

# **CONTRIBUTION GÉOSTATISTIQUE AU TRAITEMENT DES DONNÉES SISMIQUES**

---

**THÈSE**

présentée à

l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

**Mustafa TOUATI**

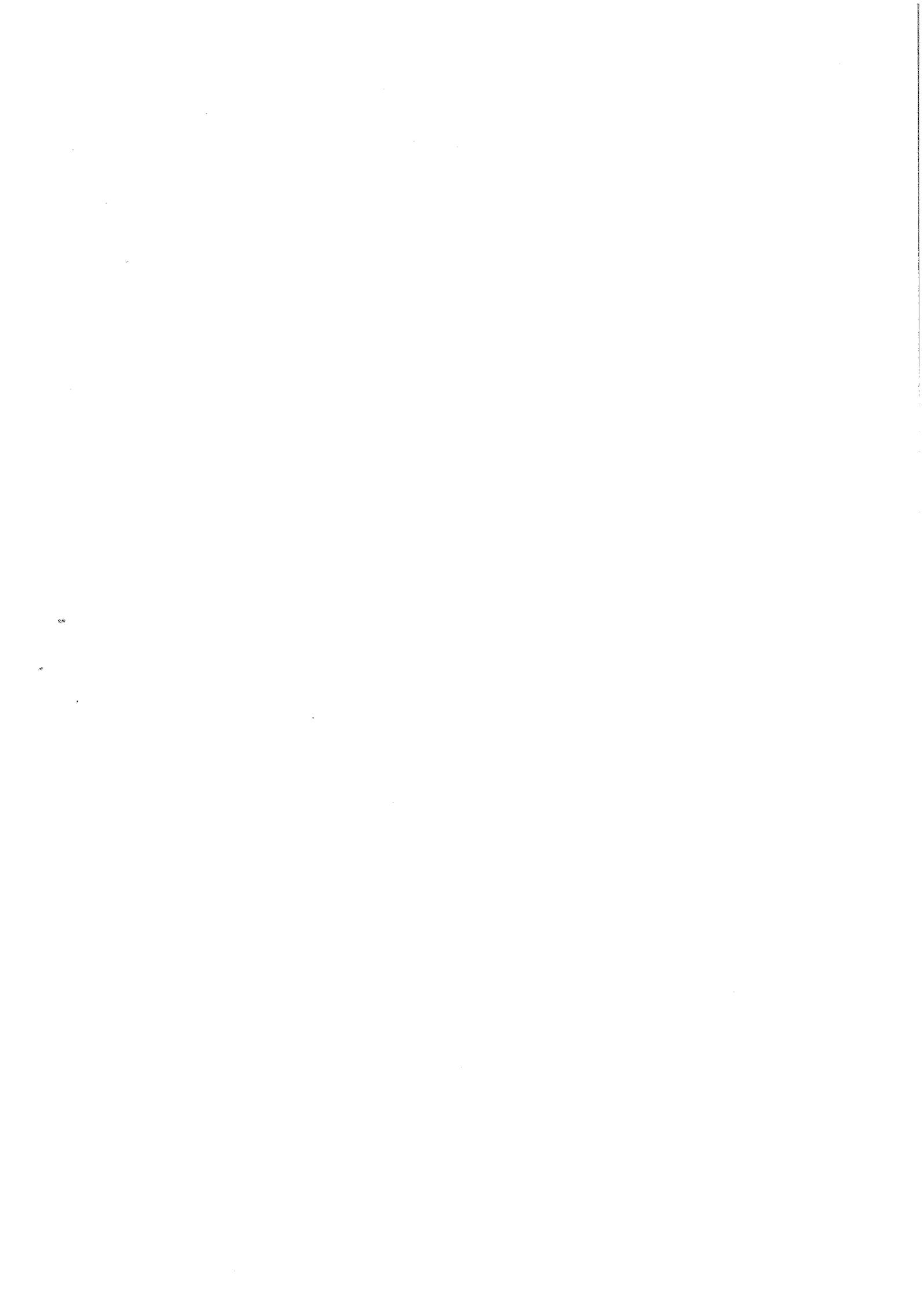
pour obtenir le titre de

Docteur en Géostatistique

---

Soutenue le 15 Mars 1996 devant le jury composé de :

MM. G. MATHERON	Président
M. BOUTALEB	Rapporteur
G. PASCAL	Rapporteur
A. GALLI	Examineur
P. PODVIN	Examineur
P. RUFFO	Examineur



*A mes amis du C.G.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Notions de sismique réflexion - Introduction au problème</b>	<b>1</b>
1.1	Rappels élémentaires sur la sismique réflexion . . . . .	2
1.2	Géostatistique appliquée à la sismique . . . . .	5
1.3	Quelques réflexions sur la migration et l'analyse de vitesses . . . . .	5
1.4	Conclusions . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Cadre stationnaire</b>	<b>29</b>
2.1	Approximation de l'optique géométrique . . . . .	29
2.2	Équation des géodésiques . . . . .	31
2.3	Exemples d'intégration . . . . .	31
2.4	Erreurs de migration . . . . .	32
2.5	Illustrations numériques . . . . .	34
2.5.1	Quelques allures de réflecteurs migrés: . . . . .	34
2.6	Linéarisation . . . . .	39
2.7	Expression des erreurs de migration . . . . .	42
2.8	Qualité des sections migrées . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Cadre non stationnaire</b>	<b>47</b>
3.1	Cadre non stationnaire - approche déterministe . . . . .	48
3.2	Cadre non stationnaire - approche probabiliste . . . . .	49
3.3	Cas de faibles perturbations . . . . .	57
3.4	Les résultats de Rytov . . . . .	59
3.5	Vers une simulation des erreurs? . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Généralités sur le problème de l'inversion</b>	<b>69</b>
4.1	Les résultats de Jannaud . . . . .	69
4.2	Inversion stochastique de Tarantola et Valette . . . . .	71
4.3	Inversion sismique faible . . . . .	72
4.4	Eikonaux en milieux perturbés . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Fluctuations des eikonaux</b>	<b>77</b>
5.1	Fluctuations des eikonaux - <i>Approximations de Rytov</i> . . . . .	77
5.2	Un cas d'échec de l'approximation . . . . .	81
5.3	Expressions générales de la covariance des eikonaux . . . . .	83
5.4	Validité de l'approximation de Rytov . . . . .	85

