Cahiers de Géostatistique **5** (1995), 1–14.
© Ecole des Mines de Paris 1995

Comparaison de quelques méthodes de passage à l'échelle supérieure – Critère de classement

Philippe RENARD[1], Gaëlle LE LOC'H[2] et David J.K. GRIFFIN[3]

(1) Centre d'Informatique Géologique, (2) Centre de Géostatistique
Ecole des Mines de Paris, 35 rue Saint–Honoré, 77305 Fontainebleau, France

(3) Water Resources Systems Research Unit
Cassie Building, U. of Newcastle, Newcastle–upon–Tyne, England

Résumé. Les modèles géologiques sont souvent employés pour générer des données utilisées dans les simulateurs d'écoulement. Le passage de la grille géologique fine à la grille du simulateur d'écoulement nécessite l'emploi de méthodes de passage à l'échelle supérieure pour tous les paramètres.

Cet article présente l'étude de quelques méthodes rapides dans le cas de la perméabilité, et tente de donner des guides pour choisir la méthode la plus adéquate pour différents modèles géologiques. Une méthode de renormalisation simplifiée inédite est proposée. Les méthodes de passage à l'échelle supérieure étudiées couvrent plusieurs degrés de sophistication et ont été testées sur environ 2500 champs de perméabilité. Ces champs ont été obtenus par simulation à l'aide de deux modèles géostatistiques différents, en utilisant plusieurs ensembles de paramètres pour chaque modèle.

Table des Matières

INTRODUCTION 2
1. PERMÉABILITÉ DE RÉFÉRENCE 3
2. SIMULATION DE CHAMPS DE PERMÉABILITÉS 3
  2.1. Modèles booléens 4
  2.2. Gaussiennes seuillées 4
3. LES MÉTHODES RAPIDES 5
  3.1. Moyennes algébriques 5
  3.2. Renormalisation simplifiée 6
4. COMMENT CLASSER LES MÉTHODES 8
5. DISCUSSION 13
CONCLUSION 13

INTRODUCTION

Le problème posé est de passer d'une grille fine de perméabilités contenant un très grand nombre de mailles (de l'ordre de plusieurs millions) à une grille plus grossière permettant les simulations d'écoulement et respectant au maximum l'hétérogénéité à l'échelle considérée. Cette opération est appelée passage à l'échelle supérieure. Elle est nécessaire car les simulateurs d'écoulement sont incapables de traiter les grilles habituellement générées par les modèles géostatistiques dans des conditions informatiques raisonnables.

Il faut tout de suite distinguer la recherche des perméabilités à grande échelle de la recherche de la perméabilité effective. Cette dernière est liée à la notion de milieu infini statistiquement homogène dans lequel une perméabilité macroscopique constante peut émerger (Matheron, 1967).

Ici, nous sommes intéressés par l'hétérogénéité et par ce qu'elle va impliquer au niveau de l'écoulement. Il est donc exclu a priori de remplacer la totalité du modèle géologique par une valeur unique représentant la perméabilité effective.

La perméabilité à grande échelle ou perméabilité de bloc se définit comme la perméabilité d'un bloc de taille finie inclus dans un milieu hétérogène connu.

La notion de statistiquement homogène disparaît. Si on prend comme critère d'équivalence le débit moyen sur le bloc, la perméabilité à grande échelle K_{ge}, pour un milieu isotrope où le flux et le gradient de charge coïncident, se définit par :

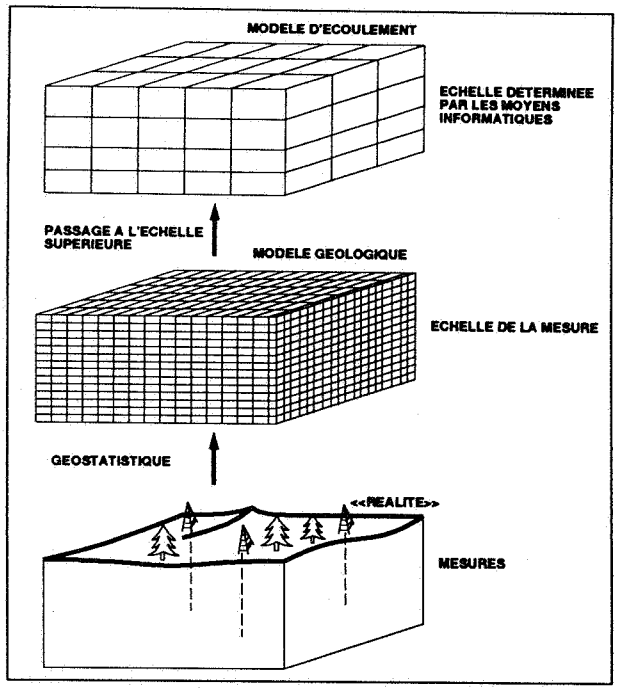

FIG. 1 - *Le problème*

$$\frac{1}{V}\int_V \vec{q}dv = -K_{ge}\cdot\frac{1}{V}\int_V \vec{\text{grad}}(h)dv \qquad (1)$$

avec V le volume du bloc considéré, $\vec{q}$ la vitesse de filtration de Darcy et h la charge piézométrique.

On peut remarquer que si le bloc est suffisamment grand et si les conditions d'écoulement auquel il est soumis sont uniformes alors la perméabilité à grande échelle doit tendre vers la perméabilité effective.

