Cahiers de Géostatistique, Fascicule 1
Compte–rendu des Journées de Géostatistique,
6–7 Juin 1991, Fontainebleau, pp. 119–135

REMARQUES SUR LES RESIDUS D'INDICATRICES

J. RIVOIRARD
Ecole des Mines de Paris
Centre de Géostatistique
35 rue Saint–Honoré
77305 FONTAINEBLEAU
FRANCE

RESUME. Ce papier précise certains points utiles à la mise en oeuvre des résidus d'indicatrices. L'estimation par résidus d'indicatrices d'un gisement en veines, par exemple, nécessite une discrétisation des teneurs en classes. On examine ici les problèmes que posent alors la queue des valeurs fortes et la classe des zéros. La prise en compte du changement de support fait également l'objet d'une attention particulière. On remarque au passage le rôle majeur joué par le bénéfice conventionnel dans le modèle à résidus.

ABSTRACT. This paper provides some information on how to use the indicator residuals. For instance, estimating a vein type deposit with the residuals requires a discretisation of the grades into classes. We study the problems that arise from the tail of large values and from the class of zeros. The change of support problem is also looked at with a particular attention. The major role of the conventional profit in the model with indicator residuals is stressed.

TABLE DES MATIERES

1 - INTRODUCTION

La mise en oeuvre du modèle à résidus d'indicatrices soulève en général le problème de la discrétisation des teneurs en classes.

Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le cas d'un gisement en veines dont nous cherchons à faire l'estimation à partir d'échantillons ponctuels. Les teneurs de ces échantillons sont supposées obéir au modèle à résidus d'indicatrices. Expérimentalement ceci se teste en comparant variogrammes simples et croisés d'indicatrices (éventuellement régularisées ou montées, voir dernière partie). A ce stade il suffit de choisir quelques coupures divisant la distribution des teneurs en classes d'effectif comparable (outre une éventuelle classe importante de valeurs nulles): 3, 4, 5 coupures fournissent déjà 3, 6, 10 variogrammes croisés à examiner.

C'est une fois le modèle adopté que se pose le problème de la discrétisation des teneurs. Celle-ci est en général nécessaire pour l'estimation locale, et les classes formées fourniront autant de résidus à kriger. Plus la discrétisation est fine, moins on perd d'information, mais plus la méthode est lourde. Dans le cas classique d'une distribution de teneurs dissymétrique, on discrétisera assez finement les valeurs faibles et intermédiaires, correspondant à des effectifs importants, et parmi lesquelles sera choisie la coupure minière. Ceci ne pose pas de problème. Par contre on cherchera à éviter - on verra comment - une discrétisation lourde et inutile de la queue des teneurs fortes. Au total on devrait s'en sortir avec une dizaine de résidus.

Voyons maintenant la prise en compte d'un changement de support (pour représenter une sélectivité libre sur support non ponctuel). Pour l'estimation locale, une discrétisation des teneurs de blocs sera établie en ordonnance avec la discrétisation ponctuelle choisie. Pour le simple changement de support global cependant, il sera plus simple de partir directement de la distribution empirique des échantillons. Mais dans les deux cas, local et global, le changement de support dépend de l'importance de la classe des zéros, et donc de la définition a priori du volume minéralisable.

On remarquera, tout au long de cet exposé, le rôle majeur joué par le bénéfice conventionnel dans le modèle à résidus, en particulier lorsqu'un changement de support intervient. Au niveau global, les bénéfices points et blocs au même ordre sont égaux. De même, pour un point situé dans un bloc non informé, les estimations KD des bénéfices point et bloc sont identiques pour le même ordre.

2 - L'ESTIMATION PONCTUELLE

I - Rappels sur le modèle à résidus

Nous considèrerons ici le modèle à résidus d'indicatrices orthogonaux ascendant, caractérisé par une absence d'effets de bord en montant dans les valeurs: quittant les valeurs faibles, on ne rencontre pas des valeurs intermédiaires préférentiellement à des valeurs fortes (Rivoirard 1988).

Expérimentalement, on observe alors un variogramme croisé entre indicatrices:

$$1_{Z(x) \geq z} \quad \text{et} \quad 1_{Z(x) \geq z'}$$

proportionnel au variogramme de l'indicatrice à la plus faible des deux coupures.

La mise en oeuvre du modèle à résidus exige en général une discrétisation des teneurs. Nous supposerons avoir alors affaire à une Fonction Aléatoire stationnaire $Z(x)$ prenant les valeurs:

$$z_0 \ , \ z_1 \ , \ z_2 \ , \ \ldots \ , \ z_n$$

et nous noterons T_i la fonction de répartition inverse:

$$T_i = P\,(Z(x) \geq z_i\,) = E\,[1_{Z(x) \geq z_i}]$$

Pour soulager les écritures, nous poserons:

$$I_i\ (x) = 1_{Z(x) \geq z_i}$$

Les résidus d'indicatrices sont alors définis par:

$$R_0\ (x) = 1$$

$$R_1\ (x) = \frac{I_1(x)}{T_1} - 1$$

$$R_2\ (x) = \frac{I_2(x)}{T_2} - \frac{I_1(x)}{T_1}$$

...

