krigeage disjonctif ponctuel	63
3.1.4 - Limitation des conditions de non biais	64
3.2 : <u>Estimateurs dans le cas non ponctuel</u>	66
3.2.1 - Conditionnement Uniforme par la teneur du panneau	66
CHAPITRE 4 - <u>METHODES LOCALEMENT STATIONNAIRES - CAS D'ETUDES</u>	
4.1 : <u>Cas d'étude : CHUQUICAMATA</u>	68
4.2 : <u>Cas d'étude : CC</u>	73
4.2.1 - KDO des teneurs de panneaux	74
4.2.2 - Estimation du récupérable sur blocs: conditionnement uniforme CUZ par la teneur KDO des panneaux	75
4.2.3 - Comparaison entre estimations CUZ et KDO de la distribution de points dans les panneaux	80
<u>CONCLUSION</u>	82

ANNEXES

1 - Détermination de l'anamorphose gaussienne	86
2 - Krigeage	89
3 - Convergence des estimateurs	91

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

97



INTRODUCTION

NOTION DE RESERVES RECUPERABLES

"Deux notions doivent être soigneusement distinguées lorsqu'on procède à une estimation de gisement minier.

D'une part les ressources in situ, qui sont une caractéristique purement géologique du gisement (accumulation naturelle d'un métal par exemple). D'autre part les réserves récupérables qui résultent de l'impact de l'activité humaine d'exploitation et qui représentent la fraction de ces ressources qu'il est techniquement et économiquement possible d'exploiter."

G. MATHERON

(La Géostatistique, Encyclopaedia Universalis)

Du point de vue technique, la sélection, qui permet de retenir la fraction des ressources qui seront récupérées, obéit à trois effets principaux :

1°/ L'effet de "support" (volume physique sur lequel est définie une teneur). Les teneurs que fournit l'échantillonnage sont en général mesurées sur des supports très petits (carottes de sondage par exemple). De telles teneurs sont très dispersées ; et on peut trouver en particulier des teneurs très riches. Il serait illusoire de vouloir récupérer ces seules teneurs élevées : en effet, on n'exploite pas des carottes, mais des unités beaucoup plus grosses, dont les teneurs sont moins dispersées et présentent moins de valeurs extrêmes. Il importe donc de distinguer le support d'échantillonnage (carotte) et le support de sélection, qui est le volume physique minimum que l'on est capable de sélectionner pour envoyer soit en laverie, soit au stérile. On appelle "unités de sélection", ou simplement "blocs", les unités physiques correspondant à ce support de sélection.

2°/ L'effet d'information.

Au moment de l'exploitation, de telles unités ne seront en général pas sélectionnées d'après leur teneur vraie (inconnue) mais d'après une teneur estimée. On appelle "information ultime", l'information dont on dispose au moment de la sélection. L'estimateur des blocs sera dit lui aussi "ultime". Naturellement, la sélection opérant sur les estimateurs ultimes sera moins bonne que la sélection idéale que l'on pourrait faire si l'on connaissait les teneurs réelles. En particulier, les blocs dont la teneur réelle est au-dessous de la coupure, mais dont la teneur estimée est au-dessus, seront exploités, tandis que les blocs à teneur réelle riche, mais estimés pauvres, seront considérés comme stériles.

3°/ L'effet de contrainte.

La sélection d'un bloc dépend aussi de sa position dans l'espace. On n'ira pas forcément exploiter quelques blocs riches présents dans du stérile, tandis que des blocs stériles entourés de riches pourront l'être.

Quand il n'y a pas d'"effet de contrainte", la sélection est dite "libre".

L'estimation des réserves récupérables s'appelle aussi "paramétrage technique". Elle peut se faire soit au niveau global de l'ensemble du gisement, soit au niveau local qui est celui auquel nous nous intéresserons.

La situation typique est alors la suivante. Le gisement reconnu à maille systématique est divisé en grands panneaux (V), de dimension correspondant à la maille. On veut prévoir les réserves récupérables de chacun des panneaux, c'est-à-dire le minerai et le métal qui seront récupérés après sélection des blocs (v) du panneau. En sélection libre, minerai et métal récupérables, fonctions de la coupure, sont aussi appelés "fonctions de récupération" (anciennement "fonctions de transfert"). Ces fonctions sont dites "directes" si la sélection future porte sur les teneurs réelles (supposées donc parfaitement connues au moment de l'exploitation) des blocs, tandis qu'elles sont "indirectes" si la sélection se fait sur les estimateurs des blocs.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'estimation du récupérable local, sans effet d'information ou de contrainte (fonctions de récupération directes).

La teneur de coupure étant considérée comme une variable, il s'agit donc de prévoir la distribution des teneurs réelles des blocs v dans un panneau V, l'information quantitative dont nous disposons actuellement étant constituée par la maille de sondages, de dimension comparable au panneau.

LA GEOSTATISTIQUE NON LINEAIRE POUR ESTIMER LE RECUPERABLE LOCAL.

A partir d'une telle maille, les méthodes de géostatistique linéaire (krigeage) permettent l'estimation des ressources in situ (teneur moyenne) du panneau V. Théoriquement, il est parfaitement possible d'estimer aussi par krigeage chacun des blocs v du panneau. Mais l'estimation en général très imprécise et très lissée de ces blocs ne peut absolument pas servir à définir les réserves récupérables, et encore moins à prévoir quels blocs seront sélectionnés. En effet l'information ultime dont nous disposerons au moment de la sélection sera beaucoup plus riche que l'actuelle.

Ce n'est donc pas la teneur de chaque bloc qu'il convient d'estimer avec l'information actuelle, mais bien directement le minerai et le métal que l'on récupérera en coupant à z_c sur la teneur $z(v_i)$ d'un bloc v_i du panneau, soit :

$$P = 1_{z(v_i) \geq z_c}$$

et

$$Q = z(v_i) 1_{z(v_i) \geq z_c}$$

(à une constante multiplicative près représentant le tonnage d'un bloc).

Comme l'estimation n'est pas vraiment significative au niveau d'un bloc donné, on estimera directement le récupérable pour les K blocs du panneau :

$$P = \frac{1}{K} \sum_i 1_{z(v_i) \geq z_c}$$
$$Q = \frac{1}{K} \sum_i z(v_i) 1_{z(v_i) \geq z_c}$$

(à un facteur multiplicatif près représentant le tonnage d'un panneau).

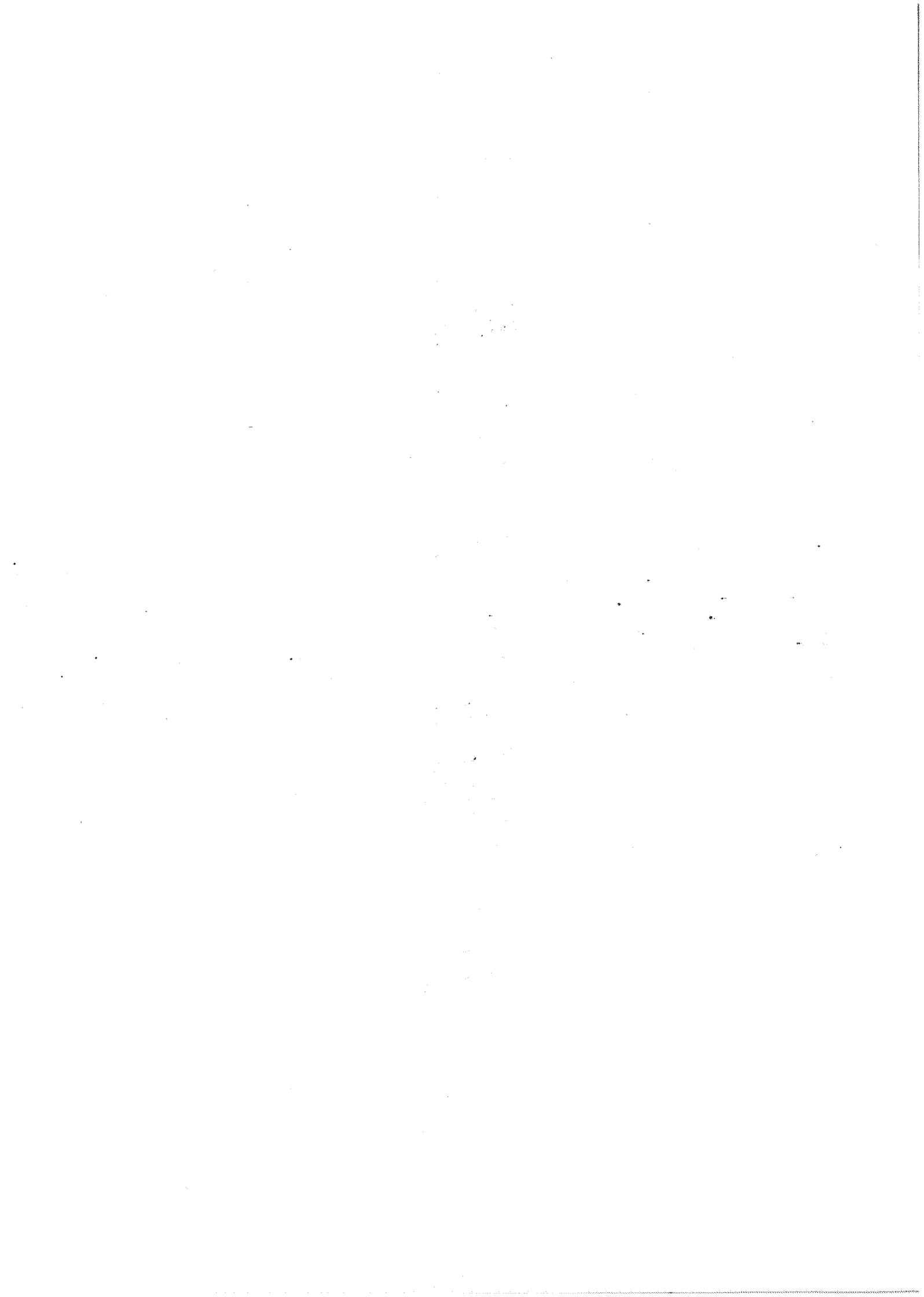
Pour estimer ces fonctions de récupération (qui sont des fonctions non linéaires des teneurs de blocs), il ne suffit plus d'utiliser les méthodes de géostatistique linéaire maintenant classiques. Depuis 1975 se développe une géostatistique non linéaire adaptée au récupérable.

Naturellement, estimer du récupérable est plus délicat qu'estimer des ressources in situ. Par conséquent, la géostatistique non linéaire est plus difficile à comprendre et plus délicate à utiliser que la linéaire. Et c'est une des raisons pour lesquelles le non-linéaire n'est pas encore d'usage courant.

Cependant, s'agissant du récupérable local, une autre raison a retardé l'utilisation des méthodes non linéaires. Il s'agit du problème de "non-stationnarité" et nous verrons ce qu'il faut entendre par là. Bornons-nous pour l'instant à indiquer que les puissantes méthodes de non-linéaire sont tributaires d'une hypothèse très stricte de stationnarité, et qu'il est nécessaire de les adapter lorsque cette hypothèse n'est plus admissible. C'est la prise en compte de ce problème qui a dicté le plan de cette thèse. Nous verrons donc d'abord les méthodes non linéaires habituelles, en théorie et en pratique. Ensuite nous verrons une façon d'opérer lorsqu'existent ces problèmes de "non-stationnarité".

P R E M I E R E P A R T I E

M E T H O D E S S T A T I O N N A I R E S



CHAPITRE 1

MODELES ET METHODES D'ESTIMATION DES
FONCTIONS DE RECUPERATION

L'élaboration d'un modèle est une étape primordiale pour résoudre des problèmes pratiques. C'est une tâche difficile qui ira de la perception claire et précise du problème jusqu'à sa résolution opératoire.

En règle générale, un modèle repose sur un certain nombre d'hypothèses. La validité de ces hypothèses est le garant de la validité du modèle, et c'est seulement dans la mesure où l'on disposera d'un modèle bien adapté à la réalité physique que l'on pourra élaborer des méthodes d'estimation efficaces (G. Matheron, 1975a).

Ce chapitre est consacré à l'évaluation de fonctions de récupération. Formellement, il s'agit d'estimer la distribution d'une variable (ponctuelle ou non) dans un panneau à partir de l'information ponctuelle disponible dans le voisinage. Si l'estimation de lois ponctuelles est relativement aisée, les choses vont singulièrement se compliquer avec les lois de blocs. Pour estimer ces derniers, il faudra recourir à plusieurs approximations dont on vérifiera la compatibilité avec la réalité physique.

1.1 FONCTIONS DE RECUPERATION PONCTUELLE.

Le problème se présente de la manière suivante : on connaît la réalisation d'une fonction aléatoire Z en un certain nombre de points $Z(x_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. On cherche à estimer la quantité $A [Z(x_0)]$ à partir de cette information disponible. Le plus souvent, A représentera un tonnage de minerai

$$P [Z(x_0)] = 1_{Z(x_0) \geq z_c}$$

ou bien une quantité de métal

$$Q [Z(x_0)] = Z(x_0) 1_{Z(x_0) \geq z_c}$$

Pour la suite, afin d'abréger les notations, on posera $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ ($\alpha = 1, N$) ainsi que $Z_0 = Z(x_0)$.

1.1.1 Cokrigage des Indicatrices à Moyenne Connue.

Introduisons la fonction indicatrice ponctuelle au seuil de coupure z :

$$1_{Z(x) \geq z} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) \geq z \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il se trouve que $A(z_0)$ s'exprime sous forme de combinaison linéaire de fonctions indicatrices. Citons en particulier les fonctions de récupération :

$$- A(Z_0) = 1_{Z_0 \geq z_c}$$

$$- A(Z_0) = Z_0 1_{Z_0 \geq z_c} \text{ s'écrit aussi } A(Z_0) = \int_0^{+\infty} 1_{Z_0 \geq zvz_c} dz$$

Ceci suggère la démarche suivante : on commence par estimer les $1_{Z_0 \geq z}$, puis on en déduit $A^*(Z_0)$ comme combinaison linéaire des $(1_{Z_0 \geq z})^*$.

On se donne une famille de seuils de coupure z_i ($i = 1, L$) et l'on pose :

$$m_i = E (1_{Z(x) \geq z_i}) = P \{Z(x) \geq z_i\}$$

L'estimateur de cokrigeage à moyenne connue de $1_{Z_0 \geq z_i}$ est de la forme

$$(1_{Z_0 \geq z_i})^* - m_i = \sum_{j=1}^L \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{j\alpha} [1_{Z_\alpha \geq z_j} - m_j]$$

ce qui conduit au système de cokrigeage

$$\sum_{k=1}^L \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\beta k} K_{jk}^{\alpha\beta} = K_{ik}^{\alpha 0} \quad j = 1, L \quad \alpha = 1, N$$

avec $K_{jk}^{\alpha\beta} = \text{Cov} [1_{Z_\alpha \geq z_j}, 1_{Z_\beta \geq z_k}]$

On constate que cette méthode requiert la connaissance des L fonctions de covariance des indicatrices ainsi que de leur $\frac{L(L-1)}{2}$ fonctions de covariance croisée, ce qui est tout-à-fait dispendieux.

1.1.2 Krigeage des Indicatrices.

Pour éviter le recours aux fonctions de covariance croisée, A. JOURNEL (1982) a proposé de faire le krigeage de chaque indicatrice indépendamment l'une de l'autre.



Cette méthode ne nécessite donc que l'ajustement des L fonctions de covariance. Cela peut du reste être évité moyennant une simplification extrême qui consiste à identifier les L fonctions de covariance à celle correspondant à la valeur médiane de l'histogramme des teneurs.

Les principales critiques à cette méthode ont été formulées par G. MATHERON (1982) et A. MARECHAL (1983). Soulignons-en deux :

- l'estimation des fonctions de récupération par krigeage des indicatrices n'est pas un véritable krigeage ;
- cette estimation soulève des problèmes de nature ordinale : les fonctions de récupération estimées n'ont aucune raison d'être des fonctions décroissantes du seuil de coupure.

La pratique du krigeage des indicatrices a donné des résultats fort décevants. On pourra consulter à cet égard les Proceedings de Lake Tahoe (1983).

1.1.3 L'Espérance Conditionnelle.

A vrai dire, on sait que théoriquement la meilleure estimation possible de $A(Z_0)$ à partir des Z est l'espérance conditionnelle

$$E [A(Z_0) | Z_1, \dots, Z_N]$$

c'est-à-dire la projection de $A(Z_0)$ sur l'espace des fonctions mesurables de la forme $f(Z_1, \dots, Z_N)$. Pour obtenir cette espérance conditionnelle, il faut utiliser la loi à $N+1$ variables (Z_0, Z_1, \dots, Z_N) . Mais celle-ci n'est en général pas accessible expérimentalement. Aussi a-t-on recours à un modèle.

On considère que Z est l'anamorphosée d'une fonction multigaussienne Y . Autrement dit, il existe une fonction bijective ϕ telle que $Z(x) = \phi[Y(x)]$. En posant $\psi = A \circ \phi$, on a

$$E [A(Z_0) | Z_1, \dots, Z_N] = E [\psi(Y_0) | Y_1, \dots, Y_N]$$

Or, on sait que la variable Y_0 conditionnelle à $Y_\alpha = y_\alpha$ ($\alpha = 1, N$) suit une loi de Gauss dont la moyenne et la variance sont respectivement le krigeage simple y_0^K à l'aide des Y_α et la variance du krigeage σ_K^2 . On en déduit

$$E [A(Z_0) | Z_\alpha = \varphi(y_\alpha), \alpha = 1, N] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_K} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-y_K}{\sigma_K} \right)^2} dy$$

En particulier, on obtient :

- si $A(Z_0) = 1_{Z_0 \geq z_c}$ (minerai), alors

$$A^*(Z_0) = 1 - G \left(\frac{\varphi^{-1}(z_c) - y_K}{\sigma_K} \right)$$

- si $A(Z_0) = Z_0 1_{Z_0 \geq z_c}$ (métal), alors

$$A^*(Z_0) = \int_{\varphi^{-1}(z_c)}^{+\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_K} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-y_K}{\sigma_K} \right)^2} dy$$

1.1.4 Krigage Disjonctif (K.D.)

1.1.4.1 Cas général.

Désignons par \mathcal{D} l'espace des fonctions mesurables de la forme $f_1(Z_1) + \dots + f_N(Z_N)$. L'estimateur par K.D. $A^*(Z_0)$ est la projection de $A(Z_0)$ sur \mathcal{D} . Il est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes :

i) $A^*(Z_0) \in \mathcal{D}$, c'est-à-dire $A^*(Z_0) = \sum_{\alpha=1}^N f_\alpha(Z_\alpha)$.

ii) $A^*(Z_0) - A(Z_0)$ est orthogonal à tout élément de \mathcal{D} , c'est-à-dire que l'on a $\langle A^*(Z_0) - A(Z_0), Y \rangle = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{D}$.

La condition ii) entraîne en particulier que $\langle A^*(Z_0), f(Z_\alpha) \rangle = \langle A(Z_0), f(Z_\alpha) \rangle$ pour toute fonction mesurable f et pour tout $\alpha = 1, N$. Mais d'après la définition de l'espérance conditionnelle, ceci veut exactement dire que

$$E [A^*(Z_0) | Z_\alpha] = E [A(Z_0) | Z_\alpha] \quad \alpha = 1, N \quad (1)$$

Inversement, si $A^*(Z_0)$ vérifie (1), alors $A^*(Z_0)$ est nécessairement la projection de $A(Z_0)$ sur \mathcal{D} , car cet espace est engendré par les $f(Z_\alpha)$.

Ainsi donc, l'estimateur par K.D. $A^*(Z_0)$ est caractérisé par le système (1). Il ne met en jeu que la connaissance des lois bivariées.

Maintenant, comment résoudre le système (1) ? De manière générale, il faut bien reconnaître que cela n'est guère chose aisée. Toutefois, il est possible de s'en tirer assez facilement dans le cadre des modèles isofactoriels (MATHERON, 1973). Le cas bigaussien constitue précisément l'un d'entre eux.

1.1.4.2 Modèle isofactoriel bigaussien.

Soient U et V deux variables aléatoires de même loi normale réduite g et de coefficient de corrélation ρ . La densité du couple (U, V) est donc

$$f(u, v) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{1-\rho^2} \right)$$

En introduisant les polynômes normés d'Hermite

$$\eta_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{g(u)} \frac{d^n g(u)}{du^n}$$

on peut montrer que la densité f se réécrit

$$f(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \eta_n(u) \eta_n(v) g(u) g(v)$$

Tout l'intérêt des polynômes d'Hermite vient de ce qu'ils constituent une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}, g)$. Ils entrent en jeu dans la formule fondamentale suivante :

$$E[\eta_n(U) | V] = \rho^n \eta_n(V) \quad (2)$$

dont l'établissement est tout-à-fait élémentaire.

$$E[\eta_n(U) | V = v] = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(u) f(u|v) dv = \sum_{p=0}^{+\infty} \rho^p \eta_p(v) \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_n(u) \eta_p(u) g(u) du = \rho^n \eta_n(v)$$

compte tenu de l'orthogonalité des η_n . De là, il s'ensuit aisément que :

$$\text{Cov}[\eta_n(U), \eta_n(V)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \rho^n & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Plus généralement, soit φ une fonction réelle telle que

$$E[\varphi^2(U)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(u) g(u) du < +\infty.$$

Alors φ se développe suivant la base des η_n , et l'on a :

$$E[\varphi(U)|V] = E\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \eta_n(U)|V\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \rho^n \eta_n(V) \quad (4)$$

Considérons maintenant une fonction aléatoire stationnaire Y . Nous dirons que Y est bigaussienne si elle vérifie les propriétés suivantes :

i) $Y(x)$ suit une loi normale réduite

ii) la densité des couples $(Y(x), Y(y))$ est bigaussienne.

Cette densité se met sous la forme

$$f_{xy}(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_{xy}^n \eta_n(u) \eta_n(v) g(u) g(v)$$

Regardons alors ce que deviennent les équations du K.D. dans ce cadre bigaussien.

1.1.4.3 Krigeage disjonctif bigaussien.

On sait d'après 1.1.4.1 que l'estimateur par K.D. de $A(Z_0)$ à partir des Z_α est caractérisé par les relations

$$E[A^*(Z_0)|Z_\alpha] = E[A(Z_0)|Z_\alpha] \quad \alpha = 1, N$$

Supposons que Z soit l'anamorphosée d'une fonction aléatoire bigaussienne Y . En d'autres termes, il existe une fonction bijective φ telle que $Z(x) = \varphi[Y(x)]$ pour tout x . On posera

$$\psi = A \circ \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \eta_n$$

Exprimé à l'aide de Y , le système de K.D. se récrit

$$E [A^*(Z_0) | Y_\alpha] = E [\psi(Y_0) | Y_\alpha] \quad \alpha = 1, N$$

Puis, compte tenu du développement de ψ , il vient :

$$\begin{aligned} E [A^*(Z_0) | Y_\alpha] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n E [\eta_n(Y_0) | Y_\alpha] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n E [\eta_n^*(Y_0) | Y_\alpha] \quad \alpha = 1, N \end{aligned}$$

ce qui montre, par unicité du K.D., que

$$A^*(Z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \eta_n^*(Y_0)$$

où les $\eta_n^*(Y_0)$ sont les estimées par K.D. des $\eta_n(Y_0)$ à partir des Y_α .

Fixons donc n , et cherchons à évaluer $\eta_n^*(Y_0)$. Cet estimateur est caractérisé par

$$E [\eta_n^*(Y_0) | Y_\alpha] = E [\eta_n(Y_0) | Y_\alpha] \quad \alpha = 1, N$$

Si $n = 0$, $\eta_n(Y_0) = 1$, donc $\eta_n^*(Y_0) = 1$. Supposons donc $n \neq 0$.

D'après la relation (2), le deuxième membre vaut $\rho_{\alpha 0}^n \eta_n(Y_\alpha)$. Quant au premier membre, compte tenu de

$$\eta_n^*(Y_0) = \sum_{\beta} f_{n\beta}(Y_\beta)$$

et notant λ_{np}^β les coefficients de $f_{n\beta}$ sur la base des η_p , il vaut $\sum_{\beta, p} \lambda_{np}^\beta \rho_{\alpha\beta}^p \eta_p(Y_\alpha)$. Le système de K.D. est donc réduit à

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{\beta=1}^N \lambda_{np}^\beta \rho_{\alpha\beta}^p \right) \eta_p(Y_\alpha) = \rho_{\alpha 0}^n \eta_n(Y_\alpha) \quad \alpha = 1, N$$

ce qui donne

$$\sum_{\beta=1}^N \lambda_{np}^\beta \rho_{\alpha\beta}^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ \rho_{\alpha 0}^n & \text{si } p = n \end{cases} \quad \alpha = 1, N$$

Considérons $p \neq n$. Si $p \neq 0$, la matrice du terme général $\rho_{\alpha\beta}^p = \text{Cov} [\eta_p(Y_\alpha), \eta_p(Y_\beta)]$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq N$) est régulière, donc $\lambda_{np}^\beta = 0$

pour $\beta = 1, N$. Si $p = 0$, on a seulement $\sum_{\beta=1}^N \lambda_{n,0}^\beta = 0$, mais aucun de ces termes n'entre en compte dans l'évaluation de $\eta_n^*(Y_0)$, puisque $\eta_n(Y_\beta) = 1$ pour tout β . Finalement, les seuls termes à considérer sont les $\lambda_{n,n}^\beta$. Notons les λ_n^β pour simplifier. L'estimateur de $\eta_n(Y_0)$ se met sous la forme

$$\eta_n^*(Y_0) = \sum_{\beta=1}^N \lambda_n^\beta \eta_n(Y_\beta),$$

les λ_n^β étant solution du système

$$\sum_{\beta=1}^N \lambda_n^\beta \rho_{\alpha\beta}^n = \rho_{\alpha 0}^n \quad \alpha = 1, N$$

On reconnaît là l'équation du krigeage simple de $\eta_n(Y_0)$ à l'aide des $\eta_n(Y_\alpha)$.

Nous arrivons finalement à la conclusion suivante :
 L'estimateur par K.D. de $A(Z_0)$ à partir des Z_α est de la forme

$$A^*(Z_0) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n [\eta_n(Y_0)]^K$$

où les ψ_n sont les coefficients du développement en polynômes d'Hermite de $A \circ \varphi$, et où $[\eta_n(Y_0)]^K$ est l'estimateur par krigeage simple de $\eta_n(Y_0)$ à partir des $\eta_n(Y_\alpha)$.

1.1.4.4 Application aux fonctions de récupération.

Il suffit de donner la valeur des coefficients ψ_n associés aux diverses fonctions de récupération.

i) Quantité de minerai $P(Z_0) = 1_{Z_0 \geq z_c}$

On écrit $P(Z_0) = 1_{Y_0 \geq y_c}$ avec $y_c = \varphi^{-1}(z_c)$, et, compte tenu du développement

$$1_{y \geq y_c} = 1 - G(y_c) - g(y_c) \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{n-1}(y_c) \eta_n(y)$$

on en déduit

$$P^*(Z_0) = 1 - G(y_c) - g(y_c) \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{n-1}(y_c) [\eta_n(Y_0)]^K$$

ii) Quantité de métal $Q(Z_0) = Z_0^1 \mathbb{1}_{Z_0 \geq z_c}$

On écrit $Q(Z_0) = \varphi(Y_0) \mathbb{1}_{Y_0 \geq y_c}$ avec $y_c = \varphi^{-1}(z_c)$ d'où l'on tire les coefficients φ_n :

$$\varphi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \mathbb{1}_{y \geq y_c} \eta_n(y) g(y) dy$$

ou, ce qui est équivalent

$$\varphi_n = \int_{y_c}^{+\infty} \varphi(y) \eta_n(y) g(y) dy$$

Dans le cas où φ est donnée par son développement en polynomes d'Hermite (cf Annexe 1) :

$$\varphi = \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi_p \eta_p$$

on en déduit

$$\varphi_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi_p \int_{y_c}^{+\infty} \eta_p(y) \eta_n(y) g(y) dy$$

les coefficients $U_{p,n} = \int_{y_c}^{+\infty} \eta_p(y) \eta_n(y) g(y) dy$

se déduisant facilement les uns des autres par les relations

$$\begin{cases} U_{n,p} = U_{p,n} \\ U_{0,0} = 1 - G(y_c) \\ U_{n,0} = -\eta_{n-1}(y_c) g(y_c) & (n > 0) \\ U_{n,p} = -\eta_p(y_c) \eta_{n-1}(y_c) g(y_c) + p U_{n-1,p-1} & (n,p > 0) \end{cases}$$

1.2 FONCTIONS DE RECUPERATION DE BLOCS.

En pratique minière, la véritable exploitation se fait sur des unités de sélection qui dépassent largement la taille des carottes. L'effet de support n'est qu'exceptionnellement négligeable. Le problème est donc de savoir comment approcher la distribution des blocs en un panneau V à partir d'une information ponctuelle.

De façon générale, ce problème est appelé "changement de support" et il s'agit là d'un des principaux problèmes posé à la géostatistique (G. Matheron, 1983 a).

Si v désigne le support de l'unité de sélection, nous pouvons maintenant définir la fonction indicatrice de blocs :

$$1_{Z(v) \geq z_c} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(v) \geq z_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui, notons-le, n'est pas une régularisée des fonctions d'indicatrices de points.

Il s'agit donc d'estimer les fonctions de récupération d'un panneau V contenant K blocs v_i :

- Minerai récupérable : $P = \frac{1}{K} \sum_i 1_{Z(v_i) \geq z_c}$
- Métal récupérable : $Q = \frac{1}{K} \sum_i Z(v_i) 1_{Z(v_i) \geq z_c}$

Les éléments de réponse sont extrêmement réduits. Nous savons que la moyenne des teneurs de blocs sera la même que celle des points. Nous savons aussi moyenner la structure ponctuelle sur v et donc approcher la variance des blocs, opération courante en géostatistique linéaire. Par contre, nous ne savons rien sur la forme de F_v . Mais de la pratique nous pouvons tirer des observations fort utiles du type : "si nous avons ponctuellement une distribution lognormale, nous constatons très souvent que la distribution des blocs reste plus ou moins lognormale à condition que v ne soit pas trop grand". En théorie, on sait que cela n'est pas vrai. Il s'agit évidemment d'une approximation. Une autre information utilisée pour construire des modèles de changement de support est la relation de Cartier

$$E [Z(\underline{x}) | Z(v)] = Z(v)$$

Nous utiliserons ici le modèle gaussien discret que l'on peut considérer comme applicable lorsque l'anamorphose gaussienne est possible et qu'elle conduit à des couples bigaussiens. (G. Matheron, 1978).

a) Expression du Changement de Support.