Les méthodes rapides de passage à l'échelle supérieure donnent des valeurs approchées de K_{ge}. Leur avantage est leur faible coût informatique. Leur limitation est

la mauvaise connaissance des erreurs commises lors de leur emploi. L'idée conductrice de ce travail est de rechercher des règles générales permettant de guider les utilisateurs de ces méthodes.

1 PERMÉABILITÉ DE RÉFÉRENCE

Pour valider le choix d'une méthode rapide il faut comparer ses résultats à la valeur vraie de la perméabilité à grande échelle.

D'après l'équation (1) il apparaît que K_{ge} est déterminé si l'on est capable de calculer les deux intégrales de volume donnant le débit moyen et le gradient moyen sur le bloc. Pour cela il faut résoudre l'équation de la diffusivité:

$$\text{div}\left[k(x,y,z)\cdot \vec{\text{grad}}h(x,y,z)\right] = 0 \qquad (2)$$

sous des conditions aux limites fixées.

Il est en général impossible de résoudre cette équation analytiquement. Il en résulte que la valeur vraie n'est pas connue. Par contre, il est possible de résoudre ce type d'équations par des méthodes numériques. Mais ces méthodes fournissent des valeurs approchées qui peuvent être différentes de la valeur vraie. L'erreur d'approximation est fonction de la méthode numérique, de la discrétisation employée et de la répartition des hétérogénéités dans le milieu. Ce biais est extrêmement délicat à évaluer dans le cas général et son étude dépasse largement le cadre de cet article. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché à le corriger. Toutefois, de façon à avoir une idée de l'erreur due à la résolution numérique, nous avons utilisé en parallèle la méthode des différences finies et celle des éléments finis sur certains champs de perméabilité (cinq cent trois points de comparaison).

Le choix des conditions aux limites est également extrêmement important. En effet, il est aisé de montrer que la perméabilité à grande échelle en dépend. Pour tous les calculs présentés dans cet article nous avons utilisé des conditions de type 'perméamètre', c'est-à-dire deux faces opposées à charges imposées et les quatre autres faces à flux nul. Avec ce type de conditions on peut calculer la perméabilité à grande échelle dans les trois directions x, y et z pour chaque milieu.

Nous appellerons *perméabilité de référence* la perméabilité à grande échelle calculée par résolution numérique de l'équation de la diffusivité avec des conditions aux limites de type perméamètre. Comme nous utilisons deux méthodes numériques, nous aurons deux perméabilités de référence.

2 SIMULATIONS DE CHAMPS DE PERMÉABILITÉ

Nous n'avons pas la possibilité de calculer les perméabilités de référence pour un champ réel. Il faudrait, pour cela, réaliser des expériences gigantesques, en détruisant littéralement un aquifère, pour mesurer sa perméabilité en chaque point. Cela paraît difficilement concevable. Et même en procédant de la sorte, les résultats obtenus n'auraient pas forcément de signification générale.

Nous avons donc réalisé notre étude sur des champs de perméabilité simulés. Pour que ce travail ait un sens du point de vue statistique nous avons besoin de plusieurs simulations avec les mêmes paramètres, avec différents paramètres et avec

très important d'évaluer si la méthode la plus précise pour un jeu de paramètres le sera aussi pour un autre jeu ou un autre type de modèle.

Bien évidemment, nous ne pouvons pas étudier tous les types de modèles et tous les jeux de paramètres. Nous nous sommes donc fixés deux modèles: les Gaussiennes Seuillées (Galli et al., 1993) et les Milieux booléens (Matheron, 1967). Pour chaque modèle plusieurs jeux de paramètres théoriques s'apparentant à des cas existants ont été utilisés et trente deux simulations ont été générées par jeu de paramètres.

Toutes ces simulations ont en commun leur taille de $128 \times 128 \times 64$ mailles, soit un peu plus d'un million de mailles. Celles-ci ont chacune une taille de $10 \times 10 \times 1$.

Il faut bien noter que ces simulations de milieux correspondent à des blocs auxquels on veut associer des valeurs uniques de perméabilité. Il ne s'agit pas de simulations d'un modèle géologique complet tel que celui présenté sur la figure 1.

2.1 Modèles booléens

Deux types d'inclusions ont été employées: ellipsoïdes et sinusoïdes (voir figure 2). Les paramètres que l'on a fait varier sont la densité des grains et la taille des inclusions. Huit jeux de paramètres différents ont été utilisés, deux pour les sinusoïdes et six pour les ellipsoïdes. Au total, deux cent cinquante six milieux présentant des géométries différentes ont ainsi été créés. Ces géométries ont été testées avec six contrastes de perméabilité (voir tableau 1), ce qui représente finalement deux mille quarante huit blocs différents.

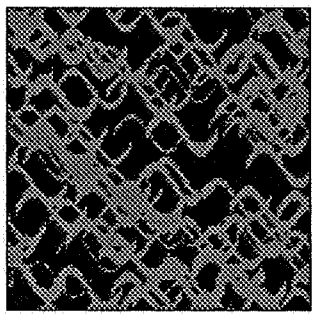

FIG. 2 - *Exemple de coupe horizontale dans un milieu booléen à grains sinusoïdaux*

2.2 Gaussiennes Seuillées

Quatre cent seize domaines ont été créés avec le logiciel HERESIM (produit IFP, CG) avec treize jeux de paramètres différents. Les jeux de paramètres sont ici: une courbe de répartition des faciès par profondeur et un triplet de longueurs de corrélations suivant chaque axe. Ces domaines présentent quatre faciès de perméabilité (0.1, 10, 500, 1000).