$$R_n\ (x) = \frac{I_n(x)}{T_n} - \frac{I_{n-1}(x)}{T_{n-1}}$$

On remarquera que les indicatrices $I_i(x)$ apparaissent toujours rapportées à leur moyennes T_i. Moyennant ce choix, on a:

$$\frac{I_1(x)}{T_1} = 1 + R_1(x)$$

et pour $j > 0$:

$$\frac{I_j\ (x)}{T_j} = \sum_{i=0}^{j} R_i\ (x) = \frac{I_{j-1}(x)}{T_{j-1}} + R_j\ (x)$$

Une fonction $f\,[Z(x)]$, prenant la valeur f_i quand $Z(x)$ vaut i, s'écrit:

$$f\ [Z(x)] = \sum_{i=0}^{n} f_i\ 1_{Y(x) = i} = f_0\ 1_{Y(x) = 0} + f_1\ 1_{Y(x) = 1} + \ldots$$

Exemples:

- Métal à coupure z_j :

$$Q_j\ (x) = Z(x) 1_{Z(x) \geq z_j} = \sum_{i=j}^{n} z_i\ 1_{Z(x) = i}$$

$$\text{soit:} \quad Q_{j+1}(x) + z_j\ 1_{Z(x) = j}$$

Du fait de la discrétisation, les valeurs de la j^e classe sont toutes considérées comme égales à z_j, qui sert à la fois de moyenne de classe et de coupure. La perte d'information qui en résulte est faible si la discrétisation est fine. Le problème spécifique de la discrétisation de la queue de la distribution sera étudié en 1.4.

- Bénéfice à coupure z_j :

$$B_j\ (x) = [Z(x) - z_j] 1_{Z(x) \geq z_j} = \sum_{i=j}^{n} [z_i - z_j]\ 1_{Z(x) = i}$$

Comme $1_{Z(x) = z_i} = 1_{Z(x) \geq z_i} - 1_{Z(x) \geq z_{i+1}}$, toute fonction $f\,[Z(x)]$ se développe selon les indicatrices $I_i(x) = 1_{Z(x) \geq z_i}$ et donc selon les résidus.

II - L'estimation locale par KD

Les résidus étant orthogonaux, il suffit de les kriger séparément pour obtenir le cokrigeage des indicatrices et donc le KD de n'importe quelle fonction:

$$\left[\frac{I_j\,(x)}{T_j}\right]^{KD} = \sum_0^j [\ R_i\ (x)\ ]^K$$

En pratique on procèdera comme suit. Le KD du minerai à la coupure basse:

$$\left[\frac{I_1(x)}{T_1}\right]^{KD} = 1 + [R_1(x)]^K$$

est en fait égal à son krigeage. On a ensuite pour $j > 1$:

$$\left[\frac{I_j\,(x)}{T_j}\right]^{KD} = \left[\frac{I_{j-1}(x)}{T_{j-1}}\right]^{KD} + [R_j(x)]^K$$

Reconstituant le minerai par tranche de teneur:

$$[1_{Z(x) = z_i}]^{KD} = [1_{Z(x) \geq z_i}]^{KD} - [1_{Z(x) \geq z_{i+1}}]^{KD}$$

on déduit par exemple le métal de la dernière classe:

(1) $$[Q_n(x)]^{KD} = z_n\ [1_{Z(x) = n}]^{KD}$$

puis des autres classes:

$$[Q_j\ (x)]^{KD} = [Q_{j+1}(x)]^{KD} + z_j\ [1_{Z(x) = j}]^{KD}$$

On pourrait naturellement tout aussi bien passer par le développement de $Q_j(x)$ en résidus, ou bien encore par les formules (2) et (3) du paragraphe suivant.

III - Une simplification

Désignons par b_j et q_j le bénéfice et le métal moyen à coupure z_j :

$$b_j = E\ [B_j\ (x)] = E\Big[[Z(x) - z_j] 1_{Z(x) \geq z_j}\Big]$$

$$= E[Z(x) - z_j\ |Z(x) \geq z_j]\ T_j$$

$$q_j = E\ [Q_j\ (x)] = E[Z(x) 1_{Z(x) \geq z_j}]$$

$$= E[Z(x) \,|Z(x) \geq z_j]\; T_j$$

On peut montrer que $Q_j(x)$ et $B_j(x)$ peuvent s'écrire en fonction de $I_j\ (x)$ et des résidus supérieurs à j (lesquels sont orthogonaux à $I_j\ (x)$):

(2) $$B_j\ (x) = b_j \frac{I_j\ (x)}{T_j} + \sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ R_i\ (x)$$

(3) $$Q_j\ (x) = q_j \frac{I_j\ (x)}{T_j} + \sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ R_i\ (x)$$

En particulier on a:

(4) $$Z(x) = Q_0(x) = m + \sum_{i \geq 1} b_{i-1}\ R_i\ (x)$$

avec $m = E[Z(x)]$.

Dans une expression telle que (3), $q_j \frac{I_j\ (x)}{T_j}$ représente la régression de $Q_j\ (x)$ connaissant $I_j\ (x)$.

Le terme:

$$\sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ R_i\ (x) = Q_j\ (x) - q_j \frac{I_j\ (x)}{T_j}$$

$$= B_j\ (x) - b_j \frac{I_j\ (x)}{T_j}$$

est le résidu de cette régression, ainsi d'ailleurs que celui de la régression de $B_j\ (x)$ connaissant $I_j\ (x)$.