Connaissant la distribution des teneurs ponctuelles $Z(x)$ grâce à l'anamorphose ponctuelle φ :

$$Z(x) = \varphi(Y(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \eta_n(Y(x))$$

il s'agit de déterminer la distribution des teneurs de blocs $Z(v)$, c'est-à-dire l'anamorphose des blocs. Soit Y_v l'anamorphosée gaussienne de $Z(v)$. Dans le modèle gaussien discret, l'espace est partitionné en blocs, et un point est considéré comme aléatoire dans son bloc.

Soit \underline{x} un point aléatoire dans son bloc v . On a alors d'après la relation de Cartier :

$$Z(v) = E[Z(\underline{x}) | Z(v)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n E[\eta_n(Y(\underline{x})) | Y_v] = \sum_0^{+\infty} \varphi_n r^n \eta_n(Y_v)$$

en supposant que le couple $(Y(\underline{x}), Y_v)$ est bigaussien de corrélation r .

L'anamorphose des blocs - notée φ_r , se développe donc avec les coefficients $\varphi_n r^n$, le coefficient r étant déterminé en pratique de façon à respecter la variance de $Z(v)$ que l'on sait calculer par ailleurs :

$$\text{Var } Z(v) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi_n r^n)^2$$

b) Modèle Multivariable.

Soit v_i les blocs d'anamorphosées Y_{v_i} , et \underline{x}_i les points aléatoires dans chacun de ces blocs, dont les anamorphosées sont $Y(\underline{x}_i)$. Dans le modèle gaussien discret, les $(Y_{v_i}, Y_{v_j}, \dots, Y_{\underline{x}_i}, Y_{\underline{x}_j}, \dots)$ sont multigaussiens ; la loi est donc parfaitement déterminée par les covariances deux à deux.

Covariance bloc-bloc : $R_{ij} = \text{Cov}(Y_{v_i}, Y_{v_j})$

déterminée à partir de $\text{Cov}(Z(v_i), Z(v_j))$ (que l'on calcule par la géostatistique linéaire) grâce à la formule facile à obtenir :

$$\text{Cov}(Z(v_i), Z(v_j)) = \sum_1 (\varphi_n r^n)^2 (R_{ij})^n$$

Covariance point-bloc : $r_{ij} = \text{Cov}(Y(x_i), Y(v_j))$

égale, dans le modèle, à : $r \text{Cov}(Y_{v_i}, Y_{v_j})$.

Cas particulier : un point aléatoire dans son bloc :

$$r_{ij} = \text{Cov}(Y(x_i), Y_{v_i}) = r \text{ déjà vu.}$$

Covariance point-point : $\rho_{ij} = \text{Cov}(Y(x_i), Y(x_j))$

égale à $r^2 \text{Cov}(Y_{v_i}, Y_{v_j})$.

Cas particulier : deux points x_i et x_i' aléatoires dans le même bloc. Alors :

$$\text{Cov}(Y(x_i), Y(x_i')) = r^2$$

mais : $\text{Cov}(Y(x_i), Y(x_i)) = \text{Var } Y(x_i) = 1.$

Ces covariances impliquent que, dans ce modèle, conditionnellement à son bloc, un point est indépendant de toutes les autres variables.

1.2.1 Expression des Fonctions de Récupération des Blocs.

Il s'agit donc d'estimer une fonction de $Z(v)$, $A(Z(v))$, (autrement dit une fonction de $Y_v, \phi(Y_v)$), ou une moyenne $\frac{1}{K} \sum_i \phi(Y_{v_i})$ de telles fonctions pour les K blocs v_i d'un panneau V . Le formalisme de l'estimation de $\phi(Y_v)$ est exactement le même que celui de l'estimation ponctuelle de $\phi(Y_0)$. Il suffit donc de réécrire les systèmes de krigeage utilisés en ayant soin d'utiliser les covariances point-point et point-bloc du modèle gaussien discret.

1.2.2 Estimation par Espérance Conditionnelle.

Le système de krigeage de Y_v par les Y_α devient :

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \text{Cov}(Y_{\alpha}, Y_{\beta}) = \text{Cov}(Y_v, Y_{\alpha}) \quad \forall \alpha$$

c'est-à-dire (avec $\text{Cov}(Y_{\alpha}, Y_{\alpha}) = 1$) :

$$\lambda_{\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_{\beta} r^2 R_{\alpha\beta} = r R_{\alpha v} \quad \forall \alpha$$

d'où l'estimateur :

$$E[\psi(Y_v) | Y_{\alpha} \dots] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_K} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - Y_v^K}{\sigma_K} \right)^2} dy$$

En particulier, pour les fonctions de récupération P et Q d'un bloc, on obtient :

$$E(P | Y_{\alpha} \dots) = 1 - G \left[\frac{y_c - Y_v^K}{\sigma_K} \right], \text{ avec cette fois } y_c = \varphi_r^{-1}(z_c) .$$

$$E[Q | Y_{\alpha} \dots] = \int_{y_c}^{\infty} \varphi_r(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_K} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - Y_v^K}{\sigma_K} \right)^2} dy$$

REMARQUE : Il peut être intéressant, en particulier pour Q, de passer par le développement en polynômes d'Hermite :

$$Q = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n \eta_n(Y_v)$$

Soit $s^2 = 1 - \sigma_K^2 = \text{Var } Y_v^K$. Comme, en krigeage à moyenne connue, on a aussi :

$$s = \text{Cov} \left(Y_v, \frac{Y_v^K}{s} \right), \text{ on en déduit :}$$

$$E \left[\eta_n(Y_v) | Y_{\alpha} \dots \right] = s^n \eta_n \left(\frac{Y_v^K}{s} \right), \text{ et donc :}$$

$$E [Q | Y_{\alpha} \dots] = \sum_{n=0}^{+\infty} Q_n s^n \eta_n \left(\frac{Y_v^K}{s} \right)$$

Pour K blocs v_i dans un panneau, on aura de façon générale :

$$E \left[\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{v_i}) | Y_{\alpha} \dots \right] = \frac{1}{K} \sum_i E \left[\psi(Y_{v_i}) | Y_{\alpha} \dots \right]$$

ce qui nécessite le krigeage de chaque Y_{V_i} avec les informations Y_α .

On obtient évidemment de la même façon les estimateurs de P et Q pour tous les blocs du panneau.

Si on passe par un développement en polynômes d'Hermite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{V_i}) &= \frac{1}{K} \sum_i \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \eta_n(Y_{V_i}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \psi_n \left[\frac{1}{K} \sum_i \eta_n(Y_{V_i}) \right] \end{aligned}$$

Il est alors plus simple d'estimer $\frac{1}{K} \sum_i \eta_n(Y_{V_i})$ par

$$[\eta^*]_{MG} = \frac{1}{K} \sum_i s_i^n \eta_n\left(\frac{Y_{V_i}}{s_i}\right)$$

pour obtenir ensuite directement l'estimateur de $\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{V_i})$.

1.2.3 Estimation par Conditionnement Uniforme.

Nous avons vu que la loi d'un bloc Y_{V_i} conditionnellement à l'information Y_α ..., ne dépend que du krigeage $(Y_{V_i})^*$ de ce bloc, ce qui signifie que chaque bloc Y_{V_i} se voit conditionné par son propre krigeage, $Y_{V_i}^*$.

Une solution plus simple consiste à conditionner uniformément tous les blocs Y_{V_i} par l'estimateur Y_K du krigeage de $\frac{1}{K} \sum_i Y_{V_i}$ par les Y_α :

$$Y_K = \sum_\alpha \lambda^\alpha Y_\alpha$$

qui obéit au système :

$$\sum_\beta \lambda^\beta \text{cov}(Y_\alpha, Y_\beta) = \frac{1}{K} \sum_i \text{Cov}(Y_{V_i}, Y_\alpha) \quad \forall \alpha$$

$$\text{soit} \quad \lambda^\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda^\beta r^2 R_{\alpha\beta} = \frac{1}{K} \sum_i r R_{V_i\alpha} \quad \forall \alpha$$

En posant $S_K^2 = \text{Var } Y_K$, le coefficient de corrélation de Y_K/S_K et Y_{V_i} est

$$\rho_i = \frac{r \sum_\alpha \lambda^\alpha R_{\alpha i}}{S_K}$$

On en déduit la loi de Y_{v_i} à Y_K fixé :

$$f(Y_{v_i} | Y_K) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho_i^2}} g\left(\frac{Y_{v_i} - \rho_i Y_K/S_K}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right)$$

Les estimations qui nous intéressent s'écriront alors :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{v_i}) | Y_K\right] &= \frac{1}{K} \sum_i E[\psi(Y_{v_i}) | Y_K] \\ &= \frac{1}{K} \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho_i^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y - \rho_i Y_K/S_K)^2}{1-\rho_i^2}} dy \end{aligned}$$

En particulier pour P et Q :

$$\begin{aligned} E[P | Y_K] &= \frac{1}{K} \sum_i \left[1 - G\left(\frac{y_c - \rho_i Y_K/S_K}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) \right] \\ E[Q | Y_K] &= \frac{1}{K} \sum_i \int_{y_c}^{\infty} \phi_r(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho_i^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(y - \rho_i Y_K/S_K)^2}{1-\rho_i^2}} dy \end{aligned}$$

En passant par les polynômes d'Hermité

$$E[\eta_n(Y_{v_i}) | Y_K/S_K] = \rho_i^n \eta_n[Y_K/S_K]$$

Par conséquent $[\eta_n^*]_{CU} = E\left[\frac{1}{K} \sum_i \eta_n(Y_{v_i}) | Y_K/S_K\right] = \frac{1}{K} \sum_i \rho_i^n \eta_n[Y_K/S_K]$

d'où l'estimateur final de $\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{v_i}) : \sum_{n=0} \psi_n \eta_n^*$

1.2.4 Estimation par K.D.

Nous avons déjà vu que :

$$\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{v_i}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n \left(\frac{1}{K} \sum_i \eta_n(Y_{v_i}) \right)$$

Il s'agira donc d'estimer $\frac{1}{K} \sum_i \eta_n(Y_{v_i})$. Son estimateur est de la forme :

$$[\eta_n^*]_{KD} = \sum_{\alpha} \lambda_n^{\alpha} \eta_n(Y_{\alpha})$$

avec le système

$$\sum_{\beta} \lambda_n^{\beta} [\text{cov } Y_{\alpha}, Y_{\beta}]^n = \frac{1}{K} \sum_i [\text{cov}(Y_{V_i}, Y_{\alpha})]^n \quad \forall \alpha$$

ou

$$\lambda_n^{\alpha} + \sum_{\beta \neq \alpha} \lambda_n^{\beta} (r^2 R_{\alpha\beta})^n = \frac{1}{K} \sum_i (r R_{V_i\alpha})^n \quad \forall \alpha$$

On en déduit directement l'estimation de $\frac{1}{K} \sum_i \psi(Y_{V_i})$ et donc, en particulier, des fonctions de récupération.

REMARQUE : Il est intéressant de noter que, dans le développement des méthodes vues ci-dessus, les facteurs sont égaux pour $n = 1$. En K.D. et C.U. ils sont égaux au krigeage des anamorphosées, et en M.G. à la moyenne des krigeages des Y_{V_i} . Cela est d'ailleurs visible en observant les premiers membres des systèmes de chaque méthode. Comme il s'agit du facteur le plus important, il faut s'attendre à ce que les résultats de ces méthodes présentent entre eux une grande similitude. (D. Guibal et A. Remacre, 1983).

C H A P I T R E 2

METHODES STATIONNAIRES : CAS D'ETUDES

Ce chapitre est consacré aux applications des méthodes d'estimation du récupérable à deux cas d'études :

- un banc de la mine de cuivre de CHUQUICAMATA
- un gisement de cuivre nommé ici "CC"

Les résultats permettent de définir les limites d'utilisation des méthodes employées.

2.1 - CAS D'ETUDE : CHUQUICAMATA

- Plus puissant que la géostatistique linéaire, le non-linéaire repose naturellement sur des hypothèses beaucoup plus fortes.

Si on veut par exemple comparer différents estimateurs linéaires, on constatera que le krigeage donne des résultats meilleurs pour peu que l'on connaisse bien la structure géostatistique (vario-gramme).

Les méthodes non-linéaires, au contraire, vont nécessiter des hypothèses, dont certaines seront beaucoup plus difficilement contrôlables. Ainsi, à structure et distribution connues, le KD isofactoriel en modèle gaussien discret ne pourra être optimal que si la loi des couples est proche de la binormalité. Avec l'estimateur Espérance Conditionnelle, c'est la loi multivariable qui doit être multinormale. Une grande partie des hypothèses échappera au contrôle expérimental, et, au bout du compte, c'est la pratique qui sanctionnera la méthode. Ceci dit, il faut s'assurer que les modèles utilisés ont une chance de bien représenter la réalité. Et c'est pourquoi on ne néglige pas dans la suite de faire certains tests, par exemple sur les lois des couples.

- Lorsqu'il s'agit de tester des méthodes d'estimation, l'idéal est bien sûr de pouvoir comparer la réalité à la prévision donnée

par le modèle.

A défaut de connaître (même a posteriori) de façon précise la plupart des gisements réels, une solution consiste à travailler sur un gisement simulé, lequel est donc en principe connu aussi précisément que l'on veut. Il est alors facile et intéressant de juger du plus ou moins grand succès remporté par telle méthode d'estimation. Cependant il est difficile de généraliser les résultats obtenus, car, par construction, la simulation obéit à un modèle mathématique bien défini. Ainsi, rien d'étonnant à ce que l'estimateur Espérance Conditionnelle présenté précédemment se révèle très bon sur une simulation respectant par construction la multinormalité. Par contre, il serait instructif de voir les résultats d'un tel estimateur sur une simulation mosaïque.

Or, les méthodes d'estimation sont faites pour estimer des gisements réels, et une simulation n'est pas un gisement réel, lequel n'obéit pas à un modèle mathématique donné. C'est pourquoi il est aussi extrêmement intéressant d'utiliser, pour tester des méthodes, des gisements réels "très bien connus", comme l'exemple qui va suivre.

Dans un tel cas, la tâche est très délicate, car la "réalité" n'est tout de même pas parfaitement connue ; et également, elle n'est pas connue partout aussi précisément. La latitude est assez étroite en ce qui concerne la taille des "blocs" ou "panneaux" que l'on peut "utiliser", ainsi que leur nombre. L'interprétation des résultats est très instructive, mais peut être compliquée en raison du nombre parfois faible des panneaux sur lesquels on connaît réalité et prévision.

2.1.1 Conditions de départ

Les données étudiées proviennent d'un banc de mine dont on connaît les analyses de trous de tir (teneur en cuivre), Fig.2.1, qu'on va considérer comme représentant la réalité. Plus précisément les données correspondent à un banc de 13m d'épaisseur dans un gisement du type "porphyre cuprifère", réduit donc à deux dimensions.

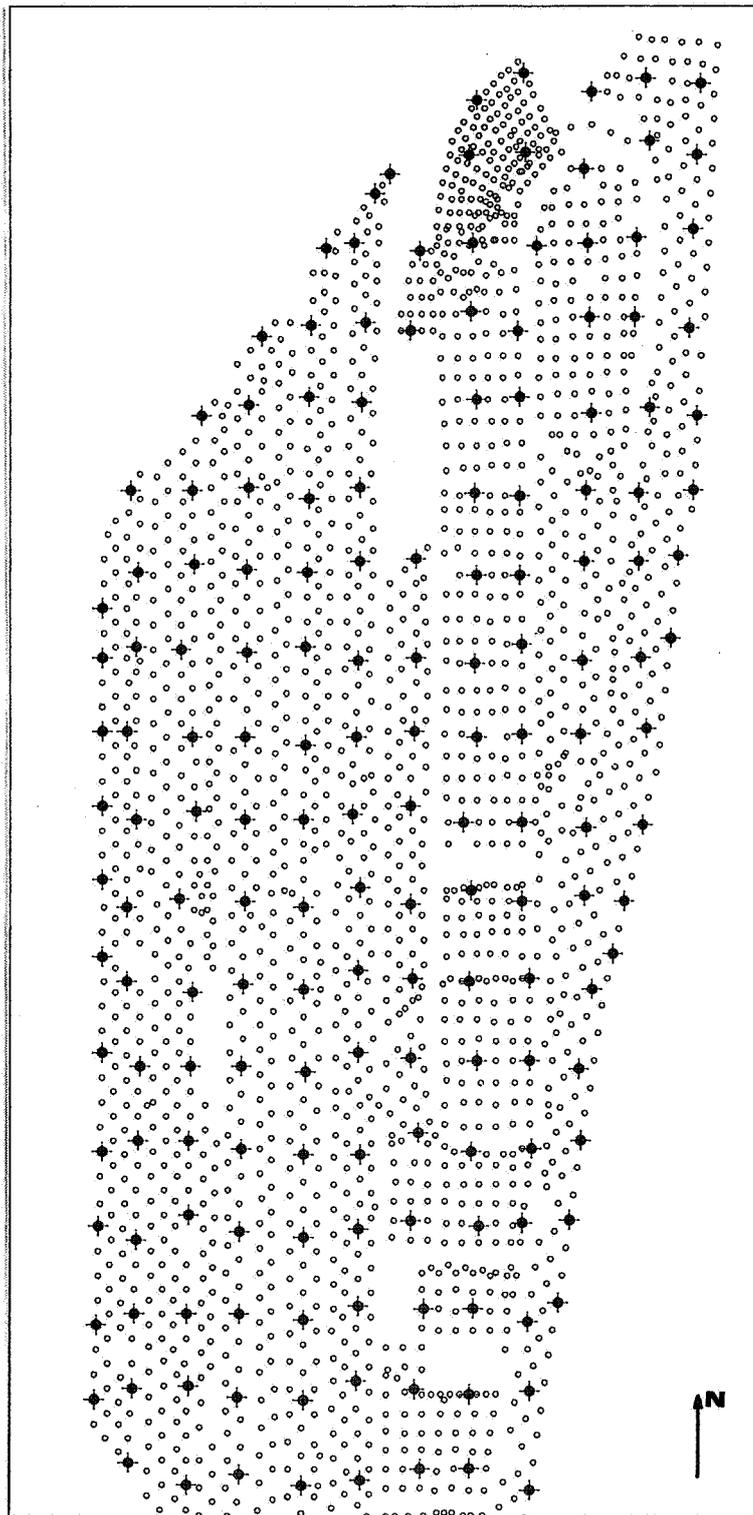


Fig. 1 - Ensemble des trous de tir et
sélection d'un trou de tir à
la maille de 30m.

On observe une zonalité (ici un léger enrichissement vers le sud du banc), ce qui confirme le type de gîte mentionné.

On dispose des résultats de 2095 trous de tir. Afin de pouvoir constituer les données de base pour l'estimation, on a classé ceux-ci sur un réseau régulier de panneaux de 30m x 30m. En prenant l'échantillon le plus central de chaque panneau, on a obtenu 173 trous de tir. Pour constituer la "réalité" de référence, on a défini pour les mêmes 2095 données un réseau de blocs de 10m x 10m x 13m (qui sera l'unité de sélection). Dans ce réseau, on a pris en compte les blocs dans lesquels se trouvaient au moins 2 trous de tir. Ensuite, on a calculé la moyenne pour ces blocs et on les a reclassés pour constituer les panneaux de 30 x 30 x 13 m³. Un panneau n'est retenu que s'il contient plus de 5 blocs ainsi informés.

Nous devons noter que l'étude portera toujours sur trous de tir, évitant ainsi la tâche toujours difficile de comparer des données originaires de deux sources différentes, l'une, les sondages et l'autre, les trous de tir.

On dispose ainsi de deux fichiers : l'un contenant les données de base, l'autre la "réalité". Avec les données de base, on va estimer les fonctions de récupération de blocs de 10m x 10m x 13m à l'aide des méthodes citées précédemment, et on comparera ces résultats au contenu du deuxième fichier.

Le tableau 1 montre les principales statistiques des différentes populations :

- (1) ensemble des trous de tir
- (2) ensemble des blocs
- (3) trous de tir retenus comme information pour l'estimation
- (4) ensemble des panneaux dont on estimera le récupérable
- (5) ensemble des blocs à l'intérieur de ces panneaux.

.../

T A B L E A U 1

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
NOMBRE DE DONNEES	2095	583	173	50	281
MOYENNE (%)	2.315	2.321	2.304	2.453	2.450
VARIANCE (% ²)	2.755	2.155	2.657	1.713	2.437

Moyennes et variances de (1) et (3) coïncident bien, ce qui montre que les trous de tir utilisés comme données de base sont bien représentatifs de l'ensemble des trous de tir. La moyenne de blocs (2) est bien égale à celle des trous de tir (1) ou (3).

Par contre, les panneaux (4) et les blocs qui y sont inclus (5) ont une moyenne de 2.45 supérieure à celle des populations (1), (2) ou (3). La variance de (5) est supérieure à celle de (2). Par conséquent, les panneaux bien échantillonnés, sur lesquels seront faits les tests, correspondent à des parties du banc un peu plus riches et plus variables que l'ensemble du banc qui sert à déterminer le modèle d'anamorphose.

2.1.2 Histogrammes

L'histogramme de 173 données ponctuelles a été modélisé par une fonction d'anamorphose développée en polynômes d'Hermite (Fig.2.2) - C'est un histogramme simple qui ne présente pas de problème particulier.

Nous avons ensuite comparé la distribution expérimentale des 583 blocs à la prévision du modèle. Les variances prévue (2.123) et expérimentale (2.155) sont pratiquement identiques. L'anamorphose après correction de support selon le modèle gaussien discret ajusté de façon convenable l'histogramme expérimental (fig.2.3)

2.1.3 Variogrammes

La structure du gisement est bien représentée par les variogrammes de la gaussienne ponctuelle (fig.2.4). Elle présente clairement des anisotropies géométriques et zonales. Les directions principales d'anisotropie sont :

- N-NE (67.5° d'angle trigonométrique) correspondant à la variabilité plus forte,
- N-NW (157.5° idem) où la variabilité est la plus faible.

Le modèle ajusté, en conséquence, n'est pas simple et correspond à 3 schémas sphériques :

$$\gamma(h) = C_1 \text{ sph}(a_1) + C_2 \text{ sph}(a_2) + C_3 \text{ sph}(a_3)$$

avec les paramètres :

$C_1 = 0.32$	$a_1 = 12 \text{ m.}$	- isotrope -
$C_2 = 0.29$	$a_2 = 300\text{m}$ 100m	dans les directions de 67.5° et de 157.5° (anisotropie géométrique)
$C_3 = 0.39$	$a_3 = 350\text{m}$	inexistante dans la direction 157.5° (anisotropie zonale)

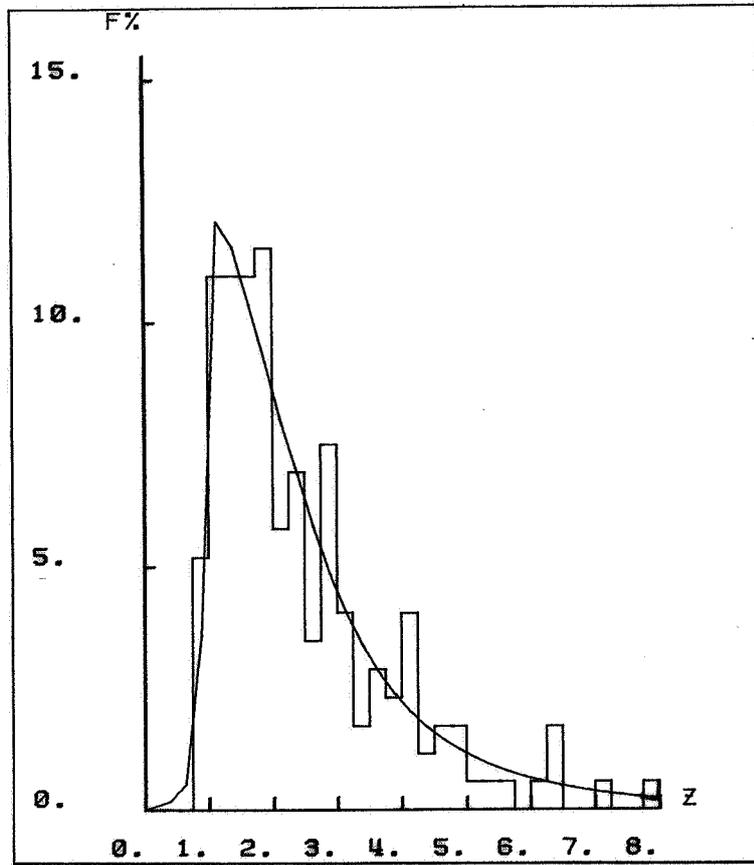


Fig. 2.2 - Histogramme expérimental des données et ajustement de l'anamorphose.

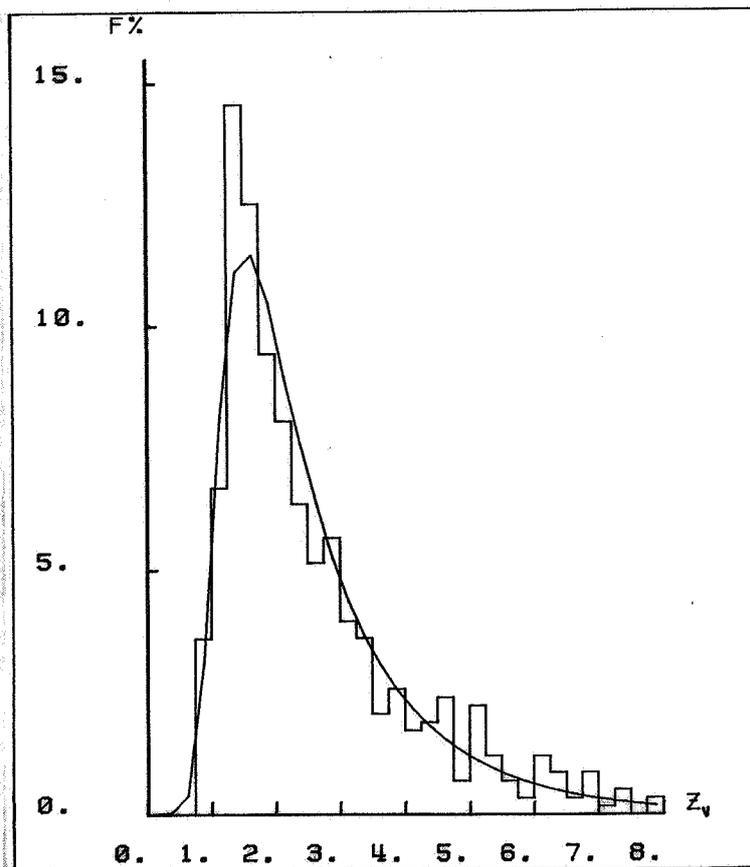


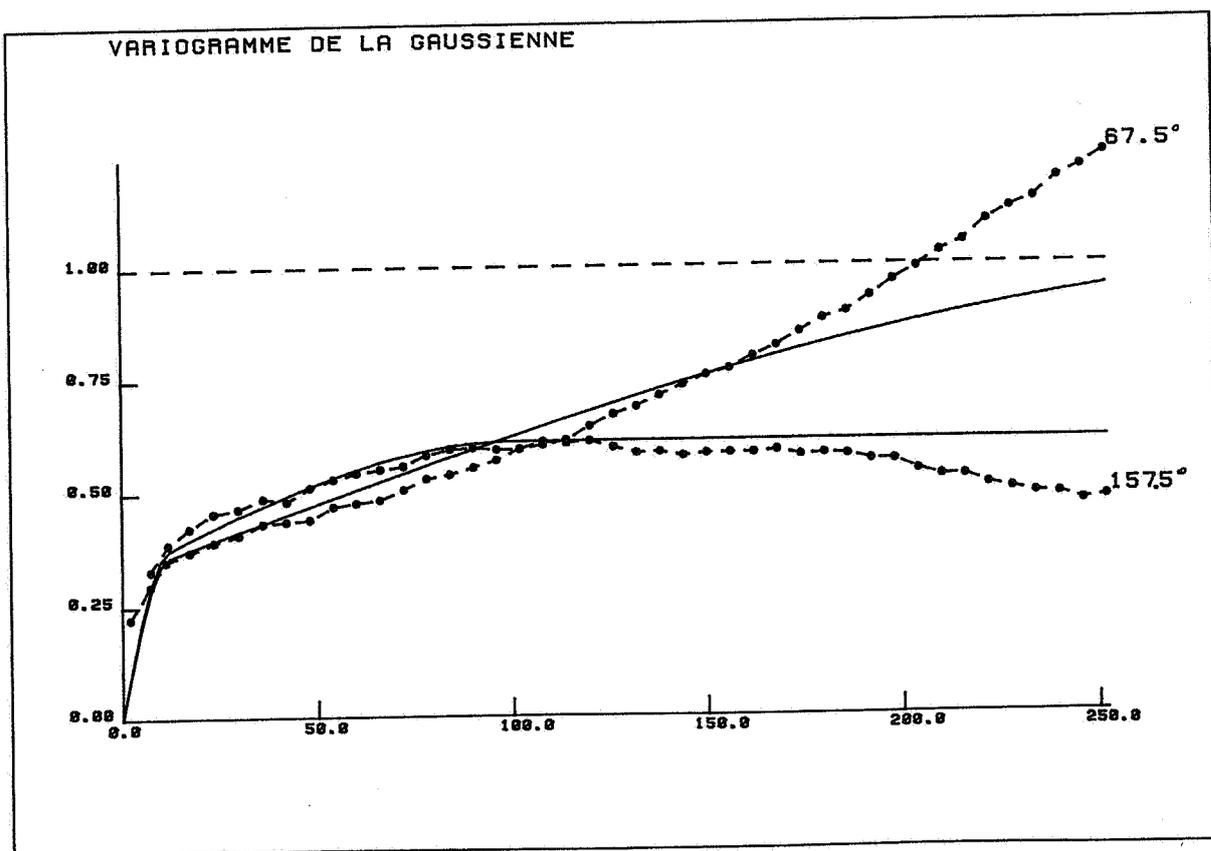
Fig. 2.3 - Histogramme expérimental des blocs et modèle de changement de support.

Toute l'information due à l'anisotropie peut être résumée dans la matrice suivante :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note une dérive à grande échelle, qui n'a pas été prise en compte. Pour l'estimation, le modèle sera utilisé jusqu'à des distances égales à 120m. Pour cela l'accord entre les points expérimentaux et le modèle est assez bon.