TAB. 1 - *Contrastes de perméabilité utilisés pour les milieux binaires.*

k inclusions	k matrice	k inclusions	k matrice
0.1	100	100	0.1
1	100	100	1
10	100	100	10

3 LES MÉTHODES RAPIDES

3.1 Moyennes algébriques

Ce sont les méthodes les plus simples de détermination de la perméabilité à grande échelle. Elles ne prennent pas en compte la disposition dans l'espace des perméabilités locales. Nous avons utilisé les moyennes suivantes.

moyenne harmonique C'est la borne inférieure des valeurs possibles pour la perméabilité effective et la valeur exacte dans le cas d'un milieu parfaitement stratifié et d'un écoulement perpendiculaire aux strates.

$$m_h = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i^{-1}\right)^{-1} \tag{3}$$

moyenne géométrique Si la loi de distribution des perméabilités locales $\frac{k}{E(k)}$ est identique à celle de son inverse $\frac{h}{E(h)}$ et si elle est invariante par rotation, alors la perméabilité effective dans le cas d'un écoulement plan est la moyenne géométrique (Matheron, 1967). Ces conditions sont vérifiées dans le cas particulier d'un milieu log-normal bi-dimensionnel.

$$m_g = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(k_i)\right) \tag{4}$$

moyenne d'exposant $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ Le calcul approché de la perméabilité effective pour un milieu log-normal en trois dimensions indique que celle-ci serait égale à la moyenne d'exposant un tiers (Nœtinger, 1994).

$$m_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i^{1/3}\right)^{3} \tag{5}$$

Nous avons également calculé la moyenne d'exposant un demi.

moyenne arithmétique C'est la borne supérieure des valeurs admissibles et la valeur exacte pour un milieu parfaitement stratifié et un écoulement parallèle aux strates.

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i \tag{6}$$

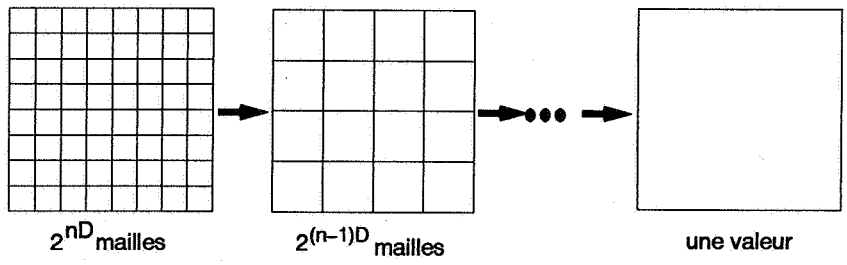

FIG. 3 - *Principe général de la renormalisation.*

3.2 renormalisation simplifiée

La renormalisation est un algorithme itératif. On passe dans un espace de dimension D, d'une grille constituée de 2^{nD} mailles à une autre plus grossière contenant $2^{(n-1)D}$ mailles. Puis on répète cette opération jusqu'à obtenir le maillage de la taille voulue, éventuellement une seule maille (figure 3). L'opération de base est le calcul approché de la perméabilité à grande échelle d'une cellule de 2^D mailles. Dans sa forme standard, cette méthode utilise un analogue électrique centré (figure 4) pour faire ce calcul (King, 1989). L'obtention de la perméabilité à grande échelle se fait ensuite par transformations triangle-étoile successives. Ce type d'analogue est en fait équivalent à un schéma de type différences finies. Cela revient à résoudre l'écoulement par la méthode des différences finis sur la cellule de base. Un analogue direct a également été proposé (Hinrichsen et al., 1993; Kruel-Romeu, 1994) et semble plus précis.

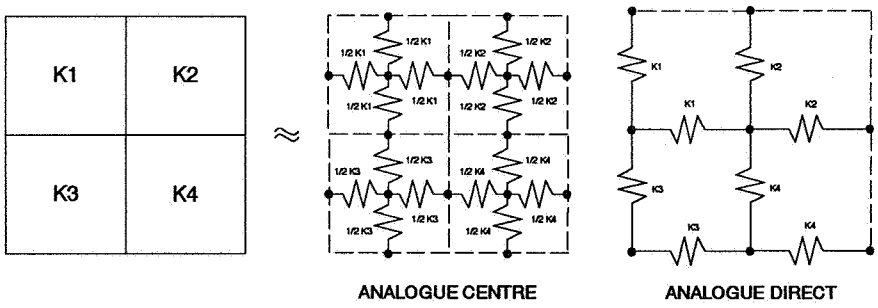

FIG. 4 - *Analogue électrique permettant le calcul de la perméabilité à grande échelle d'une cellule élémentaire en deux dimensions.*

Ici, nous proposons une version simplifiée. Le calcul de la perméabilité de la cellule de base se fait par associations successives de paquets de deux mailles. Si les deux mailles sont en série par rapport à la direction d'écoulement alors on compose les perméabilités ponctuelles à l'aide d'une moyenne harmonique. Si elles sont en parallèle, on utilise une moyenne arithmétique (figure 5). A chaque itération on change la direction de regroupement. En trois dimensions, on va alterner, par exemple, un regroupement suivant x, puis suivant z et enfin y. Cet ordre de regroupement sera conservé tout au long du processus (figure 6). Suivant le choix des directions successives on va obtenir des valeurs différentes de la perméabilité à grande échelle.