Le KD du bénéfice peut s'écrire:

(5) $$[B_j\ (x)]^{KD} = b_j \left[\frac{I_j\ (x)}{T_j}\right]^{KD} + \sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ [R_i\ (x)]^K$$

Dans le cas où les résidus d'ordre supérieur à j obéissent à la même structure, il suffit de kriger le seul résidu $\sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ R_i\ (x)$ pour obtenir $\sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ [R_i\ (x)]^K$:

$$[B_j\ (x)]^{KD} = b_j \left[\frac{I_j\ (x)}{T_j}\right]^{KD} + [\sum_{i \geq j+1} b_{i-1}\ R_i\ (x)]^K$$

De même pour le métal:

$$[Q_j(x)]^{KD} = q_j \left[\frac{I_j(x)}{T_j}\right]^{KD} + [\sum_{i \geq j+1} b_{i-1} R_i(x)]^K$$

Dans de telles expressions, le KD de $I_j(x)$ ne dépend que des résidus $R_i(x)$ pour $i \leq j$. Les résidus d'ordre supérieur à j, qui correspondent à la discrétisation des valeurs supérieures à z_j, n'interviennent qu'à travers le nouveau résidu $\sum_{i \geq j+1} b_{i-1} R_i(x)$. Il n'est donc plus nécessaire de les expliciter individuellement.

IV – Le problème de la queue

Cette simplification va nous être particulièrement utile pour éviter de discrétiser la queue des valeurs fortes de la distribution des teneurs. Les valeurs observées au dessus de la dernière coupure utilisée z_n seront conservées grâce au résidu orthogonal supplémentaire:

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= Q_n(x) - q_n \frac{I_n(x)}{T_n} \\ &= Q_n(x) - z_{n+1} I_n(x) \end{aligned}$$

où z_{n+1} désigne la teneur moyenne q_n/T_n de la dernière classe.

De $\quad Q_n(x) = z_{n+1} I_n(x) + R_{n+1}(x)$

on déduit le KD du métal de la dernière classe:

$$[Q_n(x)]^{KD} = z_{n+1} [I_n(x)]^{KD} + [R_{n+1}(x)]^K$$

expression qui se substitue à (1) dans la démarche pratique.

Il est évident que ce procédé ne permet plus de considérer des coupures supérieures à z_n.

V – Une seule coupure

Un cas particulièrement intéressant est celui d'une coupure unique $z_1 = 0_+$ (avec alors $z_0 = 0$). On obtient, avec :

$$R(x) = Q(x) - \frac{q}{T_1} 1_{Z(x)>0}$$

– l'estimation du minerai:

$$[1_{Z(x)>0}]^* = [1_{Z(x)>0}]^K$$

– celle du métal:

$$[Q(x)]^* = \frac{q}{T_1} [1_{Z(x)>0}]^* + [R(x)]^K$$

C'est le modèle utilisé par Bordessoule et al. 1988, et dont une variante figure dans Barancourt 1990 et Barancourt et al. 1991.

Si de plus $R(x)$ est pépitique, son krigeage à moyenne connue (en un point non informé) est nul, et l'estimation se réduit à:

$$[Q(x)]^* = \frac{q}{T_1} [1_{Z(x)>0}]^*$$

Le métal estimé étant proportionnel au minerai estimé, sa teneur est constante.

3 - LE CHANGEMENT DE SUPPORT

On suppose ici la (ou les) veine sertie dans un réseau régulier de blocs 3D constituant les unités de sélection. Le but de cette partie sur le changement de support est l'estimation des réserves ainsi récupérables.

I - Rappels sur le modèle

a) Un modèle isofactoriel

Aux classes de teneurs ponctuelles d'échantillons:

$$z_0 \ , \ z_1 \ , \ z_2 \ , \ \dots \ , \ z_n$$

de minerai cumulé:

$$T_0 = 1 \ , \ T_1 \ , \ T_2 \ , \ \dots \ , \ T_n$$

vont maintenant correspondre les teneurs de blocs:

$$z_0^v \ , \ z_1^v \ , \ z_2^v \ , \ \dots \ , \ z_n^v$$

de minerai:

$$(T_0)^r = 1 \ , \ (T_1)^r \ , \ (T_2)^r \ , \ \dots \ , \ (T_n)^r$$

le coefficient de changement de support r étant déterminé par la variance des blocs (voir plus loin).

Posons $I_i^v = 1_{Z_v \geq z_i^v}$. Les résidus:

$$R_i(x) = \frac{I_i(x)}{T_i} - \frac{I_{i-1}(x)}{T_{i-1}}$$

pour les échantillons ponctuels, et:

$$R_i^v = \frac{I_i^v}{(T_i)^r} - \frac{I_{i-1}^v}{(T_{i-1})^r}$$

pour les blocs, sont les facteurs des lois bivariables isofactorielles. Les résidus d'ordre différent sont sans corrélation spatiale. On a par exemple pour $i \neq j$:

$$Cov\ [R_i\ (x),\ R_j^v] \ = \ E\ [R_i\ (x)\ R_j^v] \ = 0$$

Pour un ordre donné, les covariances des résidus entre deux blocs, entre le premier bloc et un point du second, ou entre un point de premier et un autre point du second, sont identiques.