Pour pouvoir juger des méthodes d'estimation que l'on utilisera, il faut s'assurer que la structure utilisée est la bonne, ce qui est la moindre des hypothèses. C'est pourquoi les variogrammes ont été calculés avec tous les points. Le variogramme fait sur les 173 points à maille de 30m s'adapte très bien à cette structure, excepté, bien entendu, pour $h < 30m$.



2.1.4 Tests sur les couples de variables

L'estimateur Espérance Conditionnelle repose sur des hypothèses de multinormalité, le KD sur des hypothèses de binormalité.

Avec le KD, et probablement aussi avec l'espérance conditionnelle, les résultats des méthodes seront d'autant meilleures que les couples de gaussiennes sont bigaussiens.

1) Test de discrimination de modèles : bigaussien, mosaïque

Le modèle mosaïque consiste en une partition aléatoire de l'espace en compartiments à chacun desquels sont affectées des teneurs constantes, indépendantes et identiquement distribuées (G.MATHERON 1982, 1984). Une des caractéristiques de ce modèle est l'absence de destruction des hautes teneurs (toutes les indications ont même corrélogramme), contrairement au modèle bigaussien. Et dans ce modèle mosaïque le cokrigeage des indicatrices ponctuelles (KD) s'identifie à leur krigeage.

Dans le modèle mosaïque et dans le bigaussien il existe une relation simple entre le variogramme classique des anamorphosées et le "variogramme d'ordre 1" :

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{2} E \left[| Y(x+h) - Y(x) | \right]$$

qui est aussi le variogramme moyen de toutes les indicatrices.

En mosaïque, on doit avoir : $\frac{\gamma_1(h)}{\gamma(h)}$ constant et égal à $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

En bigaussien, on doit avoir : $\frac{[\gamma_1(h)]^2}{\gamma(h)}$ constant et égal à $\frac{1}{\pi}$

D'après ce critère, les figures 2.5 et 2.6 correspondant aux 2 directions principales d'anisotropie rejettent nettement le modèle mosaïque, tandis que le modèle bigaussien est en bon accord avec la réalité. Les tests suivants vont permettre de juger plus finement des hypothèses de binormalité.

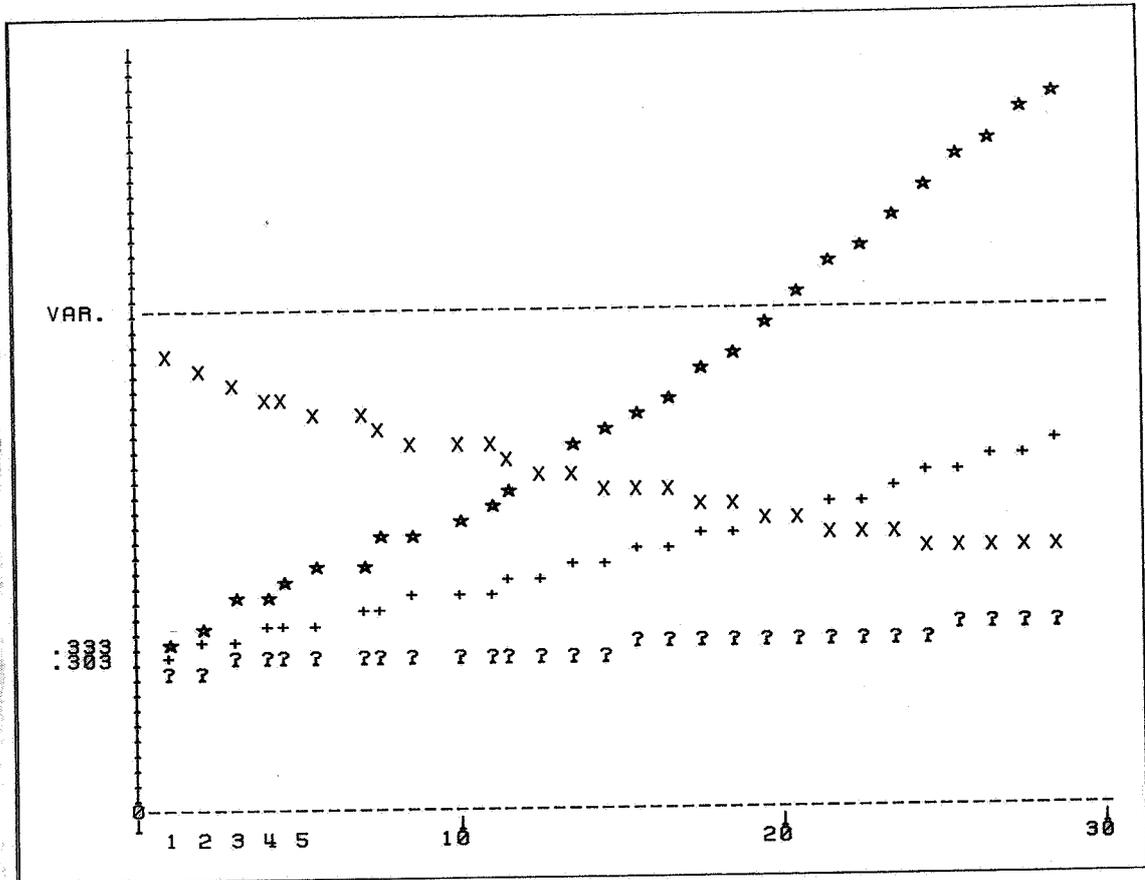


Fig. 2.5 - Direction 67.5°

** $\gamma(h)$ xx $\gamma_1(h)/\gamma(h)$
 ++ $\gamma_1(h)$?? $[\gamma_1(h)]^2/\gamma(h)$

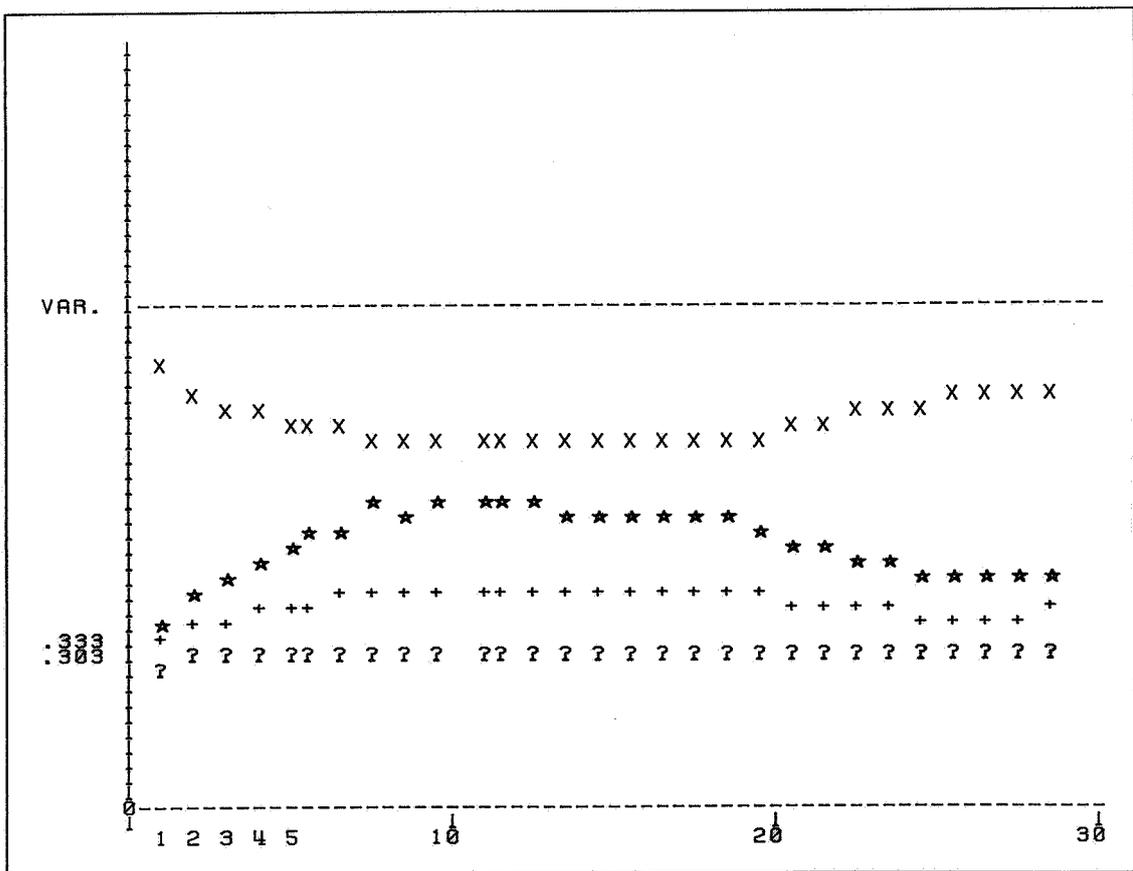


Fig. 2.6 - Direction 157.5° : idem, Fig. 2.5.

2) Tests de la formule : $E \left[H_n(X) | Y \right] = \rho^n H_n(Y)$

Cette relation entre deux gaussiennes réduites X et Y doit être vérifiée si le couple est bigaussien.

Quand n varie, ces relations fournissent les moments de la variable X conditionnée par Y , donc la loi conditionnée et par conséquent celle du couple.

Ces relations, que nous testerons pour les premières valeurs de n (de 1 à 4), nous semblent d'autant plus intéressantes qu'on fait un grand usage des polynômes d'Hermite dans la géostatistique non-linéaire sous anamorphose gaussienne.

2.a) Test point-point

Les tests entre $Y(x)$ et $Y(x+h)$ ont été faits pour des distances variables, dont les plus grandes dépassent la portée. Les résultats sont satisfaisants, ainsi que le témoigne la figure 2.7, correspondant à la distance $h = 10 \pm 1m$. En abscisse $Y(x)$ varie de $- 2$ à $+ 2$ ce qui représente 95% des valeurs (distribution normale)

Le trait continu représente les résultats expérimentaux, le trait en pointillé indique la valeur prévue par l'hypothèse binormale, c'est-à-dire :

$$\rho^n H_n(Y(x))$$

La comparaison est assez bonne ; des écarts peuvent se produire toutefois vers les valeurs extrêmes de Y où le nombre d'échantillons est faible (queues de la distribution gaussienne).

Fig: 2.7 .../

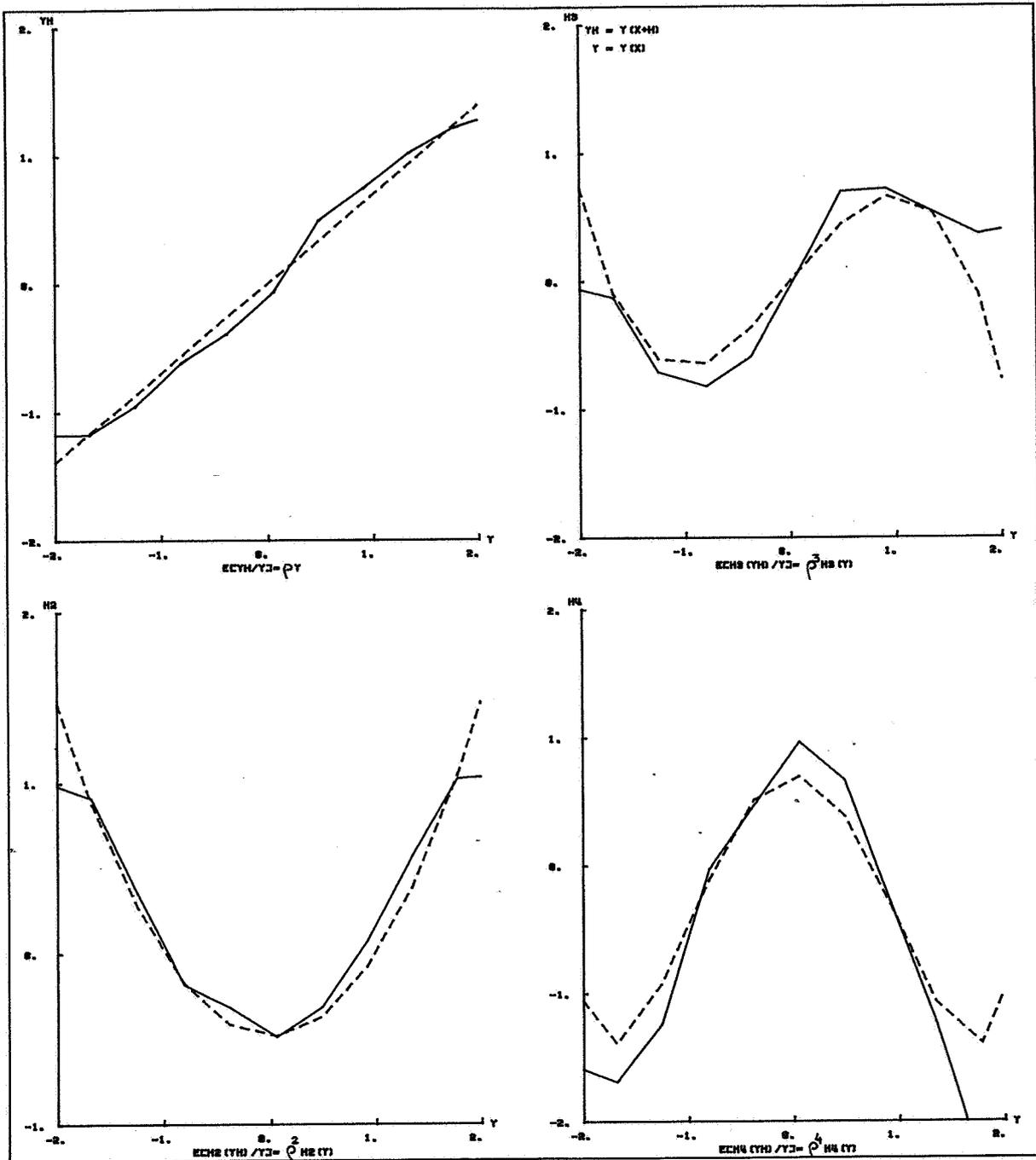


Fig. 2.7 - Test point-point.

2.b Test point-bloc

Pour chaque bloc v contenant au minimum 3 trous de tir, on a pris aléatoirement un trou de tir \underline{x} .

On a donc les 2 gaussiennes : $Y_v = \varphi_v^{-1}(Z(v))$

et $Y(\underline{x}) = \varphi^{-1}(Z(\underline{x}))$.

La binormalité de ces variables est à l'origine de la formule de changement de support du modèle gaussien discret : leur corrélation est alors précisément le coefficient de changement de support.

Les résultats de la figure 2.8 sont satisfaisants. Ils indiquent un coefficient de corrélation égal à 0.88 (les résultats ne bougent pratiquement pas en prenant le tir le plus central du bloc : 0.89). Cette valeur est peu différente du coefficient de changement de support calculé à partir de la variance des blocs (0.91).

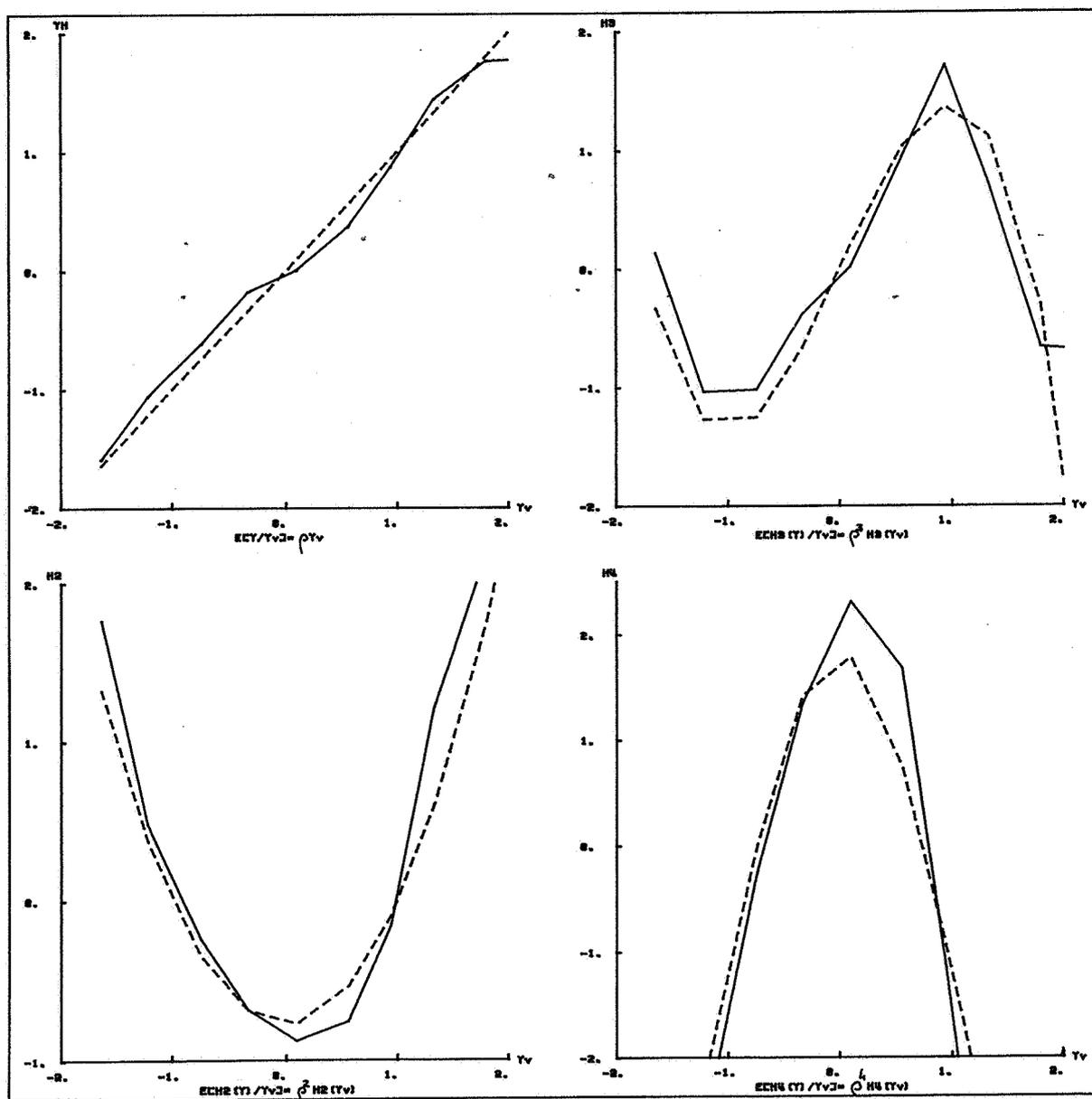


Fig. 2.8 - Test point-bloc.

2.1.5 L'estimation des réserves récupérables locales

Il s'agit d'estimer la distribution de blocs de 10m x 10m (unité de sélection) à l'intérieur de panneaux de 30m x 30m. On pourra comparer les résultats de ces estimations avec la "réalité" sur les 50 panneaux considérés comme bien connus.

Les informations utilisées pour l'estimation locale sont contenues à l'intérieur d'un voisinage de 5x5 panneaux avec 13 pondérateurs selon le plan :

	11			
10	2	5	7	12
	3	1	8	
	4	6	9	
	13			

Plan de voisinage.

Les 3 méthodes : KD, Espérance Conditionnelle en modèle multigaussien MG, conditionnement uniforme par krigeage des gaussiennes CU, ont été utilisées.

Rappelons que pour le KD, il s'agit de kriger chaque H_n , donc de résoudre autant de systèmes de krigeage que de polynômes d'Hermite retenus.

Pour le multi-gaussien, il faut kriger Y_{v_i} pour chacun des 9 blocs de panneau, donc résoudre un système de krigeage avec 9 deuxièmes membres.

En conditionnement uniforme, on krige d'un coup $(\frac{1}{K} \sum_i Y_{v_i})$.

On obtient donc finalement les quantités estimées de minerai P et de métal Q récupérables pour chaque coupure.

2.1.6 Critères de comparaison entre estimateur et réalité

A moins que l'information utilisée pour l'estimation ne soit extrêmement abondante, il est clair qu'il existera des différences entre les prévisions et la réalité au niveau de chacun des panneaux. Pour pouvoir juger de l'efficacité d'une méthode d'estimation locale, il va donc falloir comparer prévision et réalité sur des ensembles de panneaux (En pratique manière de telles comparaisons peuvent être faites, par exemple, au niveau de l'ensemble des panneaux d'une carrière pilote).

Nous disposons ici de 50 panneaux sur lesquels la réalité est considérée comme connue. Cet ensemble de départ a été divisé en trois ensembles, représentant 3 zones géographiques, dont les teneurs moyennes sont assez différentes et qui seront appelées dans la suite: riche, pauvre et mixte.

Ces populations contenant relativement peu de panneaux, il ne serait pas surprenant que des écarts existent entre réalité et prévisions. Cependant ce procédé permet d'étudier le comportement des estimateurs vis à vis de la zonéographie, ce qui est d'autant plus intéressant qu'ils dépendent largement des caractéristiques globales, en particulier de l'anamorphose.

A cet égard, il sera très instructif de comparer l'estimation des teneurs de panneaux (récupérable à coupure nulle) aux résultats du krigeage ordinaire qui, étant calé aux données de voisinage, n'est pas affecté par la zonéographie du gisement.

2.1.7 Comparaison des résultats

Quatre populations ont donc été prises, soit plus précisément:

- D'abord, l'ensemble des 50 panneaux bien informés, dont on sait déjà qu'ils diffèrent, par la moyenne et la variance des teneurs, de l'ensemble des données ayant défini le modèle d'anamorphose gaussienne.

- Les 12 panneaux d'une zone située dans le Nord du banc. La teneur y est faible ($< 1.5\%$).

- Les 6 panneaux d'une zone située dans une partie riche du banc (teneurs $> 3.2\%$)

- Les 15 panneaux d'une zone moyenne (8 panneaux ont des teneurs entre 1.5 et 3.2%, 7 ont des teneurs plus riches).

Les résultats sont présentés sur les figures suivantes. Pour chacune des populations, on a indiqué, en fonction de la teneur de coupure du bloc :

- la quantité de minerai récupérable, définie en pourcentage de tonnage global de la population des panneaux.
- la quantité de métal récupérable, en prenant comme unité le tonnage d'un panneau complet.

On note tout d'abord, que les 3 méthodes KD, MG et CU conduisent à des estimations très peu différentes les unes des autres. Le CU, testé ici pour la première fois, et ne nécessitant que l'anamorphose gaussienne et un seul krigeage, semble être une méthode très intéressante par ses résultats et sa grande simplicité.

La comparaison à la réalité peut être considéré comme bonne, excepté sur la zone riche contenant seulement 6 panneaux. Ceci ne semble toutefois pas être un défaut des méthodes, mais indique plutôt qu'il n'est pas possible ici de reconstituer exactement la réalité à partir des informations. En effet, la comparaison entre teneurs vraies des panneaux, teneurs estimées par nos méthodes de récupérable (à la teneur de coupure nulle), et teneurs krigées des panneaux, montre que les écarts entre nos méthodes et la réalité sont identiques à ceux qui existent entre teneurs krigées et teneurs vraies. (Tableau 2)

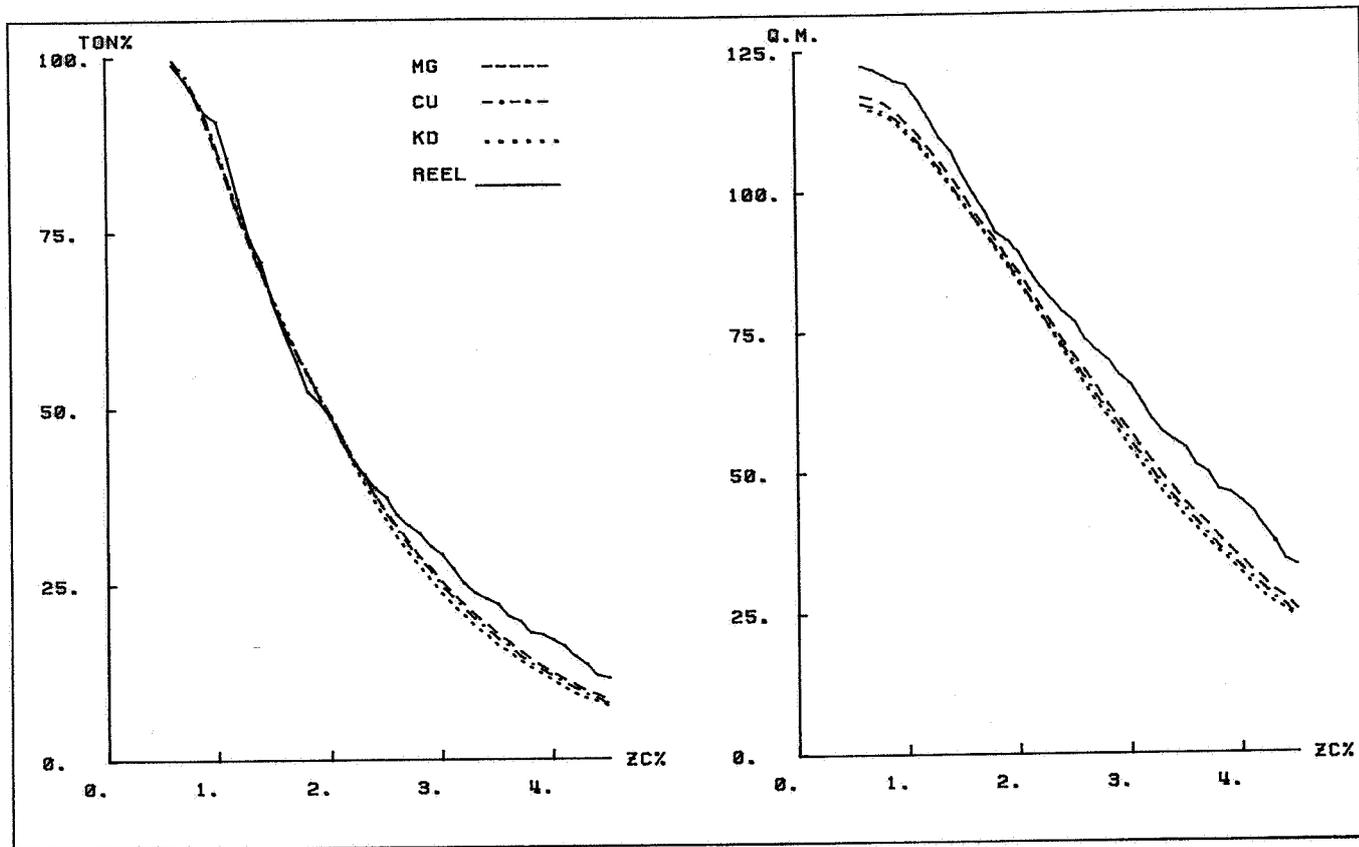


Fig. 2.9 - Comparaison globale des courbes tonnage et quantité de métal en fonction de la teneur de coupure. (50 panneaux)

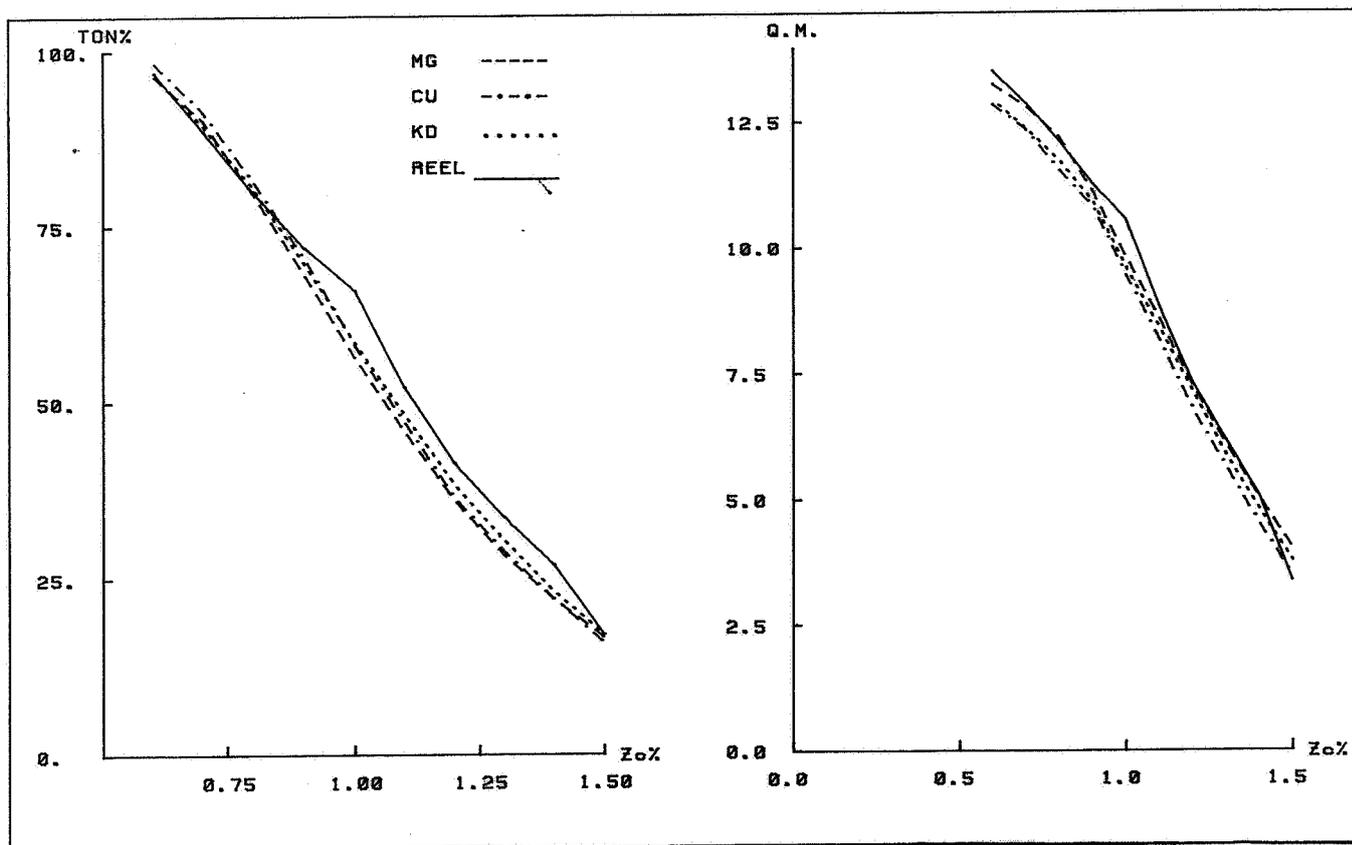


Fig. 2.10 - Comparaison locale pour une zone pauvre. (12 panneaux)

