

MODÈLES FACTORISÉS DE PUISSANCES DE VEINES ET CHANGEMENT DE SUPPORT

J. RIVOIRARD†

Table des Matières

Résumé	174	Abstract	174
A - INTRODUCTION.....	175	D - CHANGEMENT DE SUPPORT POUR LES MODÈLES FACTORISÉS.....	180
B - MODÈLES FACTORISÉS DE PUISSANCES.....	175	1 - Puissances de tranches sans corrélation spatiale.....	181
1 - Puissances de tranches sans corrélation spatiale.....	176	2 - Résidus de puissances orthogonaux..	
2 - Résidus de puissances orthogonaux.....	176	E - CONCLUSION	186
C - SÉLECTIVITÉ ET CHANGEMENT DE SUPPORT.....	178		

† Centre de Géostatistique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 35 rue Saint-Honoré,
77305 FONTAINEBLEAU (France)

*Etudes Géostatistiques VI - Séminaire C.F.S.G. sur la Géostatistique, Juin 1989, Fontainebleau.
Sci. de la Terre, Sér. Inf., Nancy, 1991, 30, pp 173 à 188.*

Résumé

La connaissance des teneurs d'échantillons le long d'une traversée de veine fournit la puissance minéralisée aux différentes coupures (et donc les accumulations métal correspondantes). L'estimation par cokrigage de ces différentes puissances s'obtient ici en krigant les facteurs: puissances de tranches de teneur dans un cas, résidus entre puissances dans l'autre. Pour rendre compte d'une sélectivité à l'exploitation moins fine que celle sur échantillons, on examine ensuite la possibilité d'effectuer un changement de support conservant le type de facteurs.

Abstract

Factorized models for vein thicknesses and change of support

Knowing the sample grades across a vein gives the mineralized thicknesses at the different cut-off grades (and the corresponding metal accumulations). Here cokriging these different thicknesses is obtained by kriging the factors. These factors are the thicknesses of the grade classes in one case, and the residuals between thicknesses in the other one. Afterwards, to represent the mining selectivity, we examine the possibility of making a change of support with the same type of factors.

Mots-clé: veine, teneur de coupure, puissance, accumulation métal, cokrigage, facteurs, résidus, changement de support.

A. Introduction

Imaginons une veine (ou une couche) horizontale, reconnue par sondages verticaux. La connaissance des teneurs d'échantillons le long de ces sondages fournit la puissance minéralisée aux différentes coupures en sélection libre sur échantillons (et, par voie de conséquence, les accumulations métal correspondantes). Se pose alors le problème de l'estimation dans l'espace de ces différentes puissances. Celle-ci peut se faire par cokrigeage dans les modèles factorisés proposés en partie B. Mais ceci ne suffit pas à l'estimation des réserves récupérables. Il faut en effet tenir compte (au moins) de l'effet de support, ce qui est étudié dans les autres parties.

B. Modèles factorisés de puissances

On suppose dans cette partie que les teneurs d'échantillons sont discrétisées: z_1, z_2, \dots, z_n , et on note $P_j(x)$ la puissance à coupure z_j au point x de R^2 . La variable $D_j(x) = P_j(x) - P_{j+1}(x)$ représente la puissance de la tranche à teneur z_j . On a donc:

$$P_j(x) = \sum_{i \geq j} D_i(x)$$

et l'accumulation au dessus de la coupure z_j s'écrit:

$$Q_j(x) = \sum_{i \geq j} z_i D_i(x) = \sum_{i \geq j} z_i (P_i(x) - P_{i+1}(x))$$

Il suffit donc d'estimer les puissances $P_j(x)$ pour en déduire les accumulations métal.

Formulé de manière plus générale: "comment procéder à l'estimation conjointe de variables $P_j(x)$ vérifiant, pour $i < j$, $P_i(x) \geq P_j(x)$?", ce problème multivariable n'est pas isolé. On le retrouve par exemple dans le cas des tranches granulométriques, les coupures portant alors sur la granulométrie. On pourrait aussi se ramener au problème encore plus général de l'estimation de variables $D_i(x)$, mais on risque alors de perdre de vue la hiérarchie. Par exemple, si l'on cherche à estimer des teneurs en Pb, Zn, Ag , jouant le rôle des D_i , quelles sont les variables jouant celui des P_1, P_2, P_3 : $P_1 = Pb + Zn + Ag$, $P_2 = Pb + Zn$, $P_3 = Pb$ ou bien $P_1 = Pb + Zn + Ag$, $P_2 = Pb + Ag$, $P_3 = Ag$? Dans l'exemple des puissances P_j au contraire, la hiérarchie est donnée. Enfin s'apparente à notre exemple l'estimation simultanée des puissances individuelles de couches et de leur puissance totale, étudiée par G. Matheron (1979). Dans cette note, où il introduit la notion d'autokrigeabilité, G. Matheron propose une méthode d'estimation intermédiaire entre un krigeage de la puissance totale et un krigeage séparé de chaque couche.

Revenons maintenant à nos puissances $P_j(x)$. Le krigeage séparé de ces puissances se justifie quand il correspond à leur cokrigeage. C'est le cas lorsque ces puissances sont en corrélation intrinsèque: structures simples et croisées semblables pour toutes les variables (ce qui exclut donc une destruction selon la coupure). Ce pourrait être aussi le cas si les puissances sont spatialement non corrélées, ce qui est peu probable en pratique (en théorie on peut construire un tel modèle à partir de Fonctions Aléatoires $P_j(x)$ indépendantes; pour satisfaire $P_i(x) \geq P_j(x)$, il est nécessaire d'avoir $P_i(x) \geq P_j(y)$ pour tous x et y , et donc $\text{Min } P_i \geq \text{Max } P_j$ ce qui est très fort). La hiérarchie qui existe entre les différentes puissances ouvre la voie à des estimations linéaires ou non (J. Rivoirard 1988). Intéressantes si l'on cherche à estimer aussi d'autres variables que les puissances et leurs combinaisons linéaires, les méthodes non linéaires, plus complexes, risquent d'être moins robustes. Ici nous développerons deux modèles factorisés de puissances, dans lesquels le cokrigeage s'obtient en krigeant les facteurs.

