

LE COMPORTEMENT DES POIDS DE KRIGEAGE

THESE

présentée à

l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Jacques RIVOIRARD

pour obtenir le titre de

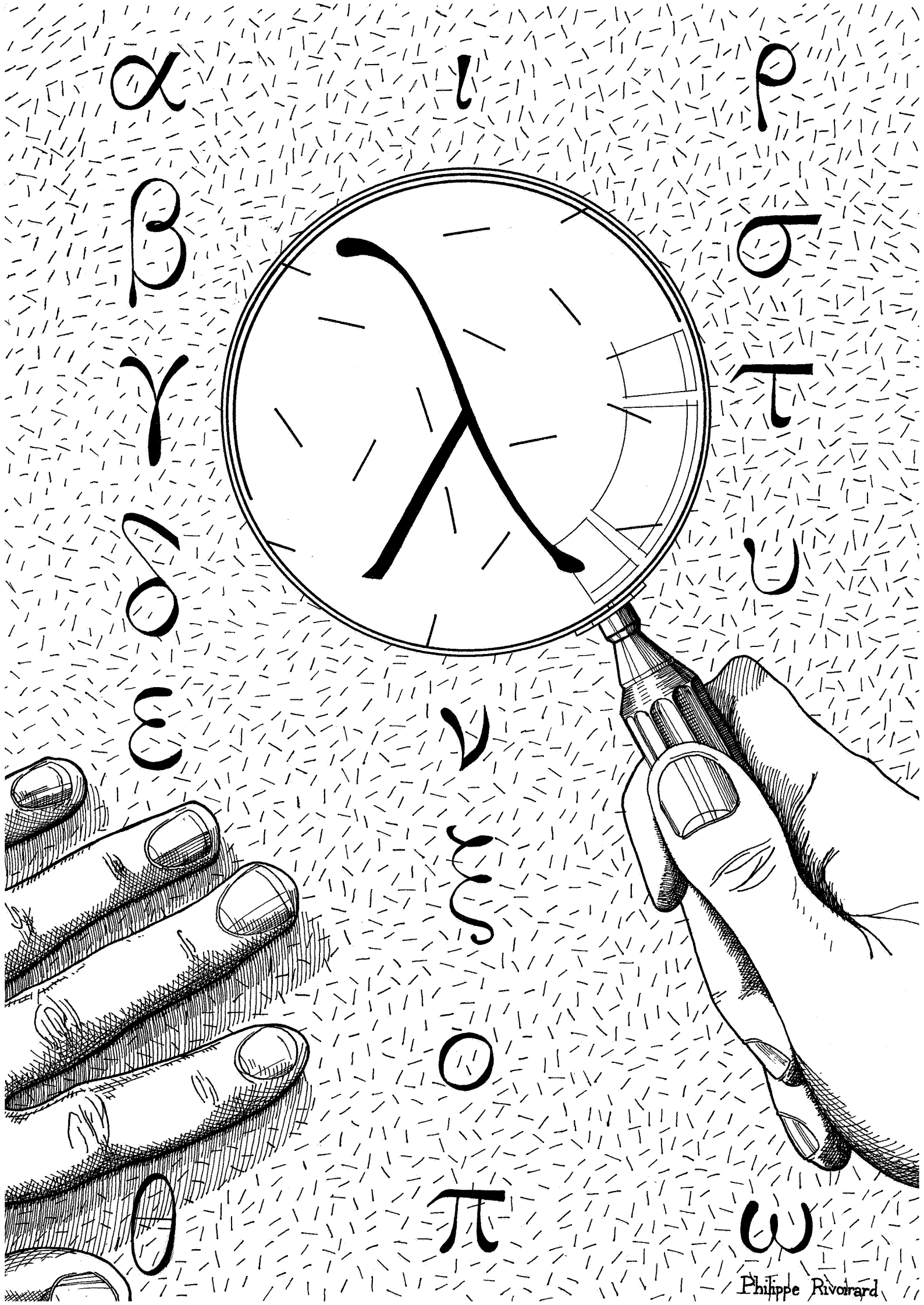
Docteur - Ingénieur

en Sciences et Techniques Minières - Option Géostatistique

Soutenue le 23 Novembre 1984

devant le jury composé de :

G. MATHERON	Président
H. SANS	Rapporteur
J.-L. MALLET	Examineur
A. MARECHAL	Examineur
M. ARMSTRONG	Examineur



REMERCIEMENTS

Si je tiens à remercier les différents membres du jury, ce n'est pas seulement pour avoir accepté d'y participer, ou pour m'avoir fait part de leurs conseils.

Je remercie d'abord M. Georges Matheron, Directeur du Centre de Géostatistique, de m'avoir permis de travailler dans ce domaine passionnant qu'est la géostatistique, et cela dans des conditions aussi intéressantes qu'agréables.

Ces conditions, je les dois aussi à Alain Maréchal et, depuis que celui-ci travaille à la S.N.E.A., également à Luc Sandjiv.

Je remercie Henri Sans, de la C.O.G.E.M.A., et Jean-Louis Mallet, de l'Ecole Nationale de Géologie de Nancy, pour les relations de travail amicales et fécondes que nous avons ensemble.

Merci à Margaret Armstrong dont les avis m'ont été très précieux, sans compter qu'elle fut l'initiatrice du programme informatique PLAYKRIG, développé plus tard par Laurent de Chambure, et qui m'a été si utile dans le travail présenté ici.

Parmi tous les collègues, anciens ou nouveaux, que je devrais citer, je mentionnerai Daniel Guibal qui s'était intéressé, avant de partir pour l'Australie, à mes problèmes de pondérateurs (je m'aperçois que j'ai d'ailleurs oublié dans les références bibliographiques une petite note interne du Centre que nous avons écrite en 1982 sur "Le comportement des pondérateurs et le rôle de la moyenne dans le krigeage" ! Voilà le mal réparé !).

Je remercie également Christian Lantuéjoul, qui a bien voulu relire ma thèse, ainsi que mon frère Philippe Rivoirard, à qui je dois aussi l'illustration introductive.

Enfin, je remercie particulièrement Madame Kreyberg et Jacques Laurent pour le soin qu'ils ont apporté à la réalisation matérielle de cette thèse.

T A B L E D E S M A T I E R E S

ABREVIATIONS

NOTATIONS

0 - INTRODUCTION	1
1 - THEORIE DU KRIGEAGE	4
1-1 Présentation	4
1-2 Estimation d'une Variable Régularisée	4
1-3 Le Krigeage en Estimation Minière	6
1-4 Genèse du Krigeage	7
1-5 Le Krigeage Simple (ou à Moyenne Connue)	10
1-5-1 Le modèle	10
1-5-2 Equations du krigeage ponctuel	10
1-5-3 Krigeage non ponctuel	11
1-5-4 La sélection sur krigeage	12
1-5-5 Le problème de stationnarité	13
1-6 Les Equations du Krigeage Ordinaire (ou à Moyenne Inconnue)	15
1-7 A Propos des Variances	17
1-8 La Reconstruction Opératoire	19
2 - LE COMPORTEMENT DES POIDS DE KRIGEAGE	23
2-1 Conditions des Expérimentations	23
2-2 Propriétés Générales	25
2-2-1 Influence de la structure	25
Cas Isotrope	25
Cas Anisotrope	27
2-2-2 Influence des positions relatives entre volume à estimer et informations.	28
2-2-3 Influence de la géométrie du volume à estimer	28
2-2-4 Influence de la configuration géométrique des informations entre elles.	30
2-2-5 A propos de la précision des configurations du krigeage	30

2-3	L'Anisotropie Zonale	35
2-4	Les Effets d'Ecran	37
2-4-1	L'effet d'écran classique	37
2-4-2	L'effet d'écran total	38
2-4-2-1	A 1 Dimension	38
2-4-2-2	A 2 et 3 Dimensions	39
2-4-3	Le phénomène de relais	41
2-4-4	Autres effets d'écran. L'écran inverse	42
2-5	Les Poids Négatifs	49
2-5-1	Introduction	49
2-5-2	Quelques exemples de poids négatifs	49
2-5-3	Pourquoi des poids négatifs ?	51
2-5-4	Un dernier exemple	57
2-5-5	Le danger des poids négatifs. Que faire ?	
2-6	L'Effet de Trou	60
2-7	Le Comportement du Poids de la Moyenne	63
2-8	Détermination du Voisinage de K.S. et du poids de la Moyenne	68
2-9	Choix du Voisinage de K.O.	68
2-10	Les Regroupements	69
3	- CONCLUSION	70
	BIBLIOGRAPHIE	72

A B R E V I A T I O N S

1, 2, 3D	1, 2 ou 3 dimensions
F.A.	Fonction Aléatoire
F.A.St	Fonction Aléatoire Stationnaire
F.A.I.O	Fonction Aléatoire Intrinsèque d'Ordre 0
K.S.	Krigeage Simple, ou à moyenne connue
K.O.	Krigeage Ordinaire, ou à moyenne inconnue
K.M.	Krigeage de la moyenne

NOTATIONS GENERALES

(x,y)	Coordonnées d'un point dans R^2
x	Le plus souvent : point dans l'espace à 1, 2 ou 3 dimensions
$z(x)$	Variable régionalisée au point x (en général teneur).
x_α, x_β	Points où la variable z est connue (points "expérimentaux")
l	Dimension de la maille des informations (si maille régulière)
$z(x_\alpha) = z_\alpha$	Valeur connue de z en x_α .
λ^α	Poids affecté à z_α
V	- Support - ou volume de l'espace correspondant à ce support - ou mesure de ce volume.
$z(V)$	Valeur moyenne de $z(x)$ dans un volume V : $\frac{1}{V} \int_V z(x) dx$
$Z(x)$	Fonction Aléatoire représentant $z(x)$
m	Sa moyenne, dans le cas stationnaire.
$\gamma(h)$	Son variogramme.
a	Paramètre donnant la portée (la portée pratique peut être différente).
$C(h)$	Covariance de $Z(x)$
$C_{\alpha\beta}$	Valeur de $C(h)$ pour $h = x_\alpha - x_\beta $
$C_{\alpha V}$	Valeur moyenne de $C(h)$ entre x_α et V : $C_{\alpha V} = \frac{1}{V} \int_V C(x-x_\alpha) dx$
C_{VV}	Valeur moyenne de $C(h)$ dans V : $C_{VV} = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(x-y) dx dy$
	Représente $\text{Var } Z(V)$ en modèle stationnaire
λ^m	Poids de la moyenne, déterminé par le système de krigeage à moyenne connue : $\lambda^m = 1 - \sum \lambda^\alpha$
σ_K^2	Variance de krigeage.

0. INTRODUCTION

En estimation minière, le krigeage de la teneur d'un bloc est une opération connue. Disposant des teneurs des échantillons présents dans un certain voisinage du bloc, il s'agit de déterminer le poids à attribuer à chacun d'eux, de façon à obtenir la meilleure estimation linéaire de la teneur du bloc. De plus, le calcul de la variance de krigeage permet d'apprécier la précision d'une telle estimation.

Comparé à des méthodes de pondération plus frustes, qui ne tiennent compte que des distances entre échantillons et bloc à estimer, et en tiennent compte d'ailleurs d'une façon arbitraire (inverse des distances ou de leurs carrés), le krigeage fournit des poids optimaux, compte tenu, d'une part, de la configuration géométrique de l'ensemble (échantillons et bloc), d'autre part de la structure de la minéralisation (variogramme).

Ainsi, les échantillons les plus proches recevront en général un poids élevé, mais qui dépendra de la structure. Cependant, la présence d'anisotropies, ou bien l'existence d'échantillons redondants parce que très voisins, pourront modifier ces constatations, ce qui est parfaitement compréhensible. Et on se fait facilement, avec un peu de pratique, une idée de la façon dont doivent se comporter les poids de krigeage.

Pourtant, si l'on examine les valeurs des pondérateurs chaque fois que l'on fait du krigeage, on voit parfois des comportements qui échappent à cette intuition (par exemple, poids élevés attribués à des informations lointaines), ou du moins qui peuvent être gênants (par exemple poids négatifs non négligeables).

Après avoir incriminé en vain le programme informatique ayant pondé ces poids, force est de trouver une explication à de tels comportements.

Ce que je me propose de faire dans cette thèse est d'illustrer et d'expliquer, par des exemples simples, les différents comportements des pondérateurs (attendus ou non !) que j'ai pu rencontrer. Notons que le but est de comprendre ces comportements, et non de prévoir quelle sera la distribution des poids dans une configuration donnée.

Pour mener à bien cette tâche, j'ai divisé ce travail en deux parties.

La première partie sera consacrée à la théorie du krigeage. Je rappellerai l'origine du krigeage et les divers types de krigeage (à moyenne connue et inconnue). Il s'agit pour l'essentiel de choses déjà anciennes, mais qui ont pris un essor nouveau, lorsqu'il a fallu expliquer certains comportements de pondérateurs, ou décider de l'emploi de méthodes d'estimation non linéaires stationnaires. Le problème de la stationnarité apparaîtra sous un jour nouveau, et on commencera à apprécier l'importance du paramètre "poids de la moyenne".

Comprendre le comportement des pondérateurs de krigeage fera l'objet de la seconde partie. J'illustrerai d'abord par des exemples l'influence bien connue de la structure et de la configuration géométrique. Un chapitre important sera ensuite consacré aux effets d'écran.

On y verra des informations proches faisant écran à des informations lointaines, mais on découvrira, parmi les autres effets d'écran, que le contraire peut aussi se produire. Le pourquoi des poids négatifs, et le problème qu'ils soulèvent, seront examinés ensuite. Les derniers chapitres seront consacrés au poids de la moyenne et au choix du voisinage. Il apparaîtra que comprendre la répartition des poids de krigeage n'est pas seulement un luxe, ou une satisfaction pour l'esprit, mais est aussi un outil précieux lorsqu'il s'agit d'effectuer des estimations locales.

Notons enfin que le propos sera très souvent minier (la variable régionalisée sera une "teneur"), ce qui ne change rien à l'essentiel. Précisons cependant bien qu'ici, comme le plus souvent en estimation minière, seul le cas d'une covariance ou un variogramme stationnaire (borné, et même possédant un palier) sera envisagé, à l'exclusion de toute dérive, même filtrée.

P R E M I E R E P A R T I E

T H E O R I E D U K R I G E A G E

1 - T H E O R I E D U K R I G E A G E

1-1 PRESENTATION

Le krigeage a été inventé au départ pour l'estimation minière. Nous verrons un peu plus loin qu'il apporte une réponse satisfaisante à un problème crucial de l'exploitation minière : la sélection.

Bornons-nous pour l'instant à définir le krigeage comme le "meilleur estimateur linéaire". La situation est alors la suivante (dans le cas monovarié). Une variable régionalisée (teneur) $z(x)$ est connue en certains points $x_\alpha : z_\alpha = z(x_\alpha)$. On estime la teneur inconnue en un point x par une combinaison linéaire des z_α :

$$z(x)^* = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z_{\alpha}$$

La valeur estimée est donc une moyenne pondérée des teneurs z_α , la somme des poids λ^{α} valant 100% .

Le krigeage consiste alors à calculer les poids λ^{α} donnant la "meilleure" estimation. Nous verrons plus loin dans quel modèle, et selon quel critère, cette estimation linéaire est effectivement la "meilleure".

1-2 ESTIMATION D'UNE VARIABLE REGULARISEE

En cartographie (topographie par exemple) on peut s'intéresser effectivement à estimer une variable ponctuelle (côte au point x) à partir de données ponctuelles.

En mine, le "support" des données (carotte) peut souvent être assimilé à un point ; mais, ce qu'on cherche à estimer est toujours défini au niveau d'un support V , beaucoup plus grand que la carotte, que l'on ne peut pas représenter par un point : volée, bloc, panneau. L'inconnue sera par exemple la teneur moyenne d'un volume V , teneur qui sera estimée par :

$$z(V)^* = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z_{\alpha} \quad \left(\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 100\% \right)$$

Pour qu'une telle estimation ait un sens, il est nécessaire que la teneur moyenne de V

soit effectivement la moyenne des teneurs des points de V :

$$z(V) = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx$$

Ceci n'est pas toujours le cas, avec les teneurs usuelles qui sont des teneurs densimétriques : rapports entre la masse du métal contenu et la masse du volume (exprimé en %, ‰, ou grammes/tonne).

Si la densité d du minerai est constante, on a, pour un volume V :

$$\begin{aligned} - \text{ une masse totale } & : T = V d \\ - \text{ une masse de métal } & : Q = \int_V d z(x) dx , \end{aligned}$$

d'où la teneur moyenne de V :

$$z(V) = \frac{Q}{T} = \frac{1}{V} \int_V z(x) dx ,$$

qui est bien la moyenne des teneurs des points de V (la teneur est "additive").

Mais il peut arriver que la densité soit fonction de la teneur (par exemple dans un gisement d'uranium à teneur élevée, où la densité de la roche encaissante vaut environ 3, et celle de la pechblende : 9). La teneur densimétrique d'une carotte ne rend pas compte du fait qu'une carotte à teneur élevée sera plus lourde qu'une pauvre : le métal contenu variera non pas proportionnellement à la teneur, mais proportionnellement au produit de la densité par la teneur : $d(z(x)) \cdot z(x)$.

D'où pour un volume V :

$$\begin{aligned} Q &= \int_V d(z(x)) \cdot z(x) dx \\ T &= \int_V d(z(x)) dx \end{aligned}$$

La teneur moyenne $z(V) = \frac{Q}{T}$ n'est plus la moyenne des teneurs des points de V.

Autrement dit, si la densité est fonction de la teneur, la teneur densimétrique n'est plus additive. Cette teneur, si on l'estimait par combinaison linéaire des teneurs d'échantillons, serait ici gravement sous-estimée.

En pareil cas, il est plus judicieux de prendre comme variable la teneur volumétrique, rapport de la masse de métal sur le volume, c'est-à-dire aussi produit de la teneur densimétrique par la densité. Cette teneur volumétrique, pour le volume V :

$$\frac{Q}{V} = \frac{1}{V} \int_V d(z(x)) z(x) dx$$

est bien la moyenne des teneurs volumétriques $d(z(x)) z(x)$ des points de V . Elle est donc additive, et peut être estimée par combinaison linéaire, de même que la densité.

1-3 LE KRIGEAGE EN ESTIMATION MINIERE

En estimation minière, le krigeage peut intervenir à deux niveaux :

- 1°) A l'abattage, lorsqu'une sélection est nécessaire, il faut estimer le mieux possible la teneur des unités susceptibles d'être sélectionnées (blocs miniers, volées de galerie). Les vertus que doit présenter un bon estimateur sont alors les suivantes :

- récupérer au bout du compte le métal prévu
- éviter au maximum de sélectionner des blocs pauvres qui auraient été estimés riches
- éviter au maximum d'abandonner des blocs riches laissés pour pauvres.

C'est dans cette optique de sélection qu'a été créé le krigeage dans les années 1960 (cf 1-4).

- 2°) Avant même la mise en exploitation, une fois la campagne de reconnaissance systématique effectuée, on cherche à connaître au mieux la richesse des différentes parties du gisement. Ceci peut conduire à sélectionner dans le gisement les zones particulièrement intéressantes : ce choix sera d'autant meilleur que l'estimation sera précise. Le gisement étant divisé en panneaux miniers (de taille égale à la maille des sondages par exemple), le krigeage permettra de tirer le meilleur parti des informations disponibles pour estimer les ressources in situ des différents panneaux (teneurs moyennes).