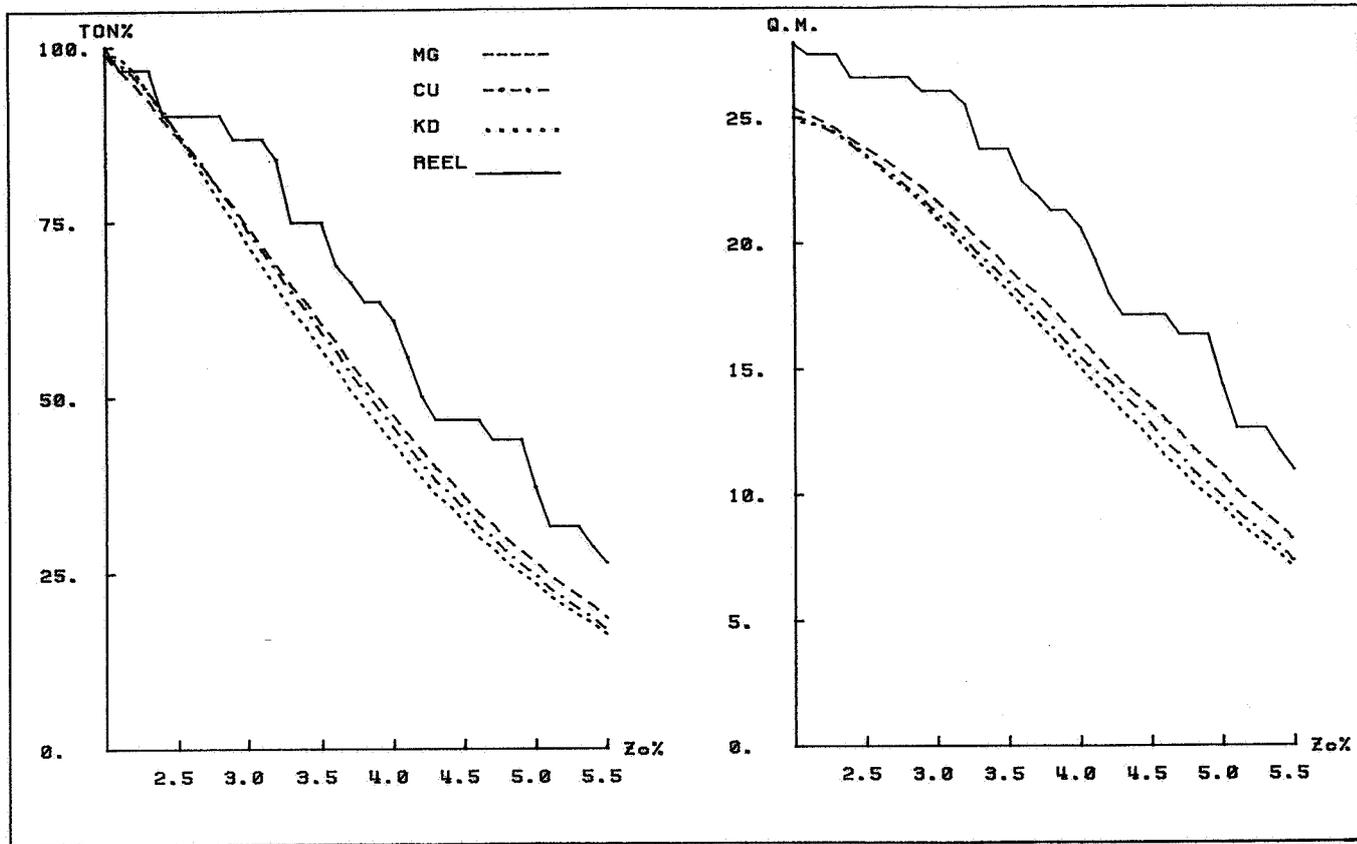


Fig. 2.11 - Comparaison locale pour une zone riche.
(6 panneaux)

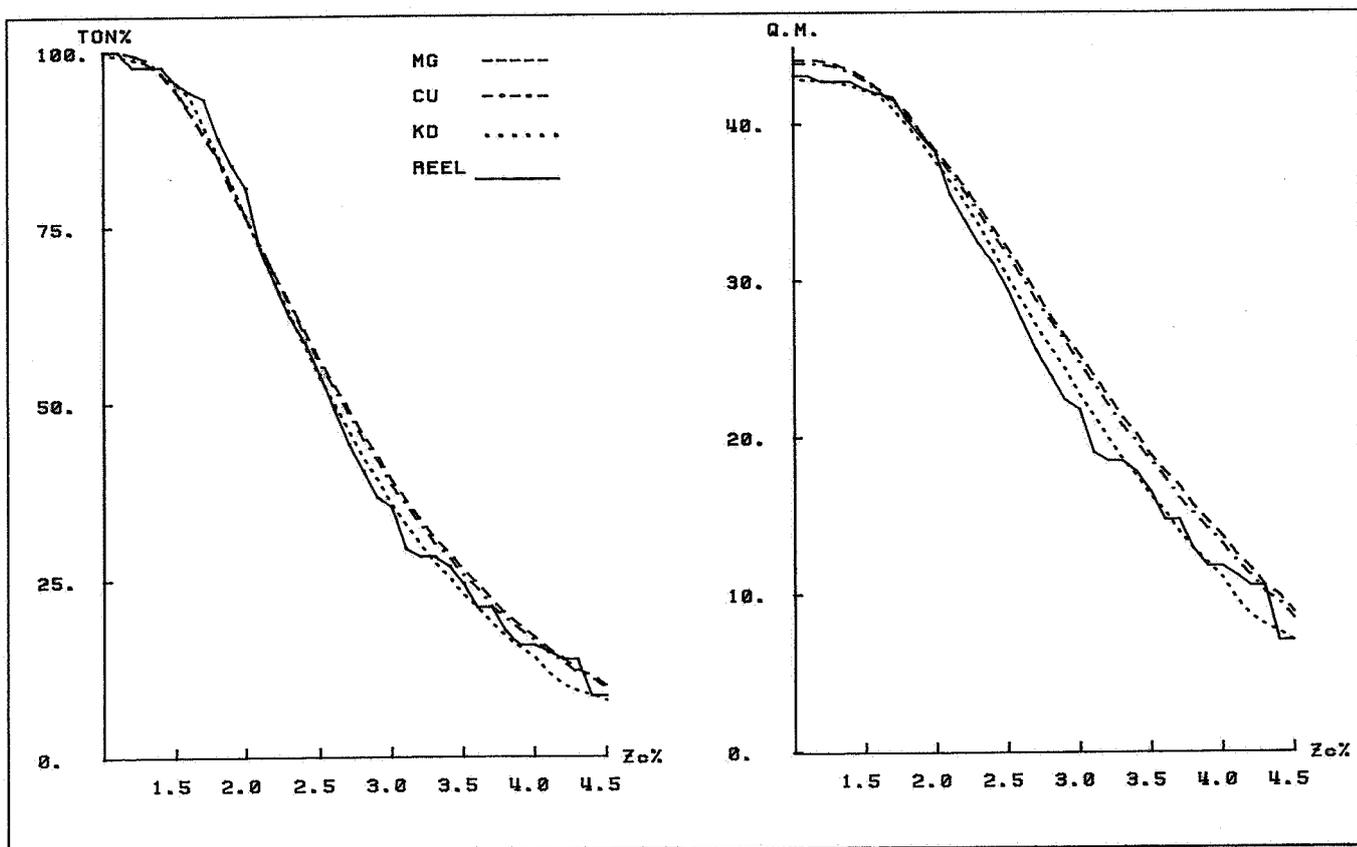


Fig. 2.12 - Comparaison locale pour une zone mixte
(15 panneaux)

TABLEAU 2 - Comparaison des teneurs de panneaux

(1) : teneurs réelles.

(2) : teneurs estimées pour le récupérable de teneur de coupure nulle.

(3) teneurs krigées.

	(1)	(2)	(3)
Ensemble des 50 panneaux	2.45	2.31	2.30
12 panneaux à faible teneur	1.16	1.07	1.12
6 panneaux à forte teneur	4.65	4.19	4.27
15 panneaux en zone moyenne	2.87	3.06	2.91

Ceci signifie aussi que dans ce banc de gisement présentant une zonéographie, les méthodes du récupérable ne sont pas affectées par la zonéographie, et se calent bien aux valeurs locales.

Avec les tests menés sur le second gisement présenté, ces bons résultats apparaîtront liés à la bonne densité des informations (maille de 30m) comparée à la structure géostatistique. Krigeage à moyenne connue et inconnue sont identiques, le poids de la moyenne étant voisin de zéro.

Ainsi, lorsque l'information est dense vis-à-vis de la structure ou, plus précisément, lorsque dans le krigeage le poids de la moyenne est faible, les méthodes d'estimation du récupérable local semblent s'adapter de façon satisfaisante à la non-homogénéité ou à la zonéographie du gisement.

2.1.8 Comparaison des estimations de teneurs de panneaux

Le récupérable à coupure nulle représente la teneur moyenne de chacun des panneaux.

On peut penser que l'estimation de telles teneurs par le non-linéaire est plus précise que celle fournie par le krigeage linéaire : c'est d'ailleurs un second intérêt du non-linéaire, après celui des fonctions de récupération.

Or, si la distribution des blocs pouvait être considérée comme connue pour seulement 50 panneaux, la teneur moyenne du panneau peut être connue sur un nombre beaucoup plus important de panneaux : on obtient ainsi 134 panneaux contenant au moins 10 trous de tir, avec en moyenne plus de 14 trous par panneaux. Ceci doit permettre de faire des comparaisons plus probantes que sur les 50 panneaux.

On a calculé les erreurs relatives d'estimation de teneurs pour le KD, CU et KO. Les histogrammes sont présentés figure 2.13 Les moyennes et variances se trouvent dans le tableau suivant :

	ϵ	S^2
KD	- 0.0159	0.0417
CU	- 0.0087	0.0410
KO	- 0.0130	0.0386

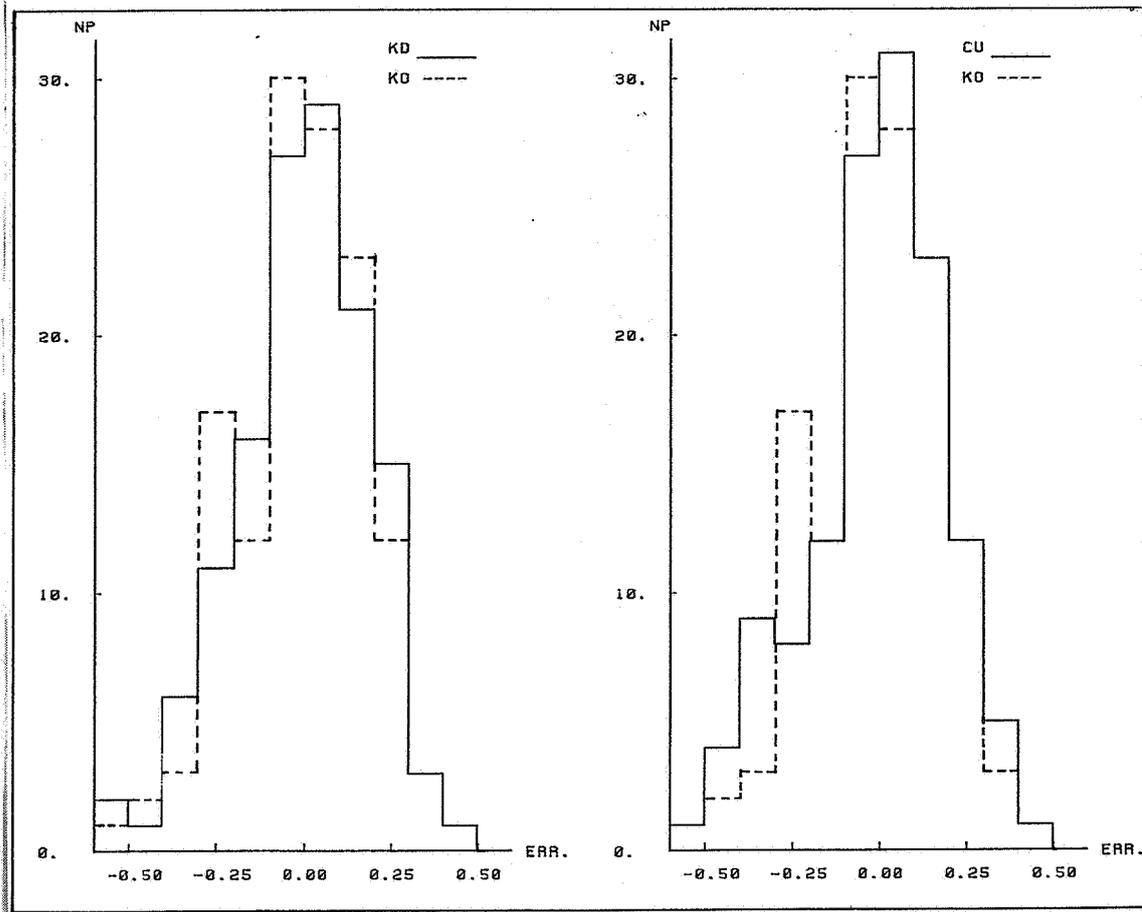


Fig. 2.13 - Histogrammes des erreurs

Les différences observées d'une méthode à l'autre ne semblent pas significatives.

Les régressions teneur-vraie/teneur-estimée ne permettent pas non plus de différencier les estimateurs : fig.2.14. Si on coupe sur les teneurs estimées à 1.5% et 3% le nombre de panneaux récupérés sera :

Z_c	Réel	Estimé	
1.5	85	KD	89
		CU	87
		KO	88
3.0	36	KD	30
		CU	33
		KO	30

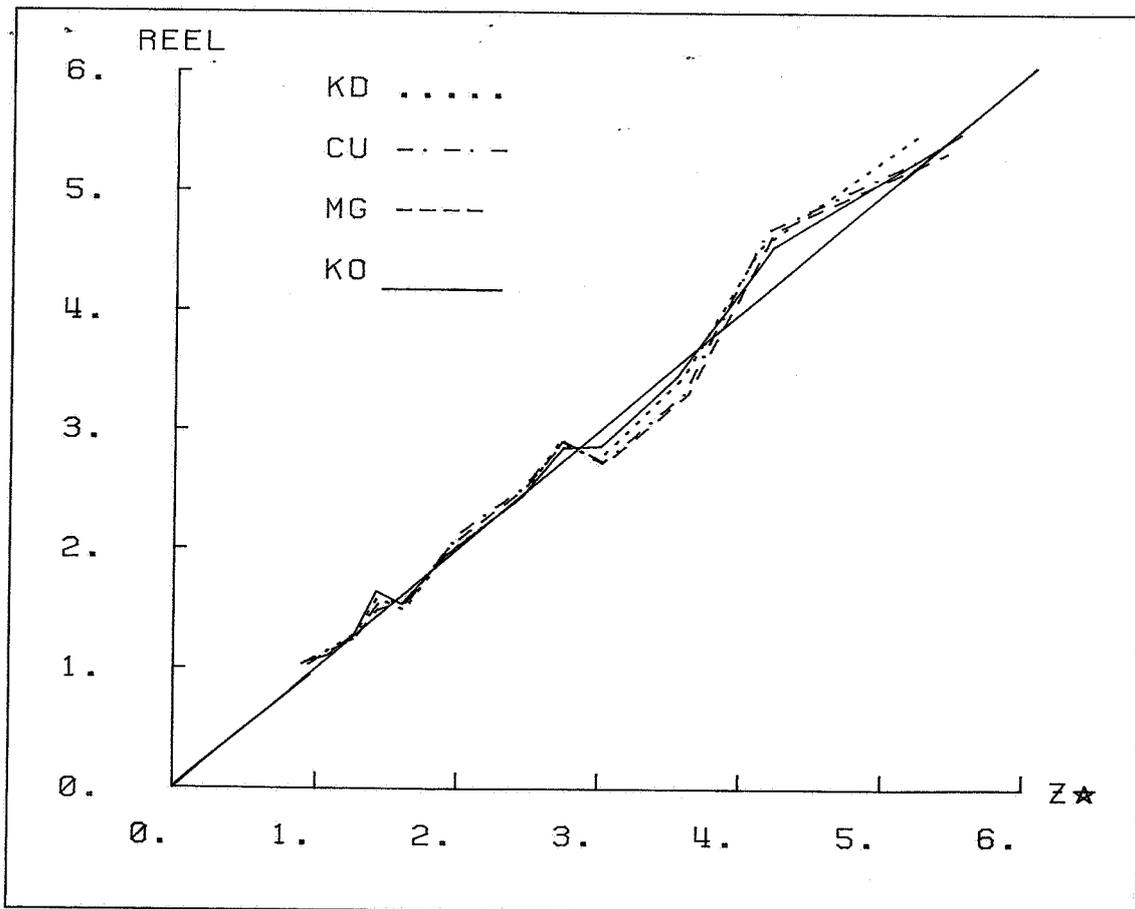


Fig. 2.14 - Régression - Teneurs estimées x teneur vraie

Tout cela semble montrer que, dans ce cas où la distribution de départ n'est pas très dissymétrique, l'usage du non-linéaire pour estimer des teneurs n'améliore pas la précision fournie par le linéaire.

2.2 - CAS D'ETUDE : CC

Les méthodes stationnaires d'estimation du récupérable se sont révélées satisfaisantes sur le banc du gisement de Chuquicamata étudié précédemment, et ceci malgré l'existence d'une zonéographie.

Nous allons présenter ici un autre gisement de porphyre cuprifère, nommé CC, sur lequel les conditions sont loin d'être aussi bonnes. Ne possédant sur ce gisement que les données des sondages de reconnaissance, nous ne pourrions juger le récupérable local estimé que par comparaison au krigeage ordinaire, qui présente cependant l'avantage de n'être pas affecté par la zonéographie.

Ces deux études nous permettront de fixer les limites d'utilisation des méthodes stationnaires d'estimation du récupérable local.

2.2.1 - Présentation des données et du domaine à estimer

Le gisement a été reconnu par 180 sondages, dont 96 sont verticaux et vont jusqu'à la base du gisement ($\approx 900\text{m}$). Une cinquantaine de sondages sont inclinés à 60° et 45° et sont moins longs. Enfin une trentaine de sondages assez courts et d'inclinaison variable se situent dans la partie supérieure du gisement.

Il est très important de noter que la reconnaissance du gisement est irrégulière. Il existe une zonalité des teneurs typique des porphyres cuprifères, et la reconnaissance des bordures plus pauvres est moins poussée que celle du coeur du gisement, ce qui se justifie dans la mesure où la sécurité du projet minier dépend fortement de la partie riche.

Cette reconnaissance à maille non régulière pose des problèmes pour une bonne estimation, qui repose sur une bonne représentativité des données. Il va donc falloir effectuer une pondération des données, si on veut obtenir un histogramme représentatif.

De plus, les contours du gisement ne sont pas précisément définis. Il existe des lacunes d'information qui appartiennent sans doute au gisement, mais sur lesquelles il vaut peut-être mieux éviter de procéder à des estimations locales, du fait de l'absence de reconnaissance.

Ainsi plusieurs options peuvent servir à délimiter le domaine sur lequel porteront les estimations. Comme il s'agit grosso modo de choisir jusqu'à quelle distance des points informés on est dans une partie suffisamment reconnue du gisement, il est clair que la représentativité des données dépendra largement du choix du domaine considéré.

Plusieurs possibilités ont été étudiées pour définir ce domaine, qui s'étage sur 64 bancs de 15m de hauteur. L'existence partielle d'une maille carrée de 150m de sondages verticaux, et celle, encore plus partielle, d'une maille carrée de 75m nous ont incités à procéder à la mise en panneaux, d'abord de 150mx150mx15m (ce qui donne 15 x 12 panneaux par banc), puis de 75mx75mx15m.

Pour chacune de ces tailles de panneaux, nous avons utilisé deux critères d'inter/extrapolation, l'un strict, l'autre large, pour définir le domaine.

Selon le critère strict, le domaine est constitué de tous les panneaux satisfaisant à au moins l'une des conditions suivantes:

- 1) le panneau contient au moins une information
- 2) les panneaux voisins immédiatement supérieur et inférieur contiennent chacun au moins une information.
- 3) au moins 3 des 4 panneaux adjacents (dans le même banc) contiennent des informations.

Selon le critère large, le domaine comprend en outre tous les panneaux représentant des vides à l'intérieur de la matrice précédemment définie.

Le tableau 1 nous montre les effectifs correspondant à chacun de ces critères et à chacune des tailles de panneaux.

	150x150		75x75	
Nombre de CLUSTERS (+ de 1 information)	429		186	
Nombre de PANNEAUX INFORMÉS	2754		3174	
Nombre de PANNEAUX A ESTIMER. (selon le critère)	LARGE	STRICT	LARGE	STRICT
	6428	3257	26250	5520

- Tableau 1 -

Le critère strict conduit à rajouter 503 panneaux aux 2754 panneaux "informés" de 150x150, ce qui donne au total 3257 panneaux. Ce dernier nombre est doublé avec le critère large.

En ce qui concerne les panneaux de 75x75, quatre fois plus petits, le critère large donne 26250 panneaux, ce qui correspond à peu près au volume défini par le critère large sur panneaux de 150x150. Avec le critère strict, on trouve seulement 5520 panneaux, donc un volume beaucoup plus petit que celui défini par le même critère sur panneaux de 150x150 et manifestement truffé de vides.

2.2.2 - Histogrammes et méthodes de pondération

Différentes méthodes sont utilisables pour obtenir l'histogramme pondéré expérimental sur lequel sera ajusté l'anamorphose.

a) L'absence de pondération.

On donne le même poids à chacune des données. Cette méthode est justifiée avec une maille régulière, mais risque de conduire facilement à des surestimations, sinon.

b) La pondération par polygone (ou plutôt volume) d'influence.

Elle attribue à chaque échantillon un poids directement lié à la densité avec laquelle sont distribués les échantillons. Il est même possible de considérer des volumes d'influence tenant compte d'une éventuelle anisotropie géométrique.

Mais cette méthode ne tient pas compte de toutes les autres caractéristiques structurales. De plus, elle est très lourde informatiquement.

c) Pondération par panneau.

Cette méthode est bien décrite par A. JOURNEL (1982). Elle consiste à donner à chaque panneau informé le même poids. De plus, dans un panneau donné, chaque échantillon reçoit un poids identique et donc inversement proportionnel au nombre d'échantillons que contient le panneau.

Cette méthode est très simple puisqu'elle utilise seulement la mise en panneaux préalable à l'estimation locale. Elle ne tient pas compte de la structure géostatistique mais respecte assez bien la densité variable des échantillons.

Elle est tributaire toutefois de la taille un peu arbitraire des panneaux. En particulier les panneaux ne doivent pas être trop petits. En effet les échantillons voisins d'un panneau de gisement, qui serait non informé, ne recevraient pas pour autant un poids plus grand. A la limite si les panneaux deviennent très petits, ils ne contiennent chacun qu'un seul échantillon et la pondération disparaît.

d) Pondération par les poids de krigeage

Chaque échantillon est pondéré par la somme de chacun des poids qu'il reçoit dans le krigeage ordinaire de chacun des panneaux du voisinage.

Cette méthode suppose naturellement la connaissance du variogramme et la mise en oeuvre d'un krigeage. Elle dépend bien sûr du domaine choisi pour être krigé et également du voisinage de krigeage.

Elle tient compte d'une façon très juste, de la distribution spatiale des échantillons relativement à la structure.

Il faut faire attention au poids négatif que pourrait recevoir un échantillon qui n'interviendrait (et interviendrait de façon lointaine) que dans le krigeage de 1 ou 2 panneaux.

Nous avons étudié l'absence de pondération, la pondération par panneau et celle par les poids de krigeage, pour les différents choix du domaine à estimer. Les résultats figurent dans le tableau 2.

PONDERATION		150x150			75x75		
		Poids de Krigeage	Par panneau	Sans	Poids de Krigeage	Par panneau	Sans
MOYENNE (%)	LARGE	0.358	0.401	0.403	0.350	0.401	0.408
	----- STRICT	0.400			0.423		
VARIANCE (% ²)	LARGE	0.113	0.129	0.142	0.110	0.130	0.142
	----- STRICT	0.131			0.143		

- Tableau 2 -

Naturellement, l'absence de pondération et la pondération par panneau ne dépendent pas du critère strict ou large d'extra/interpolation, lequel rajoute aux panneaux informés d'autres ne l'étant pas. La pondération par les poids de krigeage par contre dépend fortement de ce critère.

Ainsi avec le critère large, la pondération par krigeage fournit des chiffres beaucoup plus faibles que tous les autres. Cela vient du fait que les "vides" comblés par le critère large sont surtout nombreux sur les bordures du gisement, plus pauvres et moins reconnues.

Avec les panneaux de 150x150, la pondération par panneau et celle par krigeage (critère strict) fournissent les mêmes résultats. Les panneaux rajoutés au voisinage des panneaux informés par le critère strict ont donc une teneur moyenne identique. Quant à l'absence de pondération, elle surestime légèrement les teneurs.

Avec les panneaux de 75x75, l'absence de pondération surestime légèrement les résultats, par rapport à la pondération par panneau. Par contre, le krigeage (critère strict) fournit des chiffres bien supérieurs à ces derniers. Le critère strict conduit donc ici à rajouter en moyenne plus de panneaux non informés au voisinage d'échantillons riches qu'au voisinage des pauvres. Autrement dit, bien que les bordures pauvres du gisement soient sous-reconnues, les zones les plus reconnues (comme celles reconnues par la maille partielle de 75m) ne sont pas les zones les plus riches.

Les figures 2.15, 2.16 et 2.17, qui détaillent la distribution des teneurs d'échantillons avec la mise en panneaux de 150x150 (sans pondération, pondération par panneau puis par krigeage selon le critère strict) confirment les résultats des statistiques précédentes. On voit d'ailleurs que la quantité de métal (fig.2.17) est bien surestimée par l'absence de pondération.

2.2.3 - L'anamorphose

Dans la suite nous ferons les estimations sur le domaine formé par l'ensemble des panneaux de 150x150 obéissant au critère strict. Pour cela nous utiliserons l'histogramme de teneurs pondérées

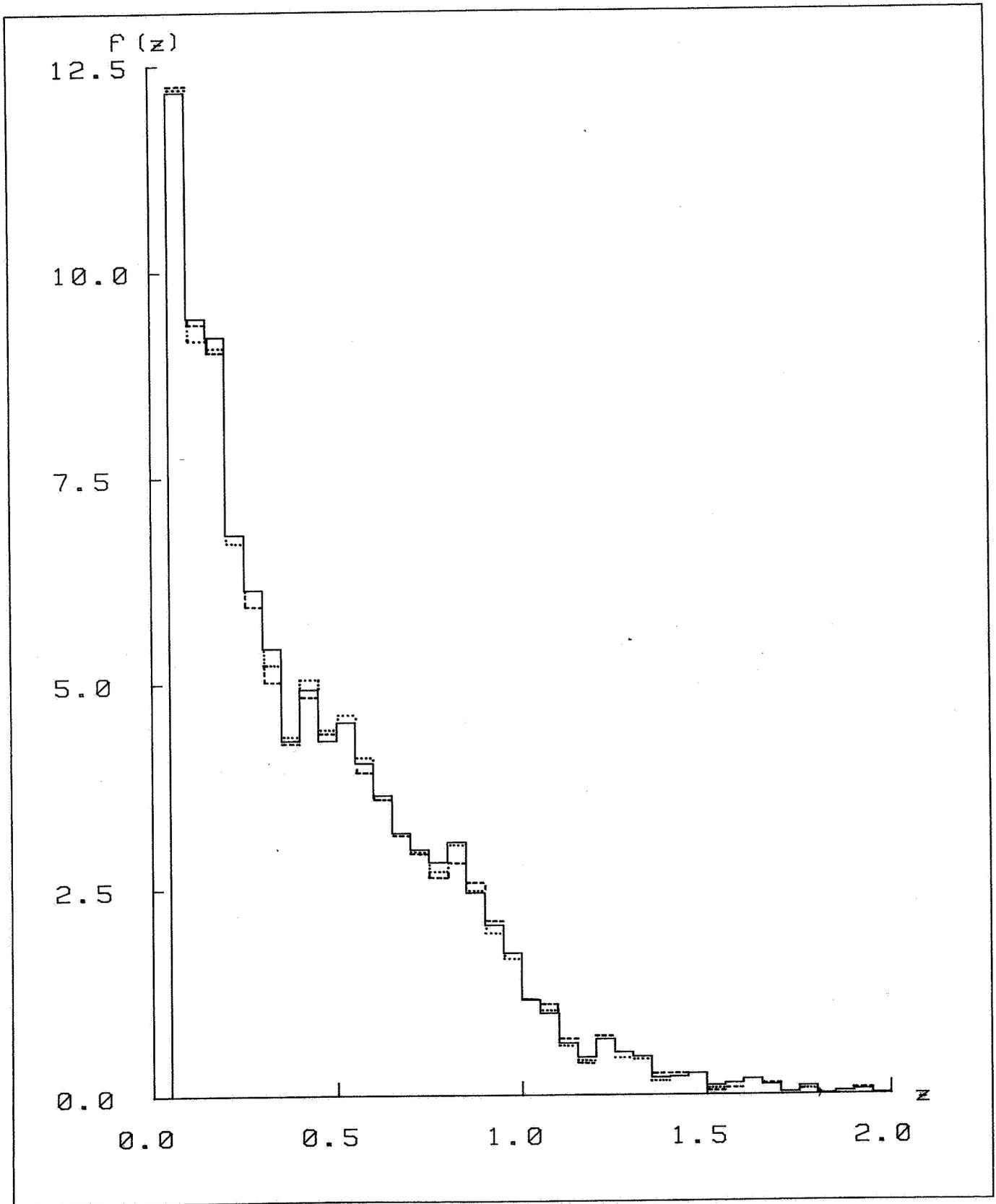


Fig. 2.15 - Histogrammes pondérés.