1. Puissances de tranches sans corrélation spatiale.

Ces puissances de tranches $D_i(x)$ sont donc les facteurs de ce modèle: il suffit de les kriger séparément pour en déduire le cokrigage des puissances:

$$\begin{aligned} P_j(x)^{CK} &= (D_j(x) + D_{j+1}(x) + \dots + D_n(x))^{CK} \\ &= D_j(x)^K + D_{j+1}(x)^K + \dots + D_n(x)^K = D_j(x)^K + P_{j+1}(x)^{CK} \end{aligned}$$

Au point de vue structural, il est clair que le variogramme croisé entre les puissances à deux coupures z_i et z_j ($z_i < z_j$) est égal au variogramme simple de la puissance à la coupure la plus haute.

Un tel modèle peut se construire en générant des FA $D_i(x)$ indépendantes, positives ou nulles. Partant de la teneur la plus élevée, on construit de proche en proche les puissances à coupure plus faible:

$$P_j(x) = D_j(x) + P_{j+1}(x)$$

La régression:

$$E(P_j(x) | P_{j+1}(x)) = P_{j+1}(x) + E(D_j)$$

est donc linéaire de pente unité (avec $D_j(x) - E(D_j)$ comme résidu). Supposons par ailleurs que les D_i puissent prendre des valeurs nulles. Les tranches comprises entre deux coupures z_i et z_j ne dépendent pas des tranches supérieures à la plus haute des coupures z_j . Donc, si $P_j(x)$ est nul, $1_{P_j(x)>0}$ est indépendant de $1_{P_j(y)>0}$. Soit maintenant $Max(x)$ la classe de teneur maximale atteinte le long du profil en x . On a par exemple:

$$P_i(x) > 0 \Rightarrow Max(x) \geq i$$

On en déduit que, connaissant $1_{Max(x) \geq j}$, $1_{Max(x) \geq i}$ est indépendant de $1_{Max(y) \geq j}$. Le maximum suit donc un modèle à résidus d'indicatrices orthogonaux descendant (Rivoirard 1989 section 6.2, 1988 page 12).

2. Résidus de puissances orthogonaux

Il s'agit cette fois, comme on le verra plus loin, des résidus de la régression d'une puissance $P_i(x)$ par la puissance à coupure supérieure $P_{i+1}(x)$. Pour construire à 2D un tel modèle, on ne fera plus d'hypothèse d'indépendance sur les variations de puissances lorsque la coupure descend, mais sur les variations relatives de puissance quand la coupure monte. Partant de FA $Y_i(x)$ indépendantes, positives ou nulles, et (à l'exception de Y_1) inférieures ou égales à 1, on pose:

$$P_1(x) = Y_1(x),$$

$$P_2(x) = P_1(x)Y_2(x), \dots$$

$$P_i(x) = P_{i-1}(x)Y_i(x) = Y_1(x)Y_2(x)\dots Y_i(x) \quad (A1)$$

On a donc $P_j(x) = P_i(x)Y_{i+1}(x)\dots Y_j(x)$ ($j > i$) d'où la relation, importante pour notre propos:

$$E(P_j(x) | P_i(x)) = E(Y_{i+1})\dots E(Y_j)P_i(x) = \frac{E(P_j)}{E(P_i)}P_i(x) \quad (A2)$$

Le métal Q_i à coupure z_i s'exprime à partir des puissances P_j pour $j \geq i$. Connaissant $P_i(x)$ il est donc également, en moyenne, proportionnel à $P_i(x)$:

$$E(Q_i(x) | P_i(x)) = m_i P_i(x)$$

avec naturellement $m_i = \frac{E(Q_i)}{E(P_i)}$, teneur moyenne au dessus de z_i . On peut aussi écrire, pour $P_i(x) > 0$:

$$E\left(\frac{Q_i(x)}{P_i(x)} \mid P_i(x)\right) = m_i$$

d'où une teneur récupérable à coupure z_i qui, en moyenne, ne dépend pas de $P_i(x)$. En fait nous utiliserons plus loin la relation suivante, un peu plus forte que (A2):

$$E(P_j(x) \mid P_i(x), P_i(y)) = \frac{E(P_j)}{E(P_i)} P_i(x) \quad (A3)$$

Posons maintenant:

$$R_i(x) = \frac{P_i(x)}{E(P_i)} - \frac{P_{i-1}(x)}{E(P_{i-1})}$$

pour $i > 1$ et:

$$R_1(x) = \frac{P_1(x)}{E(P_1)} - 1$$

$R_i(x)$ est, au facteur $1/E(P_i)$ près, le résidu de la régression de $P_i(x)$ par $P_{i-1}(x)$. Tous ces résidus sont orthogonaux. En effet le produit $E(R_j(x)R_i(y))$ s'écrit:

$$E\left(\left(\frac{P_j(x)}{E(P_j)} - \frac{P_{j-1}(x)}{E(P_{j-1})}\right)\frac{P_i(y)}{E(P_i)}\right) - E\left(\left(\frac{P_j(x)}{E(P_j)} - \frac{P_{j-1}(x)}{E(P_{j-1})}\right)\frac{P_{i-1}(y)}{E(P_{i-1})}\right)$$