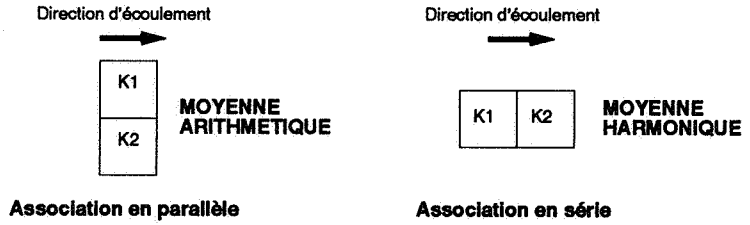

FIG. 5 - *Regroupement de cellules deux à deux.*

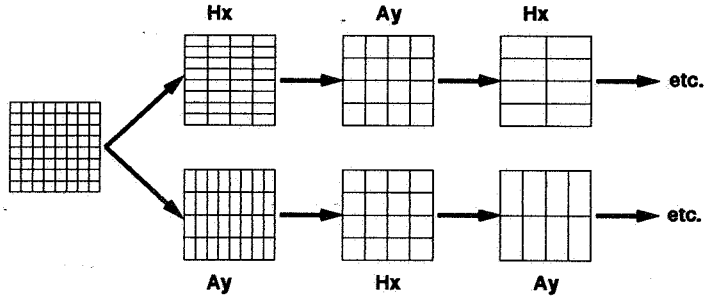

FIG. 6 - *Exemple en deux dimensions des deux alternatives dans les regroupements successifs pour le calcul de la perméabilité suivant x. Le symbole* **Hx** *représente la moyenne harmonique de deux mailles associées suivant la direction x,* **Ay** *la moyenne arithmétique en y.*

Nous nous intéressons uniquement aux deux valeurs extrêmes correspondant aux cas où l'on commence ou termine par un regroupement en série par rapport à la direction d'écoulement, c'est-à-dire par une moyenne harmonique. Par exemple pour un écoulement en x les valeurs maximale et minimale sont :

$$c_{\max} = H_x(A_y(A_z)) = H_x(A_z(A_y)) \tag{7}$$

$$c_{\min} = A_y(A_z(H_x)) = A_z(A_y(H_x)) \tag{8}$$

En effet, dans le cas d'un écoulement uniforme, la perméabilité à grande échelle pour une direction donnée est comprise entre un minorant qui est la moyenne arithmétique des moyennes harmoniques des perméabilités ponctuelles calculées sur chaque ligne de cellules parallèles à la dite direction et un majorant, la moyenne harmonique des moyennes arithmétiques des perméabilités ponctuelles calculées sur chaque tranche de cellules perpendiculaires à la direction étudiée (Le Loc'h, 1987; Cardwell et Parsons, 1945).

On prend de plus, à la fin du processus la moyenne géométrique de ces deux valeurs.

$$c_g = \sqrt{c_{\max} c_{\min}} \tag{9}$$

L'avantage de cette approche itérative est une bonne prise en compte de la géométrie du système à toutes les échelles, ainsi qu'une très grande simplicité de calcul par rapport à la renormalisation standard.

4 COMMENT CLASSER LES MÉTHODES

La méthode classique pour comparer différentes méthodes de passage à l'échelle supérieure est de les comparer vis-à-vis de leur biais par rapport à la valeur de référence.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(K^i_{\text{rapide}} - K^i_{\text{référence}}\right) \tag{10}$$

avec i se référant à une simulation donnée. Cela revient à comparer la moyenne de la valeur de référence avec les moyennes des valeurs obtenues par les méthodes rapides sur l'ensemble des simulations, et à les classer par écart croissant.

Le tableau 2 présente un tel classement par rapport aux deux valeurs de référence (éléments finis et différences finies). Les simulations d'écoulement n'ont pas été réalisées systématiquement sur tous les milieux créés avec les deux méthodes numériques. Il ne faut donc pas s'étonner que les valeurs moyennes diffèrent pour les méthodes rapides dans les colonnes éléments finis et différences finies. L'anisotropie des milieux (aplatissement des mailles élémentaires) provoque un comportement extrêmement différent pour la perméabilité verticale et horizontale. C'est pourquoi des classements séparés ont été faits. De même, les classements ont été réalisés sur l'ensemble des simulations d'une part et séparément pour les milieux HERESIM et Booléens d'autre part.

Ensuite le même travail a été réalisé en utilisant un autre critère de classement basé sur la dispersion du nuage de points. Nous avons simplement pris le coefficient de corrélation linéaire. Ce type de critère nous semble préférable au précédent. Car une méthode qui présenterait un biais systématique avec une faible dispersion nous semble plus intéressante qu'une méthode ne présentant pas de biais mais une forte dispersion et donc une grande incertitude sur la prévision lors de l'utilisation de la méthode rapide. Le biais peut éventuellement être corrigé de manière empirique, la dispersion non. Les classements suivant ce critère sont présentés dans le tableau 3.

Toutefois, un mauvais coefficient de corrélation linéaire n'indique pas forcément une dispersion importante. Le nuage de points peut suivre une courbe et non pas une droite. Dans ce cas la dispersion peut être très faible mais le coefficient de corrélation linéaire mauvais. C'est pourquoi nous avons dessiné les différents nuages de points (figure 7 et 8). Nous avons ainsi une meilleure idée de la dispersion liée à chaque méthode.