A la différence de la sélection finale décrite précédemment, de tels panneaux ne sont en général pas envoyés intégralement en laverie au moment de l'exploitation : à ce moment-là, une sélection plus fine à l'intérieur des panneaux sera faite, à partir d'informations plus nombreuses que celles actuellement disponibles. Pour prévoir les réserves récupérables, c'est-à-dire la fraction des ressources in situ qui sera effectivement envoyée en laverie, la géostatistique a mis au point des méthodes plus sophistiquées : Krigeage Disjonctif et autres méthodes non linéaires, Modélisation de gisement et Simulation d'exploitation.

1-4 GENESE DU KRIGEAGE

Il est instructif de voir comment le krigeage a été construit, à partir d'estimateurs plus frustes ("polygones d'influence", ou estimateurs apparentés) en vue d'améliorer la sélection. Matheron, qui a mis au point le krigeage, en donne une description détaillée (Matheron, 1970). Nous nous contenterons ici d'en donner les grandes lignes.

Le point de départ est la sélection sur estimateur du type "polygone d'influence". L'estimateur "polygone d'influence" consiste à attribuer une teneur mesurée quasi ponctuellement à un volume beaucoup plus grand (à deux dimensions, polygones délimités par les médianes entre sondages).

Considérons donc des blocs de sélection correspondant à un support V . La teneur de chaque bloc $z(V)$ est estimée par la teneur d'un échantillon intérieur $z(x)$. Du fait de l'effet de support, les teneurs "ponctuelles" $z(x)$ seront en général beaucoup plus dispersées que les teneurs des blocs $z(V)$. La fréquence accrue de valeurs faibles ou fortes donne l'illusion de pouvoir garder un maximum de riche tout en écartant au maximum le pauvre, alors que les teneurs moyennes de blocs sont en fait plus groupées.

Donc, en sélectionnant les blocs dont l'échantillon est riche (teneur de coupure élevée) on récupère une teneur en général beaucoup plus faible.

En termes probabilistes (en considérant les couples $(z(x), z(V))$ correspondant à chaque bloc comme des réalisations d'un couple de variables aléatoires $(Z(x), Z(V))$, on aura donc :

$$E[Z(V)|Z(x)] < Z(x) \quad \text{si } Z(x) \text{ est fort} \\ (\text{biais conditionnel})$$

Symétriquement, si la coupure est faible, on pensera avoir abandonné des teneurs beaucoup plus pauvres qu'elles ne sont en réalité : les teneurs récupérées seront également moins riches que prévues.

Ainsi, sélectionner des blocs sur la teneur de leur échantillon, conduit à une sur-estimation systématique des teneurs récupérées.

Il est important de noter que ce résultat, dû à l'effet de support, subsiste même si, au lieu d'un échantillon, on prend la réunion de plusieurs échantillons intérieurs, dont la teneur moyenne est plus dispersée que celle des blocs. Ainsi, dans notre raisonnement, $z(x)$ peut tout aussi bien désigner la teneur moyenne de tels échantillons (exemple pratique : teneur des trous de tir d'une volée).

Krige, dans les années 50, corrigeait cette erreur systématique sur les teneurs récupérées, en prenant comme estimateur, à la place de $Z(x)$, la régression $E[Z(V)|Z(x)]$.

L'échantillonnage étant supposé bien fait,

- d'une part, les teneurs $Z(x)$ et $Z(V)$ ont même moyenne m ,

- d'autre part, connaissant la teneur d'un bloc, la teneur probable de l'échantillon intérieur est égal à la teneur du bloc :

$$E[Z(x)|Z(V)] = Z(V)$$

La régression $E[Z(x)|Z(V)]$ est donc linéaire et permet de calculer le coefficient de corrélation ρ entre $Z(x)$ et $Z(V)$:

$$\frac{E[Z(x)|Z(V)] - m}{\sqrt{\text{Var } Z(x)}} = \frac{Z(V) - m}{\sqrt{\text{Var } Z(x)}} = \rho \frac{Z(V) - m}{\sqrt{\text{Var } Z(V)}}$$

D'où :

$$\rho^2 = \frac{\text{Var } Z(V)}{\text{Var } Z(x)}$$

(inférieur à 1 comme il convient, puisque la teneur des blocs est moins dispersée que celle des échantillons).

L'autre régression, celle qui indique effectivement la teneur récupérée, s'écrit, à supposer qu'elle soit linéaire :

$$\frac{E(Z(V)|Z(x)) - m}{\sqrt{\text{Var } Z(V)}} = \rho \frac{Z(x) - m}{\sqrt{\text{Var } Z(x)}}$$

c'est-à-dire :

$$Z(V)^* = E[Z(V)|Z(x)] = \left[1 - \frac{\text{Var } Z(V)}{\text{Var } Z(x)}\right] m + \frac{\text{Var } Z(V)}{\text{Var } Z(x)} Z(x)$$

Ce nouvel estimateur est donc une moyenne pondérée :

- d'une part, de la teneur moyenne (c'est-à-dire la moyenne des teneurs de tous les échantillons, tant intérieurs qu'extérieurs)

- d'autre part, de la teneur moyenne des échantillons intérieurs.

Tous les échantillons intérieurs comptent donc de la même façon, les extérieurs également. Cependant, le non-biais conditionnel : $E(Z(V)|Z(V)^*) = Z(V)^*$ qui assure en principe une teneur récupérée égale à la teneur prévue n'est pas la seule qualité que l'on attend d'un estimateur sur lequel on fera une sélection (sinon il suffit de prendre un seul échantillon dans le bloc et de corriger le biais conditionnel). Il faut également tirer le meilleur parti des ressources du gisement en évitant au maximum d'incorporer des blocs pauvres, estimés riches, et d'abandonner des blocs riches pris pour pauvres.

On verra comment l'estimateur linéaire de krigeage, donnant à chaque échantillon le poids qui assure la meilleure précision, concilie ces différents objectifs. (cf 1-5-4).

Remarques sur la Linéarité :

- 1) Il est commode d'introduire l'estimateur linéaire de krigeage, à partir de la régression $E[Z(V)|Z(x)]$, lorsque celle-ci est linéaire. Si le couple $(Z(x), Z(V))$ pouvait être considéré comme bigaussien (ce qui n'est pas le cas, les teneurs étant positives), cette régression serait effectivement linéaire. Autrement, à partir du moment où il est possible de bien ajuster un modèle bivariable, la régression peut très bien n'être pas linéaire.
- 2) Puisque, en faisant du krigeage, on cherche à individualiser chaque information Z_α pour estimer $Z(V)$, on pourrait penser que l'idéal est de prendre comme estimateur la régression multivariable :

$$E[Z(V) | Z_\alpha, Z_\beta, \dots]$$

Deux critiques peuvent être formulées à ce sujet :

- théoriquement, cet estimateur est effectivement le meilleur. Malheureusement, il suppose connue la loi multivariable $(Z(V), Z_\alpha, Z_\beta, \dots)$. Or on est bien incapable d'ajuster une telle loi. L'utilisation d'une loi multivariable reposerait donc sur des hypothèses incontrôlables.
 - cet estimateur ne satisfait pas aux exigences de stationnarité locale (voir plus loin 1-5-5 et 1-6). Le krigeage, au contraire, repose sur des hypothèses légères (connaissance de la structure), et s'adapte à la stationnarité locale.
- 3) On sait toutefois que les estimateurs linéaires sont optimaux dans des conditions multigaussiennes. Au seul vu des lois monovariées, on peut penser que le krigeage sera d'autant meilleur que ces lois "ressemblent" à des gaussiennes. Lorsqu'on a affaire à des lois très dissymétriques (avec beaucoup de valeurs faibles et une queue très allongée de valeurs fortes en faible nombre comme on en rencontre par exemple en Uranium et en Or), il est possible que des techniques non linéaires (Krigeage Disjonctif de l'ensemble des points du bloc à estimer) se révèlent préférables. Mais ces techniques délicates, intermédiaires au point de vue hypothèses entre le linéaire et le multivariable, nécessitent tout de même de bons ajustements de lois bivariées.

1-5 LE KRIGEAGE SIMPLE (OU A MOYENNE CONNUE)

1-5-1 LE MODELE

La teneur $z(x)$ en tout point x de la minéralisation est considérée comme une réalisation d'une Fonction Aléatoire Stationnaire (F.A. St.) $Z(x)$.

Comme nous ne manipulerons ici que des espérances et variances de combinaisons linéaires, la F.A. St. sera à nos yeux entièrement définie par ses deux premiers moments :

$$\begin{cases} E[Z(x)] = m \\ \text{Cov}[Z(x), Z(x+h)] = C(h) \end{cases}$$

indépendants de x du fait de la stationnarité.

En pratique, m est la moyenne globale, et la covariance $C(h)$ est obtenue à partir du modèle de variogramme $\gamma(h)$ selon la formule :

$$C(h) = C(0) - \gamma(h)$$

Le modèle de variogramme lui-même est obtenu par ajustement du variogramme expérimental (moyenne de $\frac{1}{2} [z(x_i+h) - z(x_i)]^2$, lequel est censé représenter la structure spatiale (intégrale d'espace de $\frac{1}{2} [z(x+h) - z(x)]^2$).

Dans ce modèle de F.A.St. d'ordre 2, la variance de toute combinaison linéaire est obtenue par la formule :

$$\text{Var} \left(\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C_{\alpha\beta}$$

avec $C_{\alpha\beta} = \text{Cov}(x_{\alpha} - x_{\beta})$

1-5-2 EQUATIONS DU KRIGEAGE PONCTUEL

$(Z(x) - m)$ étant d'espérance nulle, tout estimateur linéaire sans biais de $Z(x)$ à partir des Z_{α} s'écrit :

$$Z(x)^* - m = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} (Z_{\alpha} - m)$$

L'erreur $Z(x) - Z(x)^* = (Z(x) - m) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} (Z_{\alpha} - m)$ est bien d'espérance nulle, et a pour variance :

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \text{Var } Z(x) - 2 \text{Cov}(Z(x), Z(x)^*) + \text{Var } Z(x)^* \\ &= C(o) - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha x} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C_{\alpha \beta}\end{aligned}$$

Le krigage consiste à trouver les λ^{α} qui minimisent cette variance. Le système de krigage, obtenu en annulant la dérivée de σ_e^2 par rapport à chaque λ^{α} , s'écrit :

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha \beta} = C_{\alpha x} \quad \forall \alpha$$

ce qui permet de calculer les λ^{α} .

Il est facile de voir que des informations corrélées, ni avec le point à estimer, ni avec les autres informations, auront un poids nul et n'interviendront pas en K.S.

La variance de krigage peut enfin s'écrire :

$$\sigma_K^2 = C(o) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha x}$$

1-5-3 KRIGEAGE NON PONCTUEL

On remarque que dans le système de krigage :

- le premier membre ne dépend que des informations
- le second membre ne dépend que de la position du point x par rapport aux informations.

Les λ^{α} dépendant linéairement des seconds membres $C_{\alpha x}$, il suffit, pour estimer une teneur moyenne $Z(V) = \frac{1}{V} \int_V Z(x) dx$, de résoudre le système, en prenant pour seconds membres :

$$C_{\alpha V} = \frac{1}{V} \int_V C(x_{\alpha} - x) dx$$

Le krigage direct de $Z(V)$ est alors identique à la moyenne des krigeages des différents points de V.

Dans ce cas, si $Z(V)^* - m = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} (Z_{\alpha} - m)$, la variance de krigage prend la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_K^2 &= \text{Var } Z(V) - 2 \text{Cov}(Z(V), Z(V)^*) + \text{Var } Z(V)^* \\ &= C_{VV} - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha V} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C_{\alpha \beta} \\ &= C_{VV} - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha V}\end{aligned}$$

1-5-4 LA SELECTION SUR KRIGEAGE

Un estimateur sans biais conditionnel doit vérifier :

$$E [Z(V) | Z(V)^*] = Z(V)^*$$

(La variance de $Z(V)^*$ est alors nécessairement inférieure à celle de $Z(V)$).

Le non-biais conditionnel, non vérifié par le krigage, entraîne la propriété suivante :

$$\text{Cov} [Z(V) - Z(V)^* , Z(V)^*] = 0$$

(erreur et estimateur non corrélés) qui, elle, est vérifiée par le Krigage Simple. Ceci a d'ailleurs pour conséquence :

$$\begin{aligned} \text{Var} [Z(V)] &= \text{Var} [Z(V) - Z(V)^* + Z(V)^*] \\ &= \sigma_K^2 + \text{Var} Z(V)^* \end{aligned}$$

Les valeurs krigées sont moins dispersées que les vraies. Autrement dit, l'information disponible ne permet pas d'accéder à toute la variabilité déterminant la teneur de chaque bloc. Loin d'être un défaut, le "lissage" est nécessaire pour qu'un estimateur s'approche du non-biais conditionnel.

L'erreur d'estimation peut s'écrire :

$$Z(V) - Z(V)^* = [Z(V) - E(Z(V) | Z(V)^*)] + [E(Z(V) | Z(V)^*) - Z(V)^*]$$

Le terme

$$BC = E [Z(V) | Z(V)^*] - Z(V)^*$$

représente le biais conditionnel. Il est responsable de l'écart prévision-réalisation, observable en moyenne lorsque l'on fait une sélection. Le terme de dispersion conditionnelle

$$DC = Z(V) - E(Z(V) | Z(V)^*) ,$$

caractérise la précision de l'estimation conditionnellement à $Z(V)^*$. Il est responsable des erreurs de sélection qui subsisteraient en prenant comme estimateur $E[Z(V) | Z(V)^*]$: blocs riches laissés pour pauvres et blocs pauvres pris pour riches. Par définition de l'espérance conditionnelle, DC est non corrélée aux fonctions de $Z(V)^*$, donc à BC. La variance d'estimation s'écrit donc : $\text{Var BC} + \text{Var DC}$.

Ainsi, en minimisant la variance d'estimation, le krigage réalise un compromis entre :

- la recherche du non-biais conditionnel
- le meilleur usage des ressources.

On peut penser remplacer le krigeage simple $Z(V)^*$ par $E(Z(V)|Z(V)^*)$ de façon à éliminer totalement le biais conditionnel. Malheureusement ceci n'a pas un grand intérêt à cause du problème de stationnarité que pose déjà le K.S.

1-5-5 LE PROBLEME DE STATIONNARITE

Dans l'expression de $Z(V)^*$:

$$Z(V)^* = (1 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}) m + \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z_{\alpha}$$

on remarque que la moyenne globale m intervient avec un poids $\lambda^m = 1 - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha}$. Dans les cas où les informations sont peu nombreuses relativement à la structure géostatistique (grande maille), le poids de la moyenne λ^m prend des valeurs élevées : $\lambda^m > 30\%$ par exemple. Il s'ensuit une attraction, une force de rappel, vers la moyenne globale. Dans un gisement, on peut voir des zones à échantillons riches, estimées plus pauvres que leurs échantillons, et de même des zones à échantillons pauvres, considérées comme riches. Cela n'a rien d'incorrect, car si les informations sont peu nombreuses, ou si la structure est courte, une zone à échantillons riches n'a effectivement aucune raison d'être réellement aussi riche que ses échantillons. Mais est-ce vraiment là le résultat escompté par l'exploitant minier ?

Si la teneur moyenne globale réelle est bien représentée par la valeur de m calculée à partir de l'ensemble des échantillons, le non-biais (dans le modèle) de l'estimateur K.S. assure effectivement que les erreurs d'estimation locale sont de moyenne globale nulle. On pourra donc parler de non-biais "global".

Cependant, en pratique, il est rare que l'on s'intéresse d'un seul coup à tout le gisement : la prévision des différentes tranches d'exploitation revient à partitionner le gisement ; ou, autre exemple, on peut finalement ne retenir d'un gisement que la partie qui sera exploitable en carrière.

Dès lors, on attendra, de la part des estimateurs, d'être "calés" aux échantillons, pour tout domaine suffisamment grand défini de façon à peu près quelconque, ce qui suppose implicitement que sur un tel domaine (et non plus seulement globalement) la teneur moyenne soit bien représentée par l'ensemble de ses échantillons.

Cette exigence est naturellement incompatible avec l'hypothèse de stationnarité stricte qui conduit à attribuer une signification locale à la moyenne globale, et qui rend l'estimation extrêmement tributaire du domaine choisi pour calculer cette moyenne.

Si l'on admet donc, pour satisfaire cette nouvelle exigence, que la teneur des

échantillons d'un domaine assez grand représente correctement sa teneur moyenne, ceci veut dire que les résultats fournis par l'algorithme du K.S. sont affectés d'un biais local.

L'hypothèse de stationnarité stricte, trop forte, doit donc être remplacée par une hypothèse de stationnarité locale, où l'on admet que la moyenne varie dans l'espace. On exigera alors de la part des estimateurs de respecter un non-biais local, quitte à avoir des variances d'estimation plus fortes. Défini au niveau de chaque unité d'estimation, ce non-biais local assurera des résultats concordants entre estimations et échantillons sur tout domaine suffisamment grand : chapitre suivant (1-6).

Dans les cas où le poids de la moyenne est faible (densité des informations forte relativement à la structure), l'hypothèse de stationnarité stricte n'est plus aussi rigoureuse et se confond presque avec celle de stationnarité locale. Mieux, le poids de la moyenne, qui conditionne l'utilisation du krigeage simple, apparaît également en pratique comme un bon critère d'utilisation des méthodes non linéaires reposant sur des hypothèses de stationnarité stricte (cf. chapitre 2-7 et Remacre, 1984). Il est remarquable qu'un même gisement, de variogramme connu et compatible avec un modèle stationnaire au moins jusqu'à une certaine distance, puisse relever de méthodes stationnaires strictes ou locales selon la plus ou moins forte densité des données.

Parfois l'existence de dérives rend l'hypothèse de stationnarité locale encore trop forte. Il faut en tenir compte pour éviter les sur ou sous-estimations, notamment en bordure du gisement, ou à la sélection de blocs ou de volées, lorsque l'information disponible est "unilatérale" et n'entoure donc pas l'unité à estimer. A ce propos nous renvoyons le lecteur à Journal, 1977 (pages 400, 490 et suivantes).

1-6 LES EQUATIONS DU KRIGEAGE ORDINAIRE (OU A MOYENNE INCONNUE)

Le krigeage ordinaire peut être construit de deux façons différentes mais parfaitement équivalentes (démonstration dans Matheron, 1970).

- 1°) Le paramètre m , n'étant plus une moyenne connue (moyenne globale), est censé représenter une moyenne locale inconnue. Pour qu'un estimateur linéaire :

$$Z(V)^* = m + \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} (Z_{\alpha} - m)$$

soit sans biais quelle que soit la valeur de m , il faut imposer la condition de non-biais :

$$\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$$

Cette contrainte sur les poids se traduit, dans le système exprimant la minimisation de variance, par le paramètre de Lagrange supplémentaire μ :

$$\begin{cases} \sum_{\beta} \lambda^{\beta} c_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha V} + \mu & \forall \alpha \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

La variance d'estimation : $\sigma^2 = c_{VV} - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} c_{\alpha V} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} c_{\alpha\beta}$ s'écrit aussi :

$$c_{VV} - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} c_{\alpha V} + \mu$$

Remarque : La condition de non-biais est aussi appelée condition d'universalité, par référence aux Fonctions Aléatoires Intrinsèques. En particulier, le modèle de Fonction Aléatoire Intrinsèque d'ordre 0 ne manipule que des combinaisons linéaires dont la somme des poids vaut zéro, et est entièrement défini par son variogramme (qui, à la différence du cas stationnaire, n'est plus nécessairement borné). Du point de vue du krigeage, les modèles F.A.St. à moyenne inconnue et F.A.I.O sont parfaitement identiques. Dans ce dernier cas, la condition $\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1$ traduit le fait que l'erreur d'estimation $Z(V) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$ doit être autorisée.