———— par krigeage
..... par panneau
----- sans pondération

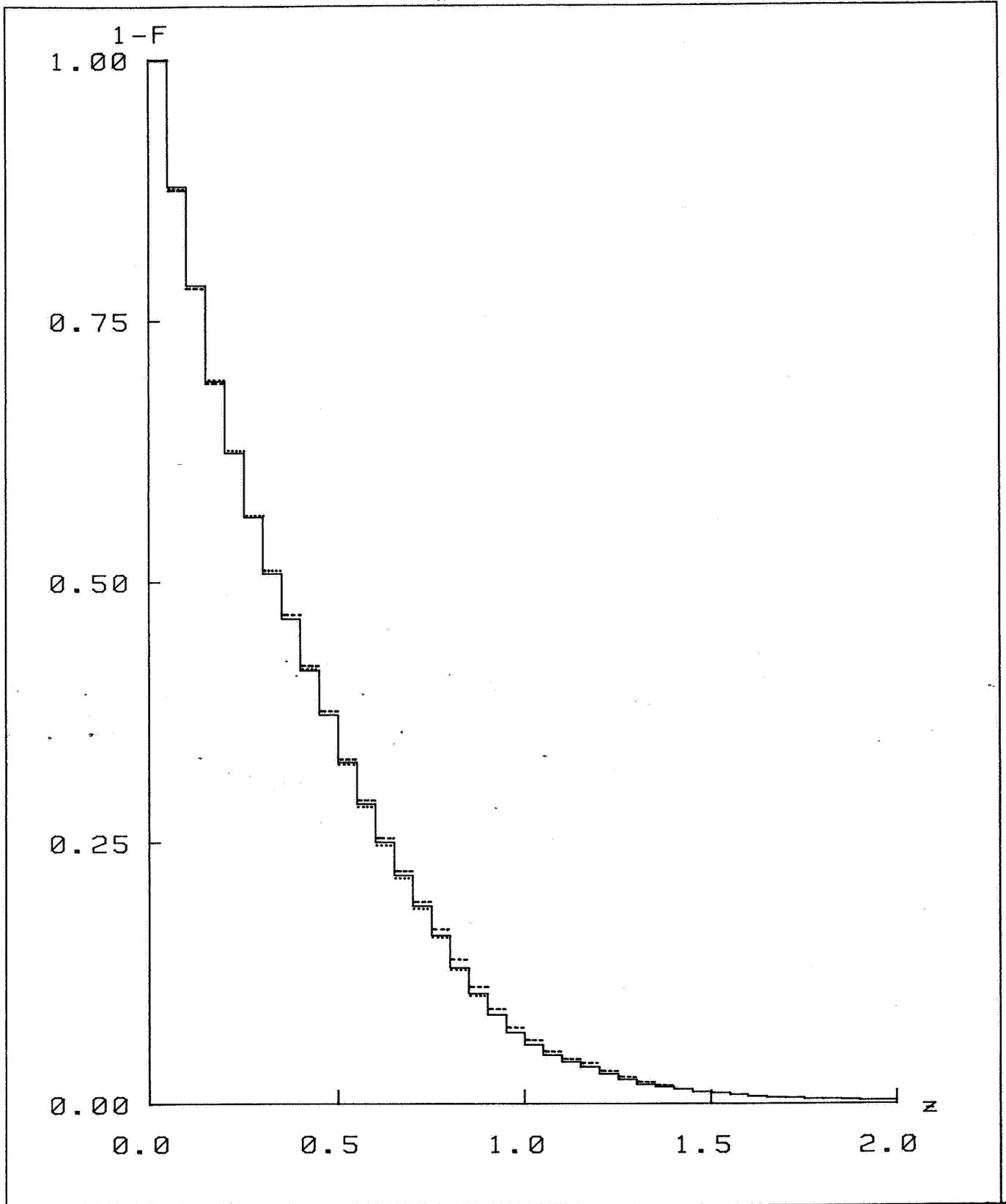


Fig. 2.16 - Proportion pondérée.

- par krigeage
- par panneau
- sans pondération

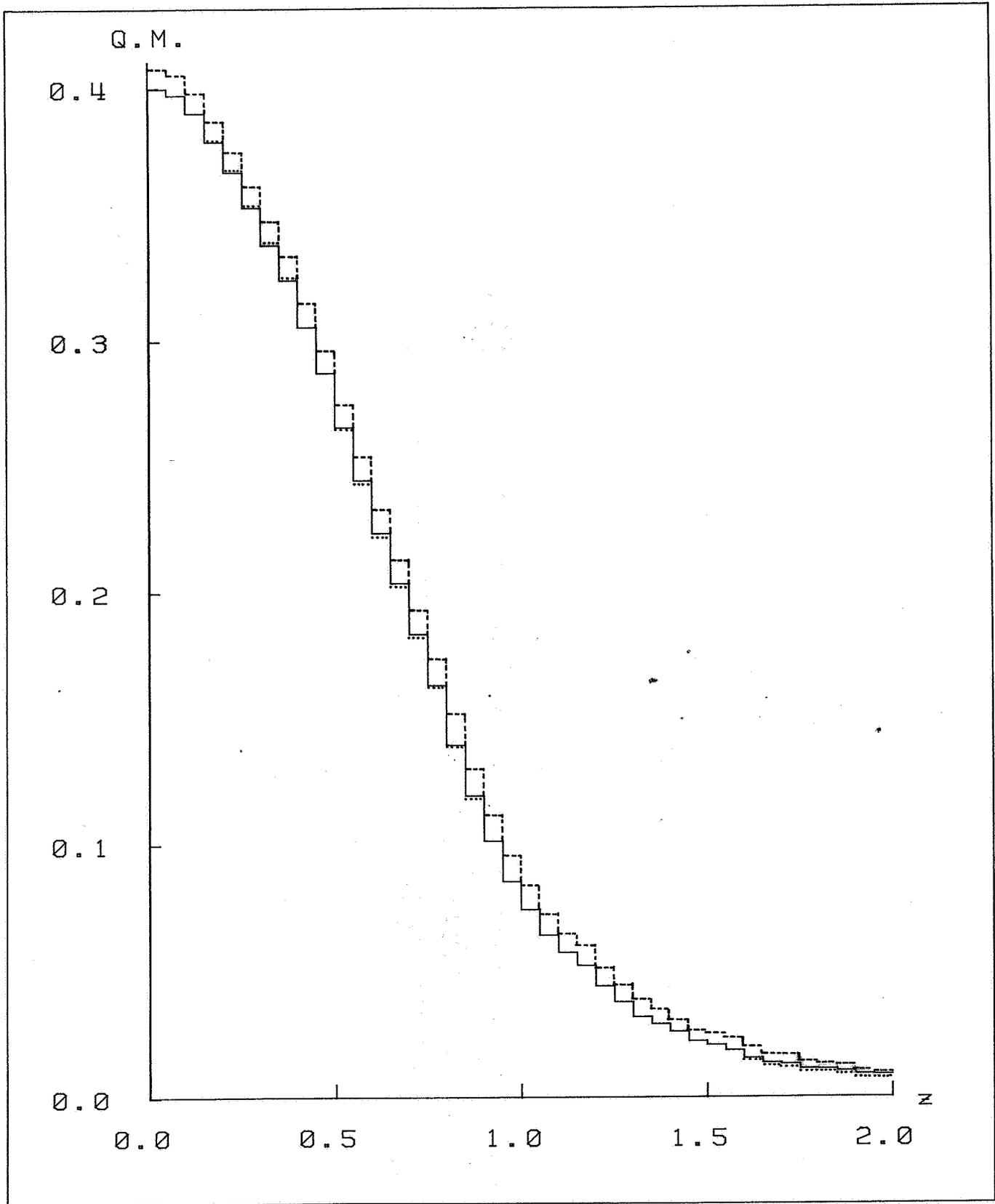


Fig. 2.17 - Quantité de métal pondéré.

- _____ par krigeage
- par panneau
- sans pondération

par les poids de krigeage (ce qui équivaut ici à la pondération par panneau).

L'anamorphose gaussienne ne pose pas de problèmes. La teneur que l'on retrouve le plus souvent est rencontrée 16 fois et il n'y a pas d'atome.

2.2.4 - Analyse structurale

Une étude structurale très complète du gisement a été faite par D.GUIBAL et Y.TOUFFAIT, 1979. On pourra s'y reporter pour les détails.

Disons surtout que la caractérisation des distributions de teneurs (moyenne, variance, éventuel effet proportionnel) en fonction des différentes roches répertoriées par la géologie s'est révélée négative. Seule une légère dérive verticale dans les premiers bancs semble témoigner de l'existence d'un recouvrement.

En ce qui concerne la variographie, les conclusions sont assez classiques par rapport à ce type de gisement et ce type de reconnaissance : la direction verticale est bien connue tandis que l'horizontale demeure inconnue (H.M.PARKER, 1983).

Les figures 2.18 et 2.19 montrent respectivement les variogrammes expérimentaux et leur modélisation, pour la variable brute (teneur totale en Cuivre) et l'anamorphosée gaussienne associée. La direction verticale présente un niveau de variabilité plus faible qu'en horizontal.

2.2.5 - Estimation du récupérable local par les méthodes stationnaires

Ce qui nous préoccupe essentiellement c'est le problème de "stationnarité" : autrement dit comment les résultats de méthodes d'estimation stationnaire vont-ils s'adapter à la zonéographie du gisement ?

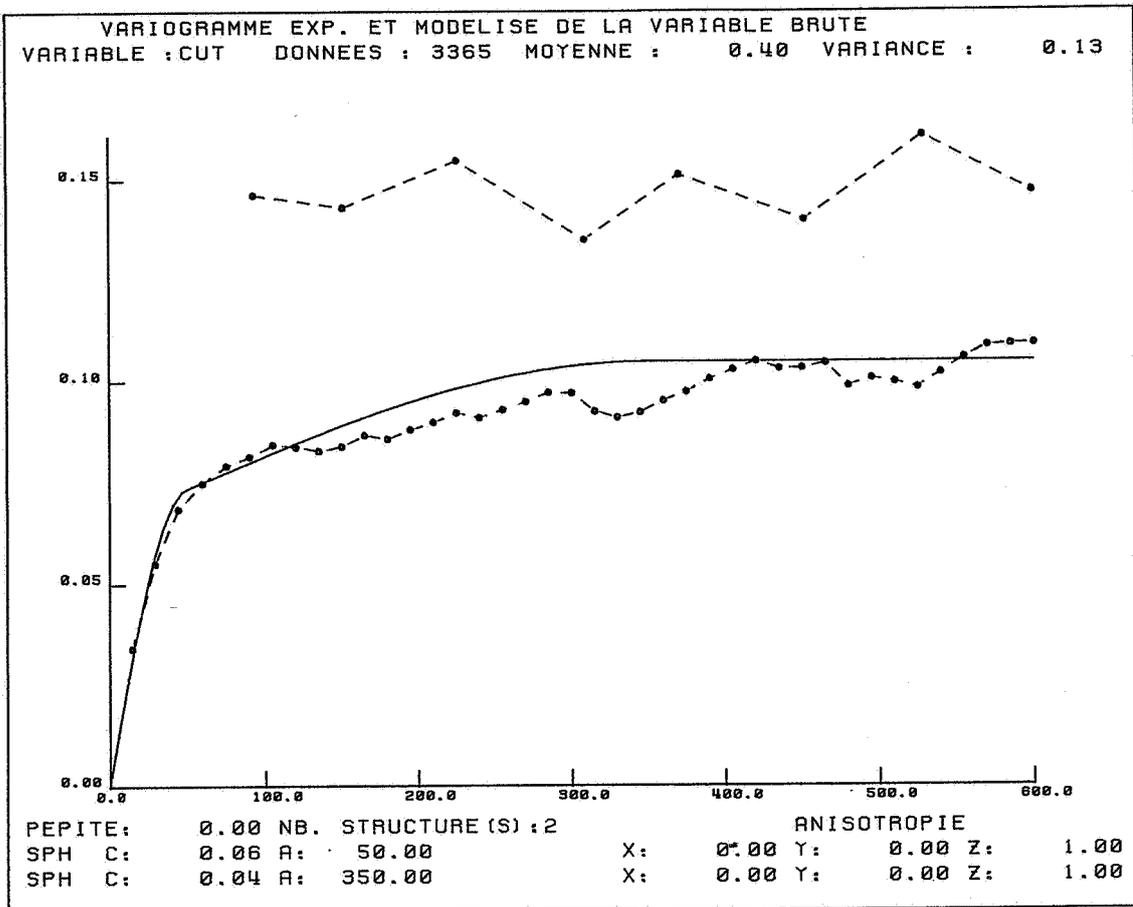


Fig. 2.18

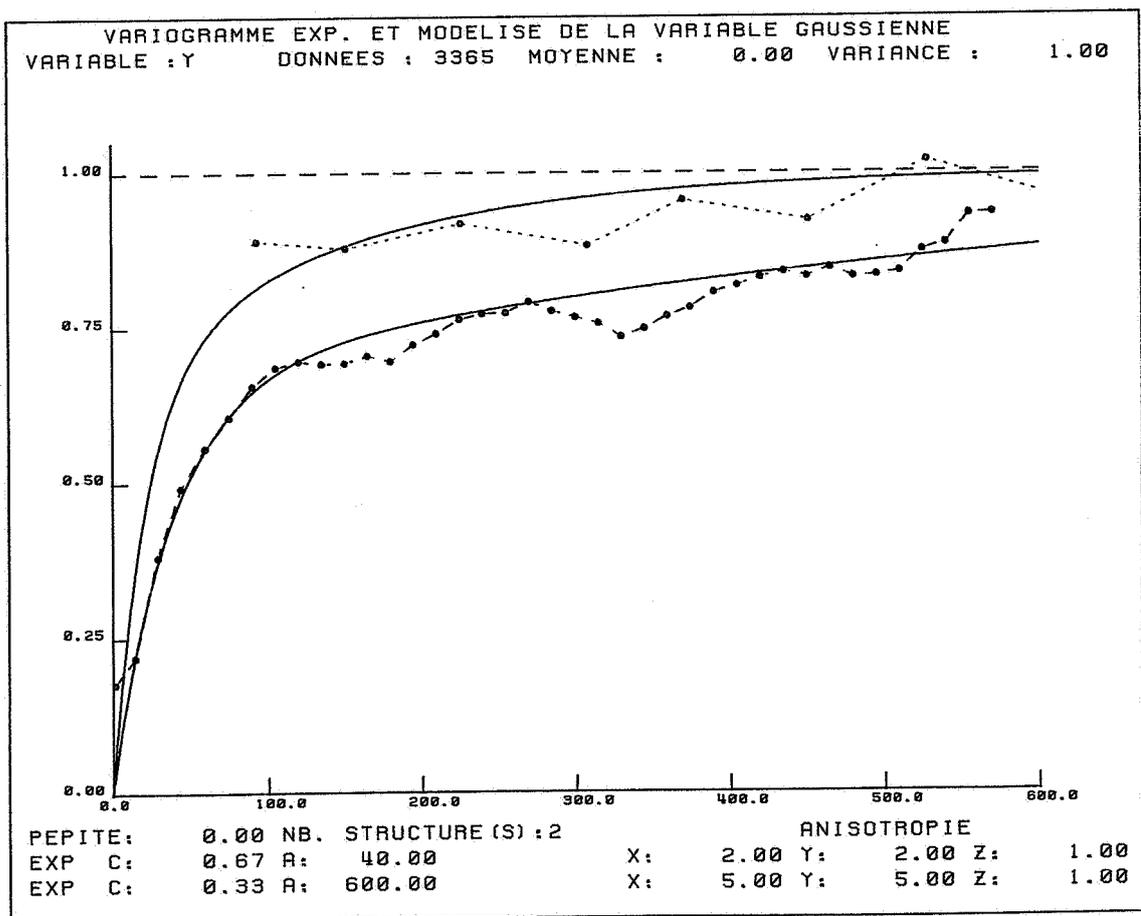


Fig. 2.19

Au point de vue teneurs, nous ne connaissons sur ce gisement rien de plus que les sondages de reconnaissance. Aucune "réalité" ne peut servir ici à contrôler les estimations du récupérable.

Cependant le métal récupérable à la coupure nulle s'identifie à la teneur moyenne du panneau. De cette teneur, nous allons donc avoir les estimations non-linéaires correspondant à chacune des méthodes d'estimation du récupérable. Mais nous pouvons aussi disposer d'une autre estimation de cette teneur, à savoir son krigeage ordinaire. Cet estimateur n'est en soi pas meilleur et ne peut donc pas servir de référence au même titre que les teneurs vraies. Si l'histogramme des teneurs était très dissymétrique, on devrait même s'attendre à un comportement assez différent entre les estimateurs linéaires et non linéaires. Cependant, grâce à la condition d'universalité, le krigeage ordinaire utilise une hypothèse de stationnarité locale, bien adaptée à l'existence d'une zonéographie (cf. Annexe 2). C'est pour cela qu'il est très intéressant de comparer au krigeage ordinaire les résultats fournis par les méthodes stationnaires. Nous l'avons fait avec le Krigeage Disjonctif ainsi qu'avec le Conditionnement Uniforme par le krigeage des gaussiennes.

Les figures 2.20 et 2.21 indiquent les régressions de ces estimateurs par rapport au krigeage ordinaire. On constate une attraction très forte vers la moyenne du gisement.

Or on sait (Annexe 2) que le krigeage ordinaire est un krigeage simple, dans lequel on remplace la moyenne globale par l'estimation de la moyenne locale : ce qui fait disparaître l'attraction vers la moyenne. L'effet est d'autant plus marquant que la moyenne intervient avec un poids élevé, c'est-à-dire que l'information est pauvre relativement à la structure.

Nous avons étudié la distribution du poids de la moyenne dans le krigeage des panneaux : on constate que ce poids de la moyenne atteint facilement des valeurs élevées. (Cf. Tableau suivant)

Comparons maintenant les régressions de KD et CU en fonction du KO sur 2 populations :

et celle des 17.38% de panneaux dont $\lambda_m < 0.3$

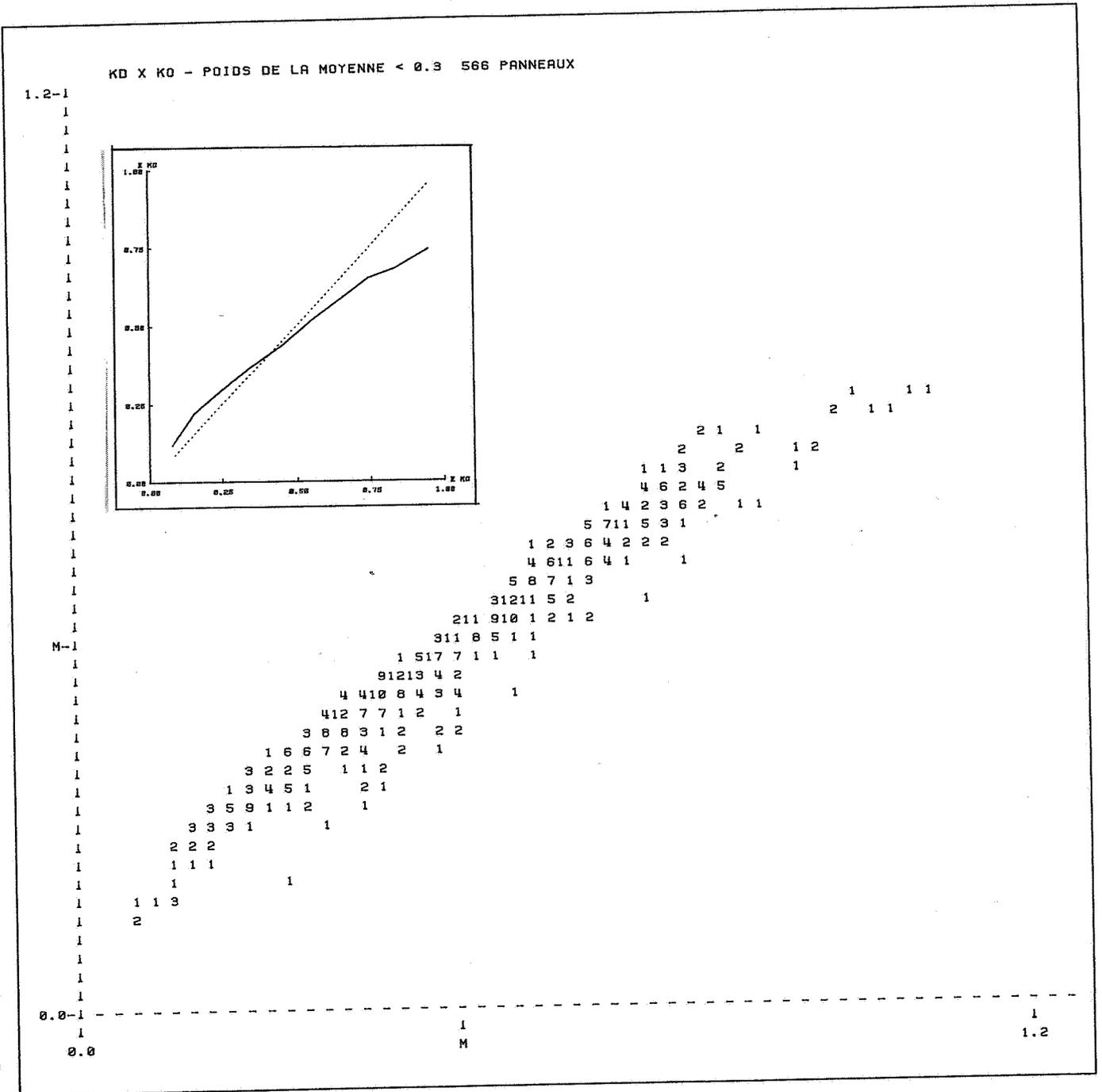


Fig. 2.24 - Nuage et régression - KD x KO

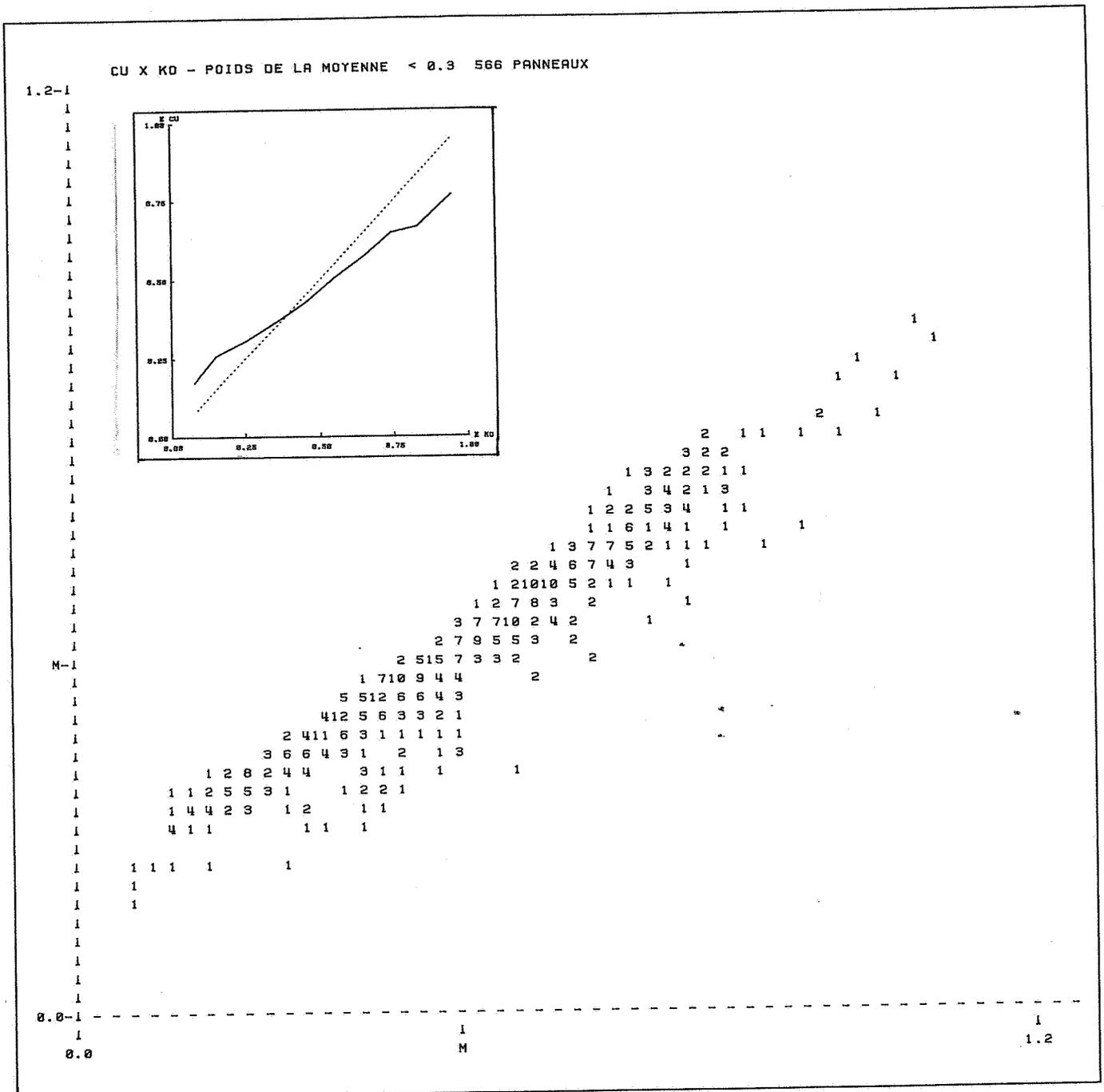


Fig. 2.25 - Nuage et régression - CU x KO

L'attraction vers la moyenne est d'autant plus forte que le poids de la moyenne est élevé. Autrement dit le poids de la moyenne (dans le krigeage linéaire) peut aussi servir de critère pour mesurer l'attraction vers la moyenne des méthodes non linéaires.

Notons d'ailleurs que sur CHUQUICAMATA ce poids était voisin de zéro.

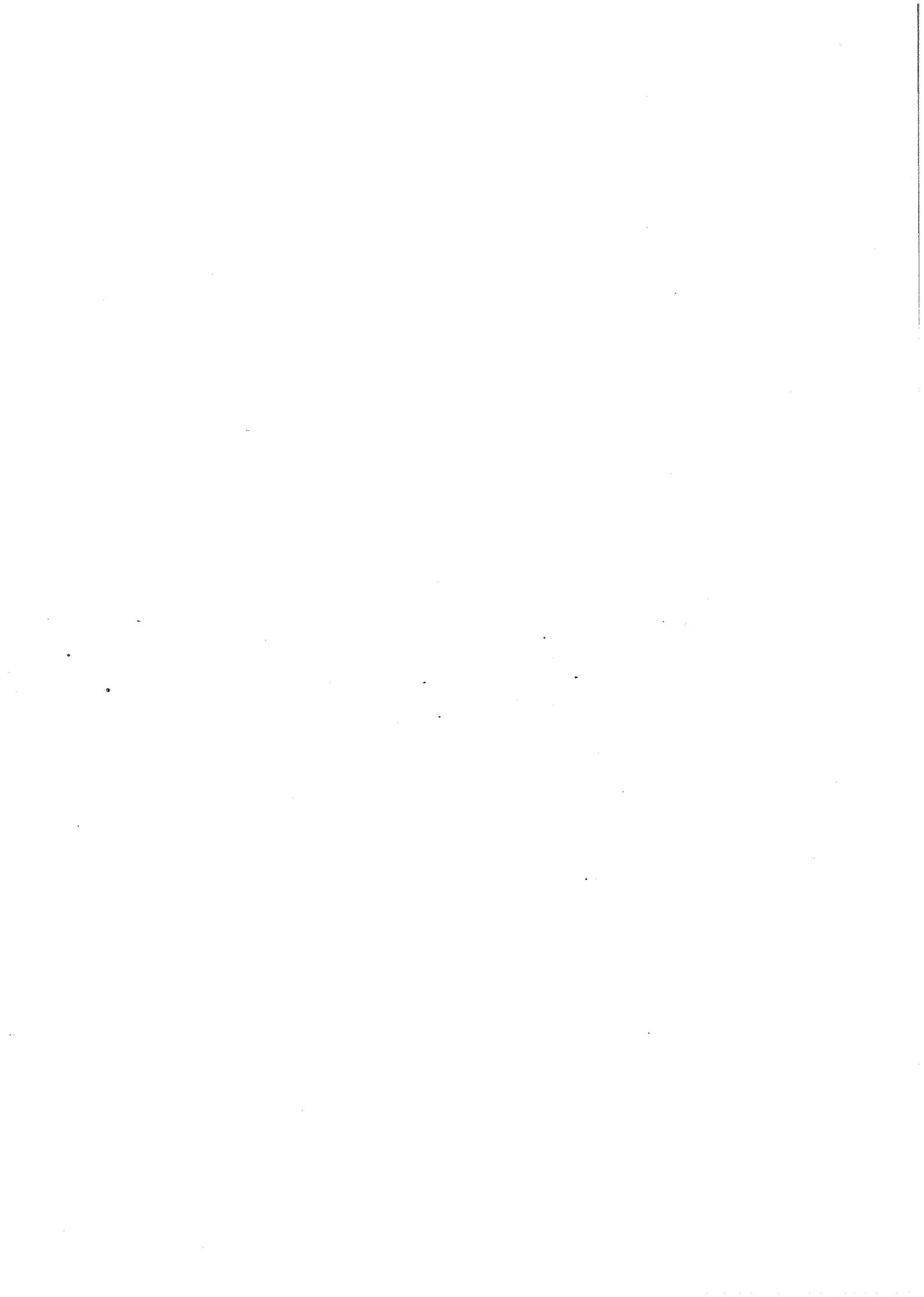
2.3 CONCLUSION

On peut conclure, à propos des méthodes non-linéaires stationnaires permettant l'estimation du récupérable :

- ces méthodes sont bien adaptées à la zonéographie que peuvent présenter les gisements, dès lors que l'information locale disponible est suffisamment dense par rapport à la structure disponible.
- pour juger de ce dernier point, un critère commode semble être le poids que reçoit la moyenne globale dans le krigeage simple (Cf. Annexe 2).

DEUXIEME PARTIE

METHODES LOCALEMENT STATIONNAIRES



C H A P I T R E 3

METHODES LOCALEMENT STATIONNAIRES

L'hypothèse de stationnarité stricte qui préside aux modèles et aux méthodes présentés en première partie a pour conséquence de rabattre vers la moyenne les estimations lorsque l'information disponible n'est pas assez fournie.

Nous allons voir certains moyens permettant de s'affranchir de la stationnarité stricte et ne nécessitant qu'une stationnarité locale.