## Table des matières

<b>6</b>	<b>Expérimentations - Inversion sismique faible</b>	<b>95</b>
6.1	Calcul de la variance des temps de première arrivée . . . . .	95
6.2	Inversion sismique faible . . . . .	96
6.3	Application à l'inversion de la portée . . . . .	98
6.4	Application à l'inversion de la covariance . . . . .	100
6.5	Validation par expériences sur des données synthétiques: . . . . .	101
6.6	Mise en œuvre . . . . .	102
6.7	Résultats des tests - commentaires . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Extension multicouches et autres applications</b>	<b>113</b>
7.1	Milieux déformés . . . . .	114
7.2	Modèles multicouches . . . . .	120
7.3	Cas de réflecteur non horizontal . . . . .	123
7.4	Problème de l'anisotropie . . . . .	129
7.5	Simulation des erreurs de migration . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Conclusions</b>	<b>139</b>
<b>A</b>	<b>Covariances des eikonales</b>	<b>145</b>
A.1	Calcul direct de la covariance entre deux rayons droits issus d'une même source.	145
A.2	Expression générale de la covariance . . . . .	147
<b>B</b>	<b>Formules pour covariances non factorisées</b>	<b>150</b>
B.1	Covariance des eikonales . . . . .	150
B.2	Cas d'une stratification quasi-horizontale: . . . . .	152
<b>C</b>	<b>Théorie des rayons - Approximation paraxiale</b>	<b>153</b>
C.1	Théorie des rayons - approche hamiltonienne . . . . .	153

## *Avant propos*

*“... Le processus intellectuel qui mène à la découverte finale conduit, en effet, à poser une suite d’hypothèses qui seront plus ou moins rapidement confirmées ou devront être rejetées ...”* Gérard Grau [8]

Nous avons intitulé notre thèse “*Contribution Géostatistique au traitement des données sismiques*”. Il s’agit d’une tentative d’appréhender le potentiel des méthodes géostatistiques appliquées à la géophysique.

Comme souvent en sismique l’approche adoptée ici se situe dans le cadre de l’approximation de l’optique géométrique. Nous considérons des réflecteurs de forme simple et des champs de vitesse qui se prêtent à une linéarisation.

En disant cela, nous n’avons pas de vision réductrice. L’objectif ciblé est quand même ambitieux : il s’agit d’intégrer l’outil probabiliste lors de la modélisation du problème et l’interprétation des résultats, tentant ainsi de donner au géophysicien des outils permettant la quantification des incertitudes.

Une des bases de ce travail est la note [16] de Monsieur Georges Matheron communiquée aux Journées de Géostatistique de Fontainebleau en 1991.

J’ai eu la chance d’avoir travaillé sur un sujet très passionnant, qui constitue le centre de préoccupations de beaucoup de géophysiciens et ingénieurs de réservoir. Au cours de ce travail, j’ai eu le privilège de bénéficier de l’aide de Monsieur Matheron en de nombreuses occasions.

J’ai été très sensible à l’intérêt qu’il a manifesté pour le sujet et son appui pour l’entreprise à laquelle mon Directeur de thèse et moi étions engagés depuis plus de trois ans. En guise de reconnaissance, j’espère simplement que ces résultats mériteront sa satisfaction.

Je remercie mon Directeur de thèse, Monsieur Alain Galli, de m'avoir impliqué dans cette aventure. J'ajouterai que tout en dirigeant cette thèse Monsieur Galli a su me laisser une grande liberté au travail; je le remercie encore pour son initiative et sa confiance.

Je remercie les membres de mon jury de thèse composé de géologues et de géophysiciens: Messieurs Mohammed Boutaleb, Georges Pascal, Pascal Podvin et Paolo Ruffo ont accepté de jeter le regard, à la fois curieux et critique, envers cet essai proposé dans un centre de géostatistique. C'est bien là une occasion au géostatisticien de compter sur la collaboration et l'ouverture du géophysicien.

Je tiens à remercier la société Agip-Spa pour avoir financé une partie de ce travail, et en particulier Messieurs Paolo Ruffo et Ernesto Della Rossa pour leur coopération.

Je dois étendre ces remerciements à Monsieur Mahboub Al Chalabi pour nous avoir reçus pour discuter et apporter un soutien à ces efforts.

Je voudrais enfin remercier mes amis du Centre de Géostatistique. Je pense à mes enseignants qui m'ont donné le goût pour leur discipline, je pense aussi à ceux qui m'ont aidé par leurs conseils, leur sourire et leur bonne humeur. Ils se reconnaîtront dans ces lignes.

Le 5 Avril 1996.

# Chapitre 1

## Notions de sismique réflexion - Introduction au problème

La rédaction de ce chapitre est motivée par les deux points suivants :

- Rappeler les problèmes de la sismique d'une manière très sommaire. L'idée est de faciliter la lecture du document au géostatisticien non forcément spécialiste des outils de la discipline<sup>1</sup>.
- Montrer de manière intuitive, certains problèmes où l'on peut utiliser la géostatistique, à savoir :
  1. La quantification des erreurs de migrations.
  2. l'analyse des vitesses en sismique.

Ces deux problèmes que nous allons présenter, avec exemples à l'appui, vont nous permettre ainsi de montrer deux faits importants pour le traitement géostatistique des données sismiques :

- Contrairement aux applications antérieures de la géostatistique, où l'on travaillait sur des données après stack (*Voir paragraphe 1.1.2*) nous allons remonter directement aux données sismiques d'avant stack.
- Il se dégage l'idée de recourir à une modélisation respectant les lois déterministes auxquelles obéissent ces données et le caractère aléatoire imposé par la nature du milieu caractérisé par son champ de vitesses.

---

1. Le géophysicien peut se passer de la lecture du paragraphe 1.1 qui est destiné à quelques rappels élémentaires sur la sismique. Ces rappels ne prétendent nullement décrire l'état d'art de la sismique, tel n'est pas notre propos.

## 1.1 Rappels élémentaires sur la sismique réflexion

Les techniques de traitement de données en sismique réflexion que l'on décrit dans ce paragraphe constituent une description très sommaire de la discipline. Parmi la panoplie des méthodes développées par les géophysiciens, nous nous limitons au choix du minimum d'outils utiles pour la suite.

### 1.1.1 Quelques illustrations.

Comme le montre la figure 1.1 que ce soit en sismique marine ou en sismique terrestre, l'idée de la sismique réflexion, est de provoquer un ébranlement en surface qui se propage dans le milieu, les signaux réfléchis sont récoltés par des récepteurs (*Géophones ou Hydrophones*).