- 2°) L'autre présentation consiste, à partir du krigeage simple :

$$Z(V)^{KS} = \lambda^m m + \sum_{\alpha} \lambda_{KS}^{\alpha} Z_{\alpha}$$

(noté ici avec des indices KS pour éviter toute confusion) à remplacer la moyenne m par son estimation locale par krigeage : $m^* = \sum_{\alpha} \lambda_o^{\alpha} Z_{\alpha}$

Les λ_o^α vérifient le système :

$$\begin{cases} \sum_{\beta} \lambda^\beta c_{\alpha\beta} = \mu_o & \forall \alpha \\ \sum_{\alpha} \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

et on a : $\mu_o = \text{Var } m^* = \text{Var}(m^* - m) = \sigma_{KM}^2$, variance d'estimation de la moyenne.

L'estimateur obtenu en remplaçant m par m^* dans le K.S. :

$$\lambda^m \left(\sum_{\alpha} \lambda_o^\alpha z_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \lambda_{KS}^\alpha z_{\alpha}$$

est exactement le krigeage à moyenne inconnue :

$$z(v)^{KO} = \sum_{\alpha} \lambda_{KO}^\alpha z_{\alpha}$$

On a, entre les poids, les relations suivantes :

$$\lambda_{KO}^\alpha = \lambda_{KS}^\alpha + \lambda^m \lambda_o^\alpha,$$

et, entre les variances :

$$\sigma_{KO}^2 = \sigma_{KS}^2 + (\lambda^m)^2 \sigma_{KM}^2,$$

ce qui montre comment une mauvaise connaissance de la moyenne se répercute sur le K.O. Enfin la relation $\mu = \lambda^m \mu_o$ attribue une signification précise au paramètre de Lagrange du K.O.

Remarques :

- . La décomposition du krigeage ordinaire en krigeage simple et krigeage de la moyenne - c'est-à-dire l'inverse de l'opération qui vient d'être faite - se révélera essentielle à la compréhension de certains comportements de poids de krigeage (cf Deuxième Partie).
- . λ^m , déterminé par le système de K.S., représente toujours le poids de la moyenne, qu'elle soit connue (K.S.), ou inconnue et estimée (K.O.).
- . Les poids de krigeage (K.S. ou K.O.) sont ceux qui minimisent la variance d'estimation. Autrement dit, la variance bougera peu si on modifie un peu les valeurs des poids. En K.S. par exemple :

$$d(\sigma_K^2) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} d\lambda^\alpha d\lambda^\beta c_{\alpha\beta}$$

Remarques sur le rôle des échantillons extérieurs à un bloc à estimer.

En krigeage, les échantillons extérieurs peuvent intervenir à deux niveaux :

- soit "directement" dans le K.S. (comme les échantillons intérieurs), s'ils sont situés à moins de la portée du bloc (en toute rigueur des échantillons plus lointains peuvent aussi intervenir directement, mais de façon négligeable, grâce à un phénomène de relais. Cf 2-4-3).
- soit par l'intermédiaire de la moyenne (globale en K.S., locale en K.O.).

On a vu (1-4) que la prise en compte d'échantillons extérieurs permettait de se garantir contre un biais conditionnel important, cause de surestimation à la sélection. Ceci ne veut pas dire que, pour estimer un bloc à partir de n informations, on ait intérêt à en placer certains à l'extérieur du bloc. Ainsi, dans l'estimation d'une volée de galerie à partir de n analyses de trous, la meilleure précision sera obtenue avec des trous intérieurs à la volée (avec naturellement le biais conditionnel dû à l'effet de support). En placer à l'extérieur diminuerait le biais conditionnel au détriment de la précision. Ce que propose le krigeage, c'est d'utiliser au mieux les informations extérieures dont on dispose de toute façon (par exemple, trous des volées précédentes, sondages du voisinage...). Dans le cas où les échantillons intérieurs sont particulièrement riches, les échantillons extérieurs, par là même en général plus pauvres, serviront à corriger le biais conditionnel.

1-7 A PROPOS DES VARIANCES

Ce court chapitre rassemble une série de relations simples entre structure géostatistique et estimation.

Soit, en modèle stationnaire, $\gamma(h)$ le variogramme :

$$\frac{1}{2} \text{Var} [Z(x+h) - Z(x)]$$

et $C(h) = \text{Cov} [Z(x+h), Z(x)]$ la covariance associée :

$$C(h) = C(0) - \gamma(h)$$

- L'estimation d'un point $Z(x+h)$ par la valeur connue $Z(x)$, est assortie d'une variance égale à $2 \gamma(h)$.
- Dans un modèle stationnaire strict, l'estimation de $Z(x+h)$ à partir de $Z(x)$ vaut :

$$Z(x+h)^* = (1-\lambda)m + \lambda Z(x)$$

$$\text{avec } \lambda = \frac{C(h)}{C(o)}$$

$$\text{et une variance égale à } C(o) \left[1 - \left(\frac{C(h)}{C(o)} \right)^2 \right]$$

- Si les points sont sans corrélation ($h > \text{portée}$) :

$$\lambda = 0$$

$$\text{et } Z(x+h)^* = m$$

La variance d'estimation d'un point par la moyenne globale vaut : $C(o)$

- Si on estime $Z(x+h)$ par la valeur $Z(x)$, non corrélée à $Z(x+h)$, la variance prend la valeur $2 C(o)$
- Si on estime un point $Z(x)$ par la moyenne de n points voisins et qu'il n'existe aucune corrélation entre tous ces $(n+1)$ points (cas d'une grande maille ou d'une structure quasi-pépitique), on trouve pour variance d'estimation :

$$C(o) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Avec n relativement peu élevé, cette estimation locale est rapidement aussi précise que l'estimation par la moyenne globale faite en stationnarité stricte (Variance $C(o)$).

- Si on estime cette fois $Z(V)$ au lieu de $Z(x)$, on obtient comme variances respectives : $C_{VV} + \frac{C(o)}{n}$ et C_{VV} .

1-8 LA RECONSTRUCTION OPERATOIRE.

POURQUOI ?

Depuis les premières équations du krigeage, nous naviguons dans des espaces peuplés de Fonctions Aléatoires. Reste à voir dans quelle mesure le krigeage est effectivement aussi performant en pratique qu'en théorie.

Matheron (Estimer et Choisir, 1978) développe cet aspect épistémologique dans un cadre plus général que le krigeage. Il montre en particulier (deuxième partie) l'importance très diverse des hypothèses faites quand on construit des modèles probabilistes en vue d'une estimation. En troisième partie, il propose la "reconstruction opératoire" de ces techniques d'estimation. L'algorithme d'estimation, dépouillé du modèle originel, est confronté avec le champ réel supposé connu partout... Il est intéressant de reproduire ici succinctement la reconstruction opératoire du krigeage.

A PROPOS DU MODELE

La recherche d'un estimateur optimal (comme le krigeage) par la minimisation d'une variance d'estimation, nécessite un modèle représentant la réalité. En effet, les données disponibles sont absolument muettes quant à la façon d'obtenir un estimateur optimal (ou d'ailleurs tout autre estimateur !).

Le concept probabiliste de Fonction Aléatoire est une bonne approche d'un phénomène spatial à caractère aléatoire, comme l'est très souvent la minéralisation d'un gisement. Par "caractère aléatoire", il faut bien sûr comprendre l'impossibilité de faire des estimations correctes par des modèles déterministes, cette impossibilité étant due à la variabilité spatiale importante qui accompagne en général une minéralisation.

Le modèle, en enrichissant l'information fournie par les données, permet alors d'obtenir une solution au problème d'estimation posé. Cette solution vaudra ce que vaut le modèle, c'est-à-dire sera d'autant meilleure que les hypothèses du modèle seront adaptées à la réalité. Certaines de ces hypothèses (par exemple : "les données sont représentatives") peuvent conduire, en l'absence de données supplémentaires, à des erreurs radicales, quelle que soit la méthode d'estimation utilisée.

LA RECONSTRUCTION OPERATOIRE DU KRIGEAGE ORDINAIRE PONCTUEL.

Abandonnons maintenant le modèle et considérons l'algorithme du krigeage ordinaire ponctuel. Il consiste à estimer un point par combinaison linéaire (invariante dans l'espace et de somme des poids égale à 1) des points du voisinage obéissant à une configuration

donnée :

$$\begin{cases} z(x)^* = \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z(x+h_{\alpha}) \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Les λ^{α} , obtenus par le système de krigeage, assurent l'optimalité dans le modèle de Fonctions Aléatoires.

Plaçons-nous maintenant dans la situation idéale (même "après coup"), où le champ S_0 , à l'intérieur duquel se fait l'estimation, serait connu en tout point. Sachant que chaque point $z(x)$ est estimé par une combinaison linéaire $\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z(x+h_{\alpha})$, les λ^{α} réellement optimaux sont ceux qui minimisent l'erreur quadratique moyenne :

$$\begin{aligned} \|z(x) - z(x)^*\|^2 &= \frac{1}{S_0} \int_{S_0} [z(x) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z(x+h_{\alpha})]^2 dx \\ &= \frac{1}{S_0} \int \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} [z(x) - z(x+h_{\alpha})] \sum_{\beta} \lambda^{\beta} [z(x) - z(x+h_{\beta})] dx \\ &= \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \frac{1}{S_0} \int [z(x) - z(x+h_{\alpha})]^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \frac{1}{S_0} \int [z(x+h_{\alpha}) - z(x+h_{\beta})]^2 dx \end{aligned}$$

En posant $\gamma(h_{\alpha}, h_{\beta}) = \frac{1}{2S_0} \int_{S_0} [z(x+h_{\alpha}) - z(x+h_{\beta})]^2 dx$, on obtient :

$$\|z(x) - z(x)^*\|^2 = 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} \gamma(0, h_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma(h_{\alpha}, h_{\beta})$$

Les λ^{α} réellement optimaux obéissent donc au système :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma(h_{\alpha}, h_{\beta}) = \gamma(0, h_{\alpha}) & \forall \alpha \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

Quant aux λ^{α} du modèle de krigeage, ils proviennent du système :

$$\begin{cases} \sum_{\beta} \lambda^{\beta} \gamma(h_{\alpha} - h_{\beta}) = \gamma(h_{\alpha}) & \forall \alpha \\ \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} = 1 \end{cases}$$

où $\gamma(h)$, modèle de variogramme ajusté sur le variogramme expérimental, est censé représenter l'intégrale d'espace (structure) : $\frac{1}{2S_0} \int_{S_0} [z(x+h) - z(x)]^2 dx$.

On voit donc que le krigeage donne effectivement la solution correcte optimale, dans la mesure où la fonction à deux variables $\gamma(h_{\alpha}, h_{\beta})$, inaccessible en pratique, peut être approximée par la fonction d'une variable $\gamma(h_{\alpha} - h_{\beta})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 S_0} \int_{S_0} [z(x+h_\alpha) - z(x+h_\beta)]^2 dx &= \frac{1}{2 S_0} \int_{S_0 \text{ translaté de } -h_\beta} [z(x+h_\alpha-h_\beta) - z(x)]^2 dx \\ &= \frac{1}{2 S_0} \int_{S_0} [z(x+h_\alpha-h_\beta) - z(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Ceci signifie que la structure doit peu varier si l'on translate légèrement le champ S_0 sur lequel elle est calculée. D'éventuelles différences ne pouvant provenir que des bordures du champ, seules ces bordures peuvent être responsables d'un écart par rapport à l'optimum réel, toujours dans la mesure où $\gamma(h)$ est bien connu. De fait, en pratique, c'est ce dernier point qui importe : c'est lorsque la structure est mal connue que l'on doit s'attendre à ce que le krigeage soit loin de l'optimum. Le problème des bordures est d'ailleurs d'autant moins important qu'en pratique on sera amené à s'intéresser plutôt à des parties de S_0 qu'à S_0 lui-même (Cf 1-5-5). Il convient donc alors, non seulement de bien connaître la structure, mais d'être renseigné sur son homogénéité.

D E U X I E M E P A R T I E

LE COMPORTEMENT DES POIDS DE KRIGEAGE

2 - LE COMPORTEMENT DES POIDS DE KRIGEAGE

2-1 CONDITIONS DES EXPERIMENTATIONS

LES "OBSERVATIONS ELEMENTAIRES"

Etudier le comportement des poids de krigeage d'une configuration fixée, c'est comprendre la façon dont se répartissent les poids des différentes informations. Mais si l'on déplace, rajoute ou soustrait des informations, on obtient une nouvelle configuration. Par conséquent, étudier le comportement des poids, c'est aussi comprendre comment les poids évoluent en pareil cas.

Naturellement, le comportement des poids est très varié. Il ne s'agit pas dans cette étude de prévoir la valeur des poids que l'on peut rencontrer, mais seulement d'en comprendre le comportement. Pour cela, j'ai été amené à retenir un certain nombre d'observations "élémentaires" (écran, écran inverse, poids négatifs...) et c'est en ce sens que les exemples donnés ont été choisis. Ces exemples montrent donc des faits réellement observables, même si en pratique plusieurs observations élémentaires sont couramment associées dans une même configuration.

SIMPLICITE DES EXEMPLES

En pratique, le krigeage est essentiellement utilisé à 2 ou 3 dimensions. Particulièrement dans ce dernier cas, il est peu commode, surtout par écrit, d'expliquer le comportement des poids et des variances de krigeage.

Il est beaucoup plus aisé de décrire de tels comportements sur des configurations assez simples. Les exemples choisis contiennent peu de données et sont à 1, 2 et parfois 3 dimensions. Il est licite de procéder ainsi dans la mesure où les comportements des poids et variances sont de même nature, quels que soient le nombre de données et le nombre de dimensions de l'espace. Naturellement, parler d'anisotropie suppose au moins 2 dimensions, mais on constate effectivement qu'on rend très bien compte de ce qui se passe en présence d'anisotropie, en se limitant à des configurations 2D comprenant quelques informations. Egalement, si le modèle exponentiel a la particularité, à 1 dimension et en krigeage simple, de donner un effet d'écran total, des effets d'écran moins puissants, mais néanmoins très nets, peuvent être observés à 2 ou 3 dimensions (il s'agit bien d'une observation, alors que l'effet d'écran total, s'il peut être observé, peut aussi être démontré mathématiquement). Qu'une différence quantitative existe est évident. Ainsi, la

structure étant donnée, de même que la longueur de la maille, l'estimation sera bien meilleure à 3D qu'à 2D ou 1D, puisque les données d'une maille cubique sont plus nombreuses que celles d'une maille carrée ou simplement linéaire. Le poids de la moyenne, lui aussi, peut considérablement varier. Mais, dans les comportements de poids ou de variance qui ont pu être rencontrés, il ne semble pas exister de différences qualitatives, selon le nombre de données ou celui de dimensions.

Les exemples choisis sont donc des configurations simples, et par là même plus facilement démonstratives. Les informations sont supposées ponctuelles, et obéissent souvent à une maille régulière. Les modèles de variogramme sont des schémas simples : sphérique, exponentiel, gaussien (Fig. 2-1).

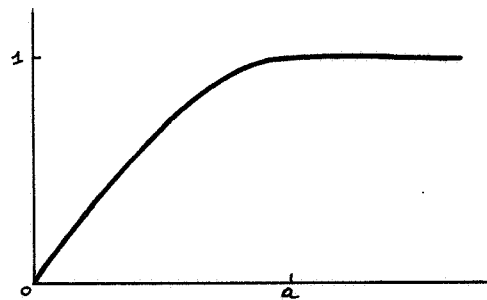


Schéma sphérique

$$\gamma(h) = \frac{3}{2} \frac{|h|}{a} - \frac{1}{2} \frac{|h|^3}{a^3} \quad \text{pour } h \leq \text{portée } a$$

$$\gamma(h) = 1 \quad \text{pour } h > a$$

Schéma exponentiel

$$\gamma(h) = 1 - e^{-\frac{|h|}{a}}$$

Portée pratique : 3 a

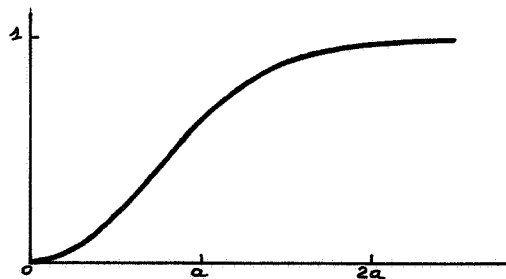
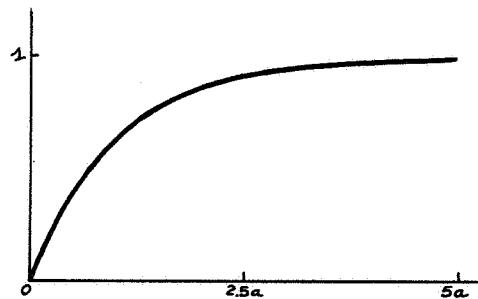


Schéma gaussien

$$\gamma(h) = 1 - e^{-\frac{h^2}{a^2}}$$

Portée pratique : 1.73 a

Figure 2-1

Le palier, variance ponctuelle, est toujours pris égal à l'unité. Si on prenait une autre valeur du palier, il suffirait de multiplier toutes les variances par cette valeur ; les poids, eux, ne bougeraient pas. Enfin, le volume à estimer sera la plupart du temps considéré comme ponctuel.

2-2 PROPRIETES GENERALES

La géostatistique permet le calcul de la variance de l'erreur commise lorsque l'on estime la teneur $Z(V)$ d'un volume V par une combinaison linéaire $\sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z_{\alpha}$ de teneurs connues aux points x_{α} :

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \text{Var} \left[Z(V) - \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} z_{\alpha} \right] \\ &= C_{VV} - 2 \sum_{\alpha} \lambda^{\alpha} C_{\alpha V} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} C_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

La qualité de l'estimation va donc dépendre :

- de la structure, par l'intermédiaire de la covariance (ou du variogramme) ,
- des positions relatives de V et de chaque x_{α} , grâce aux termes $C_{\alpha V}$
- de la géométrie du volume à estimer : C_{VV}
- de la configuration géométrique des informations entre elles, par les teneurs $C_{\alpha\beta}$.

Tout cela, valable quelles que soient les valeurs prises par les pondérateurs λ^{α} , reste évidemment vrai lorsque les λ^{α} sont les poids de krigeage, déterminés donc de façon à minimiser la variance d'estimation.

Les quatre facteurs énumérés plus haut permettent de comprendre facilement dans beaucoup de cas ce qui se passe lorsque l'on fait un krigeage. Les exemples qui vont suivre illustrent, dans des configurations simples, l'influence de chacun des facteurs sur la distribution des poids de krigeage et sur la variance de krigeage.

2-2-1 INFLUENCE DE LA STRUCTURE

Influence de la Structure, avec des informations plus ou moins éloignées, dans le Cas Isotrope.

Considérons, dans le plan, le krigeage ordinaire d'un point par 4 autres points, selon la configuration (2-2-1a).

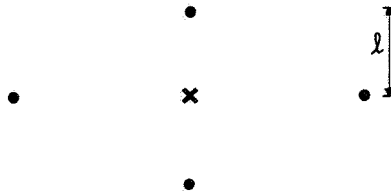


Figure 2-2-1a

Dans le cas pépitique (ou bien lorsque λ est supérieur à la portée), tous les poids sont naturellement égaux (25%). La variance de krigeage vaut 1.25. Avec un schéma sphérique tel que $a/\lambda = 2$, les informations proches ont un poids beaucoup plus fort que les lointaines (Fig. 2-2-1b). La variance vaut 0.84.