En conditionnant par exemple le premier terme par $P_i(x)$ et $P_i(y)$, on voit qu'il est nul en vertu de (A3). Il en est de même du second terme. Les résidus sont donc bien orthogonaux et constituent les facteurs du modèle ¹. Il suffit de les kriger pour obtenir le cokrigage des puissances:

$$\frac{P_j(x)^{CK}}{E(P_j)} = \left(1 + \sum_{i \leq j} R_i(x)\right)^{CK} = 1 + \sum_{i \leq j} R_i(x)^K = \frac{P_{j-1}(x)^{CK}}{E(P_{j-1})} + R_j(x)^K$$

La puissance à coupure z_i ne dépend que des résidus d'ordre inférieur à i . La différence $\frac{P_j(x)}{E(P_j)} - \frac{P_i(x)}{E(P_i)}$ ne dépendant, elle, que des résidus compris entre $i+1$ et j , est sans corrélation spatiale avec P_i . D'où un variogramme croisé entre P_i et P_j identique, à un facteur près, au variogramme simple de la puissance à la coupure la plus basse P_i .

Revenons maintenant au mode de construction A1, et supposons que les Y_i prennent effectivement des valeurs nulles. Si $P_i(x)$ est > 0 , $1_{P_j(x) > 0}$ (pour $j > i$) est indépendant de $1_{P_i(y) > 0}$. Autrement dit, sachant $1_{Max(x) \geq i}$, $1_{Max(x) \geq j}$ est indépendant de $1_{Max(y) \geq i}$. Le maximum suit cette fois un modèle à résidus d'indicatrices orthogonaux ascendant (Rivoirard 1989 section 4.2).

Remarques:

1. Dans les deux modèles factorisés décrits ici, la discrétisation joue un rôle conventionnel. Supprimer la coupure z_i par exemple n'a d'autre effet que de regrouper les facteurs correspondants:

$$D_{j-1}(x) + D_j(x) = (P_{j-1}(x) - P_j(x)) + (P_j(x) - P_{j+1}(x)) = P_{j-1}(x) - P_{j+1}(x)$$

ou

$$R_{i+1}(x) + R_i(x) = \dots = \frac{P_{i+1}(x)}{E(P_{i+1})} - \frac{P_{i-1}(x)}{E(P_{i-1})}$$

Ainsi en pratique, une fois adopté le modèle, la discrétisation peut-être quelconque: le choix des coupures, en dehors de la plage nécessaire des valeurs économiques possibles, ne dépend que de la précision souhaitée. Le modèle est donc invariant par anamorphose des teneurs.

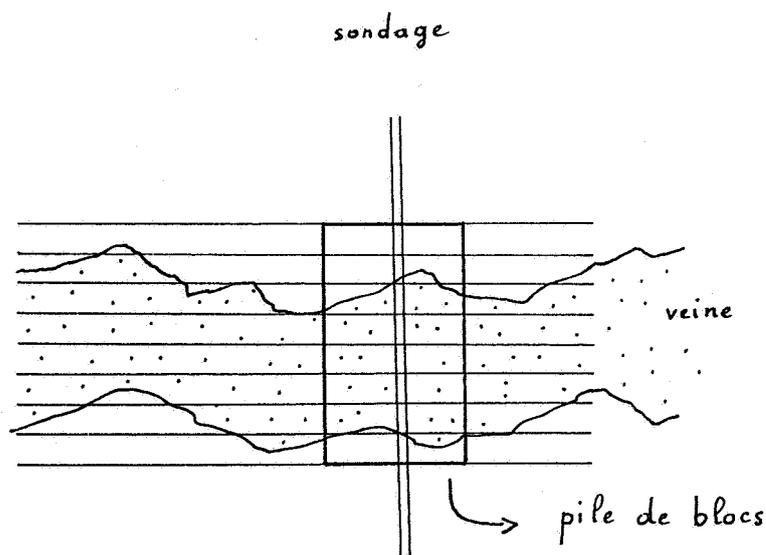
2. Dans le second modèle, il est facile de voir que la quantité $\frac{Q_i(x)}{E(Q_i)} - \frac{P_i(x)}{E(P_i)}$ représente le résidu de $\frac{Q_i(x)}{E(Q_i)}$ connaissant $P_i(x)$, et qu'elle n'a de corrélation spatiale avec aucun des résidus R_1, \dots, R_i . Cette remarque est intéressante lorsque la distribution des teneurs présente une longue queue de valeurs élevées, qu'il devient laborieux de discrétiser. S'arrêter prématurément dans la discrétisation, en considérant comme égales toutes les teneurs de la dernière tranche z_i , risque alors de fournir une mauvaise restitution des quantités de métal Q_i observées expérimentalement. Ce risque est évité par l'introduction du résidu supplémentaire $\frac{Q_i(x)}{E(Q_i)} - \frac{P_i(x)}{E(P_i)}$.

3. Dans le cas où l'on utilise qu'une seule coupure z_1 , ce dernier procédé revient à factoriser les variables utiles puissance $P_1(x)$ et accumulation métal $Q_1(x)$ à l'aide de la puissance $\frac{P_1(x)}{E(P_1)} - 1$ et du résidu $\frac{Q_1(x)}{E(Q_1)} - \frac{P_1(x)}{E(P_1)}$: c'est le modèle utilisé par Bordessoule et al, 1988, 1989.

¹ Il s'agit là d'une méthode générale de factorisation des produits successifs de variables indépendantes: $P_i = Y_1 Y_2 \dots Y_i$ ($i = 1, \dots, n$). En particulier si l'on prend pour Y_i des Fonctions Aléatoires, indicatrices $1_{x \in A_i}$ d'ensembles A_i indépendants, ceci permet la factorisation des $P_i(x) = 1_{x \in A_1 \cap \dots \cap A_i}$: c'est le modèle à résidus d'indicatrices (Rivoirard 1988, 1989).