TAB. 2 - *Classement des méthodes par* **biais minimum**. *Les tableaux de gauche présentent les résultats pour la perméabilité horizontale, ceux de droite pour la perméabilité verticale.*

Toutes les simulations

rang	éléments finis (réf.)	102.53	différences finies (réf.)	243.14
1	c_{max}	95.70	c_{max}	247.25
2	m	118.44	c_g	214.79
3	c_g	83.16	c_{min}	187.75
4	$m_{\frac{1}{2}}$	74.88	$m_{\frac{1}{2}}$	177.71
5	c_{min}	72.97	m	309.65
6	$m_{\frac{1}{3}}$	57.53	$m_{\frac{1}{3}}$	122.56
7	m_g	25.81	m_g	30.51
8	m_h	8.62	m_h	3.04

rang	éléments finis (réf.)	19.42	différences finies (réf.)	17.47
1	m_g	25.81	m_g	30.51
2	m_h	8.62	m_h	3.04
3	c_{min}	30.73	c_{min}	37.12
4	c_g	37.89	c_g	52.60
5	c_{max}	49.46	c_{max}	78.77
6	$m_{\frac{1}{3}}$	57.53	$m_{\frac{1}{3}}$	122.56
7	$m_{\frac{1}{2}}$	74.88	$m_{\frac{1}{2}}$	177.71
8	m	118.44	m	309.65

Simulations HERESIM

rang	éléments finis (réf.)	337.27	différences finies (réf.)	319.73
1	c_{max}	309.23	c_{max}	325.77
2	m	396.52	c_g	282.61
3	c_g	260.43	c_{min}	246.54
4	c_{min}	220.53	$m_{\frac{1}{2}}$	230.80
5	$m_{\frac{1}{2}}$	216.21	m	408.74
6	$m_{\frac{1}{3}}$	142.04	$m_{\frac{1}{3}}$	156.10
7	m_g	25.27	m_g	33.05
8	m_h	0.36	m_h	0.38

rang	éléments finis (réf.)	11.74	différences finies (réf.)	16.96
1	m_h	0.36	m_g	33.05
2	m_g	25.27	m_h	0.38
3	c_{min}	27.66	c_{min}	39.93
4	c_g	49.22	c_g	59.85
5	c_{max}	90.25	c_{max}	94.22
6	$m_{\frac{1}{3}}$	142.04	$m_{\frac{1}{3}}$	156.10
7	$m_{\frac{1}{2}}$	216.21	$m_{\frac{1}{2}}$	230.80
8	m	396.52	m	408.74

Simulations Booléennes

rang	éléments finis (réf.)	46.00	différences finies (réf.)	43.13
1	c_{max}	44.28	c_{max}	42.23
2	$m_{\frac{1}{2}}$	40.85	$m_{\frac{1}{2}}$	39.08
3	m	51.48	c_g	37.73
4	c_g	40.48	m	50.93
5	c_{min}	37.44	$m_{\frac{1}{3}}$	35.00
6	$m_{\frac{1}{3}}$	37.18	c_{min}	34.24
7	m_g	25.94	m_g	23.87
8	m_h	10.61	m_h	9.97

rang	éléments finis (réf.)	21.27	différences finies (réf.)	18.79
1	m_g	25.94	m_g	23.87
2	c_{min}	31.47	m_h	9.97
3	m_h	10.61	c_{min}	29.80
4	c_g	35.16	c_g	33.65
5	$m_{\frac{1}{3}}$	37.18	$m_{\frac{1}{3}}$	35.00
6	c_{max}	39.65	c_{max}	38.43
7	$m_{\frac{1}{2}}$	40.85	$m_{\frac{1}{2}}$	39.08
8	m	51.48	m	50.93

Notations: Les symboles m représentent les moyennes algébriques, avec $\mathbf{m}$ la moyenne arithmétique, $\mathbf{m_h}$ harmonique, $\mathbf{m_g}$ géométrique, $\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$ la moyenne d'exposant $\frac{1}{2}$ et $\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$ celle d'exposant $\frac{1}{3}$. Les symboles $\mathbf{c_{max}}$, $\mathbf{c_{min}}$ et $\mathbf{c_g}$ désignent les renormalisations simplifiées, version maximale, minimale et la moyenne géométrique des deux.

TAB. 3 - *Classement des méthodes par* **coefficient de corrélation maximum.** *Les tableaux de gauche présentent les résultats pour la perméabilité horizontale, ceux de droite pour la perméabilité verticale.*

Toutes les simulations

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{m}$	0.98	$\mathbf{c_{max}}$	1.00
2	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.98	$\mathbf{c_g}$	0.99
3	$\mathbf{c_{max}}$	0.97	$\mathbf{c_{min}}$	0.98
4	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.95	$\mathbf{m}$	0.97
5	$\mathbf{c_g}$	0.92	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.94
6	$\mathbf{c_{min}}$	0.87	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.91
7	$\mathbf{m_g}$	0.47	$\mathbf{m_g}$	0.76
8	$\mathbf{m_h}$	0.00	$\mathbf{m_h}$	0.70

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{m_g}$	0.94	$\mathbf{c_{min}}$	0.96
2	$\mathbf{c_{min}}$	0.92	$\mathbf{m_g}$	0.95
3	$\mathbf{c_g}$	0.80	$\mathbf{c_g}$	0.92
4	$\mathbf{c_{max}}$	0.58	$\mathbf{c_{max}}$	0.84
5	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.34	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.64
6	$\mathbf{m_h}$	0.21	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.51
7	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.15	$\mathbf{m_h}$	0.30
8	$\mathbf{m}$	-0.03	$\mathbf{m}$	0.28