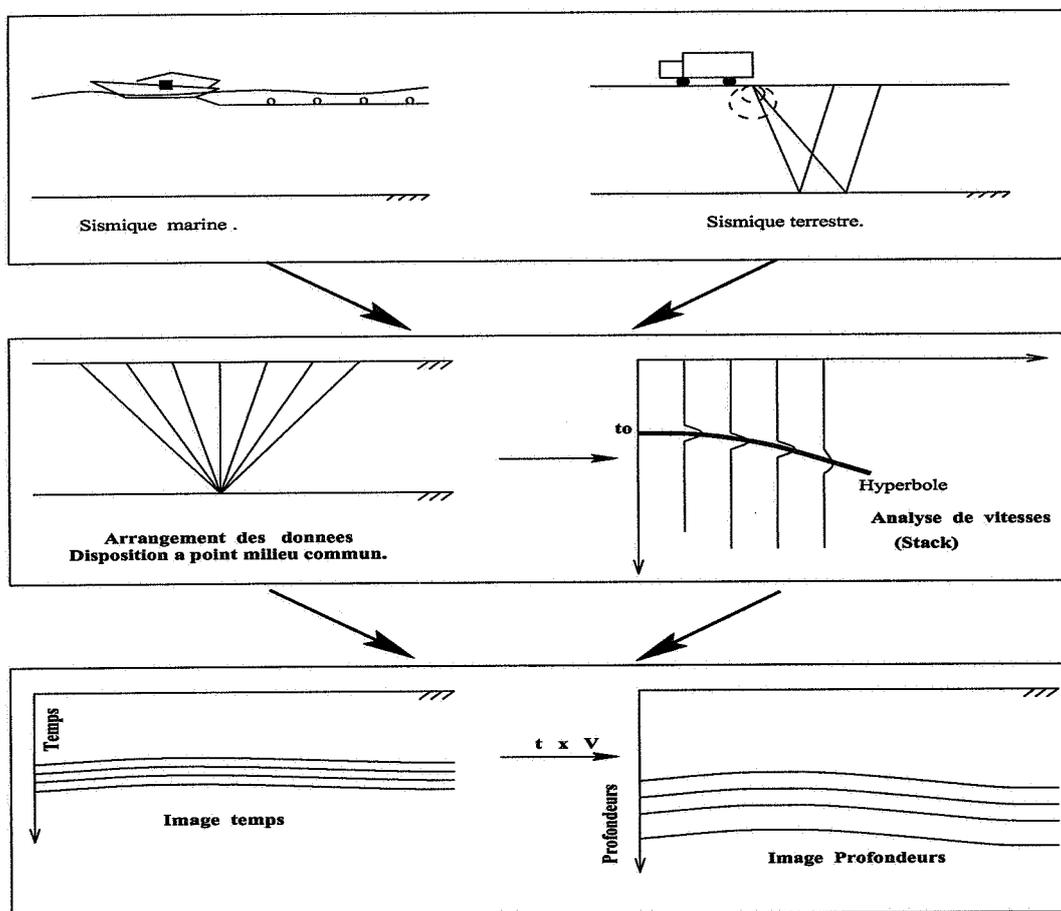


FIG. 1.1 - De haut en bas: (a) Acquisition des données de la sismique marine et de la sismique terrestre. (b) Arrangement des données sismique en disposition point milieu commun et analyse de stack. (c) Après analyse de stack: Image temps puis conversion en image profondeur.

Parmi les objectifs de la sismique, nous considérons particulièrement les deux problèmes suivants :

1. Déterminer la position et la géométrie du réflecteur.
2. Connaître la vitesse du milieu.

Nous trouvons dans la littérature géophysique plusieurs méthodes de traitement des données élaborées dans ces buts. Ainsi la figure 1.1, montre un exemple simple de traitement des données sismiques: Il s'agit de trouver la profondeur en temps du réflecteur ainsi que la vitesse du milieu (Fig. 1.1). Ensuite, la carte temps est convertie en carte profondeur par une simple multiplication temps  $\times$  vitesses.

### 1.1.2 Paramètres physiques du milieu

Selon que l'on s'intéresse aux déformations (*sismiques ou sismologiques<sup>2</sup> dans le cadre de l'approximation élastique ou élasto-plastique*), ou juste aux temps d'arrivée et amplitudes (*cadre de l'acoustique*) nous sommes amenés à choisir les paramètres qui permettent de définir le milieu. Dans les deux cas cités précédemment, ces paramètres sont respectivement les propriétés mécaniques du milieu (*Module d'Young, Coefficient de Poisson, etc ...*) et propriétés acoustiques du milieu (*Impédances acoustiques*).

Dans certains cas de la sismique les géophysiciens travaillent dans le cadre de l'Optique Géométrique<sup>3</sup> (*i.e: Propagation des ondes régie par le principe de Fermat*). Nous nous contentons de définir la vitesse de propagation des ondes dans le milieu. A cet égard, les sismiciens ont défini une variété de vitesses que l'on présente ici :

Soit un puits (Cf Fig. 1.2) à partir duquel on fait l'expérience dite de carottage sismique: pour des intervalles réguliers de temps  $\Delta t$  nous relevons les vitesses du milieu dans le sens de la profondeur. Ainsi pour chaque instant d'enregistrement  $t_i$  on relève une vitesse  $v_i$ .

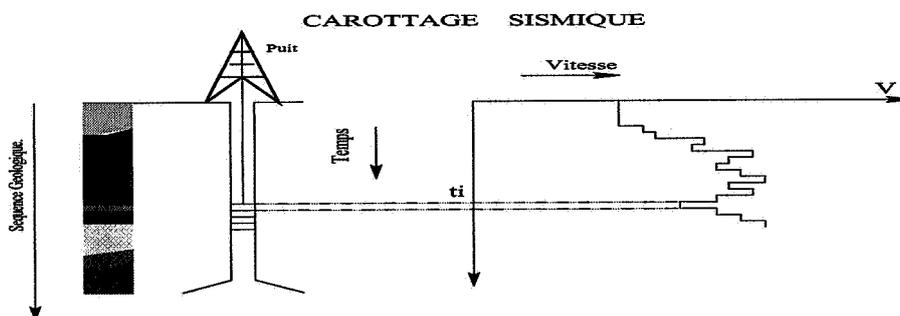


FIG. 1.2 - Mesure des vitesses au puits.

2. Discipline qui s'intéresse à l'étude des séismes pour la description du globe.  
 3. Hypothèse sur laquelle nous reviendrons plus tard dans la deuxième partie.

a/  $V_M$ ,  $V_{RMS}$  et  $V_I$  : A partir de  $v_i$  et  $t_i$  respectivement vitesses et temps d'enregistrement aux puits, on définit trois types de vitesses [5] :

1.  $V_M$  vitesse moyenne.

$$V_M = \frac{\sum_{i=1}^N v_i t_i}{\sum_{i=1}^N t_i} \quad \text{ou encore} \quad V_M = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

2.  $V_{RMS}$  vitesse quadratique moyenne.

$$V_{RMS}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2 t_i}{\sum_{i=1}^N t_i} \quad \text{ou encore} \quad V_{RMS}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt$$

3. Lorsque l'on dispose de n couches, Dix a développé une équation pour calculer la vitesse d'intervalle d'une couche située entre deux réflecteurs :

$$V_{I,n} = \left[ \frac{v_n^2 T_n - v_{n-1}^2 T_{n-1}}{T_n - T_{n-1}} \right]^{1/2}$$

$V_{I,n}$  est la vitesse de la n-ième tranche.  $v_n$  et  $T_n$  sont les vitesses quadratiques moyennes et les temps doubles (c'est à dire temps aller-retour) du n-ième réflecteur.

b/ Vitesse de stack  $V_s$  : A partir des données sismiques de surface, nous définissons la vitesse de stack  $V_s$ .