Figure 2-2-1b : Schéma sphérique $a/\lambda = 2$

$$\begin{aligned} &K.O. \\ &\sigma_K^2 = 0.84 \end{aligned}$$

Avec une structure plus continue (schéma gaussien $a/\lambda = 1.5$), le poids des informations lointaines est presque nul (Fig. 2-2-1c). La variance vaut cette fois 0.30

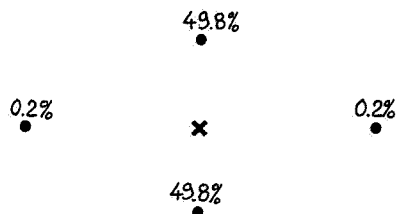


Figure 2-2-1c : Schéma gaussien $a/l = 1.5$

K.O.

$$\sigma_K^2 = 0.30$$

La chute des variances montre une précision d'autant plus élevée que la structure est continue. Nous reparlerons un peu plus loin du rapport entre précision et structure (2-2-5).

Influence des Anisotropies de la Structure.

Considérons, dans un plan vertical, 4 points également répartis autour du point à estimer, 2 appartenant à l'horizontale du point inconnu, les 2 autres sur la verticale. Une structure anisotrope (structures verticale et horizontale différentes) attribuera des poids différents à ces 4 informations, pourtant réparties également : Fig. 2-2-1d : anisotropie géométrique, et Fig. 2-2-1 e : anisotropie zonale. (D'autres modélisations d'anisotropie sont possibles, comme par exemple la covariance produit d'une covariance horizontale par une covariance verticale, qui jouit de curieuses propriétés d'écran : cf 2-4-2-2).

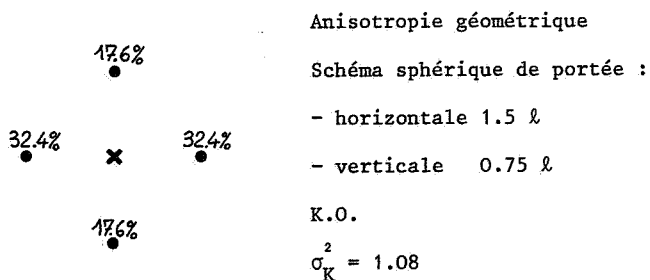


Figure 2-2-1d

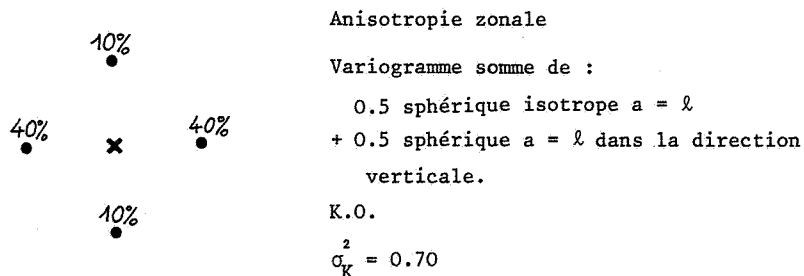


Figure 2-2-1e

2-2-2 INFLUENCE DES POSITIONS RELATIVES ENTRE VOLUME A ESTIMER ET INFORMATIONS.

Poids et variance de krigeage vont évidemment dépendre de la position du volume à estimer par rapport aux informations. Les configurations des figures 2-2-1b et 2-2-2a, qui ne diffèrent que par la position du point à estimer, en sont un exemple.

Dans la première configuration, les deux points les plus proches sont à la distance l et reçoivent chacun un poids de 40,6%. Dans la seconde, seul le point de droite se trouve à une telle distance, et son poids est de même ordre (42,6%). Cette seconde configuration est légèrement moins bonne que la première, comme en témoignent les variances d'estimation (0.93 et 0.84). Par contre, si le point à estimer se rapprochait davantage de l'information de droite, la précision pourrait se trouver accrue du fait de la proximité entre ces deux points (Fig. 2-2-2b - Variance : 0.63 - Poids de l'information de droite : 71.8%).

L'évolution des poids de krigeage, lorsque le point à estimer se déplace de façon quasi-continue, intéresse naturellement les personnes faisant de la cartographie ponctuelle, et utilisant donc le krigeage comme interpolateur. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur à la littérature correspondante : Galli, Murillo et Thomann (1984).

2-2-3 INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DU VOLUME A ESTIMER

Comme d'une part le krigeage d'un point dépend de la position de ce point relativement aux informations, et que d'autre part le krigeage d'un volume est égal à la moyenne du krigeage de ses points, il est clair que la géométrie du volume à estimer va avoir de l'influence.

Les figures 2-2-1b, 2-2-3a et 2-2-3b sont un exemple de ce qui se passe avec un

SCHEMA SPHERIQUE $a/l = 2$
K.O.

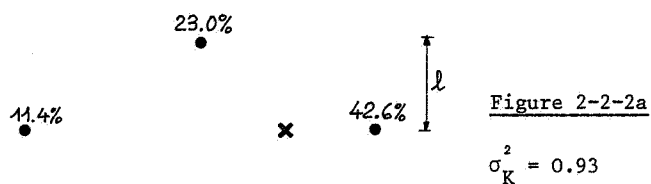


Figure 2-2-2b

$$\sigma_K^2 = 0.63$$

8.5%

9.9%

71.8%

9.3%

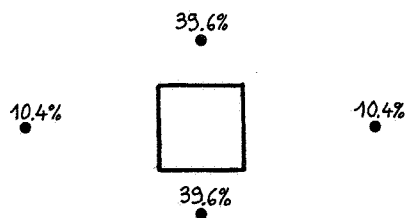
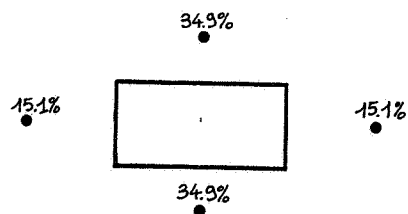


Figure 2-2-3b

$$\sigma_K^2 = 0.37$$

$$C_{VV} = 0.46$$

$$\sigma_K^2/C_{VV} = 0.80$$



volume à estimer réduit d'abord à un point, puis correspondant à des carré et rectangle centrés en ce même point. Le rectangle, qui s'étend dans la direction des informations les plus éloignées, leur confère un poids un peu plus élevé (15.1%) qu'elles n'ont dans les autres cas ($\approx 10\%$).

On constate que, le volume augmentant, la variance d'estimation diminue (0.84, 0.47, 0.37). Ceci n'est pas surprenant puisque l'on estime des valeurs de moins en moins variables (moyennes sur un support de plus en plus grand) : leurs variances de dispersion respectives valent 1., 0.62 et 0.46. Si on veut comparer la qualité des estimations relativement à la variabilité a priori, on peut calculer les rapports σ_K^2/C_{VV} : 0.84, 0.76, 0.80, qui s'ordonnent différemment et sont d'ailleurs voisins.

2-2-4 INFLUENCE DE LA CONFIGURATION GEOMETRIQUE DES INFORMATIONS ENTRE ELLES.

Il est évident que le krigeage va changer si la position des informations est modifiée, par exemple si certaines informations sont plus proches : Fig. 2-2-1b et 2-2-4a.

Mais le krigeage tient également compte des redondances et des lacunes.

Ainsi, dans le plan, un point estimé par 3 points également répartis à la distance ℓ donnera à chacune des informations un poids égal (33.3%). Dans le cas d'un variogramme sphérique de portée $a = 3 \ell$, la variance de krigeage vaut 0.45 (Fig. 2-2-4b). Si, maintenant, ces 3 informations, toujours à la même distance du point à estimer, ne sont plus réparties régulièrement, on peut assister à un phénomène :

- de redondance. Deux informations trop voisines deviennent redondantes, et ne comptent pas beaucoup plus que s'il n'y avait qu'une information (voir poids et variances des figures 2-2-4c et d)
- de lacune. Il manque une quatrième information pour rendre la répartition régulière (chaque information aurait un poids de 25%). Le poids qu'aurait alors la quatrième information est transmis aux 2 informations les plus proches, l'information la plus lointaine ayant un poids restant voisin de 25% (Cf 2-2-4-e)

Dans les deux cas (redondance et lacune), la précision est naturellement moins bonne qu'avec les 3 informations également réparties.

2-2-5 A PROPOS DE LA PRECISION DES CONFIGURATIONS DU KRIGEAGE.

Le système de krigeage ne dépendant pas des valeurs des informations, il est possible de prévoir le gain en précision qu'apporterait l'implantation de nouvelles données (car rajouter des informations fait diminuer la variance de krigeage).

Si maintenant, au lieu de rajouter de nouvelles informations à des informations

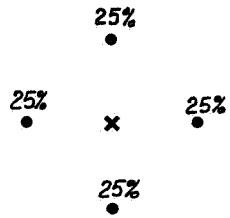
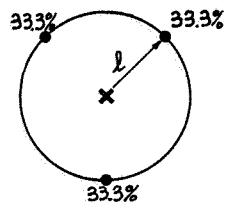


Figure 2-2-4a

Schéma sphérique $a/l = 2$
K.O.

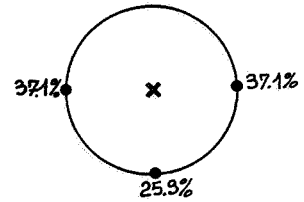
$$\sigma_K^2 = 0.68$$

SCHEMA SPHERIQUE DE PORTEE $a = 3l$
K.O.



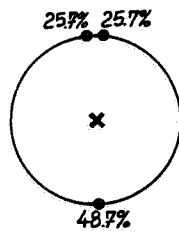
$$\sigma_K^2 = 0.45$$

Figure 2-2-4b



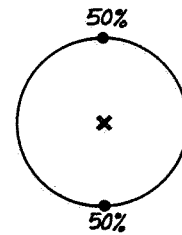
$$\sigma_K^2 = 0.48$$

Figure 2-2-4e



$$\sigma_K^2 = 0.526$$

Figure 2-2-4c



$$\sigma_K^2 = 0.537$$

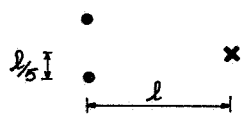
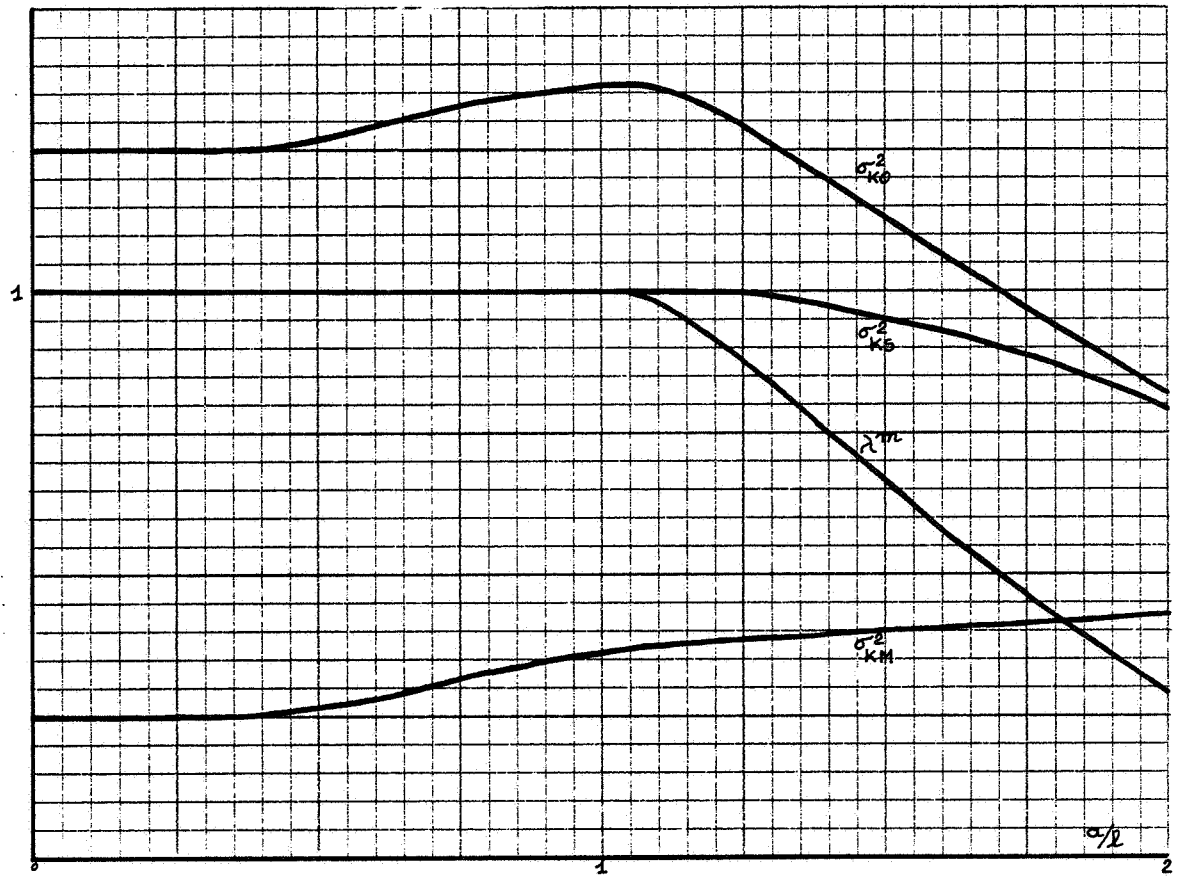
Figure 2-2-4d

présentes , on étudie ce qui se passe lorsque l'on rapproche les informations (de façon homothétique par rapport au point à estimer), la précision ira en général croissante. Mais ceci n'est pas tout-à-fait général. Il existe des cas où, rapprochant les informations, la précision diminue (malgré un variogramme croissant, donc une variabilité augmentant avec la distance).

Les figures 2-2-5 a et b en montrent des exemples. Il s'agit de l'estimation d'un point faite à partir de 4 informations, ou plus précisément de 2 groupes de 2 informations chacun. Lorsque la distance l diminue (c'est-à-dire lorsque a/l augmente), la variance d'estimation manifeste une légère croissance avant de descendre vers 0. Ceci est observable sur les figures avec un schéma gaussien et un sphérique.

L'explication de ce phénomène est assez simple, si on décompose le krigeage ordinaire en krigeage simple et krigeage de la moyenne. Dans le cas sphérique par exemple, tant que les informations restent au-delà de la portée du point à estimer, le K.O. s'identifie au krigeage de la moyenne. Les deux groupes d'informations sont bien sûr sans corrélation, mais, dans chacun des groupes, les deux informations sont d'autant plus corrélées que la distance qui les sépare diminue. Ainsi, l'estimation de la moyenne, qui était faite à très grande distance à partir de 4 points indépendants, ne l'est plus ensuite qu'avec 4 points corrélés : elle est donc moins précise. Lorsque les informations sont à des distances inférieures à la portée du point à estimer, le poids de la moyenne est considérablement diminué . Et bien que la moyenne soit de plus en plus mal estimée, on voit alors la variance du krigeage ordinaire diminuer avec les distances.

Dans le cas gaussien, les choses se passent de la même façon, même si la portée théorique est infinie. Le K.O. est, aux grandes distances, un K.M. : la précision diminue alors avec les distances. Puis le K.O. devient un K.S., et la précision augmente quand les distances diminuent.



• Figure 2-2-5a - Schéma sphérique de portée a.
 • Evolution des variances d'estimation et du poids
 • de la moyenne selon la proximité des informations.

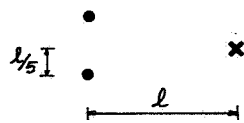
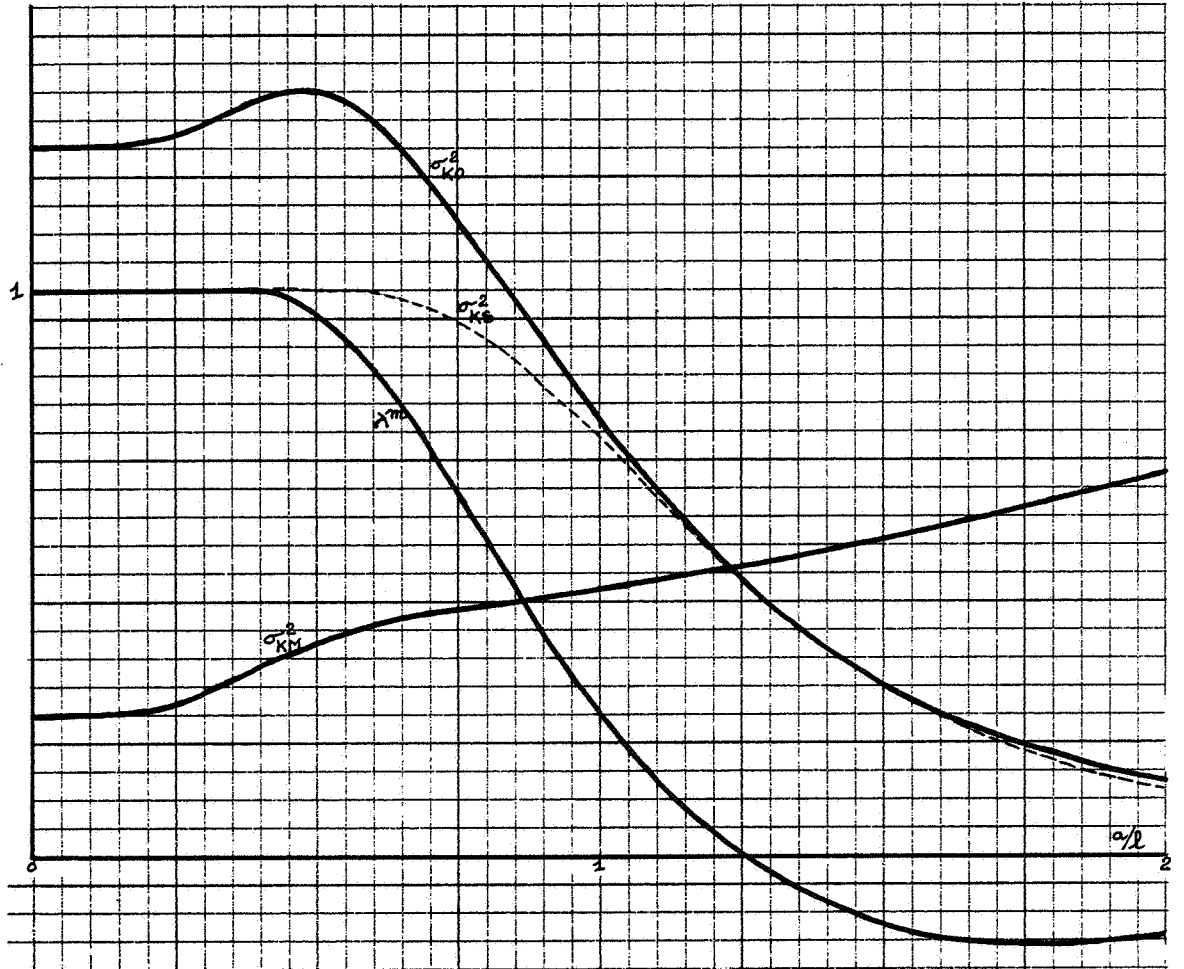


Figure 2-5b - Schéma gaussien de paramètre de portée a .
Evolution des variances d'estimation et du poids de la
moyenne selon la proximité des informations.