3.1. CONDITION DE NON BIAIS

3.1.1 En krigage linéaire

Lorsque l'on estime par krigage une teneur ponctuelle $Z(x)$ ou une moyenne de teneurs ponctuelles $Z(V) = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$, l'estimateur vérifie :

$$[Z(V) - E(Z_V)]^K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} [Z_{\alpha} - E(Z(x))]$$

soit, puisque $E(Z(V)) = E(Z(x))$:

$$[Z(V)]^K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} + (1 - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}) E(Z(x)).$$

Pour qu'un tel estimateur local soit sans biais quelle que soit l'espérance de $Z(x)$ (ayant le sens de moyenne locale de $Z(x)$), il suffit d'imposer la condition de non-biais :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$$

3.1.2 En cokrigage des indicatrices

Soit à estimer linéairement l'indicatrice ponctuelle

$1_{Z(x) \geq z_c}$ à partir des indicatrices $1_{Z_{\alpha} \geq z_j}$

Posons d'abord : $m_i = E(1_{Z(x) \geq z_i})$

Pour que l'estimateur local de cokrigeage :

$$\left[1_{Z(x) \geq z_i} - m_i \right]^K = \sum_{j=1}^L \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{j\alpha} \left[1_{z_\alpha \geq z_j} - m_j \right]$$

soit sans biais quelles que soient les espérances des indicatrices ponctuelles, il suffit d'imposer les conditions de non-biais (cf. JOURNEL et HUYBREGTS, 1981. p.324)

$$\sum_{\alpha}^N \lambda_{\alpha i} = 1$$

$$\sum_{\alpha}^N \lambda_{\alpha j} = 0 \quad \text{pour } j \neq i$$

Il en sera de même dans le krigeage des indicatrices

Il suffit alors d'imposer la condition : $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$

3.1.3 En krigeage disjonctif ponctuel

Soit à estimer par KD une fonction de $Y(x)$:

$$\psi(Y(x)) = \sum_0 \psi_n \eta_n(Y(x))$$

(ou une moyenne de telles fonctions)

L'estimateur local obtenu par le krigeage $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha, n} \eta_n(Y_{\alpha})$

de $\eta_n(Y(x))$ sera sans biais quelle que soit la moyenne locale

$E[\eta_n(Y(x))]$ si on impose :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha, n} = 1$$

Comme $E[\psi(Y(x))] = \sum_0 \psi_n E[\eta_n(Y(x))]$, l'estimateur $\sum_0 \psi_n \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha, n} \eta_n(Y_{\alpha})$

obtenu avec $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha, n} = 1$ sera alors non biaisé, quels que soient les

$E[\eta_n(Y(x))]$ (G.Matheron, 1977).

REMARQUE : Cette méthode permet d'estimer par KD la teneur moyenne d'un panneau puisque :

$$z(V) = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx = \sum_0 \psi_n \left[\frac{1}{V} \int_V \eta_n(Y(x)) dx \right]$$

3.1.4 Limitation des conditions de non-biais

Les conditions de non-biais ont un sens très précis : elles doivent assurer le non-biais quelles que soient les espérances. Autrement dit, elles assurent le non-biais local quelles que soient les moyennes locales.

Considérons maintenant les deux fonctions indicatrices

$$\begin{array}{l} \text{ponctuel} \\ \text{blocs} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1_{Z(x) \geq z_c} \\ 1_{Z(v) \geq z_c} \end{array} = \begin{cases} 1 & \text{si } Z(x) \geq z_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 & \text{si } Z(v) \geq z_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v = \frac{1}{v} \int_v Z(x) dx$$

$$\text{mais } 1_{Z(v) > z_c} \neq \frac{1}{v} \int_v 1_{Z(x) > z_c} dx$$

ce qui est logique.

Essayons de former le krigeage de la variable $1_{Z(v) \geq z_c}$ qui n'est ni ponctuelle, ni régularisée de ponctuelles, à partir de variables ponctuelles $1_{Z_\alpha \geq z_c}$

$$\left[1_{Z(v) \geq z_c} - E(1_{Z(v) \geq z_c}) \right]^K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left[1_{Z_{\alpha} \geq z_c} - E(1_{Z(x) \geq z_c}) \right]$$

ou

$$\left[1_{Z(v) \geq z_c} \right]^K = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} 1_{Z_{\alpha} \geq z_c} + E \left[1_{Z(v) \geq z_c} \right] - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} E \left[1_{Z(x) \geq z_c} \right]$$

Cette fois-ci ces deux espérances

$E(1_{Z(v) \geq z_c})$ et $E(1_{Z(x) \geq z_c})$ n'ont aucune raison d'être égales. On

ne peut donc pas utiliser dans ce cas la condition de non-biais.

Il en va de même pour une gaussienne associée aux blocs : Y_V n'est ni une variable ponctuelle, ni une régularisée des ponctuelles. La gaussienne des blocs Y_V n'étant pas une régularisée des gaussiennes de points, il n'est pas licite d'imposer la condition de non-biais dans son krigeage à partir des Y_α .

Il en est évidemment de même en KD non ponctuel lorsqu'on estime $\eta_n(Y_V)$ par les $\eta_n(Y_\alpha)$.

Ainsi les conditions de non-biais ne sont justifiables en cokrigeage, krigeage d'indicatrices ou KD, que dans le cas ponctuel.

Par contre, la modification de l'estimateur espérance conditionnelle par l'adjonction d'une condition d'universalité n'est pas justifiable, même dans le cas ponctuel.

Estimons en effet, par exemple, $Y(x)$ à l'aide des Y_α . Théoriquement la variable $Y(x)$ conditionnée par les Y_α est en fait conditionnée par son krigeage simple. Si maintenant on conditionne $Y(x)$ par son krigeage ordinaire (donc avec condition d'universalité) Y_{KO} , on a :

$$E \left[Y(x) \mid Y_{KO} \right] = \text{Cov} \left[Y(x), \frac{Y_{KO}}{S_{KO}} \right] \frac{Y_{KO}}{S_{KO}}$$

$$\text{avec } S_{KO}^2 = \text{Var} (Y_{KO})$$

$$\text{Comme } \text{Cov} \left[Y(x), \frac{Y_{KO}}{S_{KO}} \right] = \frac{1}{S_{KO}} (S_{KO}^2 - \mu)$$

(avec μ paramètre de Lagrange du système de krigeage)

$$\text{cela donne : } E \left[Y(x) \mid Y_{KO} \right] = \frac{S_{KO}^2 - \mu}{S_{KO}^2} Y_{KO}$$

$Y(x)$ a une moyenne locale $E(Y(x))$ inconnue. Comme on a également

$$E(Y_{KO}) = E \left[Y(x) \right]$$

l'estimateur de $Y(x)$ a pour espérance : $\frac{S_{KO}^2 - \mu}{S_{KO}^2} E \left[Y(x) \right]$, et non

$E \left[Y(x) \right]$; il existe donc un biais.

3.2 ESTIMATEURS DANS LE CAS NON PONCTUEL

Dans les cas peu informés, la stationnarité locale ne peut être acquise par des conditions de non biais que dans le cas ponctuel et encore, pas avec les estimateurs du type Espérance Conditionnelle.

Il faut donc trouver un autre moyen de relâcher l'hypothèse de stationnarité stricte lorsqu'on a affaire à des blocs. (fonctions de récupération de blocs dans un panneau). G.MATHERON suggère d'ajouter aux Z_α utilisés dans l'estimation locale par KD, une teneur moyenne locale (estimée en stationnarité locale par krigeage à moyenne inconnue par exemple). La solution simplifiée utilisée ici consiste à n'utiliser que cette teneur moyenne locale comme information supplémentaire.

3.2.1 Conditionnement Uniforme par la teneur du panneau

La seule information sera alors la teneur du panneau, estimée en stationnarité locale (soit avec le krigeage à moyenne inconnue, soit avec un KD ponctuel de $\frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$ avec conditions d'universalité).

Le modèle utilisé fait appel à des hypothèses assez fortes dans la mesure où intervient la loi des panneaux V .

Si φ désigne l'anamorphose ponctuelle, φ_{r_V} celle des blocs, on supposera que les panneaux obéissent à l'anamorphose φ_{r_V} .

Les blocs seront considérés comme aléatoires dans leur panneau. Soit \underline{v} un tel bloc.

Comme : $\text{Cov}(Z(\underline{v}), Z(v)) = \text{Cov}(Z(V), Z(V)) = \text{Var } Z(V)$

$$\text{c'est-à-dire : } \sum_1 (\varphi_n)^2 r_V^n r_V^n [\text{Cov}(Y_{\underline{v}}, Y_V)]^n = \sum_1 (\varphi_n)^2 r_V^{2n}$$

$$\text{on en déduit } \text{Cov}(Y_{\underline{v}}, Y_V) = \frac{r_V}{r_V}$$

Soit Y_V l'anamorphosée de la teneur du panneau conditionnante :

$$Y_V = \varphi_{r_V}^{-1}(Z_V)$$

Y_V étant connue, Y_V suit une loi gaussienne de moyenne $\frac{r_V}{r_V} Y_V$ et de variance $\sigma^2 = 1 - \left(\frac{r_V}{r_V}\right)^2$, d'où l'estimation par espérance conditionnelle d'une fonction quelconque de Y_V :

$$E(\psi(Y_V) | Y_V) = \int \psi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \frac{r_V}{r_V} Y_V}{\sigma}\right)^2} dy$$

En particulier, les fonctions de récupération s'estiment par :

$$E(P | Y_V) = E \left[1_{Z(\underline{v}) \geq z_c} | Y_V \right] = 1 - G \left[\frac{y_c - \frac{r_V}{r_V} Y_V}{\sigma} \right]$$

et

$$E(Q | Y_V) = E \left[Z(\underline{v}) 1_{Z(\underline{v}) \geq z_c} | Y_V \right] = \int_{y_c}^{\infty} \varphi_{\frac{r_V}{r_V}}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \frac{r_V}{r_V} Y_V}{\sigma}\right)^2} dy$$

L'estimation du métal en particulier, peut être faite avec le développement en polynômes d'Hermite :

Comme
$$E \left[\eta_n(Y_V) | Y_V \right] = \left(\frac{r_V}{r_V}\right)^n \eta_n(Y_V),$$

on a
$$E \left[Q | Y_V \right] = \sum_0^n Q_n \left(\frac{r_V}{r_V}\right)^n \eta_n(Y_V)$$

REMARQUE : à la coupure 0, le métal récupéré estimé est bien égal à la teneur du panneau injecté :

$$\begin{aligned} E \left[\varphi_{\frac{r_V}{r_V}}(Y_V) | Y_V \right] &= \sum_0^n \varphi_n(r_V) \left(\frac{r_V}{r_V}\right)^n \eta_n(Y_V) \\ &= \varphi_{\frac{r_V}{r_V}}(Y_V) = Z(V) \end{aligned}$$

C H A P I T R E 4

METHODES LOCALEMENT STATIONNAIRES : CAS D'ETUDES

Nous allons montrer dans ce chapitre les résultats d'estimation du récupérable que donne le Conditionnement Uniforme par la teneur du panneau, qui vient d'être vu.

4.1 - CAS D'ETUDE : CHUQUICAMATA.

Sur ce cas d'étude nous allons comparer cette méthode, d'une part à la "réalité", d'autre part à une des méthodes non linéaires stationnaires déjà utilisées : le Conditionnement Uniforme par le krigeage des gaussiennes (noté CUY).

Nous savons que dans ce gisement, cette dernière méthode (entre autres) fournit des résultats satisfaisants.

Nous avons d'ailleurs utilisé la teneur moyenne du panneau (récupérable à coupure nulle) estimée par cette méthode, comme teneur du panneau conditionnante dans la nouvelle méthode.

Dans la nouvelle méthode, on utilise en principe le coefficient r_V de changement de support correspondant à la teneur d'un panneau.

En pratique, on ne connaît pas cette teneur, mais seulement un estimateur, deux versions se présentent, qui ont été utilisées :

- r_V correspondant à la variance théorique des vraies teneurs de panneaux, ce qui donne : $R = \frac{r_V}{r_V} = 0.88$

- r_V^* correspondant à la variance des teneurs estimées du panneau :

$$R^* = \frac{r_V^*}{r_V} = 0.84$$

Les résultats comparatifs se trouvent dans les figures 4.1 à 4.4.

Le trait épais représente la réalité, le pointillé, le Conditionnement Uniforme par gaussienne krigée CUY.

Le Conditionnement Uniforme par teneur de panneau est figuré :

- en tireté, avec $R = 0.88$: "CUR"
- en trait fin continu, avec $R^* = 0.84$: "CUR*"

De façon générale, la réalité et les différentes estimations se tiennent d'assez près.

C'est dans la zone mixte que les différences y sont les plus faibles : Fig.4.3. La légère surestimation du métal aux coupures élevées que présente le CUY disparaît avec CUR et CUR*.

Dans la zone pauvre (Fig.4.2), CUY et CUR sont voisins. L'estimation par CUR* est un peu plus élevée que les autres. Dans la zone riche (seulement 6 panneaux !), la réalité apparaît inaccessible (ainsi qu'il avait été dit en 1ère partie). Le CUY est meilleur que les autres estimations (surtout aux coupures élevées) et le CUR s'en approche davantage que le CUR*. Les différences observées au niveau des 50 panneaux (Fig.4.1) proviennent de cette zone riche.

Le Conditionnement Uniforme par teneur de panneau donne ici des résultats assez satisfaisants dans l'ensemble, moins cependant pour les panneaux riches. Des deux options, CUR et CUR* la première est légèrement meilleure et sera seule conservée dans la suite.

REMARQUE

Le conditionnement uniforme par teneur de panneau utilise le changement de support jusqu'à la taille du panneau. Autrement dit, si les φ_n sont les coefficients de l'anamorphose ponctuelle développée en polynômes d'Hermite, l'anamorphose de coefficients $\varphi_n(r_V)^n$ doit représenter convenablement la loi des panneaux.

La figure 4.5 permet de comparer la distribution que prévoit le modèle, à la distribution expérimentale des 134 panneaux

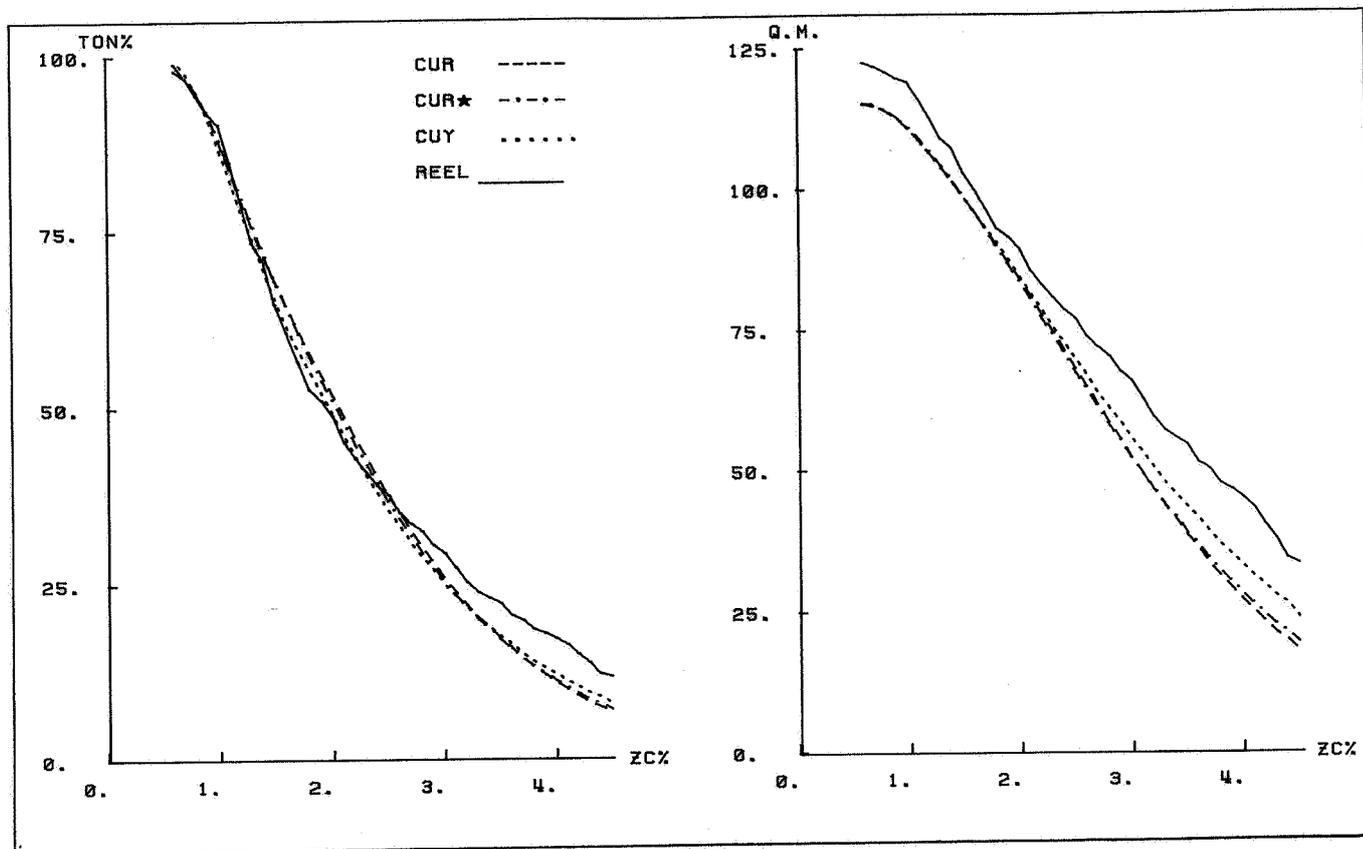


Fig.4.1 - Comparaison globale des courbes tonnages et quantité de métal en fonction de la teneur de coupe.

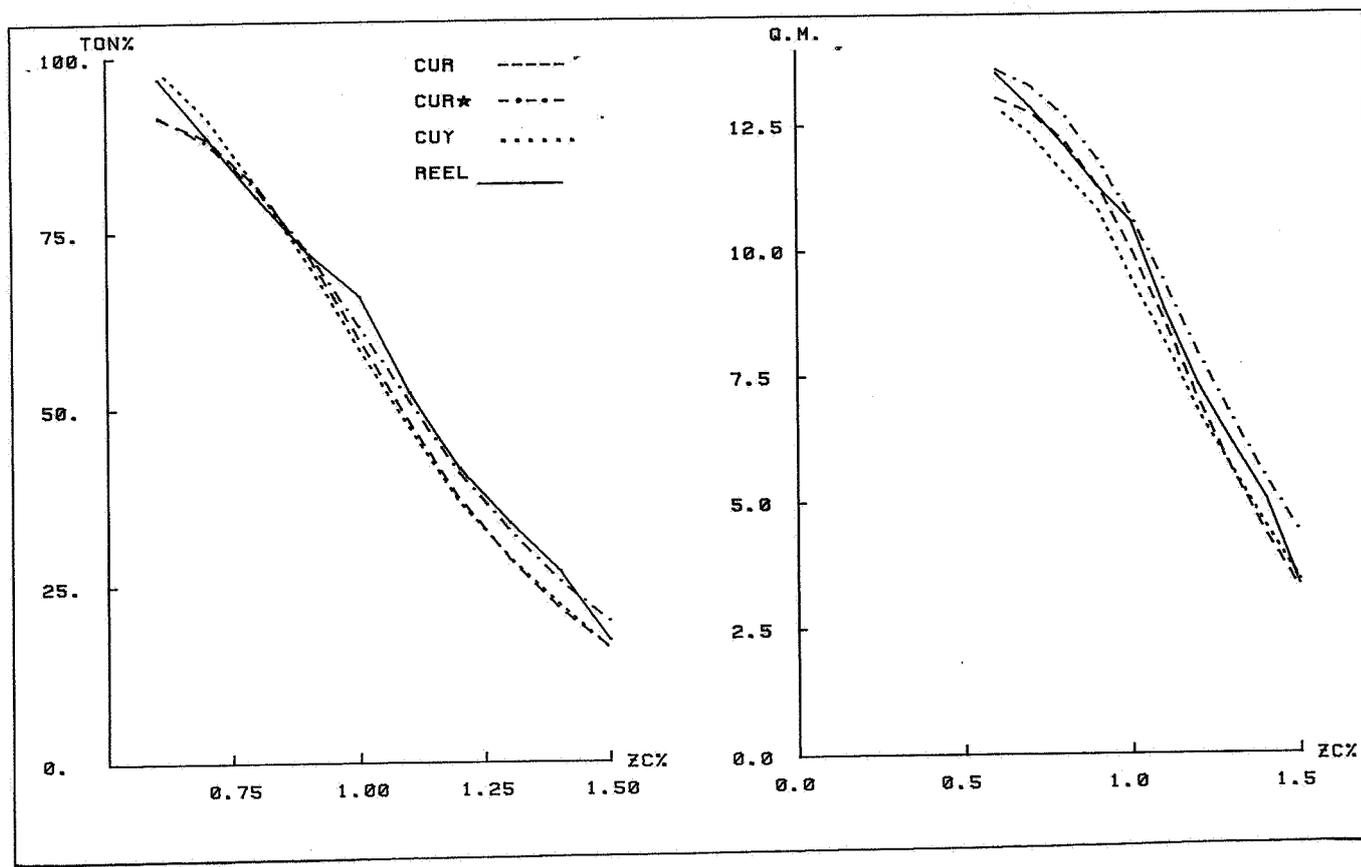


Fig.4.2 - Comparaison locale pour une zone pauvre.

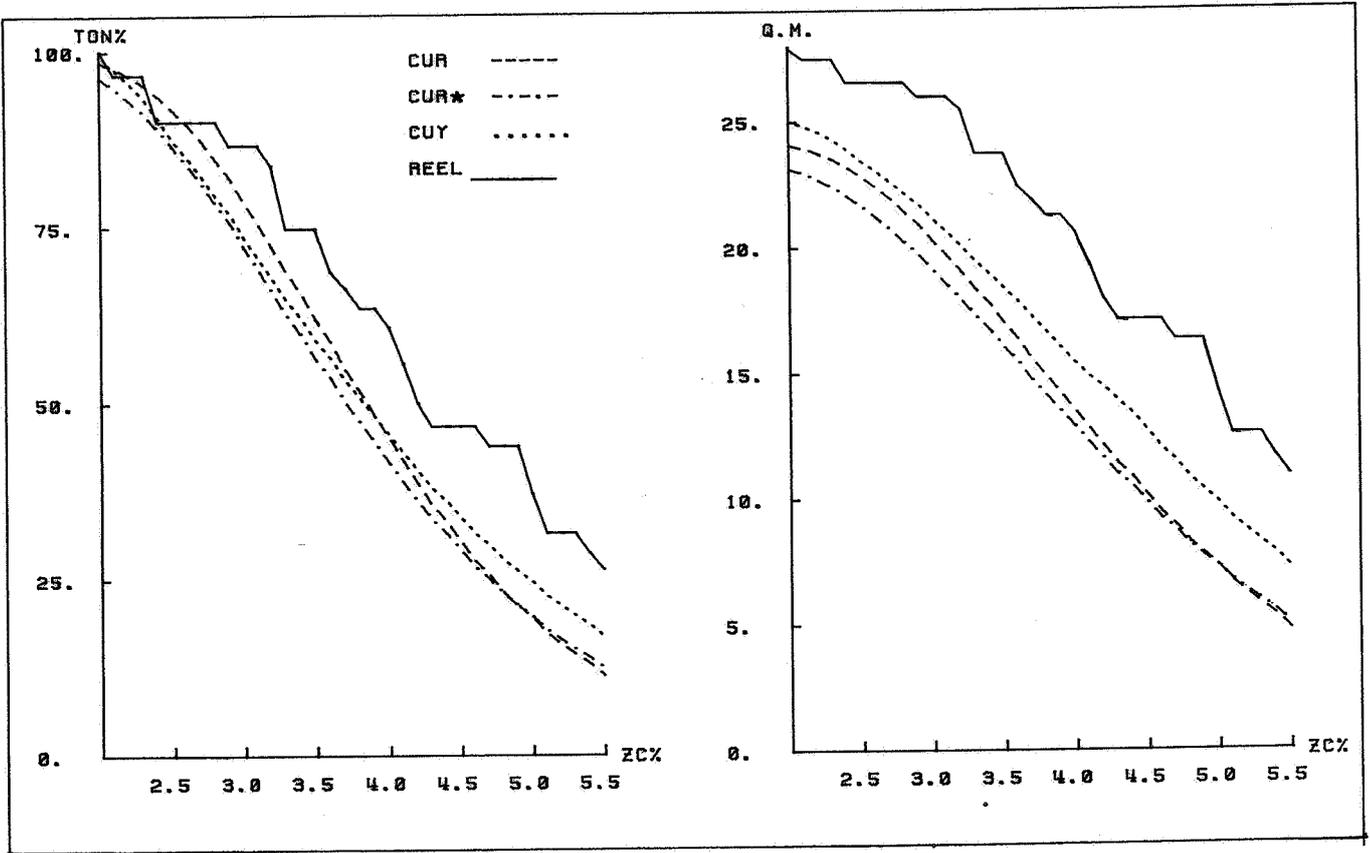


Fig. 4.3 - Comparaison locale pour une zone riche

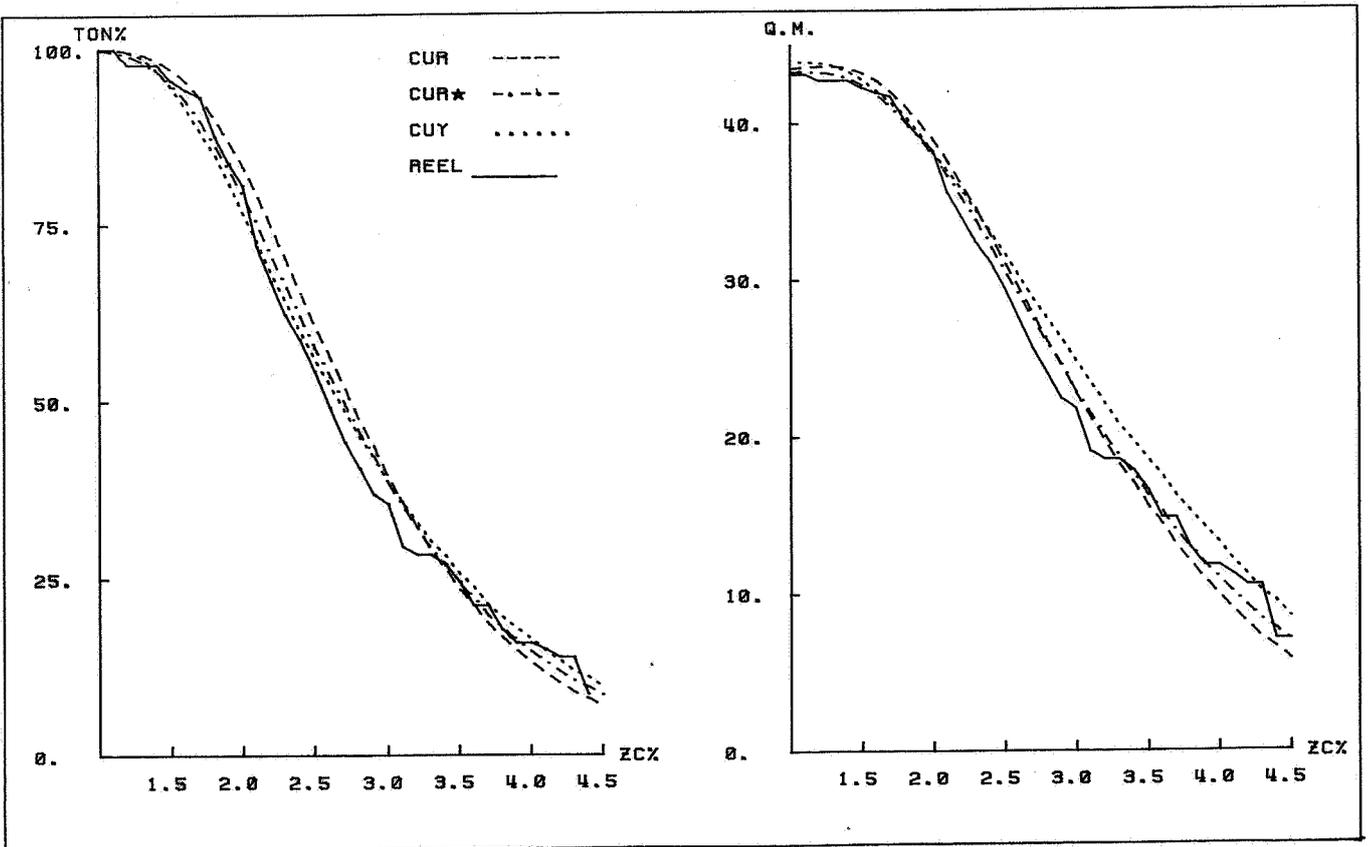


Fig. 4.4 - Comparaison locale pour une zone mixte

dont la teneur moyenne est bien connue. Il existe des écarts non négligeables aux fortes teneurs : la proportion des valeurs riches est sous-estimée et ceci explique peut-être pourquoi, dans la zone riche (Fig.4.4) cette méthode fournit des résultats inférieurs au CUY.

Cette sous-estimation du riche est déjà perceptible sans le concours de la distribution de teneurs réelles de panneaux : ainsi, aux teneurs riches le modèle prévu pour les teneurs vraies passe au dessous de l'histogramme des teneurs estimées de panneaux, dont pourtant la variance est plus faible.