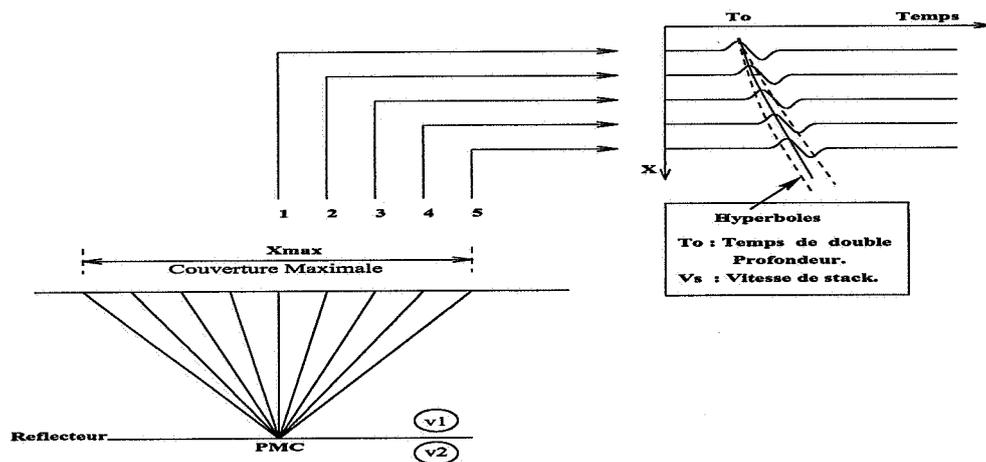


FIG. 1.3 - En bas à gauche : les sources  $S_1, S_2, \dots, S_n$  et les récepteurs  $R_1, R_2, \dots, R_n$  sont disposés symétriquement par rapport à un point milieu commun. En haut à droite les données  $T_x$  sont enregistrées sur un diagramme temps/distance. L'analyse de stack permet d'ajuster ce temps à une hyperbole  $T(x)^2 = T_o^2 + x^2/V_s^2$ .

Les données sont disposées par rapport à un point milieu commun CMP. D'un côté nous avons les sources  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . De l'autre côté, nous avons les récepteurs  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . Les temps de trajet source récepteur sont disposés sur un diagramme Temps/Distances. Dans le cas d'un milieu à vitesse constante, la courbe  $y = T^2(x)$  devrait vérifier l'équation d'une hyperbole. Dans le cas où la vitesse n'est plus constante ce résultat n'est plus vérifié. La vitesse pour laquelle on ajuste le mieux possible la courbe  $y = T^2(x)$  par une hyperbole est dite vitesse de stack. L'analyse de stack donne aussi le temps  $T_o$  qui est le temps double direct (*Temps à offset nul*).

### 1.1.3 Paramètres géométriques

Nous désignons ici essentiellement l'ensemble des caractéristiques du réflecteur, à savoir la profondeur et le pendage. Ces paramètres jouent en partie le rôle décisif sur l'acceptation ou le rejet d'une méthode de prospection.

Il existe en effet des profondeurs critiques d'investigation du réflecteur qui dépendent non seulement, du champ de vitesses, mais aussi du plongement du miroir en question. Par ailleurs, nous soulignons que le rôle de ces paramètres se manifeste encore lors du calcul des erreurs de migration.

## 1.2 Géostatistique appliquée à la sismique

Pourquoi la géostatistique suscite un intérêt grandissant chez les géophysiciens? Parce que ces derniers commencent à avoir de l'intérêt pour les méthodes probabilistes. La géostatistique fût introduite pour le traitement des données sismiques après stack (Haas 1974). On a pu voir ainsi résoudre les problèmes d'estimation, de cartographie des miroirs sismiques des fonds marins ... etc. Le pas ainsi franchi suggérait d'une part la vulgarisation pour les pétroliers de certains outils empruntés à la géostatistique minière: *Analyse structurale, Krigeage, Cokrigeage, Dérive externe ... etc*, d'autre part le développement de nouvelles méthodes qui permettent de mieux séparer les composantes à faibles fréquences (*qui peuvent subir des traitement classiques*) des perturbations aléatoires, ce fut donc l'avènement de nouveaux outils d'analyse: *Analyse Krigeante etc ...*

### 1.3 Quelques réflexions sur la migration et l'analyse de vitesses

Le but de la présente section est de justifier de manière intuitive pourquoi nous voulons avoir recours, sous une autre approche, à la géostatistique pour le traitement des données sismiques. Pour cela, nous abordons les deux thèmes suivants: la migration et l'analyse des vitesses.

#### 1.3.1 Migration

Pour définir la migration, nous considérons l'exemple illustré par la figure ci-dessous. Il s'agit de prospecter le réflecteur de la manière suivante: la source et le récepteur sont

confondus. Ce qui veut dire que la réflexion se fait perpendiculairement au réflecteur.

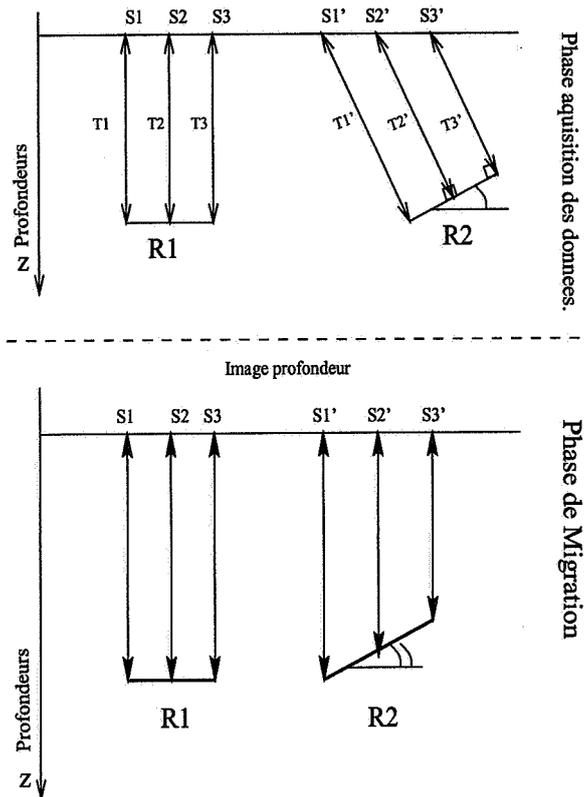


FIG. 1.4 - Procédure de migration.

Nous distinguons deux types de réflecteurs :

- Le réflecteur R1 qui est quasi-horizontale.
- Le réflecteur R2 qui est incliné avec un pendage  $\alpha$ .