Simulations HERESIM

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{m}$	0.98	$\mathbf{c_{max}}$	1.00
2	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.98	$\mathbf{c_g}$	0.99
3	$\mathbf{c_{max}}$	0.97	$\mathbf{c_{min}}$	0.98
4	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.95	$\mathbf{m}$	0.97
5	$\mathbf{c_g}$	0.92	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.94
6	$\mathbf{c_{min}}$	0.87	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.91
7	$\mathbf{m_g}$	0.47	$\mathbf{m_g}$	0.76
8	$\mathbf{m_h}$	0.00	$\mathbf{m_h}$	0.70

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{c_{min}}$	0.99	$\mathbf{c_{min}}$	0.98
2	$\mathbf{c_g}$	0.99	$\mathbf{m_g}$	0.96
3	$\mathbf{c_{max}}$	0.96	$\mathbf{c_g}$	0.95
4	$\mathbf{m_g}$	0.94	$\mathbf{c_{max}}$	0.90
5	$\mathbf{m_h}$	0.47	$\mathbf{m_h}$	0.88
6	$\mathbf{m}$	-0.26	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.86
7	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	-0.20	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.81
8	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	-0.13	$\mathbf{m}$	0.71

Simulations Booléennes

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{c_{max}}$	1.00	$\mathbf{c_{max}}$	1.00
2	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.99	$\mathbf{c_g}$	0.99
3	$\mathbf{m}$	0.99	$\mathbf{c_{min}}$	0.98
4	$\mathbf{c_g}$	0.99	$\mathbf{m}$	0.978
5	$\mathbf{c_{min}}$	0.98	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.99
6	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.98	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.98
7	$\mathbf{m_g}$	0.89	$\mathbf{m_g}$	0.90
8	$\mathbf{m_h}$	0.50	$\mathbf{m_h}$	0.53

rang	éléments finis		différences finies	
1	$\mathbf{m_g}$	0.97	$\mathbf{m_g}$	0.98
2	$\mathbf{c_{min}}$	0.95	$\mathbf{c_{min}}$	0.93
3	$\mathbf{c_g}$	0.92	$\mathbf{c_g}$	0.90
4	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.91	$\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$	0.90
5	$\mathbf{c_{max}}$	0.88	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.87
6	$\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$	0.87	$\mathbf{c_{max}}$	0.86
7	$\mathbf{m}$	0.79	$\mathbf{m_h}$	0.81
8	$\mathbf{m_h}$	0.78	$\mathbf{m}$	0.77

Notations: Les symboles m représentent les moyennes algébriques, avec $\mathbf{m}$ la moyenne arithmétique, $\mathbf{m_h}$ harmonique, $\mathbf{m_g}$ géométrique, $\mathbf{m_{\frac{1}{2}}}$ la moyenne d'exposant $\frac{1}{2}$ et $\mathbf{m_{\frac{1}{3}}}$ celle d'exposant $\frac{1}{3}$. Les symboles $\mathbf{c_{max}}$, $\mathbf{c_{min}}$ et $\mathbf{c_g}$ désignent les renormalisations simplifiées, version maximale, minimale et la moyenne géométrique des deux.