b) KD et krigeage des résidus

Le KD de blocs s'obtient par le krigeage de chacun des R_i^v, lequel n'utilise alors que les résidus de même ordre $R_i\ (x_a)$ des informations x_a. D'après les propriétés des covariances de ce modèle points-blocs, le second membre du système de krigeage peut s'écrire, x désignant un point de v :

$$Cov\ [R_i\ (x_a),\ R_i^v] \ = \ Cov\ [R_i\ (x_a),\ R_i\ (x)]$$

On en déduit, pour un bloc v non informé et un point x de ce bloc:

$$[R_j^v]^K \ = \ [R_j\ (x)]^K \tag{6}$$

c) Relation de Cartier

La relation fondamentale (Rivoirard 1988, p.323), pour un point $x \in v$:

$$E\ [\ R_i\ (x)\ |\ Z_v\ ] \ = \ R_i^v$$

permet d'exprimer, avec (4), la relation de Cartier :

$$\begin{aligned} E\ [\ Z(x)\ |\ Z_v\ ] \ &= \ E\ [\ m\ +\ \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}\ R_i\ (x)\ |Z_v] \\ &= \ m\ +\ \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}\ R_i^v \ = \ Z_v \end{aligned}$$

Ainsi teneurs de points et blocs se développent en résidus à l'aide des mêmes coefficients. Ceux-ci étant nécessairement égaux aux bénéfices conventionnels, il en résulte que les bénéfices conventionnels de même *ordre* sont identiques pour points et blocs.

On note l'expression de la variance de Z_v :

$$\begin{aligned} Var\ Z_v \ &= \ \sum_{i=1}^{n}\ (b_{i-1})^2\ Var\ R_i^v \\ &= \ \sum_{i=1}^{n}\ (b_{i-1})^2 \left[\frac{1}{(T_i)^r} - \frac{1}{(T_{i-1})^r} \right] \end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer la valeur de r respectant la variance connue des blocs:

$$Var\ Z_v \ = \ Var\ Z(x) - \bar{\gamma}\ (v,v)$$

II – L'estimation globale

Le plus simple est ici d'utiliser directement la distribution empirique des teneurs d'échantillons. La démarche est la suivante:

a) Déterminer la valeur de r correspondant à la variance des blocs.

b) En déduire les nouveaux minerais: $(T_i)^r$

c) Calcul des teneurs correspondant aux $(T_i)^r$, grâce à la conservation des bénéfices points et blocs au même ordre.

La conservation de b_0 :

$$m - z_0^v (T_0)^r = m - z_0 T_0$$

donne d'abord:

$$z_0^v = z_0$$

Pour la suite, on remarquera la relation suivante:

$$\begin{aligned} b_{i-1} - b_i &= q_{i-1} - q_i - z_{i-1} T_{i-1} + z_i T_i \\ &= z_{i-1} (T_{i-1} - T_i) - z_{i-1} T_{i-1} + z_i T_i \\ &= (z_i - z_{i-1}) T_i \end{aligned}$$

Les bénéfices b_i étant conservés en passant aux blocs, il en est de même des $b_{i-1} - b_i$:

$$(z_i^v - z_{i-1}^v) (T_i)^r = (z_i - z_{i-1}) T_i$$

D'où la récurrence donnant les z_i^v :

(7) $$z_i^v = z_{i-1}^v + (z_i - z_{i-1}) (T_i)^{1-r}$$

d) Les quantités de métal sont alors données par:

$$q_i^v = b_i + z_i^v (T_i)^r$$

III – Le problème des zéros

Il s'agit là d'un problème de cohérence d'estimations. Imaginons un gisement constitué par un ensemble de veines ou couches minéralisées, supposées horizontales pour simplifier, et obéissant aux mêmes caractéristiques. Ces veines, d'épaisseur moyenne métrique, sont séparées par plusieurs mètres de stérile. Dans le cadre du modèle à résidus d'indicatrices, on peut, soit procéder à l'estimation directe de l'ensemble des veines, soit estimer individuellement chacune d'elles. Dans ce dernier cas, il sera logique d'utiliser les données (et en particulier les zéros) présentes dans un ensemble de blocs représentant le volume minéralisable (par exemple une tranche de 2 mètres d'épaisseur contenant la veine). Dans le premier cas au contraire, il sera plus simple d'utiliser d'emblée toutes les données, sachant qu'une grande proportion de zéros correspondent à des blocs purement stériles. La mise en oeuvre du modèle de changement de support conduira bien évidemment à des résultats différents. Nous allons voir sur un exemple d'école comment les choses se passent.

Supposons que les T_i représentent la distribution des teneurs (incluant une certaines proportion de zéros) à l'intérieur du seul volume minéralisable. A un support de sélection v est attachée une certaine variance $Var\ Z_v$ permettant le changement de support (coefficient r). La figure 1 montre que le changement de support commence par homogénéiser les teneurs fortes: la partie inférieure de la courbe $Q(T)$ se linéarise et sa pente correspond à une teneur déjà plus modérée. Ce résultat est en accord avec le caractère généralement erratique des valeurs fortes.