2-3 L'ANISOTROPIE ZONALE

En présence d'anisotropie géométrique, la portée dépend de la direction considérée, mais le palier, lui, n'en dépend pas. Aussi la variance est-elle la même dans toutes les directions, pour peu que l'on considère des champs grands par rapport à la portée. Il en va de même avec une anisotropie modélisée par une covariance produit.

Au contraire, en anisotropie zonale, le niveau de variabilité dépend de la direction considérée. Le cas typique est celui d'un gisement sédimentaire, constitué d'un empilement de couches horizontales : la variabilité à l'intérieur de chaque couche est bien moindre que la variabilité verticale. En pareil cas, il est très intéressant d'observer le comportement du krigeage, notamment en ce qui concerne le rôle de la moyenne.

Plaçons-nous, pour plus de clarté, à 2 dimensions (horizontale, verticale), et considérons une fonction aléatoire $Z(x,y)$ présentant une anisotropie zonale :

$$\gamma(h) = 0.5 \text{ sphérique isotrope de portée } a \\ + 0.5 \text{ sphérique vertical de portée } a.$$

Cette F.A.St. $Z(x,y)$ peut se décomposer en une F.A.St. $M(y)$ ne dépendant que de la verticale, et une F.A.St. $X(x,y)$ isotrope, indépendante de $M(y)$:

$$Z(x,y) = M(y) + X(x,y) ,$$

et on peut très bien supposer que $X(x,y)$ est d'espérance nulle, de sorte que :

$$m = E [Z(x,y)] = E [M(y)]$$

À y fixé, la Variable Aléatoire $M(y)$ a pour espérance : $m_y = E [Z(x,y)]$.

Considérons l'estimation d'un point $Z(x,y)$ à partir d'informations dont 2 sont situées sur la verticale du point à estimer et les autres sur son horizontale. La distance l minimale entre points est égale à la portée a (Fig. 2-2-1e et 2-3). (Comme nous sommes dans le cas d'une "grande maille", les résultats ne changeraient pas si la distance minimale entre points était supérieure à a , et si les deux points de la verticale étaient dans une autre direction, pourvu qu'elle ne soit pas horizontale).

En prenant les quatre informations les plus proches, ou bien l'ensemble des six informations, on voit que le krigeage ordinaire attribue un poids plus élevé aux informations situées dans la direction de continuité (horizontale), ce qui est légitime.

Pour comprendre plus finement le rôle joué par chaque information, la décomposition du K.O. en K.S. et K.M. est utile.

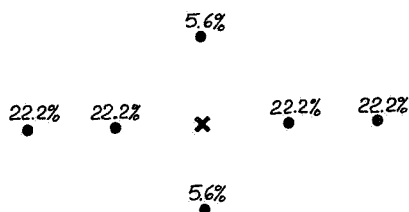


Figure 2-3

Anisotropie zonale

K.O.

$$\sigma_K^2 = 0.61$$

Le krigeage à moyenne (m) connue donne un poids nul aux informations verticales ; le système de krigeage donne ici à chaque information horizontale un poids constant et égal au poids de la moyenne :

$$\lambda_{KS} = \lambda_m = \frac{1}{n+1} ,$$

n étant le nombre d'informations horizontales. Ainsi, à deux dimensions, tout se passe comme si la structure verticale était une structure à 2 dimensions de portée horizontale infinie.

Les points de la verticale ne participent qu'au krigeage de la moyenne m , avec d'ailleurs un poids individuel supérieur au poids de chacune des informations horizontales : ces dernières, corrélées entre elles par la structure de portée infinie, sont en effet légèrement redondantes lorsqu'il s'agit d'estimer la moyenne m .

Du fait de la portée horizontale infinie, tous les points de l'horizontale, à quelque distance qu'ils soient situés, interviennent dans le krigeage simple (le voisinage de krigeage est théoriquement de dimension horizontale infinie). Avec n informations horizontales, le poids de la moyenne vaut ici :

$$\lambda^m = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent, pour des valeurs de n pas forcément très élevées, la participation de la moyenne m dans le krigeage simple (ou celle de son estimation locale dans le K.O.), sera rapidement négligeable.

Ainsi, le krigeage à moyenne connue ou inconnue à 2 dimensions sera rapidement équivalent à un krigeage à 1 dimension. (En pratique, la présence d'anisotropie zonale réduit effectivement très souvent le nombre de dimensions de l'espace dans lequel est défini le voisinage). Mais si on passe ainsi de 2 à 1 dimension, cela n'entraîne pas pour autant que le krigeage 2D à moyenne connue soit équivalent au krigeage 1D à moyenne connue. En effet, les moyennes (2D) m et (1D) m_y sont différentes. De plus, la connaissance de la moyenne 1D m_y est plus intéressante que celle de m : l'estimation d'un point par sa moyenne horizontale est assortie d'une variance de 0.5, alors que la moyenne 2D fournit une variance de 1. Il est d'ailleurs remarquable que, si on connaît m_y , le krigeage 1D donne un poids nul à chaque information (et l'estimation vaut m_y avec une variance 0.5), alors que ces mêmes informations horizontales ont un poids non nul si on se donne seulement m (krigeage 2D à moyenne connue, variance > 0.5). Si n est assez élevé, seuls les krigeages ordinaires pourront donc être considérés ici comme équivalents, à 1 et à 2 dimensions.

2-4 LES EFFETS D'ECRAN

2-4-1 L'EFFET D'ECRAN CLASSIQUE

L'effet d'écran classique est bien connu : sur la Figure 2-4-1, l'information A fait écran à l'information B qui voit son poids chuter.

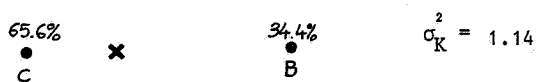


Schéma sphérique $a/\ell = 2$

K.O.

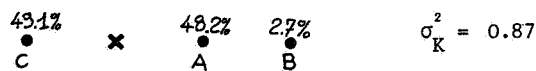


Figure 2-4-1

2-4-2 L'EFFET D'ECRAN TOTAL

2-4-2-1 A 1 Dimension

Variogramme Linéaire

On sait qu'à une dimension, dans le cas d'une Fonction Aléatoire Intrinsèque à variogramme linéaire, l'écran est total (Matheron, 1970) : le poids de l'information B est nul (s'agissant d'une F.A.I. il s'agit nécessairement d'un krigeage avec condition d'universalité : K.O.). En ce qui concerne notre sujet (Fonctions Aléatoires Stationnaires), un écran quasi-total peut alors se présenter avec un variogramme sphérique, lorsque toutes les distances mises en jeu restent dans la partie "linéaire" du variogramme.

Covariance Exponentielle

En stationnaire encore, et toujours à 1 dimension, une covariance exponentielle donne un écran total, mais cette fois-ci en krigeage simple (l'écran pourra être très fort en K.O., si le poids de la moyenne est faible).

La démonstration figure aussi dans Matheron (1970), mais il est utile, pour la suite, de rappeler la raison de cet écran total :

- 1ère Etape : Soit à estimer le point O à partir des informations Z_A et Z_B situées en A et B (Fig. 2-4-2-1).



Figure 2-4-2-1

La covariance exponentielle $C(h) = e^{-\frac{|h|}{a}}$ permet la factorisation des covariances entre points O, A, B :

$$C_{OB} = C_{OA} C_{AB}$$

Si $Z(x)$ est gaussienne, ceci signifie que, conditionnellement à Z_A , Z_O et Z_B sont indépendants : Z_A fait écran entre Z_O et Z_B . En modèle strictement stationnaire, l'estimation de Z_O par Z_A et Z_B ne fait pas intervenir Z_B . Autrement dit, le K.S. de Z_O attribue un poids nul à Z_B , et comme il s'agit de krigeage, cette propriété ne dépend plus de l'hypothèse de normalité.

- 2ème Etape : On vérifie que le système de K.S. de Z_O à partir de plusieurs points (situés éventuellement de part et d'autre de O), se réduit aux informations les plus proches de part et d'autre.

2-4-2-2 A 2 et 3 Dimensions

Schéma de De Wijs

Nous avons vu, à 1 dimension, comment une information, placée entre le point à estimer et une autre information, faisait écran à cette dernière.

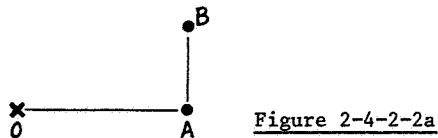
Une propriété analogue est obtenue à 2 dimensions dans le cas d'une F.A.I. de variogramme De Wijsien : un contour fermé autour du point à estimer, fait écran aux points situés à l'extérieur (Matheron, 1970).

Covariance Gaussienne et Covariances Produits

Un effet d'écran assez particulier existe dans le cas d'une covariance gaussienne :

$$C(h) = e^{-\frac{h^2}{a^2}}$$

Soient en effet trois points O, A, B , $O A$ étant par exemple horizontal, et $A B$ vertical (Figure 2-4-2-2a).



Comme pour la covariance exponentielle à 1 dimension, la covariance gaussienne se factorise :

$$C_{OB} = e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}} = e^{-\frac{x^2}{a^2}} e^{-\frac{y^2}{a^2}} = C_{OA} C_{AB}$$

Pour une F.A.St. gaussienne, ceci entraîne que, connaissant Z_A , Z_O est indépendant de Z_B . Dans le krigeage simple de Z_O par Z_A et Z_B , Z_B aura donc un poids nul. On peut comprendre ainsi ce phénomène :

A une covariance qui se factorise :

$$C(x,y) = C_1(x) C_2(y) ,$$

peut correspondre une F.A.St. du type :

$$Z(x,y) = Z_1(x) Z_2(y) \text{ avec } Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ non corrélés}$$

Le point A, situé sur l'horizontale de O, a même "composante" $Z_2(y)$ que celui-ci. Il intervient donc nécessairement dans l'estimation de ce dernier. Mais, en ce qui concerne $Z_1(x)$, le point A contient la même information que B, qui est alors inutile.

Indépendamment de cela; et dans le cas où la portée est grande, il est naturel que le krigeage d'un phénomène régi par une covariance gaussienne, et donc très régulier, soit voisin de l'ajustement polynomial - ici un plan - qui présente lui aussi cet effet d'écran : en effet, la pente de ce plan est fixée, dans la direction AB par les valeurs en A et B ; dans la direction perpendiculaire OA, cette pente, en l'absence d'autre information, est nulle, ce qui attribue à O la même valeur qu'à A.

L'indépendance (avec une F.A. St. gaussienne) entre Z_O et Z_B connaissant A peut se formuler autrement : connaissant la valeur au point d'intersection de 2 droites perpendiculaires, ce qui se passe sur l'une est indépendant de l'autre. Quand plus de 2 droites sont en jeu, le système de krigeage simple montre la propriété suivante : dans une configuration où une partie des informations est située dans un plan (ou à 2D sur une droite) passant par le point à estimer, et où les autres appartiennent aux perpendiculaires à ce plan passant par les premières informations, ces premières informations font écran aux secondes (Fig. 2-4-2-2b). Cette propriété, liée à la factorisation de la covariance, est donc vérifiée pour toute covariance "produit" d'une covariance 2D dans la direction du plan, et d'une covariance 1D dans la direction perpendiculaire.

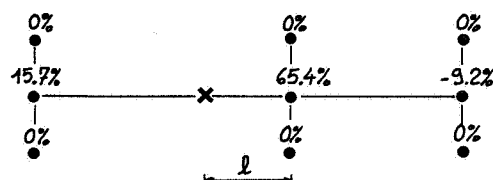


Figure 2-4-2-2b

Schéma gaussien $a/l = 1.5$
K.S.

2-4-3 LE PHENOMENE DE RELAIS

Le phénomène d'écran classique (information proche faisant écran à une lointaine) est naturellement très commode lorsqu'il s'agit de déterminer un voisinage de krigeage. D'autre part, on aura remarqué que l'effet d'écran dépend de la structure considérée ainsi que du type (simple ou ordinaire) de krigeage.

En krigeage simple, il existe un phénomène opposé à l'effet d'écran : la présence d'une information proche permet à une information lointaine d'avoir un poids. Sur la figure 2-4-3a, l'information B n'est pas corrélée avec le point à estimer. En l'absence de l'information A, son poids serait nul : l'information A sert de "relais" à la B. Ainsi les points situés au-delà de la portée peuvent en K.S. obtenir des poids non négligeables, ce qui apparemment ne simplifie pas la recherche d'un voisinage. Mais heureusement ces informations lointaines semblent n'apporter qu'un gain de précision dérisoire (comparer les figures 2-4-3a et 2-4-3b), de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'en tenir compte. Le phénomène de relais n'a donc pas une grande incidence pratique.

Ce phénomène de relais, visible en K.S., peut exister bien sûr en K.O., à condition que le poids de la moyenne reste faible. Lorsque la suppression d'une information proche s'accompagne d'un poids de la moyenne important, les informations plus lointaines vont voir leur poids augmenter en raison de leur participation à la moyenne. C'est le cas du K.O. de la figure 2-4-1 (correspondant au K.S. de la figure 2-4-3a, avec $\lambda^m = 55\%$), où le poids de 2.7% de l'information B n'est donc pas dû à un phénomène de relais, mais au contraire à un phénomène d'écran.

SCHEMA SPHERIQUE $a/l = 2$ K.S.

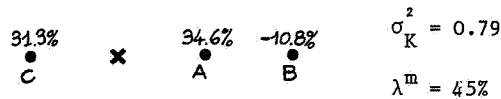


Figure 2-4-3a

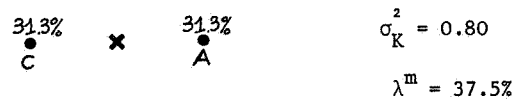


Figure 2-4-3b

2-4-4 AUTRES EFFETS D'ECRAN. L'ECRAN INVERSE

En dehors des cas très particuliers d'écran total, l'effet d'écran est un phénomène tout-à-fait compréhensible : l'introduction d'une information supplémentaire, entre le point à estimer et une autre information, fait chuter le poids de cette dernière. Que ce poids devienne petit représente justement l'effet d'écran, mais il semble de toute façon naturel qu'une information proche ait plus de poids qu'une lointaine.

Dans certaines circonstances pourtant, des informations lointaines ont plus de poids que des proches, comme on va le voir.

Les configurations simples, que nous allons étudier, s'inspirent de configurations que l'on rencontre fréquemment en estimation minière : il s'agit du krigeage de grands panneaux horizontaux à partir d'une maille de reconnaissance systématique de sondages verticaux. En pareil cas, le gisement est divisé en bancs, puis en panneaux de la hauteur des bancs, et les informations sont constituées des tronçons de sondages obtenus par intersection avec les bancs. Il est alors tout-à-fait rigoureux d'assimiler chaque tronçon à un point, et chaque panneau à une moyenne de tels points (Figure 2-4-4a). (La structure "ponctuelle" est naturellement celle des tronçons de sondages).

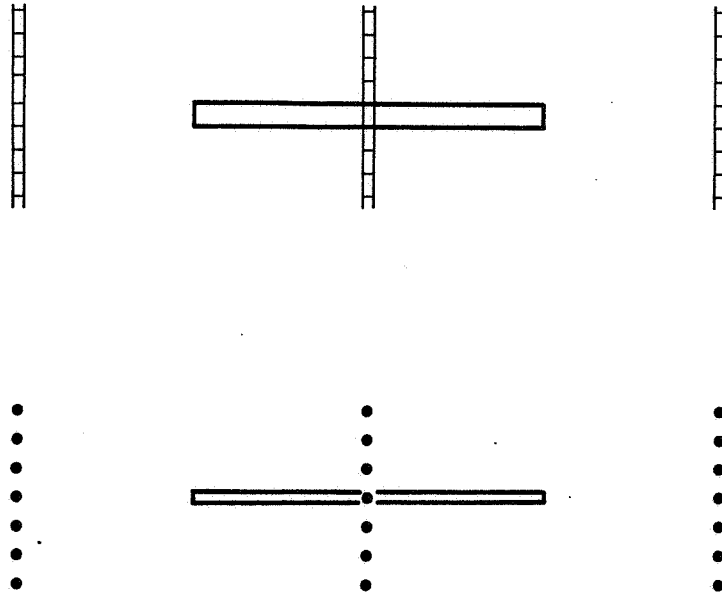


Figure 2-4-4a

Coupe verticale dans un gisement 3D, reconnu par sondages verticaux, et divisé en bancs et panneaux. Chaque tronçon de sondage de la hauteur des bancs peut être assimilé à un point.

Si les panneaux sont centrés, le sondage central jouera un rôle privilégié. Avec une maille suffisamment grande par rapport à la portée, alors seul le sondage central intervient dans la partie K.S., les autres n'intervenant que dans la partie K.M., d'une façon d'ailleurs identique au sondage central (Voir la suite).

Quoiqu'il en soit, il est tout-à-fait intéressant de voir à quoi ressemble l'estimation d'un tel panneau à partir du seul sondage central. Si l'on retient de ce sondage, les tronçons situés dans les niveaux 0 (panneau à estimer), 1 (niveau situé juste au-dessus), et -1 (au-dessous), on peut trouver n'importe quelle répartition des poids, selon la structure en jeu. Ainsi, l étant la distance entre informations, et le panneau étant carré du côté $2l$, on trouve :

- un poids prédominant pour l'information centrale, avec une structure sphérique de portée $2l$ en vertical et $24l$ en horizontal (anisotropie géométrique) : ce poids est dû à la grande continuité horizontale (Figure 2-4-4b)

K.O.

• 14% • 73% • 14% $\sigma_K^2 = 0.12$ $C_{VV} = 0.63$	33.3% 33.3% 33.3% $\sigma_K^2 = 0.41$ $C_{VV} = 0.12$	33.3% 33.3% 33.3% $\sigma_K^2 = 0.33$ $C_{VV} = 0.$	40.5% 19.0% 40.5% $\sigma_K^2 = 0.043$ $C_{VV} = 0.87$	39.4% 21.3% 39.4% $\sigma_K^2 = 0.47$ $C_{VV} = 0.12$	Schéma sphérique de portée : 2 l en vertical 24 l en horizontal Schéma sphérique de portée : 2 l en vertical 3 l en horizontal Schéma exponentiel de paramètre de portée a égal à : 30 l en vertical 45 l en horizontal Schéma sphérique de portée de portée verticale 3 l Horizontale 6 l
---	---	---	--	---	---

Figure 2-4-4b

Figure 2-4-4c

Figure 2-4-4d

Figure 2-4-4e

- un poids égal pour toutes les informations, avec une structure pépitique pure comme on s'y attend, ou bien avec un sphérique de portée verticale 2 ℓ et horizontale 3 ℓ (Figure 2-4-4c).
- un poids prédominant pour les 2 informations extérieures, avec une structure exponentielle de portées verticale 30 ℓ , et horizontale 45 ℓ (Figure 2-4-4d) ou bien avec une structure sphérique de portée 3 ℓ en vertical, et 6 ℓ en horizontal (Figure 2-4-4e).

Dans ces 2 configurations très semblables, le même phénomène (poids relativement important sur les informations extrêmes) persiste en prenant davantage d'informations (Figures 2-4-4f et g).

Pourtant, l'explication n'est pas la même dans l'un et l'autre cas.

Avec le modèle exponentiel de la Figure 2-4-4f, le poids de la moyenne est très faible. Ce comportement des poids trouve donc son origine dans le K.S. L'estimation est très précise, et les poids des informations extérieures sont dûs à la forme allongée du panneau.