Dans une première phase, nous obtenons l'image temps. Contrairement au réflecteur R1, la pente du réflecteur R2 n'est pas bien restituée. D'autre part, dans la seconde étape d'interprétation, l'image profondeur est obtenue par simple multiplication (temps  $\times$  vitesses), nous obtenons par conséquent une image distordue du réflecteur initial. D'où l'intérêt d'une opération de recalage de l'information : tel est le but de la migration. Pour être précis, nous retenons la définition suivante, due à M.Lavergne [15] :

*“le but de la migration est essentiellement de replacer les réflexions inclinées en bonne position par rapport au point milieu commun sur la section sismique”.*

Classiquement la procédure de migration repose sur les deux hypothèses suivantes :

- Hypothèse **H1** : Les temps à offset nul qui donnent l'image temps et la vitesse qui permet

la transformation de celle-ci en image profondeur, sont correctement obtenus par analyse de stack.

- Hypothèse **H2**: nous considérons aussi que les rayons sismiques sont droits (Hypothèse qui n'est vraie que si la vitesse est constante).

Ces deux hypothèses, non vérifiées en pratique, induisent des erreurs de migration dont nous nous proposons ici d'évaluer l'ampleur. Ci-dessous la figure de référence :

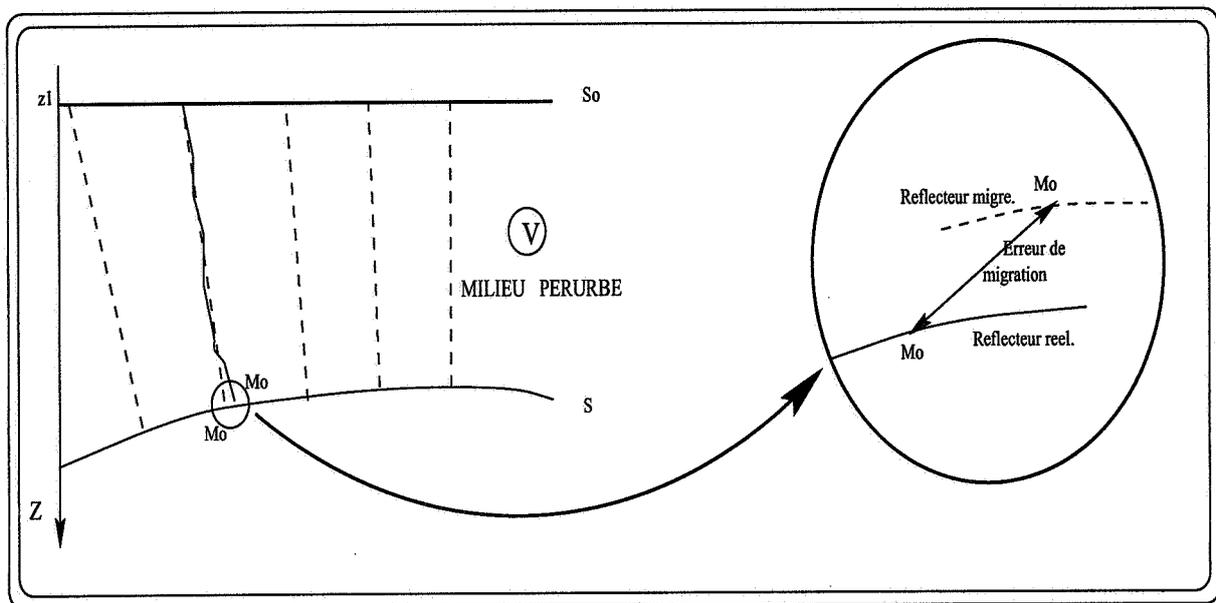


FIG. 1.5 - Migration

Nous disposons d'un réflecteur S. A partir d'une source  $M(x, y, z)$  en surface, nous émettons le signal qui se réfléchit perpendiculairement au réflecteur au point  $M_o$  en un temps  $T(M, M_o)/2$ . Soit aussi,  $\bar{V}$  la vitesse moyenne de propagation le long de la trajectoire minimisant le temps de parcours entre  $M$  et  $M_o$  (*Géodésique*). Lors de la migration nous estimons la position du point  $M_o(x_o, y_o, z_o)$  à l'aide de  $\tilde{M}_o(\tilde{x}_o, \tilde{y}_o, \tilde{z}_o)$ . L'erreur commise lors de cette opération de migration est donnée classiquement par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_o - x_o = x - x_o - \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} T^2(M, M_o) \\ \tilde{y}_o - y_o = y - y_o - \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} T^2(M, M_o) \\ \tilde{z}_o - z_o = z - z_o - \sqrt{\bar{V}^2 T^2 - (x - \tilde{x}_o)^2 - (y - \tilde{y}_o)^2} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Ainsi d'après le système 1.1 nous concluons que l'erreur de migration dépend :

- Du choix de la vitesse  $\bar{V}$  (Choix lié à la méthode d'analyse des vitesses utilisées).
- Du pendage du réflecteur et de la profondeur de celui-ci (Informations implicitement contenues dans les temps et les connaissances géologiques a priori).

A titre d'illustration de l'influence de ces paramètres nous montrons les deux exemples qui suivent :

### Exemple premier:

Il s'agit de montrer l'influence de l'analyse des vitesses sur l'évaluation des erreurs. La modélisation du sous-sol en plusieurs tranches dépend essentiellement de deux points :

- La vitesse  $\bar{V}$  peut être évaluée différemment, soit à partir des données sismiques de surface, soit à partir des données de puits. Ceci influence l'estimation, les écarts entre ces estimations peuvent atteindre 20% (Cordier [5]).
- Le principe de la modélisation multicouches à l'aide des données de puits se résume à la recherche des contrastes de vitesses sur les enregistrements soniques. Lorsque l'hétérogénéité du milieu est élevée, nous pouvons avoir le choix de plusieurs modèles pour un même cas d'étude: la figure 1.6 montre un exemple de données de puits et deux modélisations possibles pour les couches du même milieu.

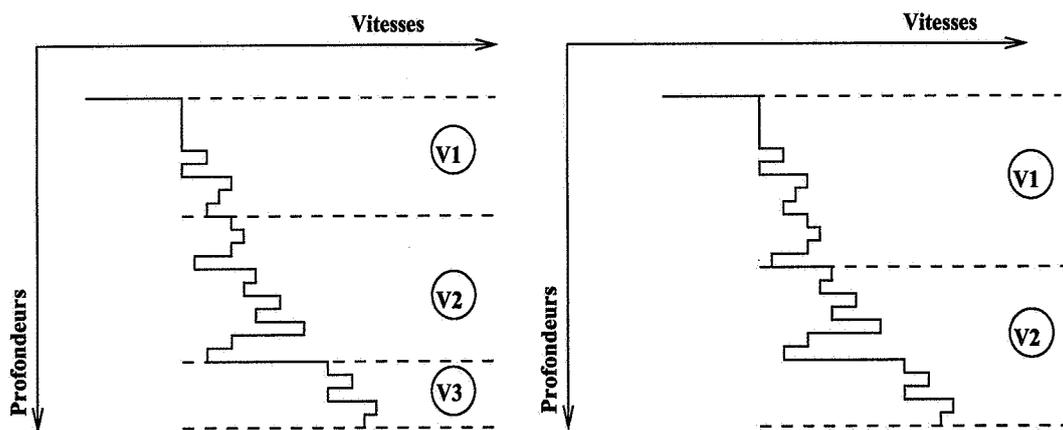


FIG. 1.6 - Deux exemples de modélisation. Dans le cas de données de puits.