Si l'on rajoute maintenant une forte proportion de zéros, la distribution précédente n'intervient plus que pour une proportion p. Moyenne et variance des teneurs de blocs deviennent:

$$
\begin{aligned}
E(Z'_v) &= p\ E(Z_v) = p\ m \\
Var\ Z'_v &= E\ [(Z'_v)^2] - p^2 m^2 \\
&= p\ E\ [(Z'_v)^2] - p^2 m^2 \\
&= p\ Var\ Z_v - p(1-p)\ m^2
\end{aligned}
$$

tandis que le volume total se voit multiplié par $1/p$. La quantité de métal totale est bien sûr conservée, mais le changement de support, basé cette fois sur la distribution pT_i et la variance $Var\ Z'_v$, conduit à des résultats différents. Le coefficient r' satisfait à:

$$
Var\ Z'_v = \sum_{i=1}^{n} (pb_{i-1})^2 \left[\frac{1}{(pT_i)^{r'}} - \frac{1}{(pT_{i-1})^{r'}} \right]
$$

La forte proportion de zéros disponibles rend l'homogénéisation des teneurs fortes moins marquée que précédemment (voir figure 2).

Imaginons que la proportion de zéros se fasse de plus en plus importante ($p \rightarrow 0$ et $r' \rightarrow 1$) de façon que:

$$
(pT_1)^{1-r'} \rightarrow u \quad < 1
$$

Alors $z_i^v \rightarrow z_i\ u$ et $(pT_i)^{r'} \rightarrow \dfrac{pT_i}{u}$. A la limite le modèle opère une dilution constante et égale à $1/u$ de toutes les tranches de teneur. Linares 1989, avec plus de 90 % de zéros, avait utilisé directement ce modèle de dilution constante.

En résumé, le changement de support aura tendance, selon la proportion de zéros utilisée, à mélanger d'abord les teneurs fortes (zéros pas trop nombreux), ou bien à diluer également toutes les teneurs (beaucoup de zéros).

En pratique, la différence sensible entre les deux approches peut être faible au regard de l'incertitude avec laquelle sont connus le volume de sélection et sa variance. Il ne faut pas non plus oublier que l'erreur d'estimation globale du métal en place est souvent l'incertitude majeure des gisements en veines.

Si l'on opte pour une limitation du nombre de zéros intervenant dans l'estimation des veines, le plus simple est d'exclure une fois pour toutes des calculs l'ensemble des blocs considérés a priori comme entièrement stériles. Et c'est avec les données restantes que seront calculés variogramme, variance, et estimation.

IV - L'estimation locale

A la différence de l'estimation globale, et sauf cas particulier, les teneurs devront être regroupées en classes. Dans un premier temps nous supposerons l'ensemble de la distribution des teneurs d'échantillons (queue comprise) discrétisée en classes:

$$z_0\ ,\ z_1\ ,\ z_2\ ,\ \ldots\ ,\ z_n$$

de minerai cumulé:

$$T_0 = 1\ ,\ T_1\ ,\ T_2\ ,\ \ldots\ ,\ T_n$$

Le coefficient r étant déterminé par l'approche globale, on en déduit les valeurs $(T_i)^r$ du minerai, ainsi que les valeurs des classes de teneurs:

$$z_0^v = z_0$$

$$z_i^v = z_{i-1}^v + (z_i - z_{i-1})\,(T_i)^{1-r}$$

Dans le modèle points-blocs, nous avons par ailleurs, pour un point x appartenant à un bloc v non informé (voir 6) :

$$[R_j^v]^K = [R_j\,(x)]^K$$

On en déduit le KD des réserves récupérables. L'estimation du minerai rapporté à sa moyenne est identique pour point et bloc au même ordre:

$$\left[\frac{I_j^v}{(T_j)^r}\right]^{KD} = \sum_0^j [\ R_i^v\ ]^K = \sum_0^j [\ R_i\,(x)\ ]^K = \left[\frac{I_j\,(x)}{T_j}\right]^{KD}$$

Le KD des indicatrices de tranches de teneurs, et donc celui des quantités de métal et bénéfices, en découlent. On peut aussi utiliser le fait que, d'après (5):

$$[B_j\,(x)]^{KD} = b_j\left[\frac{I_j\,(x)}{T_j}\right]^{KD} + \sum_{i\geq j+1} b_{i-1}\,[R_i\,(x)]^K$$

$$= b_j\left[\frac{I_j^v}{(T_j)^r}\right]^{KD} + \sum_{i\geq j+1} b_{i-1}\,[R_i{}^v]^K = [B_j^v]^{KD}$$

les KD des bénéfices point et bloc de même ordre sont identiques.

On trouvera une utilisation de ce modèle, sans discrétisation de la queue, dans Bordessoule 1990.