C. Sélectivité et changement de support

La définition des puissances et accumulations faite le long des sondages suppose qu'au moment de l'exploitation, la sélection du minerai porte sur des supports comparables aux échantillons de sondage. En réalité la sélection opère alors sur des supports plus gros, estimés à l'aide de l'information "ultime" dont on dispose à ce moment-là (analyses de trous de foration par exemple). Il faut donc tenir compte de ces effets de support et d'information lorsqu'on procède, sur la seule base des sondages, à l'estimation des réserves récupérables. Bien souvent s'ajoutent des contraintes géométriques (ex: une seule passe de minerai) rendant le problème encore plus complexe. Seule est abordée ici la prise en compte de l'effet de support en sélection libre (ce qui permet aussi de traiter l'effet d'information dans le cas d'un estimateur ultime sans biais conditionnel).



Imaginons la veine (de direction horizontale) sortie dans un réseau de blocs 3D v_{fgh} (voir figure). Chacun de ces blocs a une teneur Z_{fgh}^v obtenue en mélangeant le stérile encaissant aux parties minéralisées. Considérons alors un sondage vertical, d'implantation supposée aléatoire à l'intérieur de la pile de blocs auquel il appartient. La teneur Z_{fgh} du tronçon appartenant au bloc v_{fgh} est liée à la teneur de ce bloc par la relation de Cartier (Matheron 1982):

$$E(Z_{fgh} | Z_{fgh}^v) = Z_{fgh}^v$$

Cette relation indique que la distribution des teneurs d'échantillons (tronçons) Z_{fgh} est plus sélective que celle des blocs. Ceci peut encore s'exprimer en disant que la quantité de métal apportée par les valeurs les plus riches est, à tonnage de minerai sélectionné égal, plus importante pour les échantillons que pour les blocs. Ou encore en disant qu'à teneur de coupure fixée, le bénéfice conventionnel apporté par les échantillons est plus important que celui des blocs.

Les modèles de changement de support habituels permettent de déduire la distribution des blocs à partir de celle des échantillons en se basant sur la variance des teneurs de blocs (calculable a priori à l'aide du variogramme des teneurs d'échantillons). En toute rigueur l'utilisation d'un tel modèle dans le contexte présent suppose qu'à l'intérieur du volume minéralisable, supposé connu, les teneurs se distribuent à 3 dimensions de façon stationnaire et conformément au modèle utilisé. Dans la situation présente néanmoins, ce volume minéralisable n'est pas connu, et surtout, l'hypothèse de stationnarité risque d'être peu admissible verticalement, les bordures étant en particulier appauvries par le stérile inclus dans les blocs.

Voyons comment les choses se présentent si l'on essaie de ramener à 2 dimensions ce problème à 3 dimensions. Par application d'une coupure z aux teneurs Z_{fgh}^v de chacun des blocs v_{fgh} de la pile (f, g) , on obtient la puissance:

$$P_z^v(f, g) = \sum_h 1_{Z_{fgh}^v \geq z}$$

(la hauteur de chacun des blocs étant prise comme unité). De même le métal s'écrit:

$$Q_z^v(f, g) = \sum_h Z_{fgh}^v 1_{Z_{fgh}^v \geq z}$$

Outre la relation de Cartier précédente, supposons que, connaissant Z_{fgh}^v , la teneur Z_{fgh} est indépendante de la teneur des autres blocs. On peut alors écrire:

$$E\left(\sum_h Z_{fgh} | Z_{fgh}^v \forall l\right) = \sum_h Z_{fgh}^v$$

soit pour les quantités de métal totales (à coupure nulle) $Q(f, g)$ et $Q^v(f, g)$:

$$E(Q(f, g) | Z_{fgh}^v \forall l) = Q^v(f, g)$$

Ici nous chercherons à respecter:

$$E(Q(f, g) | P_z^v(f, g) \forall z) = Q^v(f, g) \quad (C1)$$

ce qui n'est pas tout à fait la même chose car la donnée des puissances $P_z^v(f, g)$ à toutes les coupures est équivalente à celle de l'histogramme des Z_{fgh}^v quand h varie, mais ne précise pas quel bloc a telle teneur. Cette relation C1 n'est pas suffisante et il faudra donc aussi s'assurer de la hiérarchie des courbes concaves métal/minerai (soit accumulation/puissance) ou des courbes convexes bénéfice/teneur de coupure.

D. Changement de support pour les modèles factorisés

On suppose comme en B que les puissances verticales P_1, P_2, \dots, P_n obtenues par sélection libre après discrétisation des teneurs d'échantillons: z_1, z_2, \dots, z_n sont factorisées par une famille de FA H_1, H_2, \dots, H_n spatialement non corrélées. Et on cherche à déterminer une famille de FA $H_1^v, H_2^v, \dots, H_n^v$ spatialement non corrélées et vérifiant $Cov(H_i, H_j^v) = 0$ si $i \neq j$, qui pourrait factoriser les puissances $P_1^v, P_2^v, \dots, P_n^v$ définies après changement de support pour des teneurs discrétisées $z_1^v, z_2^v, \dots, z_n^v$ à déterminer.