Au contraire, avec le modèle sphérique de la Figure 2-4-4g, l'estimation est peu précise, et le poids de la moyenne est très important (à cause de la taille du panneau, grande comparée à la portée). Et c'est à cause de l'estimation de la moyenne (théoriquement moyenne sur tout l'espace) que les informations les plus extérieures sont autant valorisées. De plus, cet effet d'"écran inverse" n'existerait pas si les informations d'un même sondage étaient sans corrélation : il a donc tendance à disparaître si on régularise, en hauteur, échantillons et panneaux à estimer. Finalement, comme dans l'exemple précédent, c'est la forme allongée du panneau (dimension horizontale importante et hauteur assez faible) qui est en cause, mais elle intervient d'une façon toute autre.

Dans le cas présent, la portée horizontale est égale à la moitié du carré du panneau. Par conséquent, dans une configuration 3D complète, où la maille des sondages correspondrait à la taille du panneau, les sondages extérieurs, non corrélés entre eux, ni avec le panneau, n'interviendraient pas en K.S. Le poids K.O. de leurs échantillons refléterait alors exactement l'effet d'écran inverse des poids K.M. On trouvera dans Rivoirard (1984) un exemple d'une configuration analogue rencontrée en estimation minière.

Bien que le K.M. attribue des poids optimaux très différents à chacun des échantillons pris individuellement et provoque alors un effet d'écran inverse, on ne perd pas grand de précision en regroupant les échantillons qui n'ont pas de poids en K.S. et n'interviennent donc que dans la moyenne (ce qui leur donne à chacun un poids égal). Pour en revenir à la configuration simplifiée étudiée ici, la précision varie à peine si, au lieu de prendre les 7 plus proches informations affectée chacune d'un pondérateur propre, on regroupe sous un même pondérateur les 4 informations les plus lointaines (qui n'interviennent quasiment pas dans la partie K.S.) : Figure 2-4-4g dernière colonne. Un tel tour de main, qui

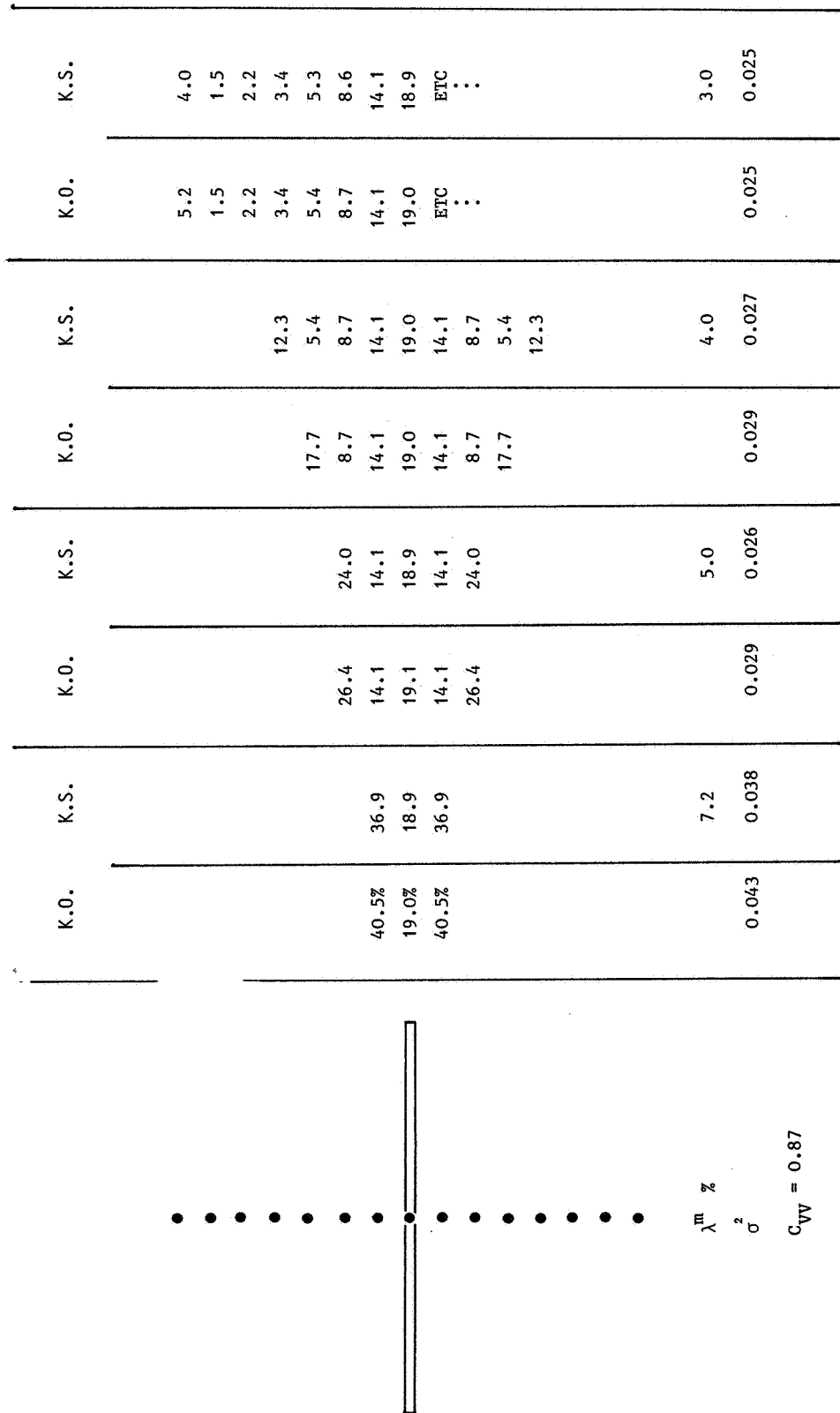


Figure 2-4-4f Schéma exponentiel de paramètre a = 30 % en vertical, et 45 % en horizontal

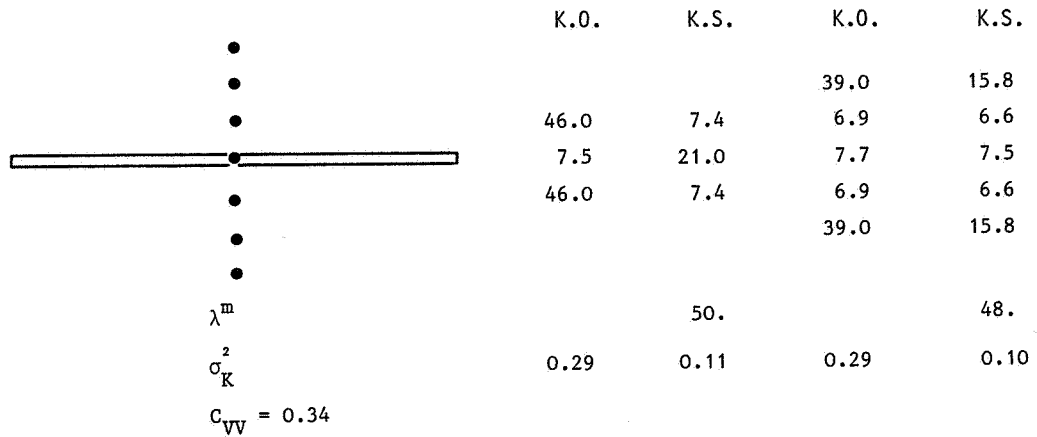


Figure 2-4-4h Schéma sphérique de portée verticale 20 ℓ et horizontale 12 ℓ

supprime l'effet d'écran inverse (poids forts attribués à des informations lointaines, ce qui peut sembler gênant), est évidemment suggéré par la robustesse de la variance d'estimation vis-à-vis d'une modification des poids de krigeage (cf 1-6).

La figure 2-4-4h (schéma sphérique de portée verticale 20 ℓ , et de portée horizontale 12 ℓ) montre une répartition des poids qui tient à la fois de l'effet d'écran inverse (par son K.M.) et de la forme allongée du panneau (par son K.S.) : le poids de la moyenne vaut en effet environ 50%.

Sur les figures 2-4-4f, g et h, on peut constater également le fait suivant : si l'on rajoute, à une configuration donnée, des informations extérieures, seules les informations extrêmes de la configuration de départ voient leur poids changer de façon notable. Ce poids diminue, et la différence tend à se répartir entre les nouvelles informations. Ce phénomène, vrai en K.S., K.O. ou K.M., et particulièrement remarquable lorsque les informations extrêmes ont comme ici un poids important, est d'ailleurs assez général. En effet, si l'on renverse la chronologie des observations, la suppression (au lieu du rajout) des informations extérieures crée en quelque sorte une lacune, avec les conséquences que l'on connaît (cf 2-2-4).

Enfin, pour en revenir à la figure 2-4-4c, l'égalité du poids des informations, dans le cas du variogramme sphérique, provient d'une juste compensation :

- entre le K.S. qui attribue un poids supérieur à l'information centrale
- et entre le K.M., qui favorise les informations extérieures.

2-5 LES POIDS NEGATIFS

2-5-1 INTRODUCTION

Dans l'effet d'écran, des informations proches "masquent" des informations lointaines, qui reçoivent alors des poids (positifs ou négatifs) voisins de zéro : l'estimation ignore alors quasiment les valeurs d'échantillons correspondantes.

Avec des poids négatifs (de l'ordre de quelques % au moins), on assiste à un phénomène d'attraction-répulsion : répulsion à l'égard des échantillons à poids négatifs, compensée par une attraction vis-à-vis de ceux dont les poids sont positifs.

Ces poids négatifs sont relativement fréquents avec les schémas de variogramme courants (le cas particulier où la variabilité n'est pas croissante avec la distance - effet de trou - sera examiné au chapitre suivant). Après quelques exemples de poids négatifs, nous essaierons de montrer quelle est la cause de tels phénomènes. Ces poids négatifs, par ailleurs, posent un problème pratique lorsqu'on manipule des variables essentiellement positives (des teneurs, en estimation minière). Nous parlerons donc ensuite de ce problème, et de la façon de le résoudre.

2-5-2 QUELQUES EXEMPLES DE POIDS NEGATIFS.

A.2 Dimensions

La figure 2-5-2a montre l'estimation, à 2 dimensions, d'un point, à partir de deux auréoles d'informations disposées à maille régulière.

On note des points négatifs non négligeables (-6 et -9%) sur les 8 informations situées à distance moyenne (on voit aussi qu'en K.S. la première auréole sert de relais à la seconde). De tels poids négatifs persistent si l'on ne retient qu'une auréole (Figure 2-5-2b), et disparaissent bien sûr en prenant les 4 informations les plus proches (Figure 2-5-2c). On remarque surtout que toutes ces configurations se différencient par de très faibles variations de précision.

Ne retenir, comme sur la Figure 2-5-2c, que les informations les plus proches (qui voient alors leur poids légèrement augmenter), revient à imposer aux autres informations un poids nul (au lieu d'un poids égal à -6, -9, 1 ou 0.1%). On constate à nouveau (cf 1-6 et 2-4-4) que la précision est peu sensible aux modifications des poids de krigeage.

A.1 Dimension

On estime ici encore un point à partir d'informations situées à maille régulière.

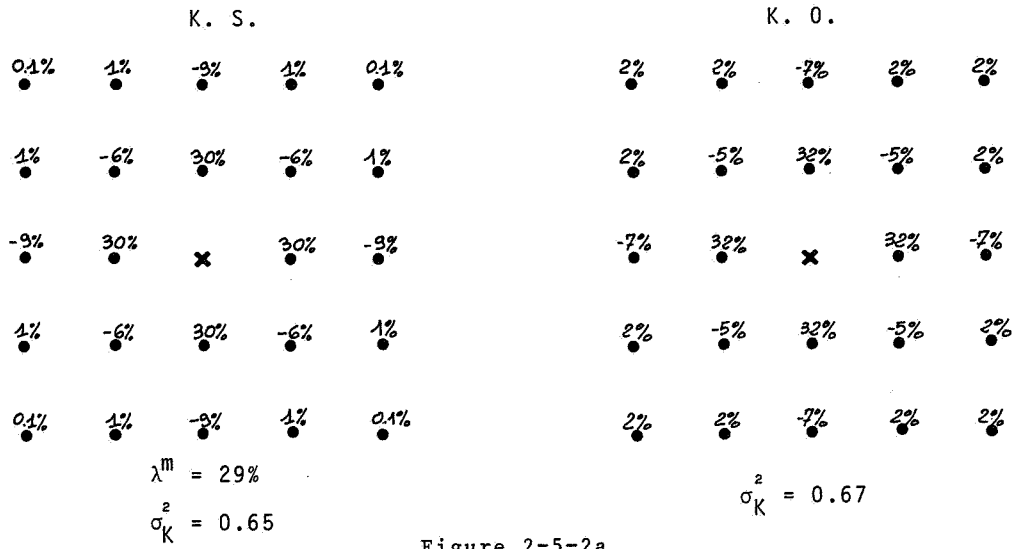


Figure 2-5-2a

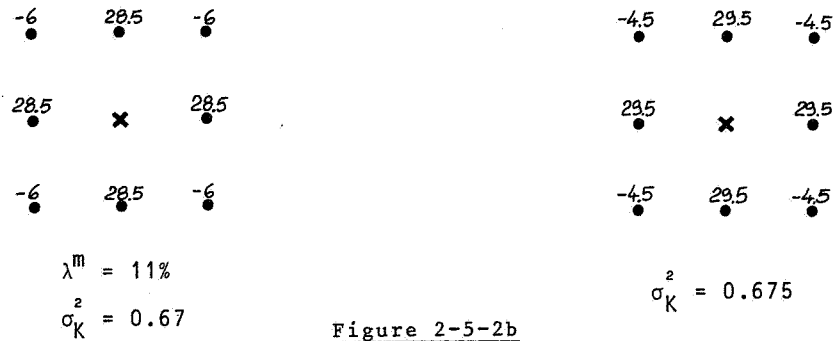


Figure 2-5-2b

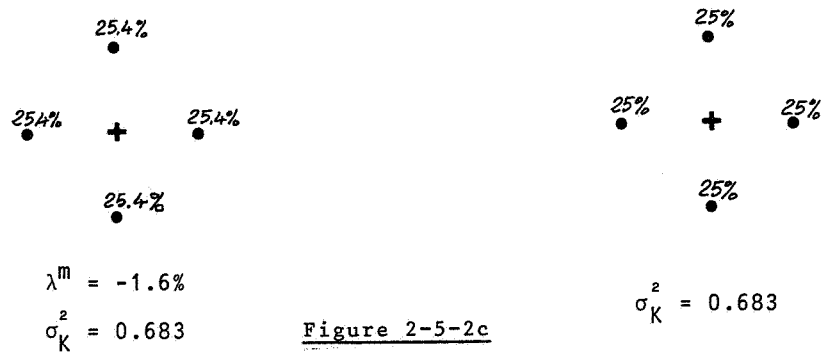


Figure 2-5-2c

Schéma sphérique de portée $a = 2 \ell$

Sur la Figure 2-5-2d (schéma sphérique de portée $a = 2 \ell$), des poids négatifs apparaissent sur des informations situées à des distances multiples paires de ℓ (alternance). On remarque ici aussi que la variance d'estimation bouge peu (que ce soit en K.S. ou en K.O.) : les informations "lointaines" n'améliorent pas la précision fournie par les 2 plus proches. On voit également que des poids négatifs peuvent très bien accompagner des estimations peu précises.

La figure 2-5-2e correspond à un variogramme sphérique de portée double ($a = 4 \ell$). On y trouve des poids négatifs sur les informations à distance 3ℓ et parfois à distance 2ℓ . La suppression, en K.O., des informations à poids négatifs situés à distance 3ℓ , fait surgir de nouveaux poids négatifs à la distance 2ℓ . Comme précédemment, la précision est quasiment identique pour toutes les configurations (K.S. et K.O. sont ici très voisins du fait du faible poids de la moyenne). La précision, ici assez importante, fournie par les 2 points les plus proches, n'est donc guère améliorée par les autres points.

Avec une structure gaussienne de faible portée ($a/\ell = 1$, Figure 2-5-2f), les résultats sont assez semblables à ceux de la Figure 2-5-2d : la précision n'est pas très bonne et provient des 2 points les plus proches.

Avec une structure très continue (gaussienne de grande portée $a = 2 \ell$, Figure 2-5-2g), on trouve des poids, alternativement positifs et négatifs, et très forts en valeur absolue. A la différence des cas précédents, la précision varie beaucoup avec le nombre d'informations, mais elle reste de toute façon toujours très élevée. On note ici aussi que la suppression des informations à poids négatifs à la distance 2ℓ entraîne l'apparition de nouveaux poids négatifs à la distance 3ℓ .

Si maintenant, toujours avec la même structure très continue, on considère l'estimation obtenue par des informations situées toutes du même côté, on observe (Figure 2-5-2h)

- des poids, toujours positifs ou négatifs en alternance, mais encore plus forts
- des variations importantes de précision
- une précision assez bonne, mais beaucoup moins bonne que précédemment.

2-5-3 POURQUOI DES POIDS NEGATIFS ?

Matheron (1970) explique physiquement pourquoi, avec une structure assez continue, on doit s'attendre à des poids négatifs. Son exemple est très proche des configurations 2-5-2d, e, f avec 4 informations.

Ainsi, si les valeurs mesurées sur les points extérieurs sont forts, et si celles des informations voisines sont faibles, un phénomène assez régulier montrera au centre

•	•	•	•	×	•	•	•	•	λ^m	σ_K^2	
-1	4	-12	35%		35	-12	4	-1	49	0.78	K.S.
6	9	-7	42		42	-7	9	6		0.82	K.O.
	4	-12	35		35	-12	4		47	0.78	K.S.
	13	-7	44		44	-7	13			0.83	K.O.
		-11	35		35	-11			52	0.78	K.S.
		2	48		48	2				0.87	K.O.
			31		31				37.5	0.80	K.S.
			50		50					0.875	K.O.
	0		31.3		31.3		0		37.	0.80	K.S.
	9.4		40.6		40.6		9.4			0.84	K.O.

Figure 2-5-2d Schéma sphérique $a/\ell = 2$

•	•	•	•	×	•	•	•	•	λ^m	σ_K^2	
0.2	-7	-0.4	50%		50	-0.4	-7	0.2	14	0.38	K.S.
3	-6	0.7	52		52	0.7	-6	3		0.39	K.O.
	-7	-0.5	50		50	-0.5	-7		14	0.38	K.S.
	-3	0.5	53		53	0.5	-3			0.39	K.O.
		-6	51		51	-6			9	0.39	K.S.
		-3	53		53	-3				0.39	K.O.
			48		48				4	0.39	K.S.
			50		50					0.39	K.O.

Figure 2-5-2e Schéma sphérique $a/l = 4$

•	•	•	•	×	•	•	•	•	λ^m	σ_K^2	
-2	6	-16	41%		41	-16	6	-2	40	0.70	K.S.
4	9	-12	48		48	-12	9	4		0.73	K.O.
	5	-15	42		42	-15	5		38	0.70	K.S.
	13	-12	49		49	-12	13			0.73	K.O.
		-13	41		41	-13			45	0.70	K.S.
		- 2	52		52	- 2				0.77	K.O.
			36		36				28	0.73	K.S.
			50		50					0.77	K.O.
-0.006			36		36		-0.006		29	0.73	K.S.
0.07			43		43		0.07			0.76	K.O.

Figure 2-5-2f Schéma gaussien de paramètre
de portée a égal à l

•	•	•	•	×	•	•	•	•	λ^m	σ_K^2	
-12	36	-65	90%		90	-65	36	-12	2%	0.0089	K.S.
-11	35	-64	90		90	-64	35	-11		0.009	K.O.
	18	-52	85		85	-52	18		-3	0.0142	K.S.
	17	-51	84		84	-51	17			0.0145	K.O.
		-30	77		77	-30			8	0.031	K.S.
		-27	77		77	-27				0.034	K.O.
			57		57				-14	0.113	K.S.
			50		50					0.126	K.O.
	-12.8		60.6		60.6		-12.8		4.6	0.084	K.S.
	-11.4		61.4		61.4		-11.4			0.085	K.O.