V - Queue non discrétisée

Dans ce cas, z_n désigne la borne inférieure de la dernière classe, et $z_{n+1} = q_n/T_n$ sa teneur moyenne. Les valeurs correspondantes de la dernière classe des blocs seront notées z_n^v et z_{n+1}^v. La conservation du bénéfice de la dernière classe:

$$b_n = q_n - z_n T_n = (z_{n+1} - z_n)T_n$$

permet d'obtenir z_{n+1}^v , par une formule proche de (7):

$$z_{n+1}^v = z_n^v + (z_{n+1} - z_n)\,(T_n)^{1-r}$$

Posant comme il se doit:

$$R_{n+1}{}^{v} = Q_n^v - z_{n+1}^v\, I_n^v$$

on a:

$$[R_{n+1}^v]^K = [R_{n+1}(x)]^K$$

ce qui permet, comme dans le cas ponctuel, l'estimation de:

$$Q_n^v = z_{n+1}^v\, I_n^v + R_{n+1}^v$$

VI – Une seule coupure

Avec $z_0 = 0$ et $z_1 = 0_+$ on a:

– comme minerai estimé:

$$[1_{Z(x)>0}]^* = [1_{Z(x)>0}]^K\ (T_{0_+})^{1-r}$$

– comme métal estimé:

$$[Q_v]^* = [Q(x)]^*$$

Autrement dit le passage au support bloc se fait en conservant les estimations locales du métal et en diluant le minerai dans le rapport $(T_{0_+})^{1-r}$. C'est là un moyen de représenter le salissage lié à l'extraction de la totalité du métal par petits blocs. Le coefficient r est toujours déterminé par la variance des blocs dans le volume minéralisable.

VII – Compléments sur le modèle points–blocs

Revenons maintenant à la spécification du modèle. Ayant déterminé les valeurs des résidus aux points échantillonnés, on peut en calculer la structure spatiale. Et c'est cette structure qui est utilisée pour le krigeage des résidus dans le modèle ponctuel de la partie 2. On peut montrer que la covariance du i^e résidu s'écrit (en désignant par $T_{i,i}^h$ la probabilité d'avoir $Z(x)$ et $Z(x+h)$ supérieurs ou égaux à i):

$$Cov\ [R_i\ (x),\ R_i\ (x+h)] = \frac{T_{i,i}^h}{(T_i)^2} - \frac{T_{i-1,i-1}^h}{(T_{i-1})^2}$$

Les choses se compliquent en passant au modèle points–blocs de la partie 3. En effet, dans ce modèle, la covariance des résidus entre points différents, ou entre un point et un bloc, est égale à la covariance entre les deux blocs correspondants, qui s'écrit (Rivoirard 1988, p. 325):

$$\left(\frac{T_{i,i}^h}{T_i^{\,2}}\right)^r - \left(\frac{T_{i-1,i-1}^h}{T_{i-1}^{\,2}}\right)^r$$

ce qui procure un moyen de calcul expérimental. Pour $h=0$ cette expression donne la variance des résidus de blocs, ou encore la covariance entre un point et son bloc:

$$\frac{1}{(T_i)^r} - \frac{1}{(T_{i-1})^r}$$

la covariance des résidus entre un point et lui-même (c.-à.-d. sa variance) valant toujours:

$$\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_{i-1}}$$

C'est à l'intérieur de ce modèle point-bloc que l'estimation d'un bloc non informé peut être déduite de celle d'un point du bloc:
- résidus krigés identiques au même ordre;
- KD des indicatrices rapportées à leurs moyennes identiques au même ordre;
- KD des bénéfices identiques au même ordre.

Autre remarque: il est courant, en krigeage, d'introduire une condition de non-biais pour robustifier l'estimation vis à vis de défauts locaux de stationnarité. Cette opération reste licite en KD ponctuel: rajouter $\sum \lambda^{\alpha} = 1$ au krigeage de chaque $R_i(x)$ assure le non biais local de l'estimation KD. Déduire de cette même estimation ponctuelle une estimation bloc n'a alors de sens que si les résidus points et blocs de même ordre ont même moyenne locale. Ceci revient à écrire (E_l désignant ici la moyenne locale):

$$\frac{E_l\,[I_i\,(x)]}{T_i} = \frac{E_l\,[\,I_i^v\,]}{(T_i)^r}$$

Il faut donc supposer que localement, les fonctions de répartition inverses point et bloc à la i^e coupure sont dans le même rapport que globalement. On peut sinon faire face aux défauts de stationnarité grâce à la technique des variables utiles (Rivoirard 1988, p 325) ou même, si la non stationnarité est modélisable, passer à un modèle à résidus non stationnaire.

4 – MONTÉE ET PUISSANCES

L'orthogonalité des résidus se conserve par régularisation (par exemple sur la hauteur d'un gradin) et par montée. Dans beaucoup de cas, il est alors commode de procéder à des regroupements d'informations.

Prenons le cas typique d'une veine horizontale reconnue par sondages verticaux. On peut effectuer une estimation à 3 dimensions en définissant, pour chaque échantillon, indicatrices et résidus. Mais on peut aussi se ramener à 2 dimensions. La somme des indicatrices sur la verticale passant par le point x de R^2 donne la puissance à la coupure considérée (en sélection libre):

$$P_i\,(x)$$

et le variogramme croisé de deux puissances est proportionnel à celui de la plus basse coupure. Les résidus d'indicatrices seront alors sommés sur la verticale en donnant:

$$R_i\,(x) = \frac{P_i\,(x)}{T_i} - \frac{P_{i-1}(x)}{T_{i-1}}$$

et la démarche est la même qu'à 3 dimensions.