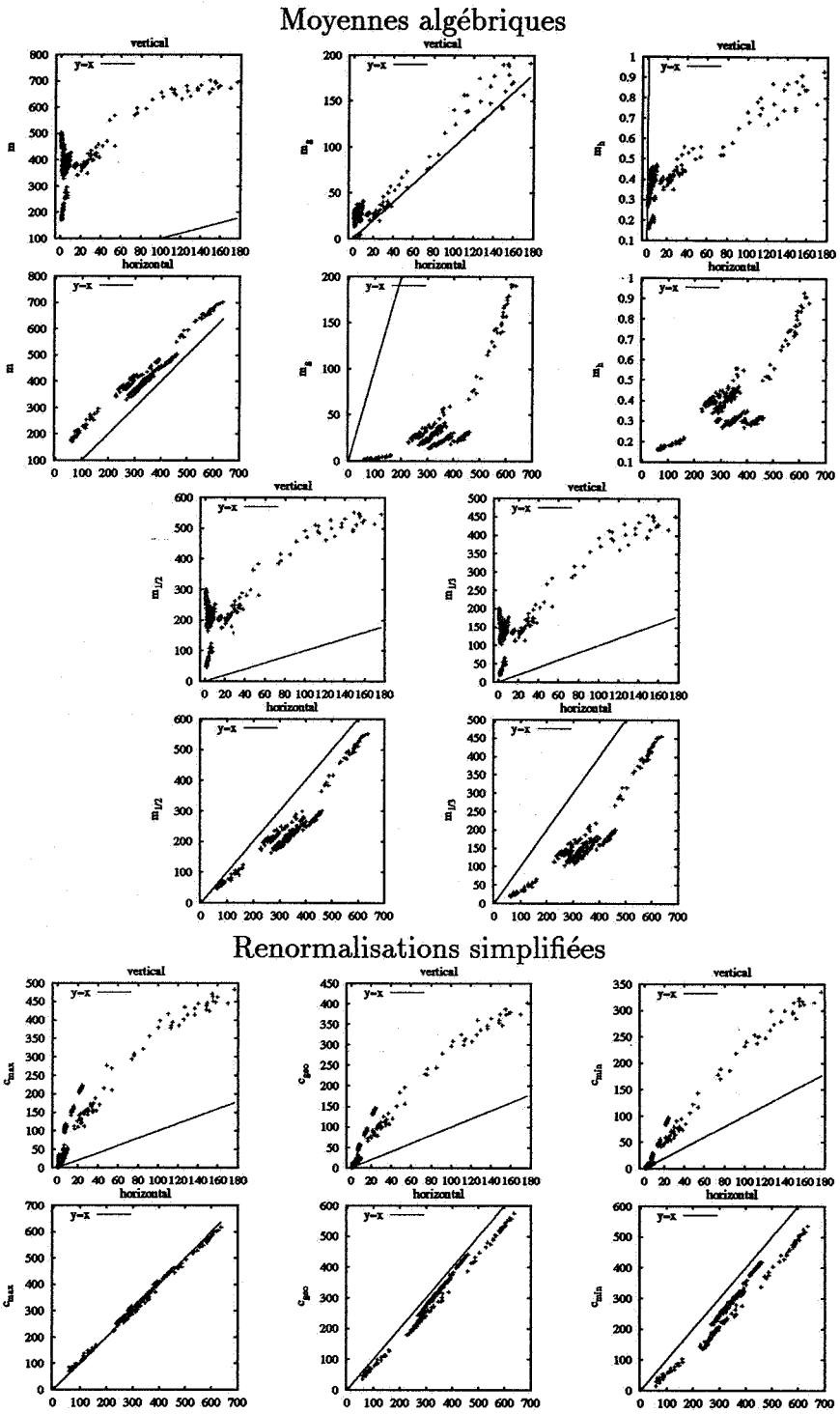

FIG. 7 - *Diagrammes représentant en abscisse les perméabilités de référence obtenues par* **différences finies** *et en ordonnée les perméabilités obtenues par différentes méthodes rapides pour les milieux de type HERESIM. Pour chaque méthode il y a un diagramme pour la perméabilité horizontale en haut, et un autre pour la perméabilité verticale en dessous.*

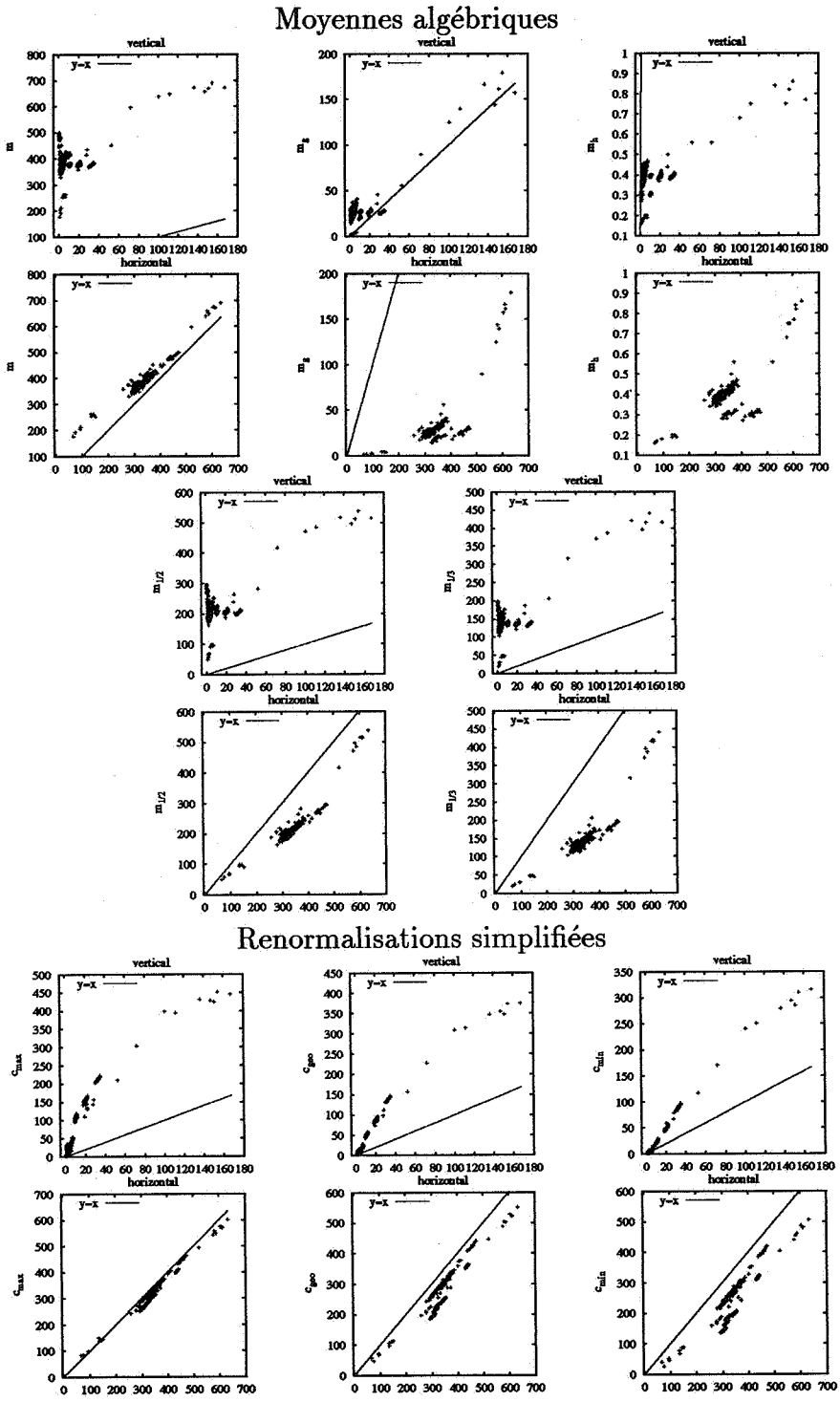

FIG. 8 - *Diagrammes représentant en abscisse les perméabilités de référence obtenues par* **éléments finis** *et en ordonnée les perméabilités obtenues par différentes méthodes rapides pour les milieux de type HERESIM. Pour chaque méthode il y a un diagramme pour la perméabilité horizontale en haut, et un autre pour la perméabilité verticale en dessous.*