La qualité de l'interprétation des vitesses joue donc un rôle important. La figure 1.8 montre un cas de calcul des erreurs de migration pour un modèle de vitesses linéaire. Cette erreur est cartographiée en fonction de la profondeur et de la pente du réflecteur. L'évaluation de  $\bar{V}$  est réalisée de deux manières différentes (Cf figure 1.7) :

1/ - D'abord calculée comme vitesse moyenne pour chaque point du réflecteur que l'on veut migrer. C'est ce que nous nommons analyse locale. Pour chaque point " $x_i$ " du réflecteur, soit  $G_i$  la trajectoire source-récepteur. La vitesse locale  $V_{G_i}$  qui est la vitesse moyenne suivant la géodésique  $G_i$ , s'écrit :

$$V_{G_i} = \int_{G_i} V(s)t(s)ds / \int_{G_i} t(s)ds$$

2/ - Puis calculée de manière globale comme moyenne des vitesses précédentes dans la zone d'étude. Celle-ci s'écrit :

$$V_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_{G_i}$$

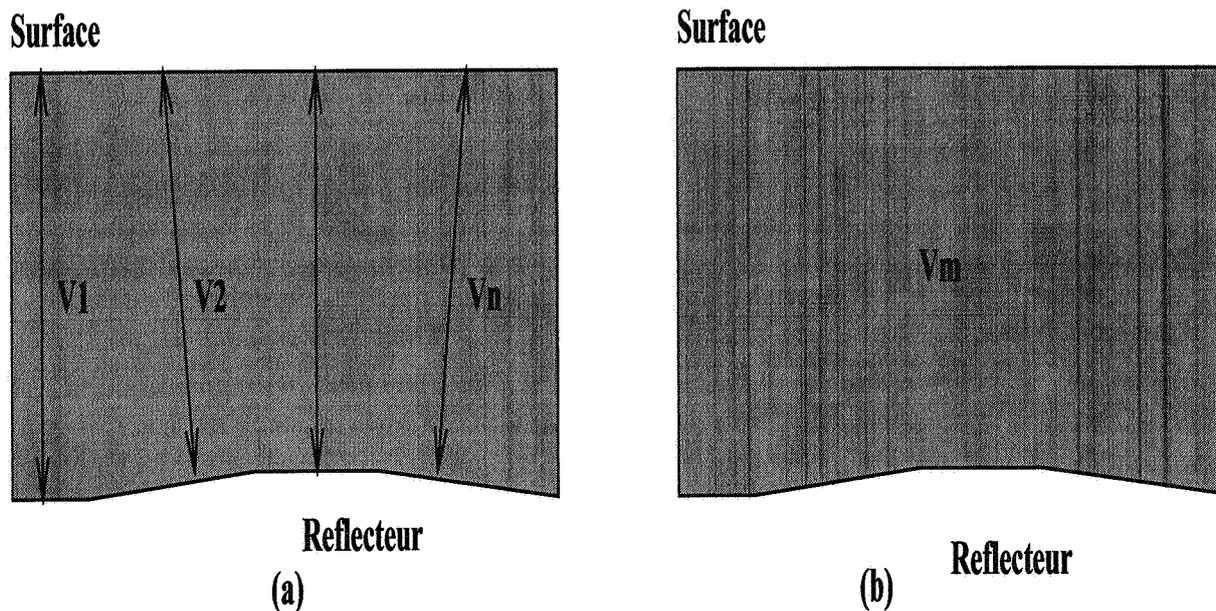


FIG. 1.7 - Deux exemples de modélisation: (a) Analyse locale . (b) Analyse globale.

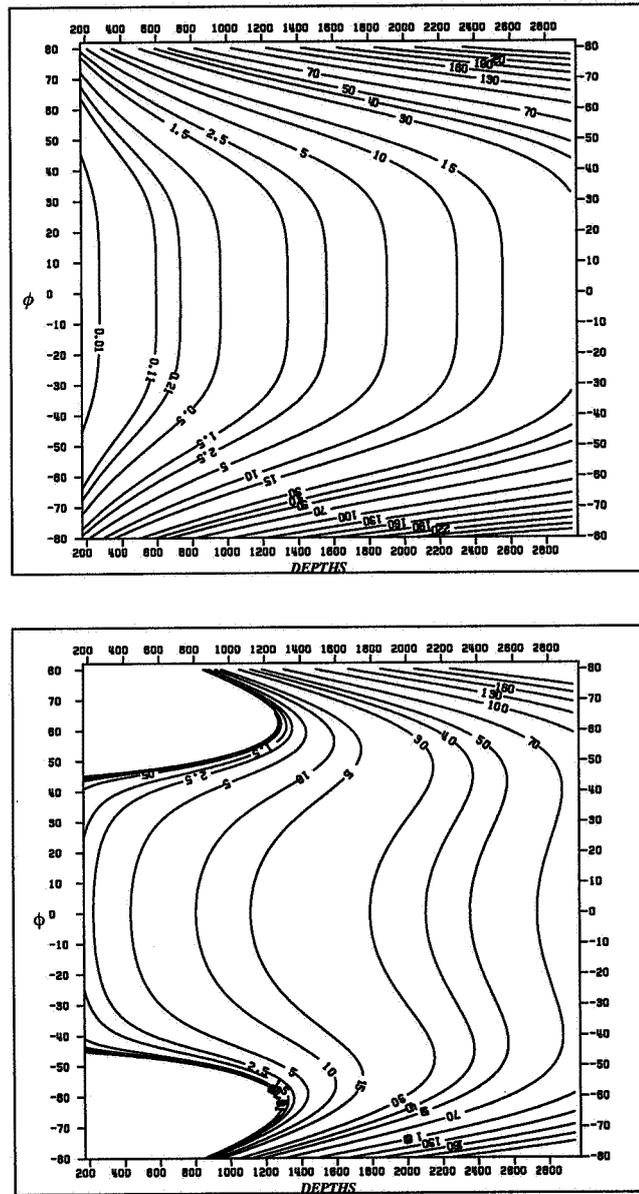


FIG. 1.8 - Cartographie des erreurs de migrations (en mètres). De haut en bas (a): Erreur dans le cas de l'analyse locale. (b) Erreur dans le cas d'analyse globale. En abscisses les profondeurs, en ordonnées les pentages du miroir sismique.

D'après les deux cartes d'erreur (Cf figure 1.8), il apparaît clairement que celle-ci augmente en fonction de la profondeur et de l'angle de pendage du miroir sismique. De plus cette erreur est d'autant plus élevée que l'analyse des vitesses est moins précise (*cas de l'analyse globale*).