Figure 2-5-2g Schéma gaussien de paramètre
de portée a égal à 2 ℓ

×	•	•	•	•	λ^m	σ_K^2	
	78				22	0.39	K.S.
	100					0.44	K.O.
	125	-61			36	0.25	K.S.
	143	-43				0.36	K.O.
	154	-120	47		19	0.19	K.S.
	170	-134	64			0.21	K.O.
	171	-164	104	-37	26	0.17	K.S.
	185	-165	103	-23		0.20	K.O.

Figure 2-5-2h Schéma gaussien de paramètre
de portée a égal à 2 ℓ

une valeur encore plus faible : d'où les poids négatifs attribués aux points extérieurs (Figure 2-5-3a). Un tel résultat peut être d'ailleurs tout-à-fait souhaitable lorsqu'on fait de la cartographie.

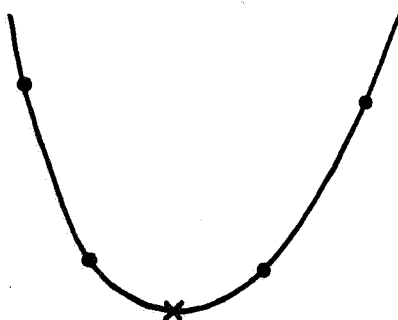


Figure 2-5-3a

Matheron suggère aussi une autre explication, de caractère plus mathématique, liée au caractère très régulier d'une F.A.St. à covariance gaussienne. Une telle fonction est mathématiquement analytique. Elle peut donc faire l'objet localement d'une approximation par un développement limité (de type Taylor).

Dans le cas discret et à maille régulière (ℓ) qui est le nôtre, cette approximation relève du "calcul des différences finies" (G. Guelfond (1963), 1er chapitre). Soient les différences successives :

$$\Delta Z(x) = Z(x+\ell) - Z(x)$$

$$\Delta^2 Z(x) = \Delta Z(x+\ell) - \Delta Z(x) = Z(x+2\ell) - 2 Z(x+\ell) + Z(x)$$

$$\Delta^n Z(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k Z(x+k\ell)$$

En écrivant que $\Delta^n Z(x) = 0$ sur $(n+1)$ points successifs, on obtient l'approximation par un polynôme de degré n , d'un des points à partir des n autres points : cette approximation apparaît alors comme une combinaison linéaire des informations, avec des poids tantôt positifs, tantôt négatifs.

On constate bien (Figures 2-5-3b et c) qu'avec des covariances gaussiennes de grande portée (5ℓ , 10ℓ), le krigeage devient très proche de l'ajustement polynomial.

Ainsi, grâce à l'intervention des dérivées - ou plutôt des différences finies - on peut expliquer la présence (et l'alternance) de poids négatifs, au moins pour des grandes portées. Si on diminue continûment la portée (ou si on augmente la maille), on peut seulement affirmer que, par continuité, les poids négatifs doivent persister, au moins un certain temps.

		•	•	×	•	•	σ_K^2	λ^m
Schéma gaussien	$a = 5 \ell$ (K.O.)	-18.9	68.9%		68.9	-18.9	0.000	4.3%
Schéma gaussien	$a = 10 \ell$	-17.3	67.3%		67.3	-17.3	0.000	0.0%
Ajustement polynomial	$\Delta^4 Z = 0$	-1/6	2/3		2/3	-1/6		

Figure 2-5-3b

		×	•	•	•	•	σ_K^2	λ^m
Schéma gaussien	$a = 5 \ell$ (K.O.)		1.89	0.89			0.017	7.5%
	$a = 10 \ell$		1.97	0.97			0.001	2 %
Ajustement polynomial	$\Delta^2 Z = 0$		2	1				
Schéma gaussien	$a = 5 \ell$		2.70	-2.63	0.92		0.0025	0.87%
	$a = 10 \ell$		2.92	-2.90	0.98		0.0000	0.1%
Ajustement polynomial	$\Delta^3 Z = 0$		3	-3	1			
Schéma gaussien	$a = 5 \ell$		3.46	-4.77	3.13	-0.82	0.001	1.6%
	$a = 10 \ell$		3.84	-5.62	3.71	-0.94	0.0000	0.1%
Ajustement polynomial	$\Delta^4 Z = 0$		4	-6	4	-1		

Figure 2-5-3c En raison de leur amplitude, les poids autres que celui de la moyenne, sont indiqués en valeur réelle, et non en pourcentage.

2-5-4 UN DERNIER EXEMPLE

La figure 2-5-4 montre l'estimation d'un panneau par les échantillons d'un sondage central.

A cause de la propriété d'écran déjà vue à propos de la covariance gaussienne (2-4-2-2) le K.S. ne fait intervenir que l'échantillon central. Le K.M. donne des poids alternativement positifs et négatifs, mais le signe affecté à un échantillon dépend du nombre d'informations prises, car les informations extérieures ont toujours un poids positif

Le K.O. ne diffère naturellement du K.M. que pour l'échantillon central. La combinaison du K.S. et du K.M. donne d'ailleurs curieusement un poids K.O. quasi-nul pour la configuration de la dernière colonne.

La curiosité de cet exemple provient de la très grande continuité de la structure (gaussienne de grande portée). Avec une structure toujours gaussienne mais de portée moitié, tous les poids seraient positifs.

2-5-5 LE DANGER DES POIDS NEGATIFS. QUE FAIRE ?

On n'aime guère, en estimation minière, les poids négatifs. Dans le cas d'une distribution très dissymétrique (par exemple valeurs faibles en grand nombre), un poids - même faiblement négatif - affecté à une teneur riche peut conduire, si les autres teneurs ne sont pas très élevées, à une teneur estimée plus pauvre que chacun des échantillons du voisinage, et même parfois négative (on n'a pas demandé au modèle de garantir des teneurs positives !). Et ceci peut arriver, que la précision soit bonne ou pas. Se dire alors qu'en moyenne, on a minimisé la variance des erreurs n'apporte pas le réconfort nécessaire.

Face à ce problème, Barnes et Johnson (1984) proposent d'imposer au krigeage une condition de positivité des poids, solution assez lourde, qui présente cependant l'avantage d'être entièrement automatique. Mais il existe d'autres moyens de s'en sortir.

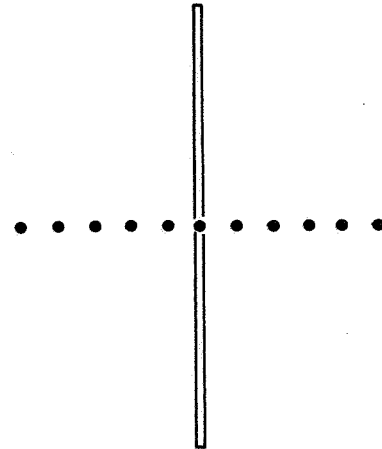
Le risque de voir apparaître des teneurs négatives est d'autant plus fort que la distribution possède une longue queue. Curieusement c'est dans de telles circonstances que l'estimateur linéaire de krigeage s'éloigne de l'optimum (cf 1-4 dernière remarque). Un estimateur non linéaire peut alors se révéler préférable.

L'espérance conditionnelle en modèle multigaussien (cf Remacre 1984) garantirait, grâce à l'anamorphose, une teneur toujours positive. Malheureusement, l'anamorphose gaussienne est mal adaptée aux distributions très dissymétriques. D'ailleurs, même avec d'autres lois que les gaussiennes, une hypothèse multivariable serait tout aussi incontrôlable. En outre, un tel estimateur ne peut satisfaire aux exigences de la stationnarité locale.

Le krigeage disjonctif, qui attribue à chaque échantillon un poids fonction de sa teneur, est déjà beaucoup plus intéressant. Adaptable à la stationnarité locale (cf Remacre

1984), il ne nécessite que la connaissance de lois bivariées (qui peuvent en pratique être bigaussiennes, mais aussi par exemple isofactorielles gamma ou binomiales négatives..) Toutefois, le risque d'obtenir des teneurs négatives n'est pas totalement exclu, et le recours à un Krigeage Disjonctif n'est vraiment intéressant que s'il permet une précision bien meilleure que celle du krigeage linéaire.

En ce qui concerne spécifiquement le problème des poids et teneurs négatifs, les exemples fournis montrent (mais ne démontrent pas !) le fait suivant : en dehors des cas où la structure est très continue (schéma gaussien de grande portée) et où d'ailleurs un modèle probabiliste n'est plus indispensable, les échantillons à poids négatifs n'apportent aucun gain de précision. En pratique, la solution la plus simple consiste donc à les supprimer, en vérifiant bien que la précision n'en souffre pas (opération qui peut demander une ou deux itérations : on a vu que la suppression de tels échantillons pouvait faire apparaître ailleurs de nouveaux poids négatifs).



K.S.	K.M.	K.O.	K.M.	K.O.	K.M.	K.O.	K.M.	K.O.	K.M.	K.O.	K.M.	K.O.
0											38.3	25.8
0											-40.2	-27.1
0											61.9	41.6
0											-49.0	-33.0
0											51.3	30.6
0											-42.5	-27.1
0											63.2	42.5
0											-48.4	0.1
32.7											87.2	42.5
0											-42.5	-33.0
0											51.3	41.6
0											-49.0	-27.1
0											61.9	25.8
0											-40.2	
0											38.3	
0.124	0.61	0.40	0.45	0.33	0.36	0.29	0.30	0.26	0.26	0.24		

$\lambda^m = 67.3$
 σ_K^2
 $C_W = 0.23$

Figure 2-5-4 Schéma gaussien de paramètre de portée égal à 2λ en vertical et 4 λ en horizontal.

2-6 L'EFFET DE TROU

Avec un effet de trou, la variabilité n'est plus croissante en fonction de la distance. la distance correspondant au "trou", ou plus généralement la pseudo-période, est un paramètre important dans l'estimation. De son rapport avec la longueur de la maille (supposée régulière) vont largement dépendre les poids de krigeage et la précision.

Très démonstratif est le cas où la maille vaut la moitié de la pseudo-période, et nous allons en donner un exemple (à 1 dimension). Le modèle de covariance choisi ici (figure 2-6a) s'écrit :

$$C(h) = \cos\left(2\pi \frac{h}{p}\right) e^{-\frac{|h|}{a}}$$

(autorisé uniquement à 1 dimension). p est la pseudo-période, égale donc à deux fois la maille ℓ . Pour avoir des oscillations assez importantes, le paramètre de portée a est pris égal à ℓ . (Portée pratique : $3a$)

Le K.S.

Pour h multiple de ℓ , donc de $\frac{p}{2}$ ($h = k \frac{p}{2}$), on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = \text{signe de } k = \frac{k}{|k|}$$

D'où :

$$C(h) = \frac{k}{|k|} e^{-\frac{|h|}{a}}$$

En n'utilisant que des distances multiples de $p/2$, la covariance se prête donc à la même factorisation que le schéma exponentiel, et provoque, comme ce dernier, un effet d'écran total en K.S. (Figure 2-6b) : seuls les points les plus proches ont un poids non nul. Que ce poids soit négatif s'explique par le fait que les points en question sont en opposition de phase avec le point à estimer : le phénomène étant pseudo-périodique, si leurs valeurs sont fortes, la valeur à estimer a toute chance d'être faible.

De ces poids négatifs, il s'ensuit un poids de la moyenne énorme : $\lambda^m = 165\%$.

K.M. et K.O.

Avec seulement les deux points les plus proches (qui du fait de la pseudo-période de la fonction, sont en phase), la moyenne est très mal située : $\sigma_{Km}^2 = 0.68$. Comme λ^m est très élevé, la variance KO :

$$\sigma_{KO}^2 = \sigma_{KS}^2 + (\lambda^m)^2 \sigma_{KM}^2$$

est énorme : 2.9.

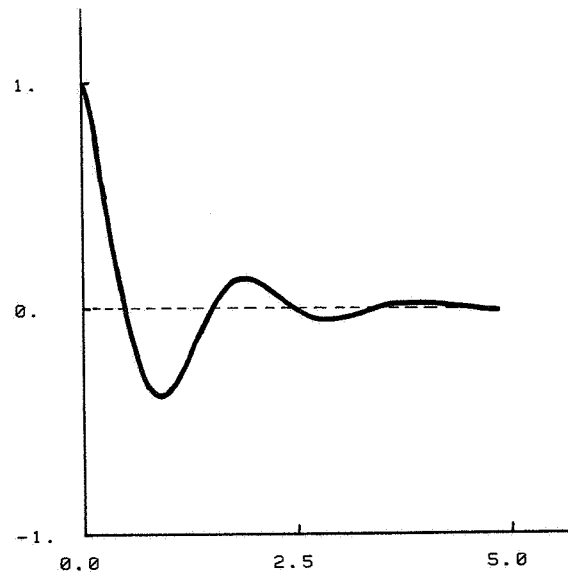


Figure 2-6a Covariance à effet de trou

$$C(h) = \cos\left(2\pi \frac{h}{2}\right) e^{-|h|}$$

	•	•	•	×	•	•	•	σ_K^2	
K.S.	0	0	-32.4%		-32.4%	0	0	0.76	$\lambda^m = 164.8\%$
K.M.			50		50			0.68	
K.O.			50		50			2.9	
K.M.		26.0	24.0		24.0	26.0		0.16	
K.O.		42.8	7.2		7.2	42.8		1.21	
K.M.	15.2	20.8	14.0		14.0	20.8	15.2	0.096	
K.O.	25.0	34.2	-9.3		-9.3	34.2	25.0	1.02	

Figure 2-6b Schéma à effet de trou

L'estimation de la moyenne par les 6 points voisins attribue aux points $\pm 2\lambda$ des poids plus forts qu'aux 4 autres points (lesquels ont d'ailleurs des poids très voisins). En effet, si ces 4 points tombent sur les parties riches du phénomène pseudo-périodique, les 2 autres tomberont probablement dans les parties pauvres. La différence entre poids vise à équilibrer la "sur-reconnaissance" éventuelle des parties riches ou pauvres.

Avec les 4 points voisins seulement, cette disparité ne risque pas de se produire : aussi le calcul de la moyenne leur attribue-t-il un poids sensiblement égal.

Suppression des Informations à Poids Négatif

Dans cet exemple très particulier, les poids négatifs correspondent aux informations les plus proches, ce qui est tout-à-fait nouveau. La suppression de ces informations entraîne, en K.S., une perte de précision non négligeable : la variance passe de 0.76 à 0.96 (Figure 2-6c). En K.O. par contre, on constate que ces informations, bien que les plus proches, n'apportaient guère de précision.

	•	•	×	•	•	σ_K^2	
K.S.	0	13.3		13.3	0	0.96	$\lambda^m = 73.4\%$
K.M.	25.1	24.9		24.9	25.1	0.16	
K.O.	18.5	31.5		31.5	18.5	1.05	

Figure 2-6c Schéma à effet de trou

2-7 LE COMPORTEMENT DU POIDS DE LA MOYENNE

POIDS DE LA MOYENNE ET STATIONNARITE

Le poids de la moyenne, calculé à partir des équations du K.S., indique l'importance de la moyenne - connue en K.S. ou seulement estimée en K.O. - en krigeage (cf 1ère partie). Si ce poids est faible, krigeages à moyennes connue et inconnue sont voisins. Autrement dit, l'hypothèse de stationnarité stricte est alors à peine plus forte qu'une hypothèse de stationnarité locale.

En outre, si l'on resserre une maille d'informations, on voit en général le poids de la moyenne chuter. Et on comprend bien qu'une hypothèse de stationnarité stricte soit d'autant plus acceptable que la densité des informations est élevée.

Fort de cette conclusion, on a été amené à utiliser ce poids de la moyenne comme critère plus général d'utilisation d'estimateurs non linéaires nécessitant une stationnarité stricte. Cette opération a été conduite avec succès ; elle a permis aussi de construire des estimateurs non linéaires pour les cas où l'hypothèse de stationnarité stricte n'est pas admissible (cf Remacre, 1984).

Les lignes qui suivent visent à préciser le comportement du poids de la moyenne.

LA VARIANCE DE KRIGEAGE

Deux critères caractérisent la quantité d'information fournie par les données pour une estimation locale :

- la variance de krigeage, qui nous renseigne sur la précision
- le poids de la moyenne, qui nous informe sur la validité d'hypothèses de stationnarité stricte.

Résumons le comportement de la variance de krigeage avant de passer à celui du poids de la moyenne, qui est un peu plus délicat.

- La variance est positive.
- Si on rajoute des informations, elle diminue.
- Elle est d'autant plus petite que les informations sont proches (à certaines exceptions près, en K.O. : cf 2-2-5).
- Elle tend alors vers zéro, en estimation ponctuelle et en l'absence d'effet de pépité.

Démontrons ce dernier point :

La variance d'estimation K.O. de $Z(x)$ par les $Z(x_\alpha)$ s'écrit :

$$\text{Var}(Z(x) - \sum \lambda^\alpha Z_\alpha) = C(o) - 2 \sum \lambda^\alpha C_{\alpha x} + \sum \sum \lambda^\alpha \lambda^\beta C_{\alpha\beta}$$

Les points x_α se rapprochant de x , les termes $C_{\alpha x}$ et $C_{\alpha\beta}$ tendent vers $C(o)$. Du fait de la condition de non-biais, la variance K.O. tend donc vers 0 ; la variance K.S. qui lui est inférieure, également... Passons maintenant au poids de la moyenne :

Le poids de la moyenne tend vers 0, lorsque les informations se rapprochent (toujours en estimation ponctuelle sans effet de pépité).

Pour le voir, il suffit de considérer l'expression de la variance K.S. de $Z(x)$ par les $Z(x_\alpha)$:

$$\sigma_K^2 = C(o) - \sum \lambda^\alpha C_{\alpha x}$$

Quand les informations se rapprochent, chacun des termes $C_{\alpha x}$ tend vers $C(o)$. Comme σ_K^2 tend vers 0, $\sum \lambda^\alpha = 1 - \lambda^m$ tend vers 1.

En estimation non ponctuelle, le poids de la moyenne du krigeage d'un bloc est égal à la moyenne des valeurs prises par ce même poids, dans le krigeage de chacun des points de bloc.

Le poids de la moyenne diminue lorsqu'on rajoute des informations tant que n'apparaissent pas de poids négatifs.

C'est ce qu'on peut observer sur les configurations de la figure 2-7a (sur la dernière configuration, on peut à nouveau constater la présence de poids négatifs malgré la faible précision).

Sur les configurations de la figure 2-5-2e, qui contiennent des poids négatifs, on remarque que le poids de la moyenne est minimum avec le voisinage le plus petit.

Le poids de la moyenne peut aussi augmenter lorsqu'on rajoute des informations à poids négatifs. Bien que dans ces conditions, la différence sur le krigeage entre stationnarité stricte et locale s'accroît, on ne voit pas pourquoi les méthodes non linéaires stationnaires seraient moins efficaces avec plus d'informations. Pour être utilisé comme critère d'utilisation de telles méthodes, le poids de la moyenne demande logiquement de n'être calculé qu'après élimination des informations à poids négatifs. Ceci est d'ailleurs d'autant plus légitime que cette élimination se fait quasiment sans perte de précision (sauf dans les cas d'école où la structure est extrêmement continue).