5 DISCUSSION

Les tableaux 2 et 3 montrent que le classement des méthodes varie suivant la méthode numérique employée comme valeur de référence. Ils montrent également que l'anisotropie joue un rôle majeur et qu'il est donc conseillé d'utiliser des méthodes rapides différentes pour estimer la perméabilité horizontale d'une part et la perméabilité verticale d'autre part.

Mais, le point sur lequel nous voulons insister est l'effet du critère de classement. Cela est particulièrement visible en ce qui concerne la perméabilité verticale où l'ensemble des estimateurs est assez, voire très, imprécis vis à vis des biais moyens (voir tableau 2, colonne de droite). Le classement change radicalement si l'on prend comme critère le coefficient de corrélation. La moyenne harmonique qui est parmi les mieux classées pour le biais moyen devient extrêmement mal classée. La méthode de renormalisation simplifiée c_{min} passe première dans le classement. Enfin en utilisant les figures du type de la figure 7 on remarque que les nuages correspondant aux perméabilités verticales et aux renormalisations simplifiés suivent des courbes qui ne sont pas des droites. Il en résulte que dans ces cas les classements obtenus avec comme critère le coefficient de corrélation linéaire sont à nuancer. Par exemple, pour les milieux HERESIM la moyenne géométrique est mieux classée que la renormalisation c_{max} alors que visuellement on voit clairement que c_{max} disperse moins les valeurs.

Du point de vue du choix des méthodes rapides, cette étude montre que les moyennes algébriques simples peuvent être de bons estimateurs dans certains cas. Par exemple, pour les simulations HERESIM et pour l'écoulement parallèle à la stratification la moyenne arithmétique (m) se révèle relativement fiable mais avec un biais systématique important. Par contre elle n'est pas utilisable pour les milieux booléens sans incertitude importante sur la prévision.

Les méthodes qui ressortent comme les plus robustes sont finalement les méthodes prenant en compte la géométrie du champ de perméabilité. Ainsi, quelles que soient les configurations $\mathbf{c_{max}}$ est l'estimateur le plus fiable pour la perméabilité horizontale et $\mathbf{c_{min}}$ pour la perméabilité verticale.

CONCLUSION

Des méthodes de passage à l'échelle supérieure déjà existantes et une méthode de renormalisation simplifiée inédite ont été évaluées sur deux types de modèles géologiques.

Nous avons proposé d'utiliser plutôt que le biais, la dispersion comme critère de classement de ces méthodes. Cette approche a été utilisée pour développer des règles pratiques et nous a permis de montrer que la méthode de renormalisation simplifiée est la plus robuste sur les milieux étudiés parmi les méthodes testées. De plus, il semble qu'il faille plutôt utiliser sa version «valeur maximale» pour les

perméabilités horizontales et sa version «valeur minimale» pour estimer les perméabilités verticales. Ceci à cause de l'anisotropie des milieux étudiés (aplatissement des mailles, longueurs de corrélation).

Remerciements

Ce travail a pu être réalisé grâce au financement de la Communauté Européenne dans le cadre du projet Joule II, «Reservoir Engineering Project, Topic 4: Up-scaling of flow related Parameters».

Références

CARDWELL, W. T. ET PARSONS, R. L. (1945). Average permeabilities of heterogeneous oil sands. *Trans. Am. Inst. Mining. Met. Pet. Eng.*, pages 34–42.

GALLI, A., BEUCHER, H., LOC'H, G. L., DOLIGEZ, B., ET HERESIM GROUP (1993). The pros and cons of the truncated Gaussian method. Dans Armstrong, M. et Dowd, P., éditeurs, *Geostatistical simulation, Proceedings of the geostatistical simulations workshop, Fontainebleau, France, 27-28 May*, pages 217–233. Klumber Academic Publishers.

HINRICHSEN, E. L., AHARONY, A., FEDER, J., HANSEN, A., JØSSANG, T., ET HARDY, H. H. (1993). A fast algorithm for estimating large-scale permeabilities of correlated anistotropic media. *Trans. Porous Media*, 12:55–72.

KING, P. R. (1989). The use of renormalization for calculating effective permeability. *Trans. Porous Media*, 4:37–58.

KRUEL-ROMEU, R. (1994). *Écoulement en milieu hétérogène: prise de moyenne de perméabilité en régimes permanent et transitoire.* Thèse de doctorat, Université Paris 6.

LE LOC'H, G. (1987). *Étude de la composition des perméabilités par des méthodes variationnelles.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

MATHERON, G. (1967). *Eléments pour une théorie des milieux poreux.* Masson, Paris.

NŒTINGER, B. (1994). The effective permeability of a heterogeneous porous medium. *Trans. Porous Media*, 15:99–127.