L'exemple que nous venons de montrer est un cas particulier pour lequel nous savons calculer analytiquement l'erreur de migration. *On se demande alors ce qui se passe si l'on modélise le champ de vitesses à l'aide d'une Fonction Aléatoire Stationnaire (F.A.S.T).* Tel est l'objet du paragraphe suivant.

### Deuxième exemple :

Ce deuxième exemple, montre une quantification de l'erreur dans un cas où on modélise le champ des vitesses à l'aide d'une F.A.S.T. Le temps devient aussi une fonction aléatoire dont les variations lentes peuvent se prêter à un traitement déterministe tandis que la composante haute fréquence devrait subir un traitement probabiliste.

Ici, le calcul analytique de l'erreur n'est pas possible, nous utilisons alors [16] une méthode de perturbation pour donner une expression du premier ordre de l'erreur. Pour être plus précis, considérons l'expérience sismique de la figure 1.9, et mettons en place les quelques notations suivantes.

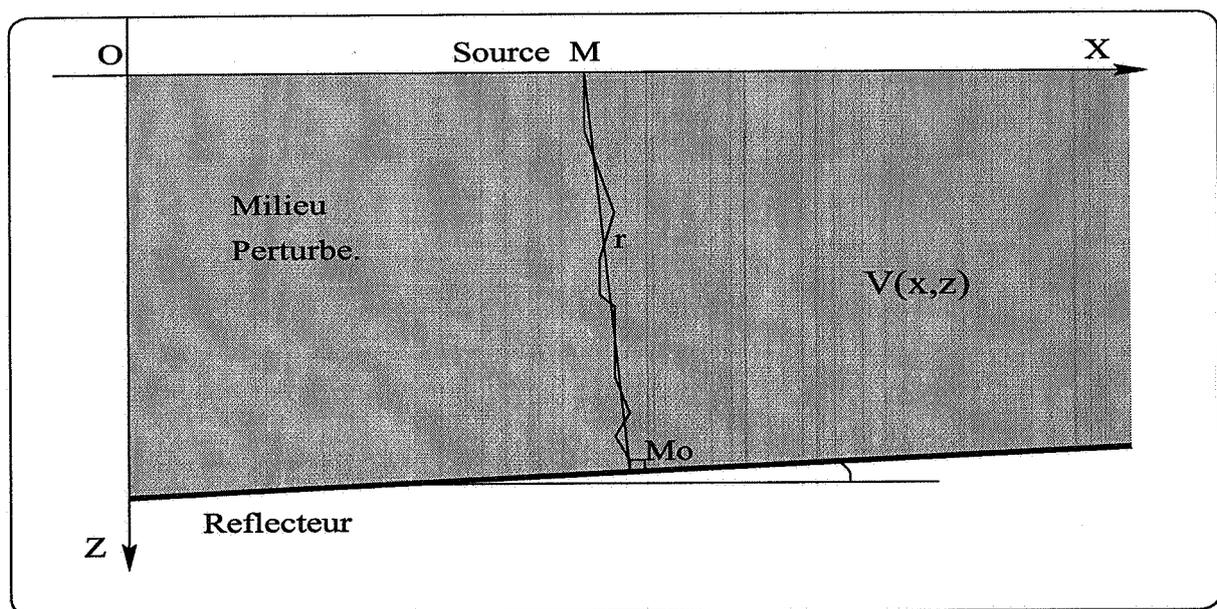


FIG. 1.9 - Quelques notations : expérience sismique dans un milieu stationnaire perturbé.

a/ Notations :

- \*  $x, z$  coordonnées du point  $M$  dans le repère  $(XOZ)$
- \*  $\mathbf{r} = M\vec{M}_o$  vecteur position ;  $r = \|\mathbf{r}\|$ .
- \*  $\varphi$  : pendage du miroir sismique au point  $M_o$ .
- \*  $h$  : profondeur du point  $M_o$  ( par rapport à la surface  $z = 0$ ).
- \*  $v(x, z)$  : champ vitesse dont la moyenne est  $c_o$ . Nous poserons  $v(x, z) = c_o(1 - \epsilon(x, z)/2)$ .
- \*  $\epsilon(x, z)$  : la perturbation de la vitesse.  $\epsilon$  est considérée de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\epsilon^2$  ( $\sigma_\epsilon^2$  est liée à la variance des vitesses par  $\sigma_v^2 = c_o^2 \sigma_\epsilon^2 / 4$ ).
- \* Enfin nous définissons la moyenne des perturbations suivant le rayon joignant  $M$  à  $M_o$  ainsi que sa dérivée première par rapport à  $x$ , soient :

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{1}{r} \int_0^r \epsilon(s) ds \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}'_r = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\epsilon}_r$$

b/ Erreur de migration :

Le calcul des erreurs de migration se fait suivant une méthode de perturbation. Ci-après nous allons donner les résultats de ces calculs sur lesquels nous allons revenir plus en détail au deuxième chapitre.

Soit par exemple le cas optimiste où la vitesse moyenne suivant le rayon  $MM_o$  est supposée connue :

$$\text{soit au premier ordre: } \bar{V}^2 = (1 - \bar{\epsilon}_r) c_o^2$$

Les expressions de cette erreur de migration peuvent être explicitées à partir du système 1.1 en fonction de  $\bar{\epsilon}_r$  et  $\bar{\epsilon}'_r$ .

Les conditions de validité de la technique d'approximation au premier ordre sont les suivantes :

$$\epsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad r\bar{\epsilon}' \ll 1 \tag{1.2}$$

c/ Variance des erreurs :

Un exemple de calcul de variance de l'erreur de migration est donnée pour une perturbation ayant pour covariance une exponentielle de Gauss  $C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 e^{-\{x^2/a^2 + z^2/b^2\}}$ . Ce qui donne comme variance de localisation :

$$\begin{cases} \text{Var}[\tilde{x}_o - x_o] = \frac{\sqrt{2\pi}}{12} \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{h^3}{b} \sigma_\epsilon^2 \\ \text{Var}[\tilde{z}_o - z_o] = \text{Var}[\tilde{x}_o - x_o] \text{tg}^2 \varphi \end{cases} \quad (1.3)$$

A titre d'exemple numérique, nous prenons un miroir horizontal ( $\varphi = 0$ ) de profondeur  $h = 2000m$  et un champ de vitesses stationnaire caractérisé par  $\sigma_\epsilon = 0.2$  et  $\sqrt{2\pi}b = 10m$ . Dans ce cas, d'après les équations montrées ci-dessous, nous pouvons vérifier que :

$$\text{var}[\bar{\epsilon}] \ll 1 \text{ et } \text{var}[z_o - \tilde{z}_o] = 0$$

Nous traçons aussi (Cf fig 1.10) respectivement les courbes  $\text{var}[h\bar{\epsilon}']$  et  $\sigma_{x_o} = \sqrt{\text{var}[x_o - \tilde{x}_o]}$  en fonction du rapport d'anisotropie  $\lambda = a/b$ .