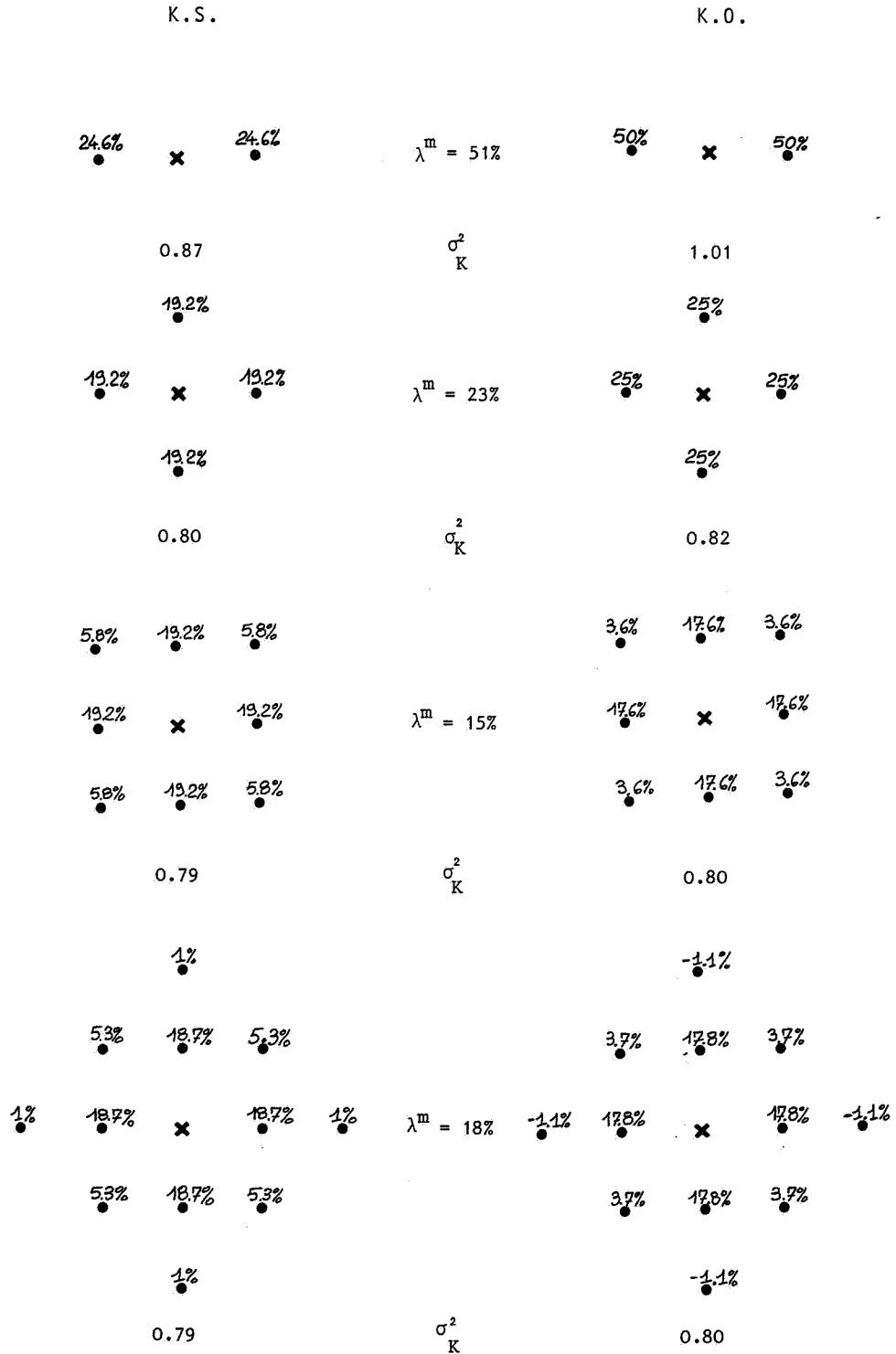


Figure 2-7a Schéma exponentiel de paramètre de portée $a = 0.75 \ell$

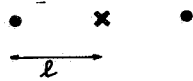
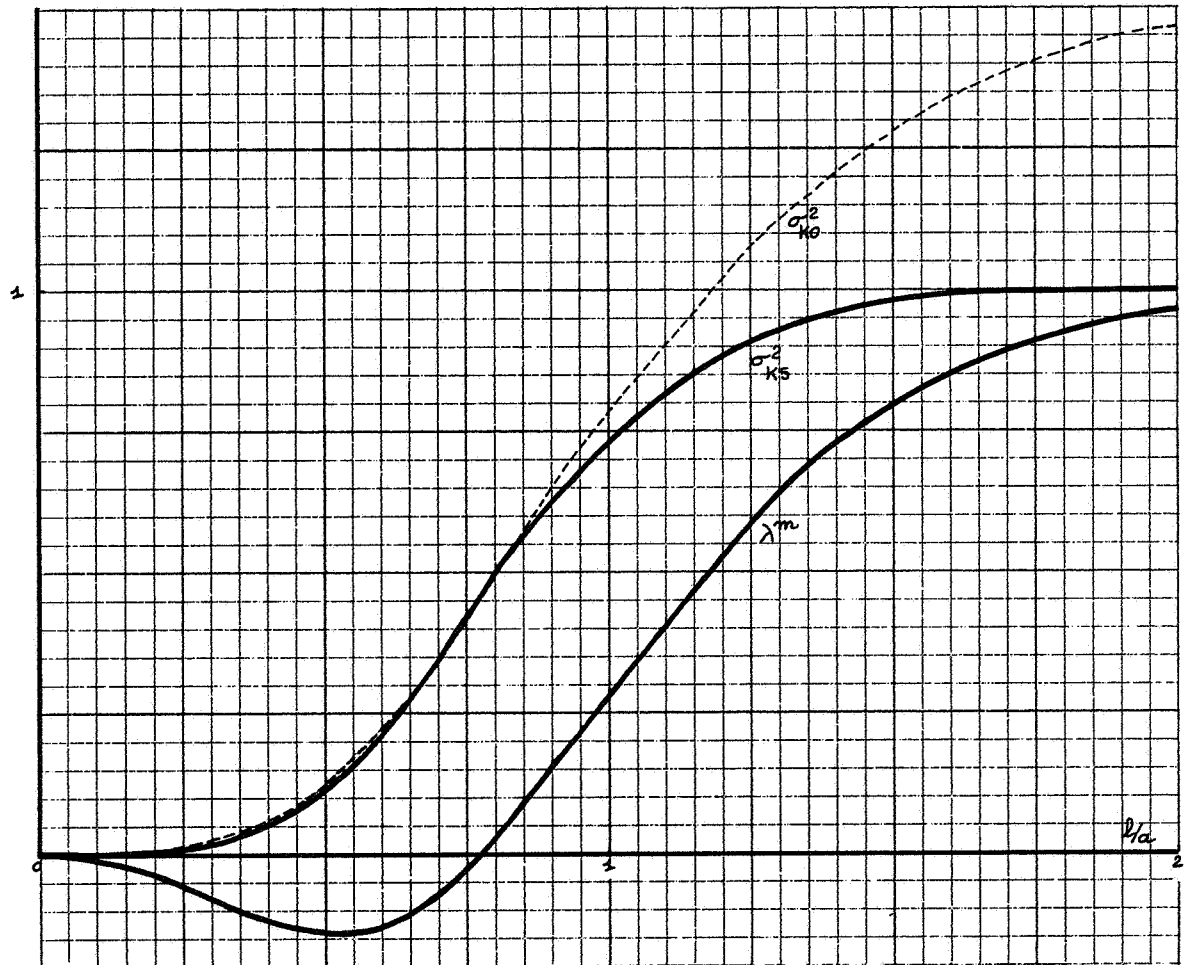


Figure 2-7b - Variation du poids de la moyenne et des variances de krigeage en fonction de l'éloignement des informations.

Structure gaussienne de paramètre de portée a .

Le poids de la moyenne peut prendre des valeurs négatives.

Le phénomène d'attraction-répulsion, observé sur les informations, s'applique aussi à la moyenne. La figure 2-7b montre comment l'estimation 1D d'un point par deux voisins qui s'en rapprochent, conduit, aux courtes distances, à un poids de la moyenne négatif (structure gaussienne).

L'explication physique de ce phénomène est claire. La stationnarité correspond physiquement à une attraction vers la moyenne. Supposons que les 2 informations correspondent à des valeurs voisines très différentes de la moyenne. Tant que les deux informations sont distantes, cette attraction pourra se manifester pour les points situés entre les informations ($\lambda^m > 0$), de façon relativement indépendante de ce qui se passe à l'extérieur. Mais si les informations sont peu distantes, la fonction étant très régulière, l'attraction vers la moyenne se manifestera plutôt pour les points situés à l'extérieur. Ceux de l'intérieur auront tendance à s'écarter de la moyenne ($\lambda^m < 0$) : figure 2-7 c.

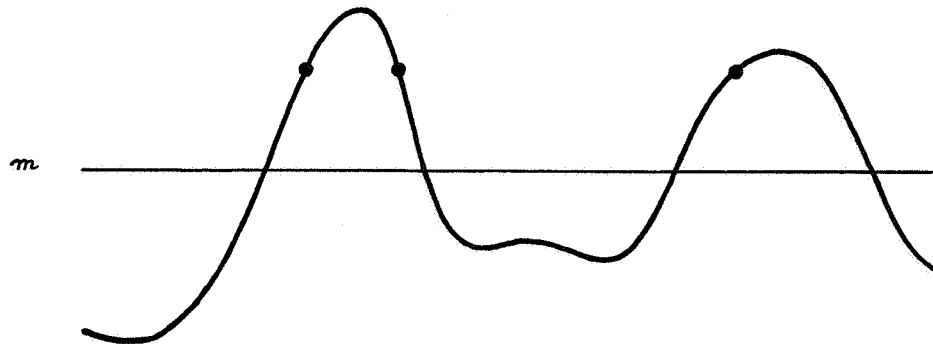


Figure 2-7c

Le poids de la moyenne est souvent voisin de 0.

Sur la figure 2-7a , le poids de la moyenne chute de 51 à 15% alors que la variance d'estimation ne fait que descendre de 0.87 à 0.79 en K.S., et de 1.01 à 0.80 en K.O. En ajoutant des informations, on voit donc le poids de la moyenne diminuer beaucoup plus rapidement que la variance.

Ce phénomène apparemment assez général a pour conséquence pratique importante que le poids de la moyenne se trouvera souvent voisin de 0.

2-8 DETERMINATION DU VOISINAGE DE K.S. ET DU POIDS DE LA MOYENNE.

Contrairement au K.O., le voisinage du K.S. n'a pas à être choisi, car il est en général, à peu de choses près, déterminé.

Il est d'abord essentiel de tenir compte de toutes les informations susceptibles d'avoir du poids (c'est-à-dire celles qui sont situées à une distance inférieure à la portée, si l'on néglige le phénomène de relais). En dehors des structures très continues, l'élimination des informations à poids négatifs a tout intérêt à être faite, puisqu'elle supprime le risque de teneurs aberrantes, et ceci, pratiquement sans perte de précision. On peut aussi supprimer les informations ayant un poids négligeable et n'influant pas sur la précision, ni sur le poids de la moyenne. Le voisinage contient alors toutes les informations nécessaires.

A ce stade on peut calculer le poids de la moyenne, soit pour choisir un voisinage de K.O., soit pour décider de l'emploi d'une méthode d'estimation non linéaire stationnaire (récupérable à l'intérieur de panneaux).

Pour utiliser une telle méthode, il paraît indispensable que le poids de la moyenne soit faible. Toutefois, on ne sait pas s'il existe une limite supérieure pour ce poids (5%, 10%, 20% ?). Le mieux est alors de comparer à leur estimation K.O. les teneurs des panneaux estimés par la méthode non linéaire (récupérable à coupure nulle : on prend tout le panneau). Si ces teneurs estimées sont beaucoup moins dispersées que les teneurs K.O., et qu'en conséquence les panneaux riches en K.O. sont "sous-estimés", et les pauvres "surestimés", les conditions ne sont pas propices (cf Remacre 1984).

2-9 CHOIX DU VOISINAGE DE K.O.

Pour ne pas perdre de précision, le voisinage de K.O. doit être au moins égal au voisinage de K.S..

La variance d'estimation de la moyenne se répercute, en K.O., pondérée par le carré du poids de la moyenne :

$$\sigma_{KO}^2 = \sigma_{KS}^2 + (\lambda^m)^2 \sigma_{KM}^2$$

Avec un poids de la moyenne égal à 30%, $(\lambda^m)^2$ vaut 0.09, ce qui est déjà petit. Ainsi, avec un

poids de la moyenne faible, on peut se contenter du voisinage K.S. pour faire un K.O.

Plus le poids de la moyenne est important, plus il peut être avantageux de choisir un voisinage important, de façon à mieux estimer la moyenne (il se peut qu'avec ce nouveau voisinage, à cause d'informations à poids K.S. négatif, le poids de la moyenne ait légèrement augmenté).

En cartographie ponctuelle, l'influence d'une moyenne, calculée localement sur un voisinage glissant, pose des problèmes de raccordement, inexistant en estimation minière (estimation non ponctuelle). Il est bon dans ce cas de calculer la moyenne locale autrement : par exemple pour un très grand voisinage, en forçant le poids des informations à diminuer progressivement jusqu'à 0, quand on se rapproche de la frontière du voisinage

2-10 LES REGROUPEMENTS

Il est tout-à-fait rigoureux de regrouper, sous un même pondérateur, des informations ayant des poids égaux, ce qui diminue d'autant la taille de la matrice de krigeage à inverser, et conserve la précision. Cette circonstance se produit essentiellement lorsqu'existent des symétries entre informations, relativement au volume à estimer, et compte tenu de la structure.

Dans le cas où des informations ont des poids différents, leur regroupement leur attribue alors des poids égaux, au prix d'une perte de précision, qui peut être d'ailleurs faible (cf Fig. 2-4-4g, où le regroupement supprime l'effet d'écran inverse).

En cartographie cependant, la précision n'est pas le seul critère à prendre en compte. Le regroupement abusif d'informations non voisines dans un voisinage glissant peut créer des problèmes de raccordement, indépendamment de l'estimation de la moyenne et en particulier lorsque son poids est nul. En effet, lorsque point à estimer et voisinage de krigeage se déplacent, une information qui sortirait du voisinage avec un poids quasi-nul, peut, si elle est regroupée avec une information ayant plus de poids, provoquer une discontinuité de l'estimateur quand elle sort du voisinage.

Au contraire, l'existence de poids différents pour des informations très proches les unes des autres (clusters) peut apparaître indésirable (c'est exactement ce qui se passe avec l'effet d'écran inverse) et justifier un regroupement, ce qui supprime d'ailleurs certains risques d'instabilité numérique (lignes quasi-égales dans la matrice de krigeage à inverser).

3 - C O N C L U S I O N

Le contenu de cette thèse sur le comportement des poids de krigeage comporte trois aspects : méthodologique, descriptif, pratique. Il est commode d'en faire ici la distinction .

ASPECT METHODOLOGIQUE

Deux points sont à souligner :

- Le rôle des hypothèses de stationnarités stricte et locale en estimation locale a pu être précisé . Lorsque le poids de la moyenne est élevé, la stationnarité stricte est une hypothèse très forte. Le non-biais d'un estimateur (linéaire ou non) n'est alors en général assuré qu'au niveau du domaine tout entier ayant permis de définir le modèle. Pour garantir le non-biais sur des zones plus petites, il convient de travailler en stationnarité locale.

- La décomposition du Krigeage Ordinaire en krigeage simple et krigeage de la moyenne, s'est révélée l'outil sûr et indispensable pour comprendre nombre de comportements plus ou moins curieux rencontrés en K.O.

ASPECT DESCRIPTIF

Il s'agit d'observations concernant le rôle des échantillons dans une estimation par krigeage, ainsi que le comportement de leur poids :

- En estimation non ponctuelle (bloc), échantillons intérieurs et extérieurs jouent un rôle différent : la précision est plutôt due aux échantillons intérieurs, tandis que la prise en compte d'échantillons extérieurs permet de se prémunir contre une surestimation systématique (i.e. quelle que soit la coupure) à la sélection.

- L'influence - classique mais combien importante en pratique - de la structure et de la configuration géométrique permet de comprendre facilement beaucoup de configurations de krigeage.

- La présence d'une anisotropie zonale montre très bien ce que représente la connaissance d'une moyenne.

- En présence d'effet de trou, la pseudo-période est un paramètre important pour expliquer le signe des poids et l'amplitude des poids et variances.

- Les effets d'écran peuvent être très variés. Ils sont également plus ou moins

marqués selon le type de krigeage. On peut énumérer :

- l'écran "direct" : informations proches faisant écran à des informations lointaines.
 - à 2D au moins, un effet d'écran entre directions perpendiculaires, avec une covariance-produit.
 - l'écran "inverse" : information lointaine faisant écran à des informations plus proches. Cet écran provient de l'estimation de la moyenne.
 - un effet d'écran du même type, mais essentiellement dû à la forme du volume à estimer.
- Le phénomène de relais, peu important : une information située au-delà de la portée - et donc non corrélée au volume à estimer - peut avoir un poids de krigeage simple non nul, si une information intermédiaire lui sert de relais.

ASPECT PRATIQUE

Tout d'abord, en ce qui concerne les poids négatifs, on a pu constater qu'en général leur présence n'améliorait pas la qualité de l'estimation. Leur élimination, sans perte de précision, supprime donc le risque de voir apparaître, en estimation minière, des teneurs aberrantes.

Le point le plus important, pour la pratique, concerne le krigeage simple et le poids de la moyenne. Le krigeage simple est, en dehors des estimations non linéaires stationnaires, peu utilisé pour fournir des résultats d'estimation. Néanmoins, la résolution de son système (détermination des poids et variances) apparaît comme une étape indispensable préalable à toute estimation locale, linéaire ou non :

- Pour la définition d'un voisinage d'estimation, il indique quels sont les échantillons qui doivent impérativement figurer dans le voisinage.
- le poids de la moyenne, fourni par le K.S., peut alors suggérer de choisir un voisinage plus grand, si l'on veut faire du K.O.
- En estimation non linéaire (Réserves Récupérables, cf Remacre 1984), ce même poids de la moyenne nous renseigne sur la possibilité de travailler avec un modèle stationnaire strict.

Il est donc enfin à peine besoin de mentionner l'utilité que présente, pour un géostatisticien averti, un programme informatique souple permettant le calcul des poids et variances des différents types de krigeage.

B I B L I O G R A P H I E

- BARNES, R.J. et JOHNSON, T.B (1984). Positive Kriging.
2nd NATO A.S.I. "Geostatistics for Natural Resources Characterization"
Part 2, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Netherlands.
- GALLI, A, MURILLO, E. et THOMANN, J. (1984). Dual Kriging - Its properties and its
Use in Direct Contouring. 2nd NATO A.S.I. "Geostatistics for Natural
Resources Characterization", Part 2, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht,
Netherlands.
- GUELFOND, A.O. (1963). Calcul des Différences Finies. Dunod, Paris.
- JOURNEL, A. (1977). Géostatistique Minière.
Centre de Géostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- MATHERON, G. (1970). La Théorie des Variables Régionalisées et ses Applications.
Fascicule n° 5, Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique,
Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau;
- MATHERON, G. (1978). Estimer et Choisir.
Fascicule n° 7, Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique,
Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- REMACRE, A.Z. (1984). L'Estimation du Récupérable Local : Le Conditionnement
Uniforme.
Thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole des Mines de Paris.
- RIVOIRARD, J. (1984). Looking for a Kriging Plan in a Stockwerk Deposit.
2nd NATO A.S.I. "Geostatistics for Natural Resources Characterization"
Part 2, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Netherlands.