Dans les modèles recherchés, le cokrigeage des P_j^v à partir des $P_j(x_\alpha)$ s'effectuera grâce au krigeage de chaque H_i^v à l'aide des $H_i(x_\alpha)$ de même ordre. Ceci ne nécessite que la connaissance de l'espérance et de la covariance de ces facteurs. La relation C1 requiert néanmoins des hypothèses supplémentaires sur les régressions. Soit

$$Q_1(x) = a_o + \sum a_i H_i(x)$$

et

$$Q_1^v(x) = a_o^v + \sum a_i^v H_i^v(x)$$

le développement des quantités de métal en place à partir des facteurs (sélectionner les teneurs non nulles revenant à appliquer la coupure la plus basse). La donnée des $P_z^v(x)$ pour tout z équivalent à celle des $H_i^v(x)$ pour tout i , la relation C1 peut s'écrire:

$$E(a_o + \sum a_i H_i(x) \mid H_1^v(x), \dots, H_n^v(x)) = a_o^v + \sum a_i^v H_i^v(x)$$

Pour satisfaire cette relation, nous ferons les hypothèses:

$$a_o = a_o^v$$

et

$$E(H_i(x) \mid H_1^v(x), \dots, H_n^v(x)) = E(H_i(x) \mid H_i^v(x)) = \mu_i H_i^v(x) \quad (D1)$$

avec

$$a_i \mu_i = a_i^v$$

On aura alors:

$$E(H_i) = \mu_i E(H_i^v)$$

$$\text{et } Cov(H_i, H_i^v) = \mu_i Var H_i^v$$

En supposant en outre que les puissances (ou les H_i) d'un sondage sont, conditionnellement aux puissances de sa pile de blocs, indépendantes des puissances d'autres piles ou d'autres sondages, on en déduit les relations entre covariances:

$$Cov(H_i(x), H_i(y)) = \mu_i^2 Cov(H_i^v(x), H_i^v(y))$$

$$Cov(H_i(x), H_i^v(y)) = \mu_i Cov(H_i^v(x), H_i^v(y))$$

d'où par exemple la covariance échantillon-bloc calculable à partir de la covariance échantillon-échantillon connue (la position du sondage étant randomisée dans sa pile de blocs):

$$Cov(H_i(x), H_i^v(y)) = \frac{1}{\mu_i} Cov(H_i(x), H_i(y)) \quad (D2)$$

Le krigeage de $H_i^v(x)$ à partir des $H_i(x_\alpha)$ est en conséquence égal à celui de $H_i(x)$ divisé par μ_i .

1. Puissances de tranches sans corrélation spatiale

On recherche ici des modèles dans lesquels les puissances D_1, D_2, \dots, D_n définies au niveau des échantillons pour les tranches de teneur z_1, z_2, \dots, z_n et les puissances $D_1^v, D_2^v, \dots, D_n^v$ correspondant aux teneurs $z_1^v, z_2^v, \dots, z_n^v$ pour les blocs, ne soient spatialement corrélés que pour le même indice i (pour $i \neq j$ les covariances spatiales entre D_i et D_j , D_i et D_j^v , D_i^v et D_j^v , doivent être nulles).

On aura évidemment:

$$Q_j = \sum_i z_i D_i$$

et

$$Q_j^v = \sum_i z_i^v D_i^v$$

En respectant:

$$E(D_i | D_1^v, \dots, D_n^v) = E(D_i | D_i^v) = \frac{z_i^v}{z_i} D_i^v$$

il est clair que C1 sera satisfaite:

$$E(Q_1 | P_1^v, \dots, P_n^v) = Q_1^v$$

On peut construire un tel modèle en partant de FA $D_1^v, D_2^v, \dots, D_n^v, U_1, U_2, \dots, U_n$ indépendantes et en posant:

$$D_i = U_i D_i^v \quad (D3)$$

avec

$$u_i = E(U_i) = \frac{z_i^v}{z_i}$$

Il est facile de voir que $E(Q_j) = E(Q_j^v)$. Ainsi les coupures z_j (sur échantillons) et z_j^v (sur blocs) conduisent, dans ce modèle, à la même quantité de métal. On a naturellement aussi:

$$z_i E(D_i) = z_i^v E(D_i^v)$$

de sorte que la i^{e} tranche contient une quantité de métal identique, mais qui, en passant des échantillons aux blocs, se trouve diluée dans le rapport inverse des teneurs:

$$\frac{z_i^v}{z_i} = \frac{E(D_i)}{E(D_i^v)}$$

Notons qu'à l'estimation locale, on aura:

$$(D_i^v)^K = E(D_i^v) + \sum \lambda_{vi}^\alpha (D_{i\alpha} - E(D_i))$$

soit, puisque d'après D2 $\lambda_{vi}^\alpha = \frac{1}{u_i} \lambda_i^\alpha = \frac{z_i}{z_i^v} \lambda_i^\alpha$:

$$\frac{z_i}{z_i^v} E(D_i) + \frac{z_i}{z_i^v} \sum \lambda_i^\alpha (D_{i\alpha} - E(D_i)) = \frac{z_i}{z_i^v} (D_i)^K$$

de sorte qu'au niveau local également, les quantités de métal seront identiques pour blocs et échantillons.

Les z_i sont connus, mais les z_i^v ne sauraient être quelconques. Il doivent:

- d'une part conduire, pour chaque quantité de métal $E(Q_j) = E(Q_j^v)$ à une puissance "bloc" $E(P_j^v) = \sum_{i \geq j} E(D_i^v)$ supérieure à la puissance échantillon $E(P_j) = \sum_{i \geq j} E(D_i)$, ce qui est vérifié en choisissant $z_i^v \leq z_i$, soit $u_i \leq 1$;

- d'autre part, pour assurer la concavité de la courbe métal/puissance, former une suite croissante: $z_{i-1}^v < z_i^v$ soit $u_{i-1} z_{i-1} < u_i z_i$; autrement dit $u_i z_i$ doit être une fonction croissante de la teneur.