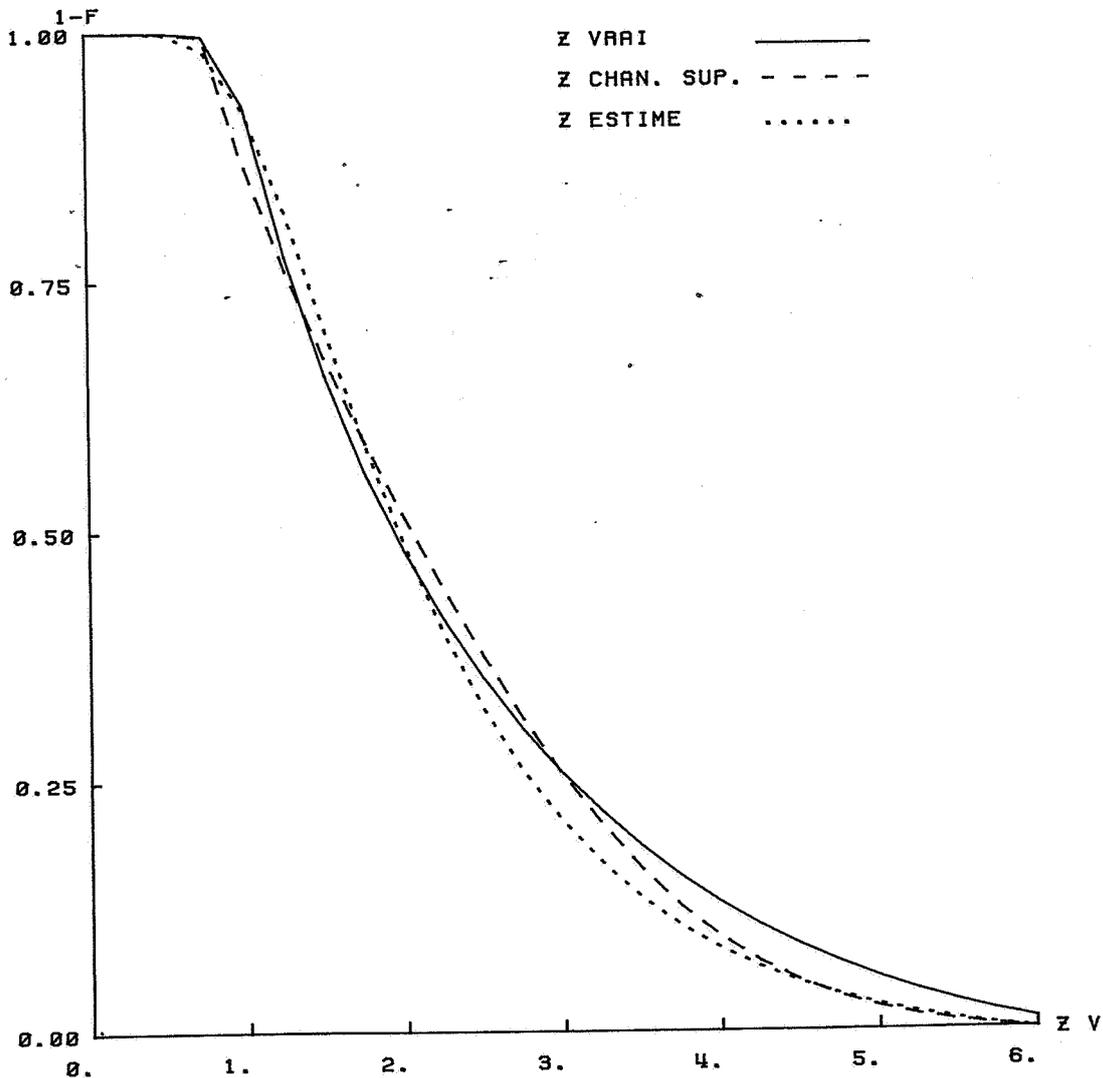


Fig.4.5 - Comparaison entre les lois de panneaux (vrai, modèle et estimé).

4.2 - CAS D'ETUDE : C.C.

Comme on l'a vu dans le chapitre 2 les méthodes stationnaires d'estimation du récupérable ne sont pas satisfaisantes ici, et cela est dû à la faible densité des informations, comparée à la structure.

Le Conditionnement Uniforme par la teneur du panneau "CUZ" permet d'obtenir un récupérable qui est, par construction, satisfaisant à la coupure zéro (stationnarité locale) puisqu'on retrouve la teneur injectée. Et c'est cela qui physiquement nous intéresse.

Malheureusement, on ne dispose pas ici de données permettant de valider l'estimation des distributions de blocs par panneaux, que donne une telle méthode.

Par contre, pour des distributions de points - et non plus de blocs - on dispose d'un autre estimateur adapté à la stationnarité locale : le Krigeage Disjonctif avec condition d'universalité "KDO" (lequel ne peut être utilisé, rappelons-le, que dans le cas ponctuel). Nous pouvons donc faire la comparaison des distributions ponctuelles estimées par ces deux méthodes.

Mais, si le KDO permet d'estimer des distributions de points par panneaux, il permet plus simplement aussi d'estimer la teneur moyenne des panneaux. Et, tout comme le K.O, le KDO peut servir à conditionner les distributions de blocs par panneaux, ce qui sera fait ici.

Ces remarques suggèrent le plan suivant :

- estimation par KDO des teneurs de panneaux, et comparaison avec le KO.
- estimation, en conditionnant par ces teneurs, des distributions de blocs par panneaux, et comparaison avec une estimation par méthode stationnaire (KD).

- comparaison des distributions de points, estimées d'une part, par KDO, d'autre part, en conditionnant par la teneur KDO des panneaux.

4.2.1 - KDO des teneurs de panneaux

Nous avons comparé les estimations par KO et KDO des teneurs de panneaux.

Sur ce gisement, sans doute du fait de la distribution des teneurs qui n'est pas très dissymétrique, ces estimations linéaires et non-linéaires sont très proches l'une de l'autre.

Les figures 4.6 et 4.7 représentent d'ailleurs la corrélation très bonne qui existe entre ces deux estimateurs.

Ces figures portent sur deux populations de panneaux :

- ceux dont le poids de la moyenne (en krigeage) est inférieur à 0.3
- ceux où il est supérieur ou égal à 0.5

Le poids de la moyenne ne semble donc pas jouer de rôle particulier dans la comparaison KO - KDO. Dans tous les cas le KDO se cale bien aux données du voisinage.

4.2.2 - Estimation du récupérable sur blocs : conditionnement uniforme CUZ par la teneur KDO des panneaux.

Rappelons les étapes nécessaires à une telle estimation :

- a) Estimation de la teneur des panneaux $Z(V)$ par une méthode de stationnarité locale (ici KDO)
- b) Anamorphose des données expérimentales (φ développée en φ_n)
- c) Changement de support pour les blocs v :

calcul de $\text{Var } Z(v)$ à partir du variogramme de $Z(x)$:

- détermination du coefficient r_v d'après :

$$\text{Var } Z(v) = \sum_1 (\varphi_n)^2 (r_v)^{2n}$$

- d'où les coefficients de l'anamorphose bloc

$$\varphi_{r_v} = \varphi_n (r_v)^n$$

- d) Idem pour les panneaux avec r_v : φ_{r_v}
- e) Détermination de $Y_v = \varphi_{r_v}^{-1} (Z(V))$ pour les teneurs de panneaux conditionnantes.
- f) Détermination des coupures gaussiennes $y_c = \varphi_{r_v}^{-1} (z_c)$ correspondant aux coupures réelles z_c .
- g) Développement de la fonction "métal récupérable"
$$\varphi = Z(v) \mathbb{1}_{Z(v) > z_c}$$
en polynômes d'Hermite.
- h) Estimation du minerai P et du métal Q récupérables à la coupure z_c .

Les figures 4.8 à 4.11 montrent la comparaison de cette méthode avec une méthode stationnaire (KD) sur 4 ensembles :

- globalement

- les bancs 1 à 10 : zone pauvre
- les bancs 11 à 20 : zone moyenne
- les bancs 55 à 64 : zone riche

Les résultats globaux sont très voisins l'un de l'autre. Sur les résultats locaux, on observe que le conditionnement uniforme par les teneurs de panneaux corrige l'attraction vers la distribution moyenne que l'on peut observer en KD dans les zones riche et pauvre.

Faute de pouvoir comparer à la réalité, il n'est malheureusement pas possible de juger de la précision de l'estimation ainsi obtenue.

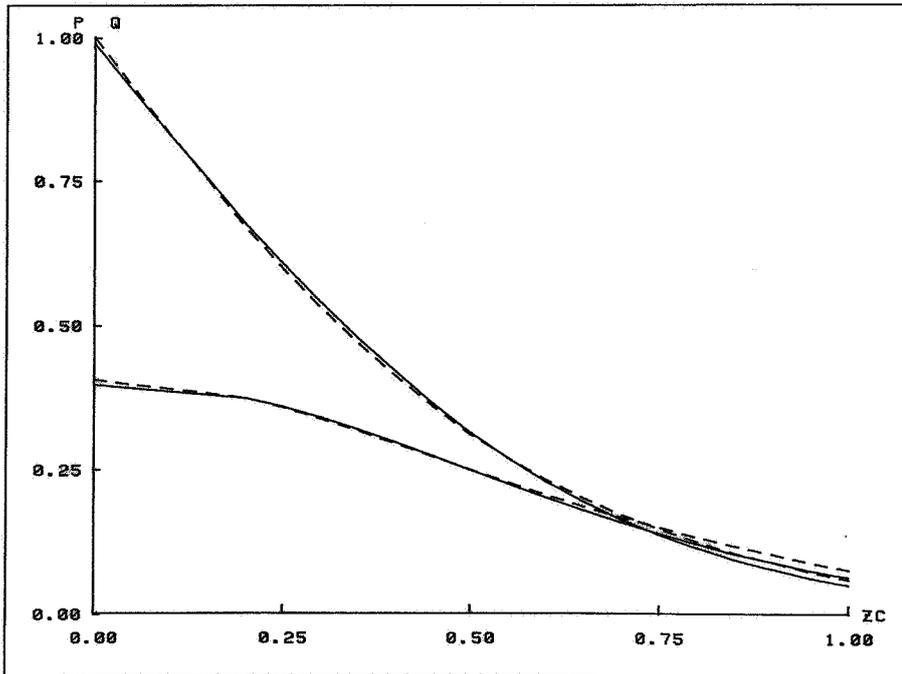


Fig. 4.8 - F.R. de blocs - global -

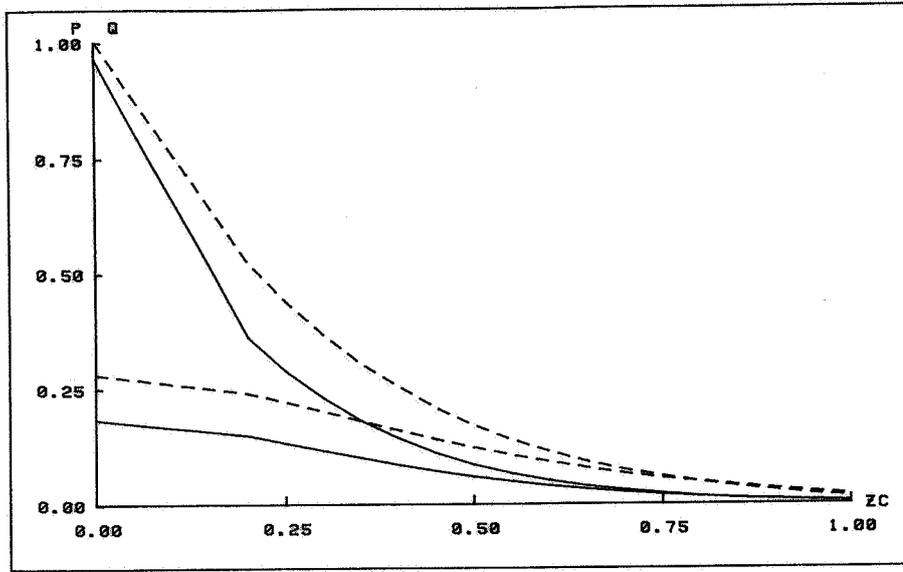


Fig. 4.9 - Zone pauvre

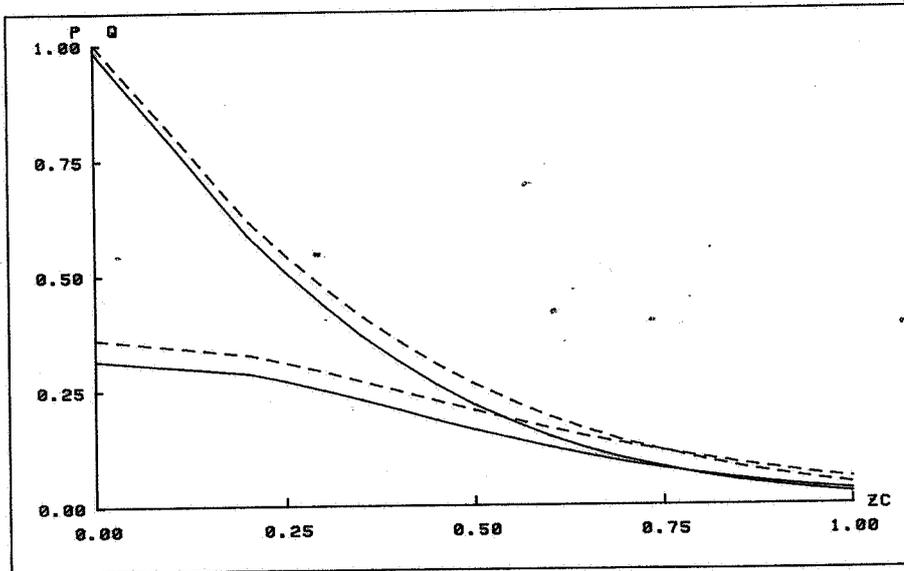


Fig. 4.10 - Zone moyenne

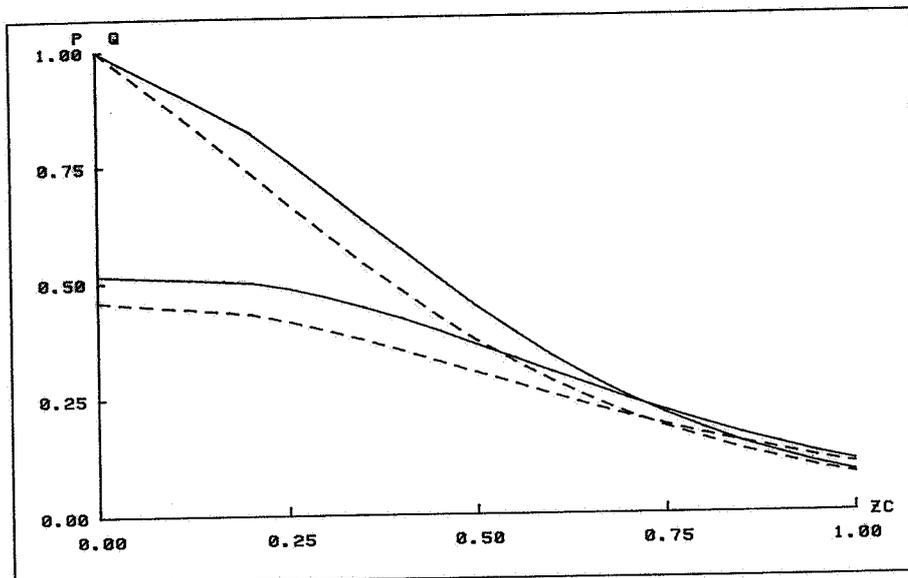


Fig. 4.11 - Zone riche

4.2.3 - Comparaison entre estimations CUZ et KDO de la distribution de points dans les panneaux.

Les comparaisons sont faites pour les mêmes populations que précédemment (Fig.4.12 à 4.15).

Au niveau global, on trouve des estimations égales.

Localement, les estimations sont assez ressemblantes. Une chose surtout est à noter, qui apparait bien dans l'estimation du métal de la zone riche. Les estimations par conditionnement uniforme correspondent à des distributions globales conditionnées par une valeur, ce qui n'autorise pas des formes très variées. Au contraire, le KDO qui met en jeu une forme différente d'estimateur et qui de plus s'appuie sur des conditions d'universalité peut refléter des particularités de cette distribution locale qui n'existent pas globalement et qui sont invisibles en CU.

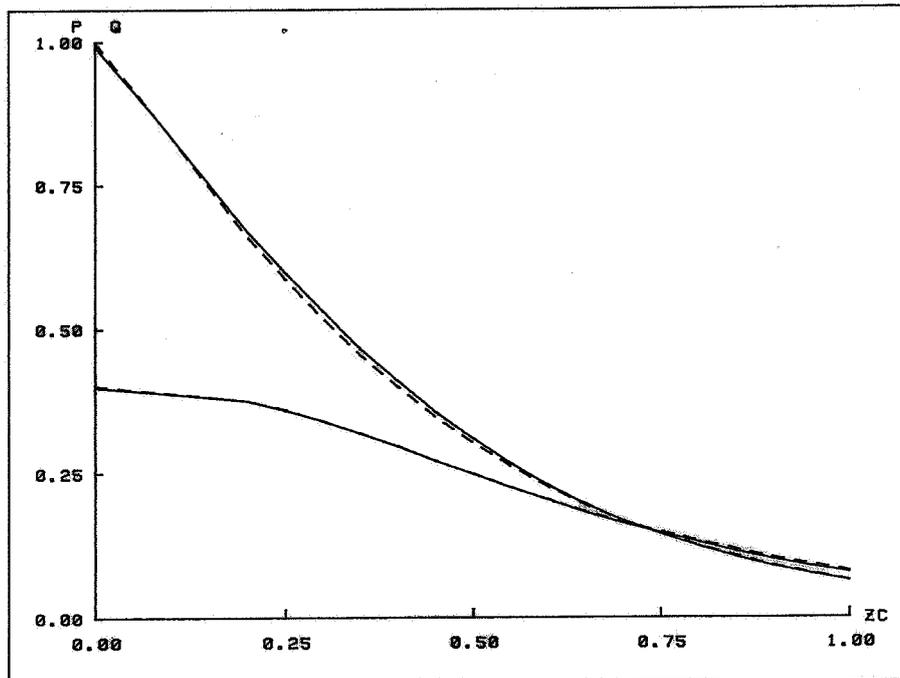


Fig. 4.12 - F.R de points - global -

————— CU
----- KDO

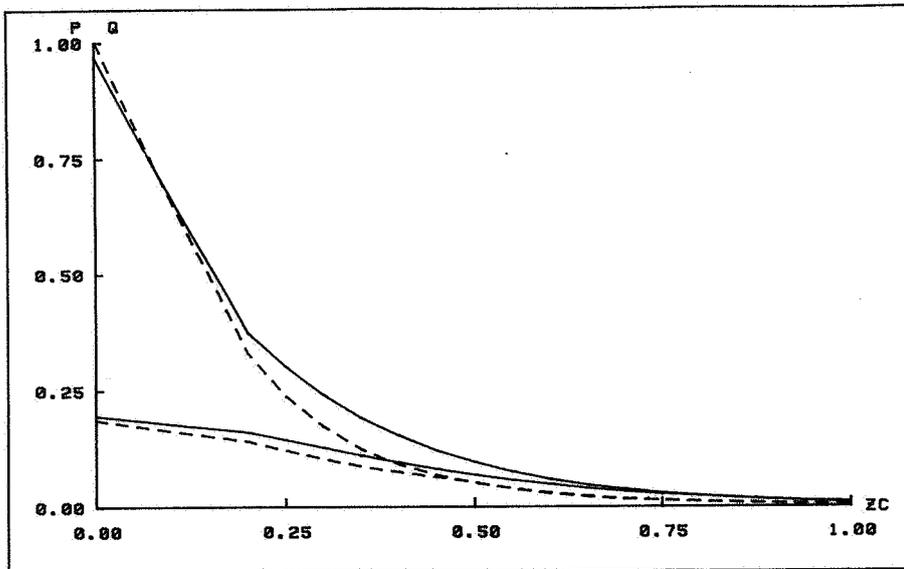


Fig.4.13 - Zone pauvre

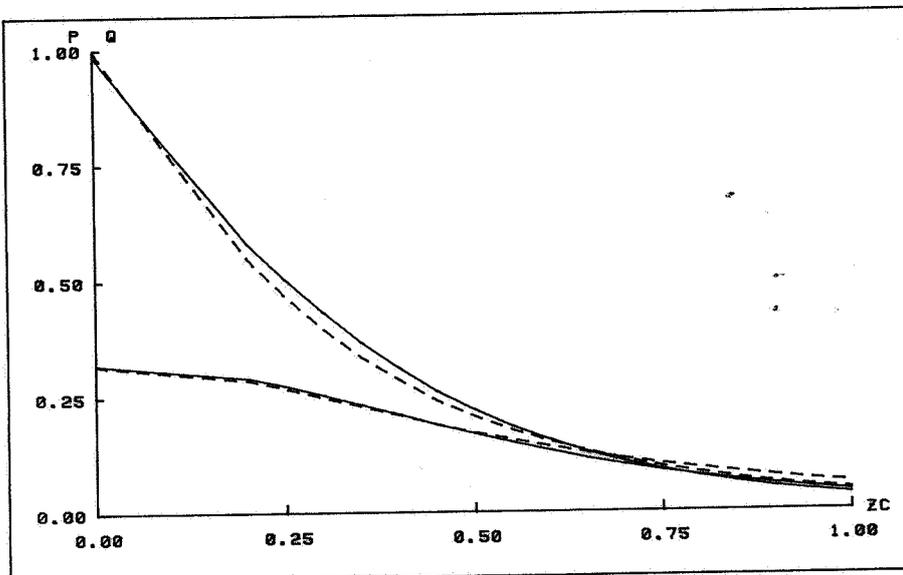


Fig. 4.14 - Zone moyenne

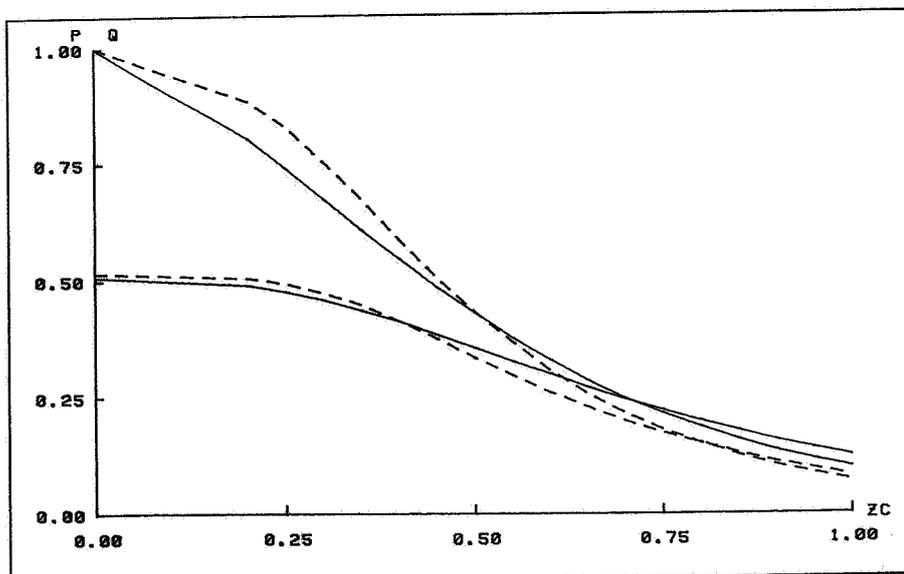


Fig. 4.15 - Zone riche

C O N C L U S I O N

Estimer le récupérable local n'est pas chose facile : il s'agit en effet de prévoir, pour chaque coupure et dans chaque panneau, la proportion de blocs au-dessus de cette coupure, ainsi que le métal correspondant. Il faut donc déterminer la distribution des teneurs de blocs de chaque panneau.

Néanmoins, le travail présenté montre qu'une telle estimation peut, sous certaines hypothèses, être réalisée de façon courante, si on prête une grande attention aux différentes opérations mises en jeu.

L'hypothèse fondamentale commune à toutes les méthodes d'estimation monovariable présentées ici est la possibilité de faire une anamorphose gaussienne bijective des données, conduisant à des couples bigaussiens, ce qui est en général le cas avec : Cuivre, Plomb, Zinc, Aluminium, Fer ...

Par contre, un effet zéro important ne peut pas être pris en compte et les gisements d'Uranium, de métaux précieux, ainsi que les gisements en tout ou rien, demanderont des modèles plus adaptés.

Deux situations peuvent se présenter :

1. La maille des données est petite vis-à-vis de la structure géostatistique : le poids de la moyenne dans le krigeage des panneaux est faible.

Dans ce cas, les méthodes stationnaires donnent toute satisfaction, il faut donc choisir la plus simple :

- K.D. qui utilise le caractère bigaussien des couples
- Espérance Conditionnelle, qui utilise la multinormalité et dans

laquelle chaque bloc se voit conditionné par son krigeage (en gaussiennes).

- Conditionnement Uniforme, version simplifiée de la méthode précédente, dans lequel tous les blocs sont conditionnés par le seul krigeage de leur moyenne (toujours en gaussiennes).

2. La maille des données est grande (le poids de la moyenne est important).

Les méthodes stationnaires ne respectent plus les zonéographies d'un gisement.

Si le bloc de sélection peut être assimilé à un point (ou dans des applications non minières ne nécessitant pas de changement de support, par exemple : pollution), on peut alors effectuer un Krigeage Disjonctif avec conditions de non-biais.

Si ce n'est pas le cas, on pourra utiliser comme méthode, le conditionnement uniforme par la teneur du panneau : la distribution des blocs de chaque panneau se voit alors conditionnée par la teneur du panneau, estimé en stationnarité locale (krigeage ordinaire ou KD, avec conditions de non-biais). Cette méthode est simple et s'adapte par construction aux zonéographies. Elle suppose que la formule de changement de support est valable jusqu'à la taille du panneau.

L'extension de toutes ces méthodes au cas multivariable semble être essentiellement caractérisée par des formules théoriques plus complexes, utilisant des notations abondantes (MARECHAL, 1982- RIVOIRARD, 1984).

S'affranchir du cadre gaussien, par contre, soulève des problèmes différents selon les méthodes :

- KD et conditionnement Uniforme par teneur de panneau, pourront être réalisés avec les autres modèles de changement de support à lois bivariabiles isofactorielles, qui font actuellement l'objet de recherches.
- l'Espérance Conditionnelle, elle, nécessiterait des modèles multivariabiles, qui ne sont pas encore connus et qui ne bénéficieraient sans doute pas de la simplicité du multigaussien.

A N N E X E S

- 1 - Détermination de l'anamorphose gaussienne
- 2 - Krigeage
- 3 - Convergence des estimateurs

ANNEXE 1 : Détermination de l'anamorphose gaussienne.

Soient $z(x_\alpha) = z_\alpha$ l'ensemble des valeurs connues expérimentalement et censées représenter une Fonction Aléatoire Stationnaire $Z(x)$ de loi $F(z) = P(Z(x) < z)$ continue.

Il s'agit de déterminer la fonction d'anamorphose bijective φ reliant $Z(x)$ et une gaussienne réduite $Y(x)$, selon la relation $Z(x) = \varphi(Y(x))$.

On doit donc avoir :

$$G(y) = P(Y(x) < y) = P(\varphi(Y(x)) < \varphi(y)) = P(Z(x) < \varphi(y)) = F(\varphi(y)).$$

Expérimentalement, on peut connaître φ de la façon suivante :

- A chaque valeur z_α est associée un poids (cf. 2ème partie) p_α (égal à $\frac{1}{N}$ si les N données ont même poids)
- On range les données par ordre croissant, en regroupant les données qui seraient égales et leur poids.
- On calcule alors les fréquences cumulées de chacune des valeurs $z_\alpha : F(z_\alpha)$.
- On lui associe alors la valeur y_α d'une gaussienne réduite Y , correspondant à la même fréquence cumulée :

$$G(y_\alpha) = F(z_\alpha)$$

soit
$$y_\alpha = G^{-1} [F(z_\alpha)]$$

- On connaît ainsi la fonction d'anamorphose par un certain nombre de ses points : (y_α, z_α) , qu'on peut représenter graphiquement.

En pratique il sera nécessaire aussi de modéliser cette fonction φ , qui sera déterminée par les

coefficients φ_n de son développement en polynômes d'Hermite :

$$\varphi(y) = \sum_0^n \frac{\varphi_n}{n!} H_n(y)$$

Les φ_n sont théoriquement définis par :

$$\varphi_n = E \left[\varphi(Y) H_n(Y) \right]$$

et les $H_n(y)$ peuvent être obtenues par récurrence:

$$H_n(y) = -y H_{n-1}(y) - (n-1)H_{n-2}(y)$$

En s'arrêtant à un ordre p , φ réalise le meilleur ajustement polynomial de degré p au sens des moindres carrés.

On choisira cet ordre de façon à respecter les principaux paramètres de la loi (moyenne et variance).

Nous indiquons deux possibilités parmi d'autres :

1°) A partir de la définition, en connaissant y_α, z_α et la variable pondératrice p_α on calcule alors :

$$\varphi_n = \sum_\alpha z_\alpha p_\alpha H_n(Y_\alpha)$$

Cette possibilité correspond à l'ajustement des points expérimentaux par la courbe φ (BOUCHIND'HOMME 1980).

2°) Par interpolation (par exemple linéaire). entre les points expérimentaux (y_α, z_α) , φ_n est obtenu par intégration de $\varphi(y) H_n(y) g(y)$ en chaque segment de droite (A.JOURNEL, CH.HUYBREGTS, 1978).

Les queues de distribution interviennent aussi dans l'ajustement : il faut alors en choisir le comportement. Le meilleur choix sera fait à partir des programmes graphiques.

C'est cette seconde solution, qui est d'ailleurs la plus utilisée, qui a été retenue dans nos études.

ANNEXE 2 - Krigage

Cette annexe constitue un rappel théorique des types de krigage, dans le but principal d'être un aide-mémoire.

$Z(x)$ étant une Fonction Aléatoire Stationnaire d'ordre 2, les différents types de krigage sont :

1) Le krigage à moyenne connue, ou krigage simple (KS) de $Z(V)$

$$Z_{KS} = m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{KS} (Z_{\alpha} - m) \quad (1)$$

$$= \lambda_m m + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{KS} Z_{\alpha}$$

avec $\lambda_m = 1 - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{KS}$ poids de la moyenne

Le système de krigage s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\beta}^{KS} C_{\alpha\beta} = \bar{C}_{\alpha V}$$

La variance d'estimation vaut : $\sigma_{KS}^2 = C_{VV} - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{KS} C_{\alpha V}$

2) Le krigage de la moyenne (KM)

m est alors estimé par $m^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^0 Z_{\alpha}$

obéissant au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^0 C_{\alpha\beta} = \mu_0 \\ \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^0 = 1 \end{array} \right.$$

μ_0 représente la variance d'estimation de m .

3) Le krigage à moyenne inconnue ou krigage ordinaire

En remplaçant m par m^* dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} Z_{KO} &= \lambda_m \sum_{\alpha} \lambda_0^{\alpha} Z_{\alpha} + \sum_{\alpha} \lambda_{KS}^{\alpha} Z_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \lambda_{KO}^{\alpha} Z_{\alpha} \end{aligned}$$

avec les $\lambda_{KO}^{\alpha} = \lambda_{KS}^{\alpha} + \lambda_0^{\alpha} \lambda_m$

vérifiant le système :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha} \lambda_{KO}^{\alpha} C_{\alpha\beta} = C_{\alpha V} + \mu \\ \sum_{\alpha} \lambda_{KO}^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Le KO est d'autant plus proche du KS que λ_m est voisin de zéro.

Notons (G.MATHERON.1970) la relation entre variances d'estimation :

$$\sigma^2_{KO} = \sigma^2_{KS} + \lambda_m^2 \mu_0$$

et la relation $\mu = \lambda_m \mu_0$ qui montre la signification du paramètre μ , lié au poids de la moyenne et à sa variance l'estimation.

REMARQUE : en pratique, si on veut calculer les paramètres intervenant dans les 3 types de krigage, on pourra procéder de la façon suivante, qui est très économique informatiquement:

a) Inverser la matrice intervenant dans le 1er membre des systèmes de KO et KM.

b) En déduire les paramètres KO et KM :

$$\lambda_{KO}^{\alpha}, \mu, \lambda_{KM}^{\alpha}, \mu_0$$

c) Calculer alors les paramètres KS :

$$\lambda_m = \frac{\mu}{\mu_0} ; \lambda_{KS}^{\alpha} = \lambda_{KO}^{\alpha} - \lambda_m \lambda_0^{\alpha}$$

ANNEXE 3 - *Convergence des estimateurs*

Cette annexe illustre les problèmes de convergence que l'on observe lorsque les estimateurs utilisent un développement en polynômes d'Hermite. On verra aussi les corrections qu'on peut appliquer une fois que la convergence est bien avancée, pour avoir des résultats entièrement cohérents.