Attention: les krigeages se font alors à 2 dimensions avec les variogrammes montés, mais c'est toujours la distribution des teneurs d'échantillons à 3D qui fournit les paramètres T_i ainsi que le variogramme permettant le calcul de $Var\ Z_v$ et du coefficient r. Il s'agit véritablement d'un changement de support 3D des résidus d'indicatrices (vouloir ramener entièrement le problème à 2D, comme tenté dans Rivoirard 1991, parait illusoire). A noter que si P_i^v représente la puissance bloc à la i^e coupure, les espérances des puissances points et blocs vérifient les relations suivantes:

$$p_0^v = p_0$$

$$p_i = T_i\, p_0$$

$$p_i^v = (T_i)^r\, p_0^v$$

et donc:

$$p_i^v = (p_i)^r\, (p_0)^{1-r}$$

REFERENCES

C. Barancourt 1990, Etude de l'intermittence et de la variabilité des champs de précipitation par une approche stochastique, Thèse de Doctorat de L'Institut de Mécanique de Grenoble.

C. Barancourt et al. 1991, A method for delineating and estimating rainfall fields, soumis à Water Resources Research.

J.-L. Bordessoule et al. 1988, Estimation de réserves géologiques en uranium par variables utiles à résidu autokrigeable, *Sciences de la Terre*, n°28, Série Informatique, Nancy.

J.-L. Bordessoule 1990, Estimation géostatistique d'un gisement d'uranium multicouche, Thèse en Géostatistique de l'Ecole des Mines de Paris.

M. Linares 1989, Etude de la sélectivité de Tréviels, Mastère spécialisé en Géostatistique, Centre de Géostatistique de Fontainebleau. *Confidentiel.*

J. Rivoirard 1988, Modèles à résidus d'indicatrices autokrigeables, Etudes géostatistiques V, Séminaire CFSG 15-16 Juin 1987, Fontainebleau, Sciences de la Terre n°28, Série informatique, Nancy.

J. Rivoirard 1989, Models with orthogonal indicator residuals, Proceedings, 3rd International Geostatistics Congress, Avignon, 5-9 Sept. 1988 : "Geostatistics", M. Armstrong Editor, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Holland.

J. Rivoirard 1991, Modèles factorisés de puissances de veines et changement de support, Séminaire de Géostatistique, Fontainebleau, Journées de juin 1989, à paraître dans Sciences de la Terre.

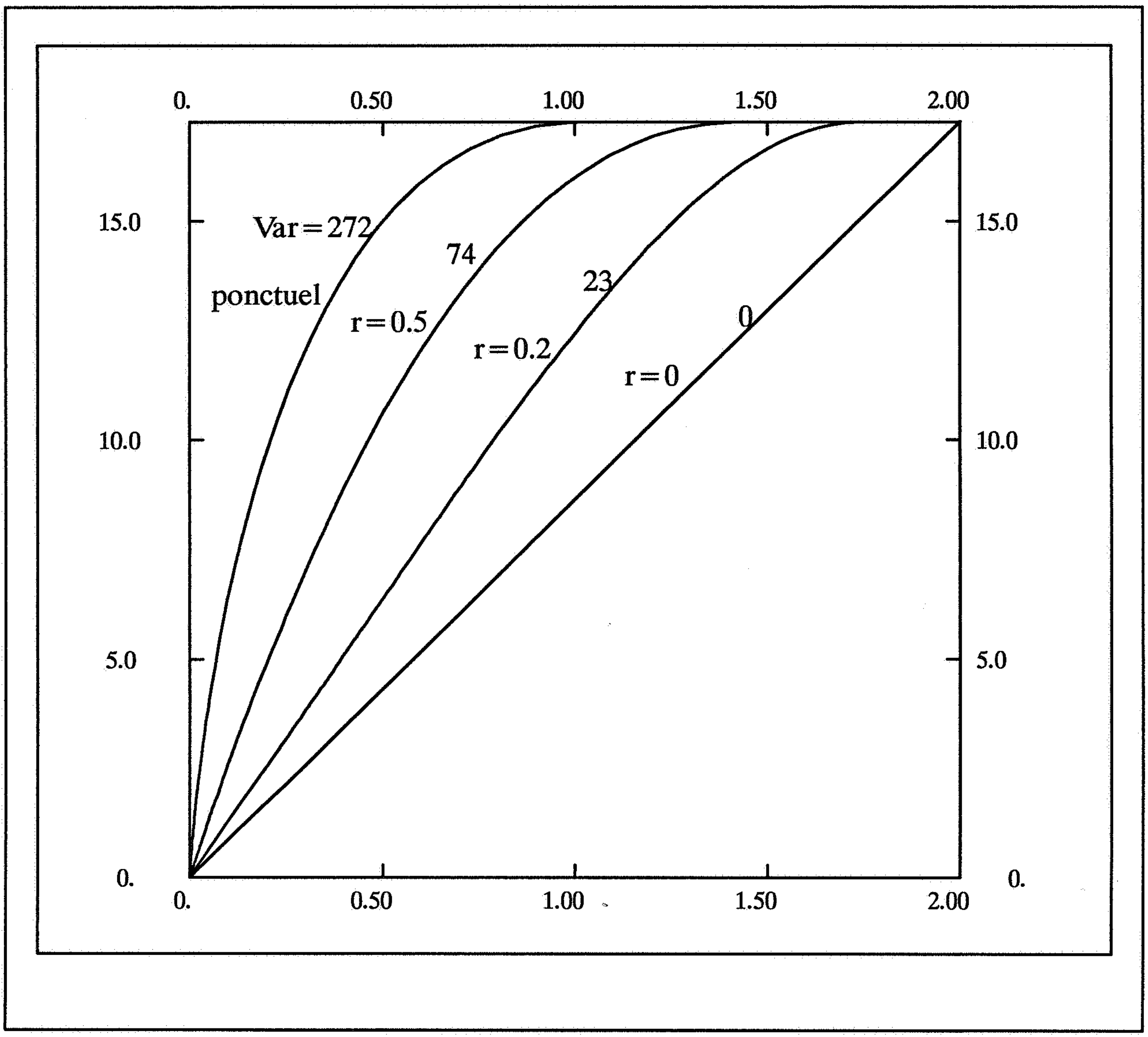

Figure 1 : Courbes Métal / Minerai obtenues pour différents changement de support.