A ce stade-là le modèle n'est pas suffisamment spécifié pour permettre une évaluation de ces différents paramètres, et des hypothèses supplémentaires sont nécessaires. Supposons d'abord que U_i prenne la valeur 1 avec la probabilité $\frac{z_i^v}{z_i}$, 0 sinon. Un calcul simple à partir de (D3) montre que l'on a alors:

$$\text{Var } D_i^v = \frac{1}{u_i} \text{Var } D_i - \frac{1-u_i}{u_i^2} (E(D_i))^2$$

et donc:

$$\text{Var } Q^v = \sum z_i^{v^2} \text{Var } D_i^v = \sum (u_i z_i^2 \text{Var } D_i - z_i^2 (1-u_i) (E(D_i))^2) \quad (D4)$$

Rajoutons alors l'hypothèse simpliste: $u_i = u$ indépendant de i . Alors la dilution est constante, la courbe métal/puissance des blocs se déduit de celle des échantillons par affinité de rapport $\frac{1}{u}$:

$$E(Q_i^v) = E(Q_i)$$

$$E(P_i^v) = \frac{1}{u} E(P_i)$$

Les coupures z_i et $z_i^v = u z_i$ conduisent à des bénéfices identiques

$$E(B_i^v) = E(Q_i^v - z_i^v P_i^v) = E(Q_i - z_i P_i) = E(B_i)$$

d'où une affinité de rapport u sur les courbes donnant le bénéfice en fonction de la coupure. Dans ce modèle simplifié, (D4) s'écrit:

$$\text{Var } Q^v = u \text{Var } Q - (1-u) \sum z_i^2 (E(D_i))^2$$

d'où la possibilité de déduire le paramètre de changement de support u à partir de la variance de Q^v (calculable a priori à partir du variogramme de $Q(x)$ et de la taille horizontale des blocs).

Au niveau local, on obtient:

$$(P_j^v)^{CK} = \sum_{i \geq j} (D_i^v)^K = \sum_{i \geq j} \frac{1}{u} (D_i)^K = \frac{1}{u} (P_j)^{CK}$$

Ici également, ce changement de support revient à diluer dans le rapport $\frac{1}{u}$ l'estimation des réserves récupérables au support d'échantillon.

2. Résidus de puissances orthogonaux

On recherche ici un modèle acceptant comme facteurs:

$$R_1 = \frac{P_1}{E(P_1)} - 1, R_2 = \frac{P_2}{E(P_2)} - \frac{P_1}{E(P_1)}, \dots, R_n = \frac{P_n}{E(P_n)} - \frac{P_{n-1}}{E(P_{n-1})}$$

pour les échantillons, et:

$$R_1^v = \frac{P_1^v}{E(P_1^v)} - 1, R_2^v = \frac{P_2^v}{E(P_2^v)} - \frac{P_1^v}{E(P_1^v)}, \dots, R_n^v = \frac{P_n^v}{E(P_n^v)} - \frac{P_{n-1}^v}{E(P_{n-1}^v)}$$

pour les blocs, avec des corrélations nulles entre facteurs d'indice différent pris en un même point ou en des points différents.

Un tel modèle peut se construire (à 2D) à l'aide de FA Y_i^v et U_i indépendantes, positives ou nulles:

$$\begin{aligned} P_1^v &= Y_1^v \\ P_2^v &= P_1^v Y_2^v, \dots \\ P_i^v &= P_{i-1}^v Y_i^v = Y_1^v \dots Y_i^v, \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^v U_1 \\ P_2 &= P_2^v U_1 U_2 = P_1^v Y_2^v U_1 U_2 = P_1 Y_2^v U_2, \dots \\ P_i &= P_i^v U_1 \dots U_i = Y_1^v \dots Y_i^v U_1 \dots U_i = P_{i-1} Y_i^v U_i, \dots \end{aligned}$$

En prenant Y_i^v ($i > 1$) et U_i inférieures ou égales à 1, on respecte:

$$P_{i-1}^v \geq P_i^v$$

$$P_{i-1} \geq P_i$$

ainsi d'ailleurs que:

$$P_i^v \geq P_i$$

Ecrivons (pour alléger les écritures les espérances sont indiquées en minuscules):

$$R_j^v = \left(\frac{Y_j^v}{y_j^v} - 1 \right) \frac{P_{j-1}^v}{p_{j-1}^v}$$

$$R_i = \left(\frac{Y_i^v U_i}{y_i^v u_i} - 1 \right) \frac{P_{i-1}}{p_{i-1}}$$

Dans l'écriture de la covariance entre ces quantités, si par exemple $j > i$, le facteur $\frac{Y_j^v}{y_j^v} - 1$ est indépendant de tout le reste et de moyenne nulle: la covariance est donc nulle. On peut démontrer de la sorte que les R_i sont les facteurs du modèle. A remarquer l'écriture de D1 dans ce modèle:

$$E(R_i | R_1^v, \dots, R_n^v) = E(R_i | R_i^v) = R_i^v$$

La quantité de métal à la j^o coupure se développe ainsi:

$$Q_j = m_j P_j + \sum_{j+1}^n b_{i-1} R_i = q_j (1 + R_1 + \dots + R_j) + \sum_{j+1}^n b_{i-1} R_i$$

avec:

$$b_{i-1} = \sum_i^n (z_j - z_{j-1}) p_j = \sum_{i-1} z_j (p_j - p_{j+1}) - z_{i-1} p_{i-1} = q_{i-1} - z_{i-1} p_{i-1}$$

bénéfice conventionnel à coupure z_{i-1} (d'où la notation). En particulier, on a pour le métal en place Q_1 (constitué par les teneurs supérieures ou égales à la première coupure):

$$Q_1 = q_1 (1 + R_1) + \sum_2^n b_{i-1} R_i$$

soit, puisque q_1 est aussi le bénéfice à coupure strictement nulle, noté b_0 :

$$Q_1 = b_0 + \sum_1^n b_{i-1} R_i$$

Compte tenu de D1, la relation C1:

$$\begin{aligned} E(Q_1 | R_1^v, \dots, R_n^v) &= b_0 + \sum_1 b_{i-1} R_i^v \\ &= b_0^v + \sum_1 b_{i-1}^v R_i^v \end{aligned}$$

sera satisfaite en prenant:

$$b_i = b_i^v$$

Ainsi dans ce modèle les coupures z_i et z_i^v de même indice correspondent à un même bénéficiaire. D'où d'ailleurs:

$$\begin{aligned} b_{j-1} - b_j &= b_{j-1}^v - b_j^v & (j = 1, n) \\ \Leftrightarrow (z_j - z_{j-1})p_j &= (z_j^v - z_{j-1}^v)p_j^v & (j = 1, n) \quad (D5) \end{aligned}$$