Il s'agit, dans les exemples, de l'estimation du récupérable en conditionnant uniformément par la teneur du panneau (cf. Chapitre 3). On estime donc des fonctions de Y_V , conditionnées par Y_V , la corrélation entre ces gaussiennes valant R . Les fonctions estimées sont :

- la densité
- la proportion de minerai : $1_{Y_V > y_c}$
- la quantité de métal : cette dernière fait intervenir une fonction d'anamorphose, ici celle de Chuquicamata.

Les figures suivantes indiquent les résultats, pour les valeurs de R : 0.9 et 0.7, et celles de Y_V : -2., -1., et 0. Nous avons utilisé dans les développements, d'abord 3 polynômes, ce qui n'est pas satisfaisant, puis 9, ce qui doit être assez satisfaisant et enfin 15, ce qui est, en principe, largement suffisant.

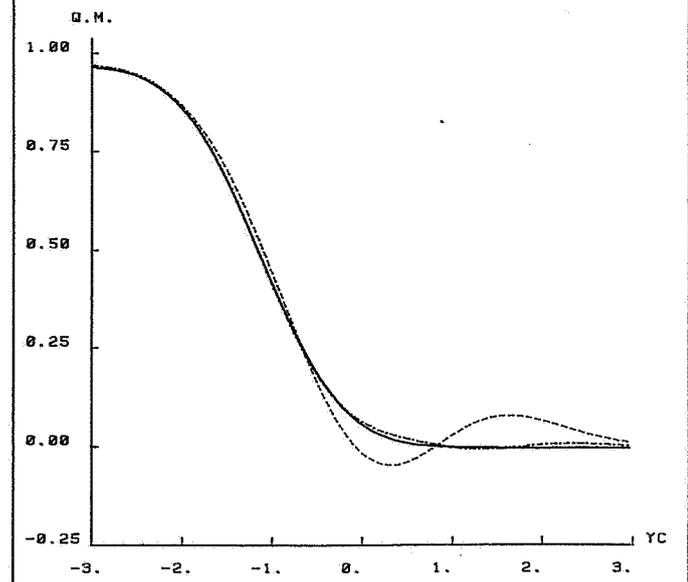
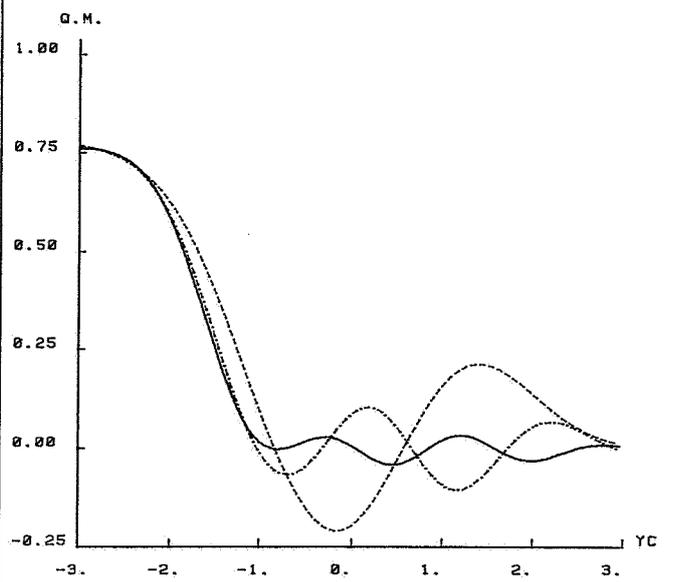
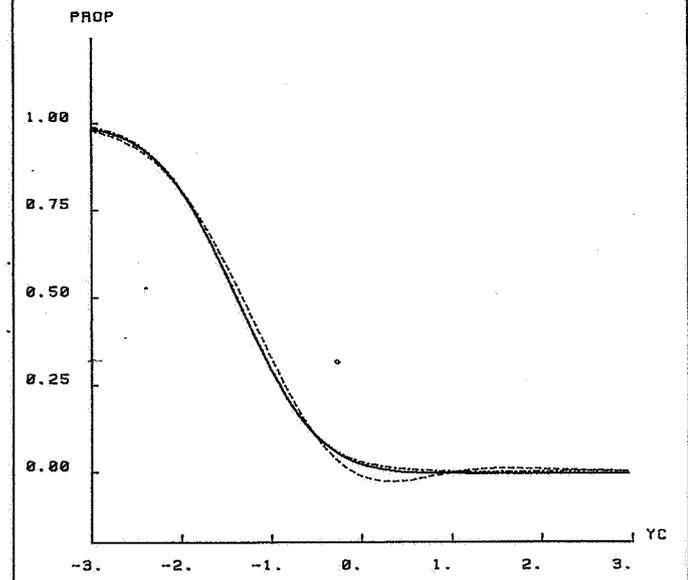
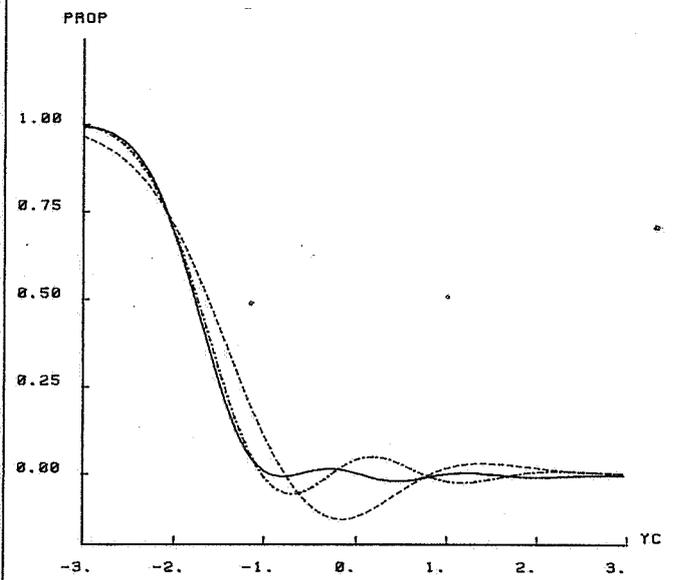
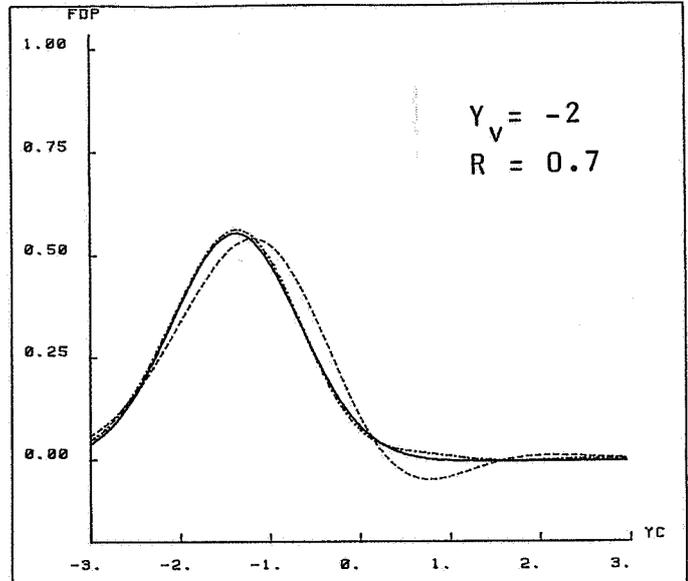
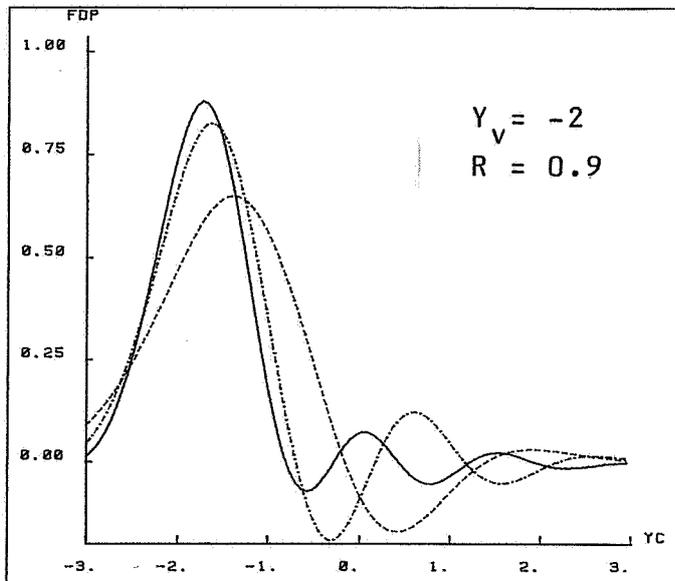
La convergence est d'autant plus rapide que R est faible. Pour $R = 1$, on trouverait pour la proportion de minerai, par exemple, le développement de l'indicatrice (échelon) :

$$1_{Y > y_c} = 1 - G(y_c) - \sum_1 \frac{H_{n-1}(y_c) H_n(Y) g(y_c)}{n!}$$

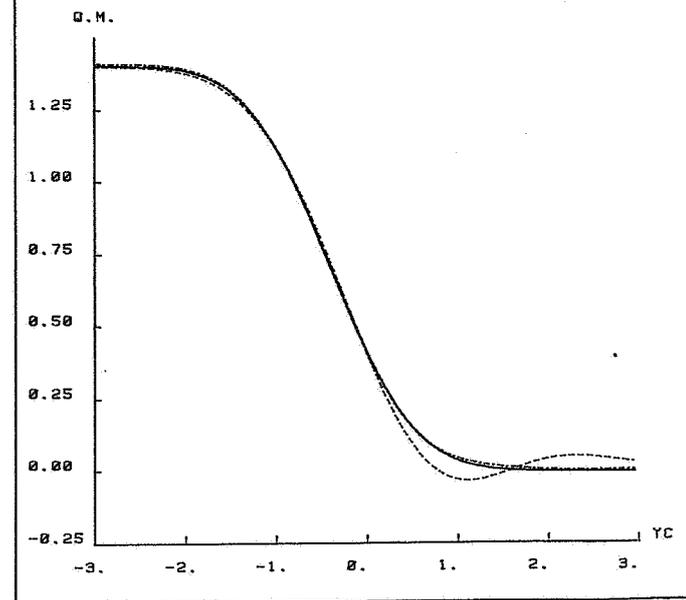
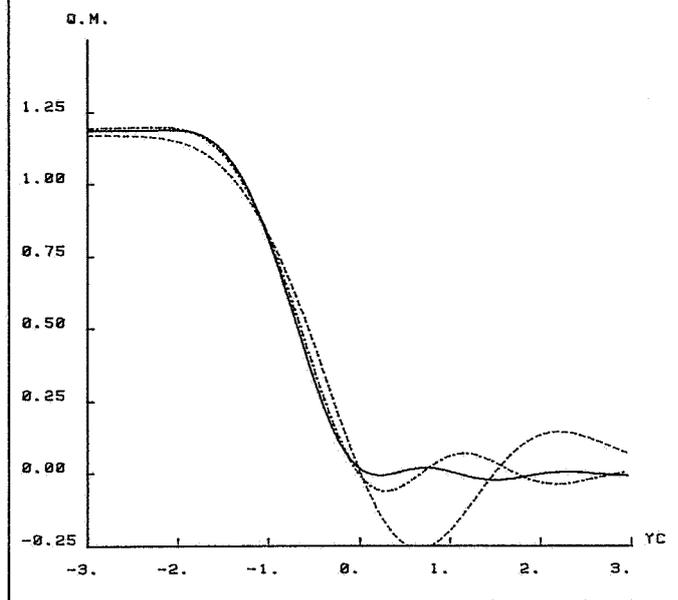
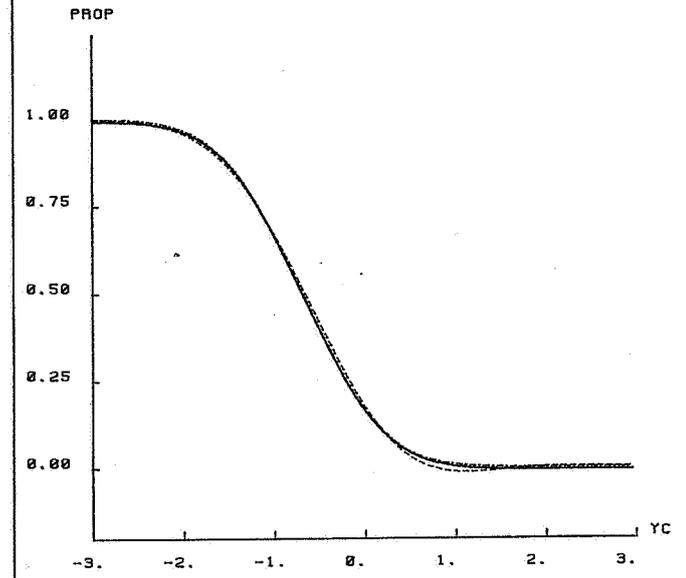
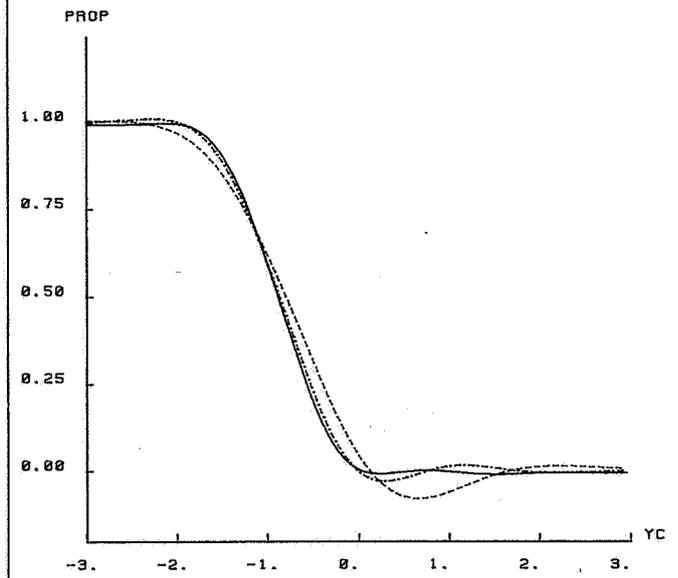
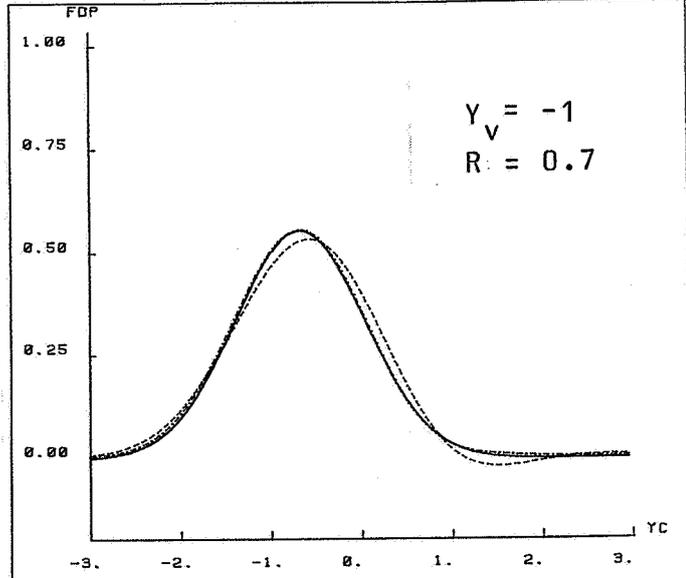
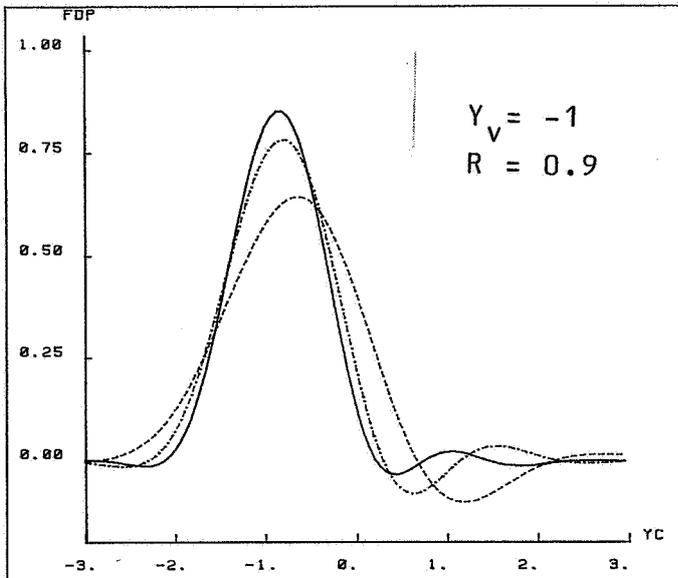
qui converge très lentement.

Ceci est visible en comparant la variance :

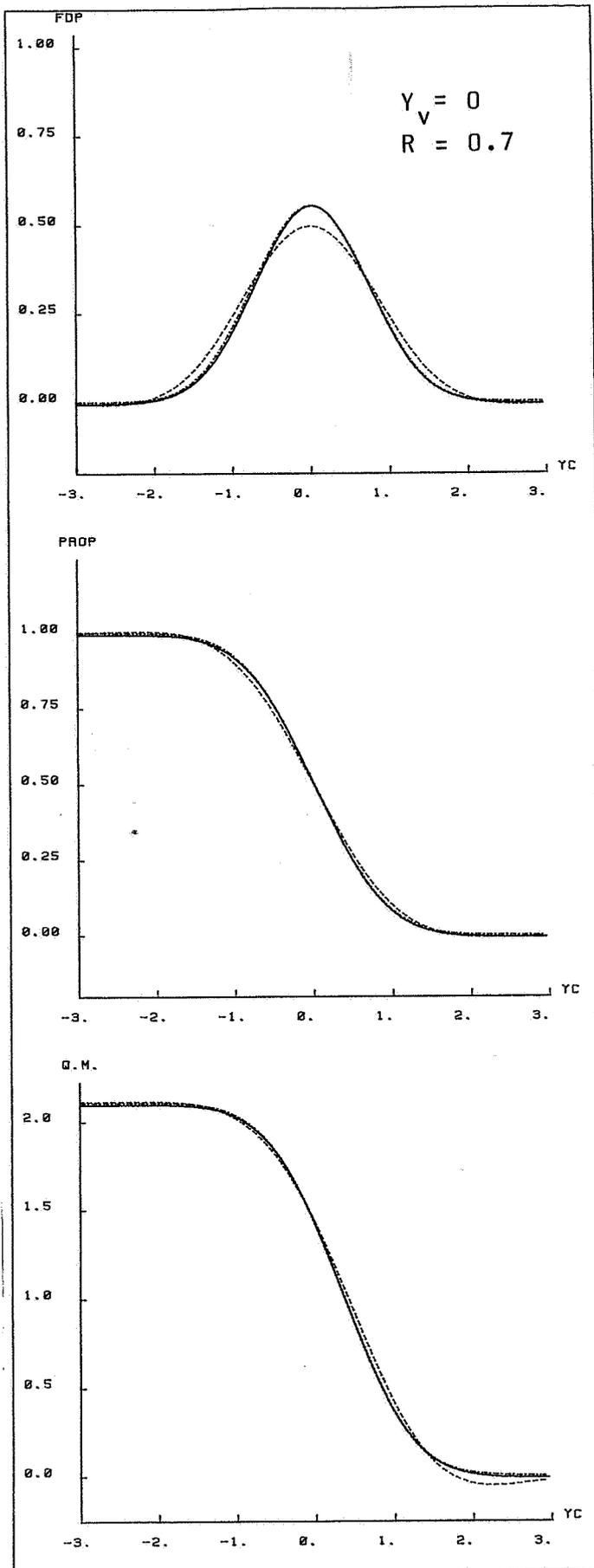
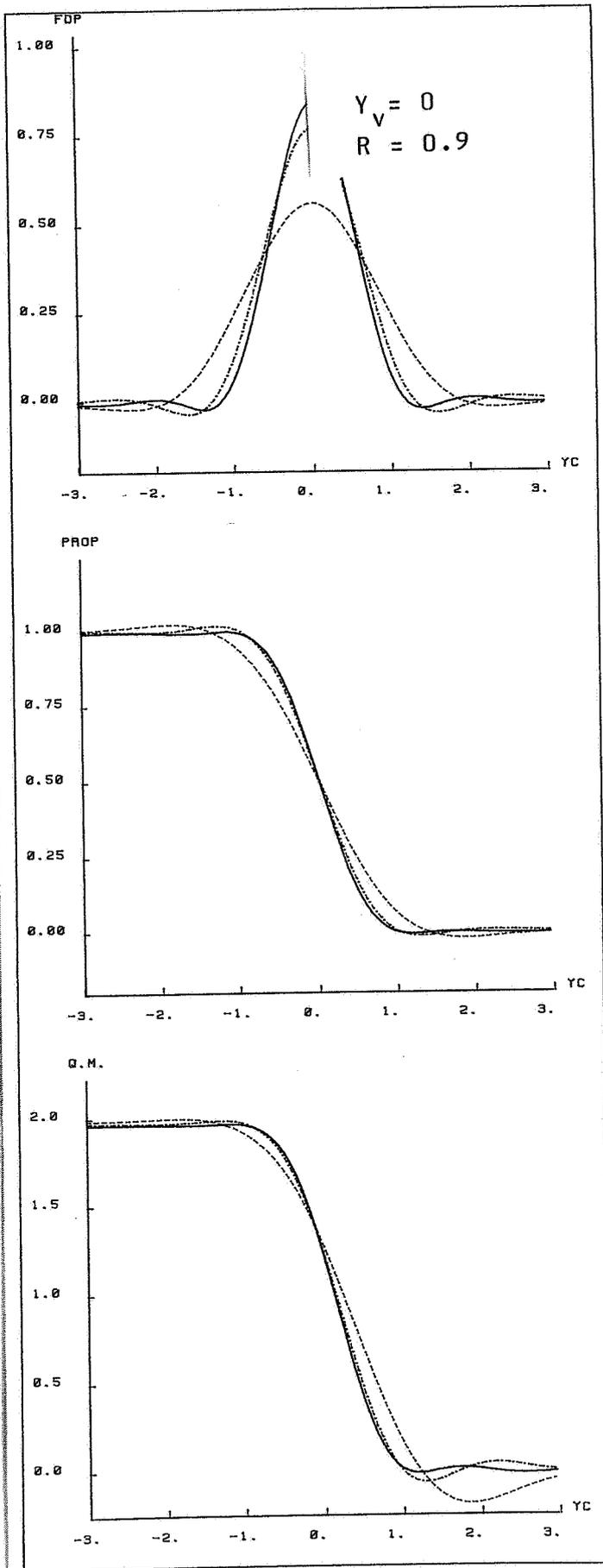
$S_n^2 = \left[g(y_c) \right]^2 \sum_{n > 1} \frac{(H_{n-1}(y_c))^2}{n!}$ du développement tronqué,
à la variance $S^2 = G(y_c) [1 - G(y_c)]$ de l'indicatrice.



----- 3
-.-.-.-.- 9
————— 15



--- 3
-.- 9
— 15



--- 3
- - - 9
— 15

Le tableau suivant résume (en ‰) les différences pour des développements à l'ordre 20 et 30 et des coupures allant de 0 à 2 :

$ y_c $ \ n	20	30
0.0	0.0285 ‰	0.0233 ‰
0.5	0.0247	0.0204
1.0	0.0171	0.0142
1.5	9.1987	7.3926
2.0	3.6869	2.9331

Heureusement les estimateurs font intervenir des corrélations inférieures à 1, ce qui accélère la convergence.

Les figures précédentes montrent que l'ordre 3 est très insuffisant pour des corrélations supérieures ou égales à 0.7. Pour $R = 0.7$, l'ordre 9 apparaît correct, mais pour $R = 0.9$, il faut au moins aller jusqu'à 15.

Même en poussant ainsi assez loin le développement utilisé, des corrections sont à faire si on veut supprimer toutes les incohérences des résultats (par exemple, proportion de minerai négative ou supérieure à 100%) qui, aussi minimes soient-elles, font toujours fâcheuse impression.

Or ces incohérences apparaissent essentiellement dans les queues des distributions. Elles affectent ainsi les résultats de récupérable pour des coupures qui sont très éloignées de la teneur du panneau considéré (En particulier les coupures élevées si le panneau est pauvre, ou les coupures basses, s'il est riche).

Il va donc falloir corriger ces incohérences, en sachant bien toutefois que, du point de vue minier, les résultats qui en sont affectés sont de peu d'intérêt.

On va pour cela utiliser un critère qui va dépendre de la teneur du panneau :

Soit $\bar{y} = -H_1^*$ la moyenne de la loi de Y_V estimée
et $\sigma^2 = H_2^* + 1 - H_1^{*2}$ sa variance.

Partant de \bar{y} , on déterminera sur la courbe indiquant la proportion de minerai récupérable, le premier point, à gauche de \bar{y} pour lequel cette proportion vaut 1. (noté a)

Si cette recherche nous conduit trop loin, on s'arrêtera pour la valeur de a égale à $\bar{y} - c\sigma$, c étant une constante donnée.

A gauche de a, la proportion de minerai sera prise constante et égale à 1.

De même, on déterminera b, à droite de \bar{y} , égal au maximum à $y + c\sigma$, au delà duquel la proportion de minerai sera fixée à 0.

Des tests ont été faits pour choisir c. En prenant $c = 2$, la plupart des incohérences disparaissent et on obtient une proportion de minerai récupérable décroissante de 1 à 0.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BOUCHIND'HOMME J.F. - 1980

Estimation de l'uranium récupérable sur les gisements sédimentaires, stratiformes, exploitables à ciel ouvert
Thèse de Docteur-Ingénieur.

DAGBERT M., DAVID, M - 1977

Predicting Vanishing tons before production starts or small blocks are no good for planning in porphyry type deposits.
AIME Annual Meeting - Atlanta - Georgia.

GUIBAL D., REMACRE, A. - 1983

Local estimation of recoverables reserves : comparing various methods with the reality of a porphyry copper deposit.
NATO ASI-TAHOE - 1983
D.Reidel Pub. Co., pp. 435-448.

GUIBAL D., TOUFFAIT, Y. - 1979

Structural Analysis of CC
Note C.G.M.M. (confidentiel).

JOURNEL A. - 1982

Indicator approach to spatial distributions
Proceeding of 17th APCOM, Denver,

- 1983 a

Non parametric estimation of spatial distributions
Mathematical Geology, vol.15 n°3 -

- 1983 b

The place of non-parametric geostatistics.
NATO ASI-TAHOE-1983, D.Reidel Pub. Co., p.307.

JOURNEL A., HUIJBREGTS, Ch. - 1978

Mining Geostatistics, Academic Press - New-York.

MARECHAL A. - 1975 a

Analyse numérique des anamorphoses gaussiennes.
Note C.G.M.M. N.418

- 1975 b

The practice of transfer functions : numerical methods and their applications.

"Geostat 75" - NATO ASI - Rome, pp.253-276.

- 1975

Forecasting a grade-tonnage distribution for various panel sizes.
Proceedings 13th APCOM Symp. Clausthal -West.germany.

.../

- 1982

Local recovery estimation for coproducts by disjunctive kriging.
Proceeding of 17th APCOM, Denver, AIME.
AIME

- 1983

Recovery estimation : a review of models and methods.
NATO ASI-TAHOE 1983 -
D.Reidel Pub.Cö., p.385

MARECHAL A., TOUFFAIT.Y, - 1980

Recovery estimation of non-stationary orebody using disjunctive kriging.
Proceeding of 17th APCOM, Moscou.

MATHERON G. - 1970

La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications.
Les Cahiers du C.G.M.M. - Fascicule 5 -

- 1973

Le Krigeage Disjonctif. Note C.G.M.M. - N.360.

- 1974

Les Fonctions de transfert des petits panneaux.
Note C.G.M.M. N.395

- 1975 a

Les concepts de Base et l'Evolution de la Géostatistique Minière.
"Geostat 75", NATO ASI - Rome, pp.3-10.

- 1975 b

A simple substitute for conditional expectation :
the Disjunctive Kriging.
"Geostat 75", NATO ASI - Rome, pp.221-236

- 1975 c

Forecasting block grade distributions : the transfer functions.
"Geostat 75", NATO ASI, Rome, pp. 237-251.

- 1977

Peut-on imposer des conditions d'universalité au krigeage disjonctif ?
Note C.G.M.M. N.539

- 1978 a

L'estimation globale des réserves récupérables
Note C.G.M.M. C.75.

- 1978 b

Le Krigeage Disjonctif et le Paramétrage Local des Réserves.
Note C.G.M.M. C.76.

- 1981

La Sélectivité des distributions.
Note C.G.M.M. N.686

- 1982

La destructuration des hautes teneurs et le krigeage des indicatrices.
Note C.G.M.M. N.761

- 1983 a

The selectivity of the distributions and the second principle of Geostatistics.

NATO ASI - TAHOE 1983.

D.Reidel Pub. CO., pp.421-434

- 1983 b

Isofactorial models and change of support.

NATO ASI - TAHOE 1983.

D.Reidel Pub. Co., pp.449-467.

- 1984

Changement de support en modèle mosaïque. Informatique dans les Sciences de la Terre pour la caractérisation des ressources naturelles.

NANCY 1984 - (à paraître).

PARKER H.M. - 1983

Trends in geostatistics in the mining industry.

NATO ASI-TAHOE 1983.

D.Reidel Pub.CO., pp.915-934.

PARKER H.M, JOURNEL A., DIXON W. - 1979

The use of conditional lognormal probability distribution for the estimation of open-pit ore reserves in strata-bound Uranium deposit - A case study.

Proceeding of 16th APCOM, 1979, pp. 133-148

RIVOIRARD J. 1984

Une méthode d'estimation du récupérable local multivariable.

Note C.G.M.M. N.894

VERLY.G - 1983

The multigaussien approach and its applications to the estimation of local recoveries.

Mathematical Geology, Vol.15, n°2.

The block distribution given a point multivariate normal distribution

NATO ASI - TAHOE 1983.

D.Reidel Pub.Co. pp. 495-415.

YOUNG, D.S. - 1982

Development and application of disjunctive kriging model ; discrete gaussian model.

Proceeding of 17th APCOM (Denver, AIME).