On part d'une distribution ponctuelle comportant 50% de zéros. La linéarisation de la partie inférieure de la courbe avec le changement de support correspond à une homogénéisation des teneurs fortes.

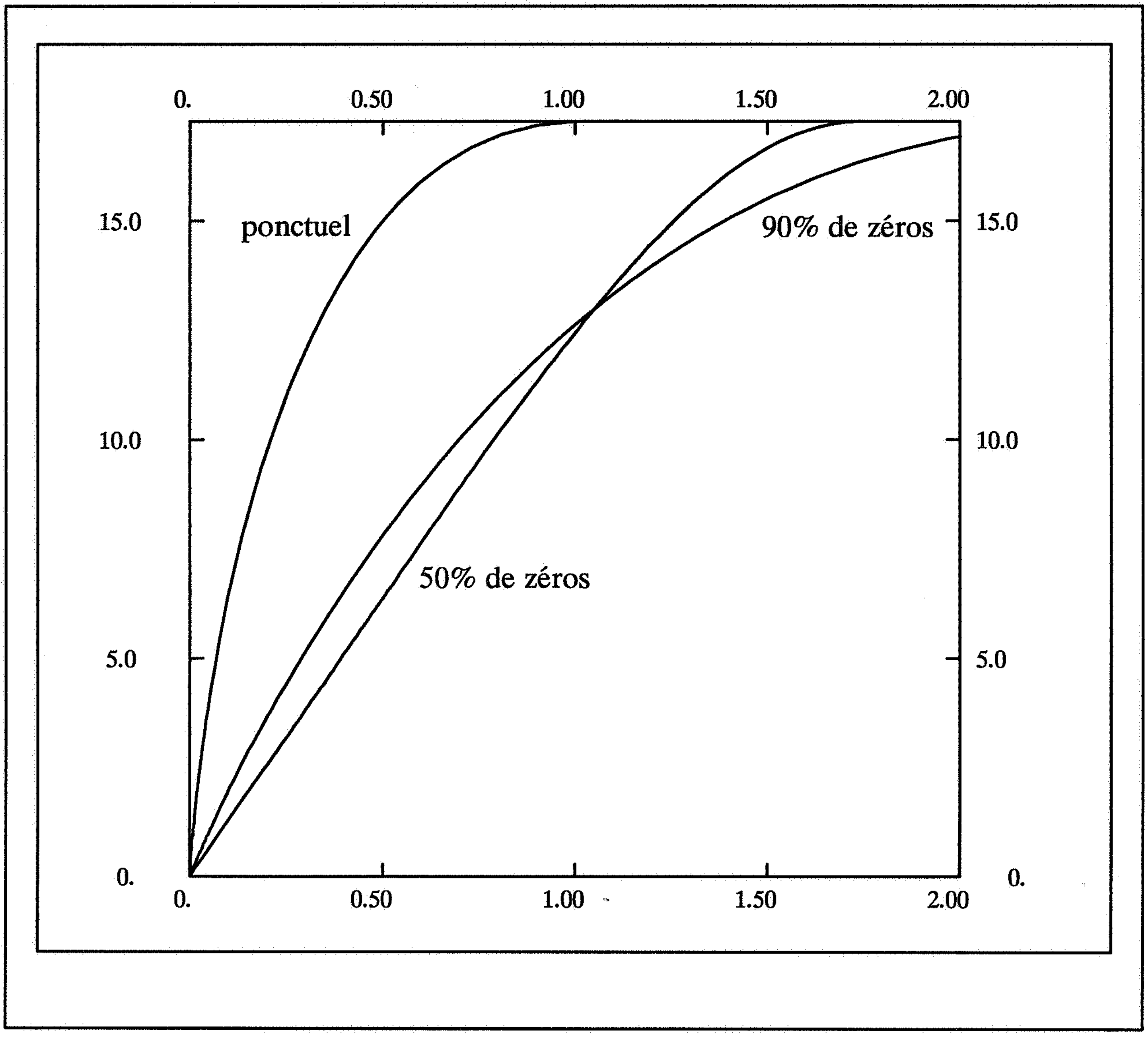

Figure 2 : Courbes Métal / Minerai obtenues pour un même changement de support.

On part de distributions ponctuelles comportant respectivement 50% et 90% de zéros, et identiques par ailleurs.

proportion de zéros	50 %	90%
variance ponctuelle	272	66.5
variance blocs	22.5	16.4
coefficient r	0.20	0.62

Avec 90% de zéros, le modèle de changement de support est voisin d'une dilution constante de toutes les tranches de teneurs, ce qui se traduit par une affinité entre les courbes Métal / Minerai points et blocs.