On remarque l'écriture des variances des facteurs:

$$\begin{aligned} \text{Var } R_i^v &= E\left(\frac{P_i^v}{p_i^v}\right)^2 - E\left(\frac{P_{i-1}^v}{p_{i-1}^v}\right)^2 \\ E\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^2 &= E\left(\frac{P_i^v}{p_i^v}\right)^2 E\left(\frac{U_1 \dots U_i}{u_1 \dots u_i}\right)^2 \\ \text{Var } R_i &= E\left(\frac{U_1 \dots U_{i-1}}{u_1 \dots u_{i-1}}\right)^2 \left(E\left(\frac{U_i}{u_i}\right)^2 E\left(\frac{P_i^v}{p_i^v}\right)^2 - E\left(\frac{P_{i-1}^v}{p_{i-1}^v}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Il reste maintenant à spécifier davantage le modèle pour permettre l'évaluation des paramètres utiles. Supposons que U_i prenne la valeur 1 avec la probabilité u_i , 0 sinon. On a:

$$E\left(\frac{U_i}{u_i}\right)^2 = \frac{1}{u_i}$$

d'où l'on déduit:

$$E\left(\frac{P_i^v}{p_i^v}\right)^2 = u_1 \dots u_i E\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^2$$

ce qui donne:

$$\text{Var } Q^v = \sum_1 b_{i-1}^2 u_1 \dots u_{i-1} (u_i E\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^2 - E\left(\frac{P_{i-1}}{p_{i-1}}\right)^2)$$

Un premier procédé, simpliste, consiste à prendre $U_2 = U_3 = \dots = U_n = 1$ d'où (en posant $u_1 = u$):

$$\text{Var } Q^v = u \text{Var } Q - (1-u) b_0^2$$

permettant en pratique le calcul de u . On a alors $\frac{p_i}{p_i^v} = u$, et on retombe sur un modèle de dilution constante. D'après D2, on a, à l'estimation locale:

$$(R_i^v)^K = (R_i)^K$$

d'où:

$$\begin{aligned} (P_j^v)^{CK} &= E(P_j^v)(1 + R_1^K + \dots + R_j^K) \\ &= \frac{1}{u} E(P_j)(1 + R_1^K + \dots + R_j^K) \\ &= \frac{1}{u} (P_j)^{CK} \end{aligned}$$

Ici encore le changement de support revient à diluer dans le rapport $\frac{1}{u}$ les réserves récupérables au support d'échantillon.

Une autre possibilité, sans doute meilleure, consiste à prendre:

$$\frac{p_i}{p_i^v} = u_1 \dots u_i$$

(décroissant en i), égal à

$$\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{1-r} \quad (D6)$$

où p_0 ($\geq p_1$) a le sens d'une épaisseur minéralisable moyenne. On a alors:

$$Var Q^v = \sum_1 b_{i-1}^2 \left(\left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{1-r} E\left(\frac{p_i}{p_i}\right)^2 - \left(\frac{p_{i-1}}{p_0}\right)^{1-r} E\left(\frac{p_{i-1}}{p_{i-1}}\right)^2 \right)$$

avec, pour $r = 1$:

$$Var Q = \sum_1 b_{i-1}^2 \left(E\left(\frac{p_i}{p_i}\right)^2 - E\left(\frac{p_{i-1}}{p_{i-1}}\right)^2 \right) \quad (D7)$$

En principe ceci permet de déterminer r , une fois choisi p_0 . En pratique, la corrélation entre facteurs ne sera pas strictement nulle et la formule (D7) ne sera donc pas vérifiée exactement, ce qui risque de poser problème. Il peut être alors plus indiqué de déterminer r en faisant comme si, à l'intérieur du volume minéralisable d'épaisseur moyenne p_0 , les teneurs d'échantillons 0, z_1 , z_2 , ... et de blocs 0, z_1^v , z_2^v , ... suivait un modèle 3D stationnaire à résidus d'indicatrices autokrigeables. On a alors:

$$Z_{fgh} = b'_0 + \sum_1 b'_{i-1} \left(\frac{1_{Z \geq z_i}}{T_i} - \frac{1_{Z \geq z_{i-1}}}{T_{i-1}} \right)$$

$$Z_{fgh}^v = b'_0 + \sum_1 b'_{i-1} \left(\frac{1_{Z^v \geq z_i^v}}{(T_i)^r} - \frac{1_{Z^v \geq z_{i-1}^v}}{(T_{i-1})^r} \right)$$

avec:

$$T_i = E(1_{Z \geq z_i}) = P(Z \geq z_i) = \frac{p_i}{p_0}$$

$$(T_i)^r = E(1_{Z^v \geq z_i^v}) = P(Z^v \geq z_i^v) = \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^r$$

et b'_i (qui est en fait le bénéfice à la i^{e} coupure de ces teneurs) égal à $\frac{b_i}{p_0}$. On a donc:

$$Var Z_{fgh}^v = \sum_1 \left(\frac{b_{i-1}}{p_0}\right)^2 \left(\left(\frac{p_0}{p_i}\right)^r - \left(\frac{p_0}{p_{i-1}}\right)^r \right)$$

avec pour $r = 1$:

$$Var Z_{fgh} = \sum_1 \left(\frac{b_{i-1}}{p_0}\right)^2 \left(\frac{p_0}{p_i} - \frac{p_0}{p_{i-1}} \right) \quad (D8)$$

Dans cette optique on commence par délimiter le volume minéralisable en incluant des échantillons de teneur nulle, d'où p_0 . Les échantillons y ont alors une variance qui vérifie (D8) (car les résidus d'indicatrices, pris en un même point, sont rigoureusement orthogonaux), et leur variogramme permet le calcul de $Var Z_{fgh}^v$ et donc de r . De (D6):

$$p_j^v = (p_j)^r (p_0)^{1-r}$$

on déduit les p_j^v , puis les z_j^v d'après (D5):

$$z_1^v = \frac{p_1}{p_1^v} z_1$$

$$z_j^v = z_{j-1}^v + \frac{p_j}{p_j^v} (z_j - z_{j-1}) \quad (j > 1)$$

Pour l'estimation locale, on a toujours, d'après D2:

$$(R_i^v)^K = (R_i)^K$$

d'où:

$$\begin{aligned}(P_j^v)^{CK} &= p_j^v(1 + R_1^{vK} + \dots + R_j^{vK}) \\ &= p_j^v(1 + R_1^K + \dots + R_j^K) \\ &= \frac{p_j^v}{p_j} P_j^{CK}\end{aligned}$$

Pour le bénéfice:

$$B_j^v = (m_j^v - z_j^v)P_j^v + \sum_j b_{i-1}R_i^v$$

dont la moyenne $(m_j^v - z_j^v)p_j^v$ est conservée, on obtient facilement:

$$(B_j^v)^{CK} = (B_j)^{CK}$$

On en déduit le métal:

$$(Q_j^v)^{CK} = (B_j)^{CK} + z_j^v(P_j^v)^{CK}$$

Les réserves locales sur blocs se déduisent donc aisément de celles estimées sur échantillons.

Remarques:

1 - Il y a cohérence entre le modèle à résidus de puissances et celui à résidus d'indicatrices, en ce sens que, si l'épaisseur minéralisable est constante et égale à 1 échantillon ($p_0 = 1$ et $p_i = T_i$), le modèle à résidus de puissances devient modèle à résidus d'indicatrices, les deux formules (D7) et (D8) sont équivalentes, et le changement de support est le même.

2 - Supposons que l'on fasse tendre p_0 vers l'infini et r vers 1, de sorte que $(\frac{p_1}{p_0})^{1-r}$ tende vers u (< 1) fixé. Alors

$$u_1 u_2 \dots u_i = \left(\frac{p_i}{p_0}\right)^{1-r} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-r} \left(\frac{p_i}{p_1}\right)^{1-r}$$

tend vers u . Ainsi u_1 tend vers u , tandis que u_2, u_3, \dots tendent vers 1: on obtient donc à la limite le changement de support par dilution constante et égale à $\frac{1}{u}$.

E. Conclusion

Kriger séparément des variables hiérarchisées comme les puissances d'une veine aux différentes coupures peut être insuffisant si ces puissances n'obéissent pas à une structure semblable. Dans les modèles factorisés présentés ici, le cokrigeage des puissances s'obtient en krigeant les facteurs: puissances de tranches de teneur dans un cas, résidus entre puissances dans l'autre.

Dans ces modèles, l'estimation des réserves après changement de support à des coupures $z_1^v, z_2^v, \dots, z_n^v$ à partir d'échantillons à teneurs z_1, z_2, \dots, z_n se fait également par krigeage des facteurs. De façon générale les teneurs de même indice z_i et z_i^v correspondent à une quantité de métal identique dans le modèle à puissances de tranches sans corrélation, et à un même bénéfice dans celui à résidus de puissances. Dans le cas particulier du changement de support par dilution constante, ces teneurs correspondent à la fois au même métal et au même bénéfice, d'où une affinité entre les courbes métal/minerai ou bénéfice/teneur de coupure. Ce modèle de changement de support peut fournir des approximations intéressantes, mais il peut être plus réaliste de supposer une dilution relativement moindre si l'on sélectionne la totalité du métal plutôt qu'une partie. Le changement de support proposé en dernière partie peut être alors préférable.

Références

- J.L. Bordessoule, C. Demange et J. Rivoirard, 1988:
Estimation de réserves géologiques en Uranium par variables utiles à résidu autokrigeable. Etudes Geostatistiques V, Séminaire CFSG 15-16 Juin 1987, Fontainebleau, Sciences de la Terre, Série Informatique Géologique No 28, Nancy.
- J.L. Bordessoule, C. Demange et J. Rivoirard, 1989:
Using an orthogonal residual between ore and metal to estimate in-situ uranium resources. Third International Geostatistics Congress, Avignon, France, 5-9 Sept. 1988. Reidel Publ., Dordrecht, Holland.
- G. Matheron, 1979:
Recherche de simplification dans un problème de cokrigeage. Note interne du Centre de Géostatistique de Fontainebleau.
- G. Matheron, 1982:
La sélectivité des distributions. Note interne du Centre de Géostatistique de Fontainebleau.
- J. Rivoirard, 1988:
Quelques modèles de corégionalisation de puissances et accumulations. Note interne du Centre de Géostatistique de Fontainebleau.
- J. Rivoirard, 1988:
Modèles à résidus d'indicatrices autokrigeables. Etudes Geostatistiques V, Séminaire CFSG 15-16 Juin 1987, Fontainebleau, Sciences de la Terre, Série Informatique Géologique No 28, Nancy.
- J. Rivoirard, 1989:
Models with orthogonal indicator residuals. Third International Geostatistics Congress, Avignon, France, 5-9 Sept. 1988. Reidel Publ., Dordrecht, Holland.