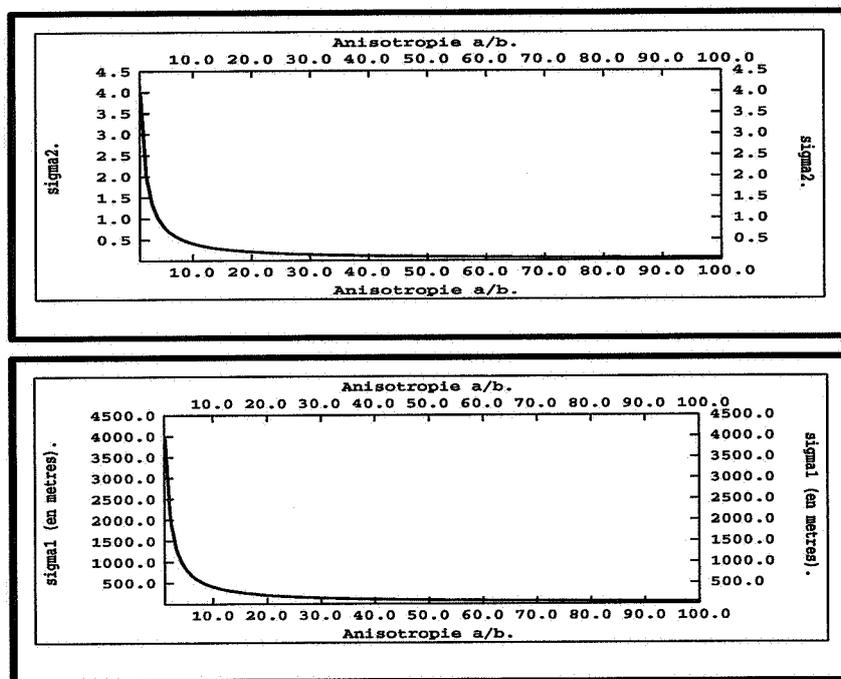


FIG. 1.10 - De haut en bas : (a) courbe  $\text{sigma}2 = \text{var}[h\bar{\epsilon}']$  en fonction du rapport d'anisotropie  $\lambda = a/b$ , plus  $\lambda$  augmente plus on rentre dans le bon domaine de validité de l'approximation du premier ordre de l'erreur de migration. (b)  $\text{sigma}1 = \sigma_{x_o}$  diminue de plus en plus lorsque le rapport d'anisotropie augmente.

D'après ces courbes nous pouvons relever les remarques suivantes:

1/ Notons tout d'abord qu'en dessous de  $\lambda = 2$ , on est loin du domaine de validité du calcul de l'erreur de migration dans le cadre de l'approximation au premier ordre.

Il n'est donc pas faisable de commenter l'écart-type  $\sigma_{x_o}$  qui est de l'ordre de 50% de la profondeur du réflecteur. Nous pouvons aussi remarquer que plus  $\lambda$  est élevé, plus on rentre dans le bon cadre de l'approximation.

2/ D'autre part si l'on se place dans ce domaine de validité de l'approximation  $2 \leq \lambda$ , on remarque que l'écart-type passe de 30% pour  $\lambda = 10$  à 1% pour  $\lambda = 100$ . Ceci signifie que la prospection est bonne pour les terrains fortement anisotropes.

3/ Enfin d'après la formule 1.3, on remarque que  $\sigma_{x_o}/h \propto \sqrt{h}$ . Ce qui montre que l'écart type de l'erreur de migration croît plus vite que  $h$ .

Ce deuxième exemple montre que l'on peut quantifier l'erreur de migration dans le cas de champs perturbés. De surcroît, on peut juger la qualité de la migration en fonction des caractéristiques du réflecteur et de la nature de la perturbation du champ de vitesses. On se propose alors d'étudier quelques aspects de l'analyse des vitesses dans le cadre d'un exemple pratique.

### 1.3.2 Analyse structurale des vitesses

La raison pour laquelle nous abordons ce problème, tient au fait qu'on a souvent besoin de connaître le variogramme des vitesses réelles. Nous avons vu précédemment que les sismiciens travaillent avec les vitesses de stack. Dès les premières approches géostatistiques à la sismique, les analyses structurales ont été appliquées à ce type de vitesses. Pour le praticien, travailler avec l'analyse de stack constitue, en effet, à la fois un moyen simple et rapide pour approcher la structure des vitesses réelles.

Dans cette section nous allons voir comment ces structures peuvent être différentes. Partant de milieux stationnaires, ((Cf Fig1.11)) nous allons appliquer l'analyse de stack sur ces données. L'étude envisagée ici concerne l'influence du degré de couverture sur l'analyse des vitesses de stack.

Nous utilisons ici la dénomination stack expérimental par opposition à la définition de la vitesse de stack dans un milieu idéal dont le principe est expliqué au paragraphe 1.1.1.b . Dans la suite de ce paragraphe deux types de stack expérimentaux (**Stack A** et **stack B**) sont considérés. Avant de les définir mettons en place quelques notations sur les données temps à ajuster.

#### Les données temps :

Les données  $T_{x_i}$  sont enregistrées aux géophones  $i = 1, 2, ..$  placés à des distances  $x_i = i.\delta x$  de la source.  $\delta x$  que nous prenons égale à 12.5 m est la distance entre deux récepteurs qui se suivent. Dans notre cas, ces temps d'arrivée sont calculés à l'aide d'un algorithme de différences finies sur lequel nous reviendrons au chapitre 6.

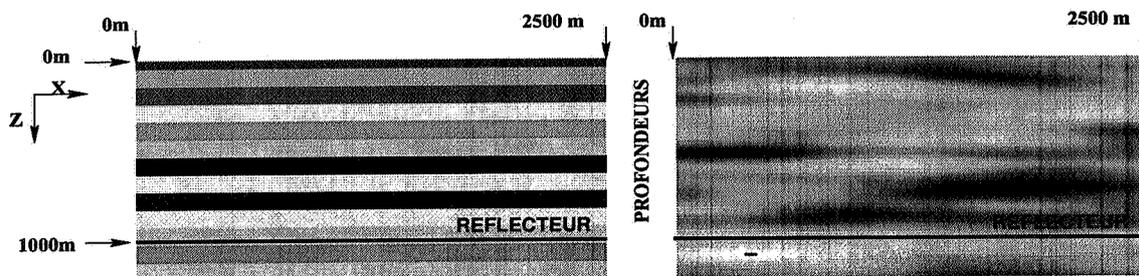


FIG. 1.11 - Milieux testés, de gauche à droite : (a) Milieu à bandes horizontales . (b) Champ de vitesses de covariance gaussienne  $C_v(x, z) = 1000.Gauss(a = 1000m, b = 100m)$ . Pour les deux milieux la vitesse moyenne est  $2000.m/s$  et la profondeur du réflecteur est de  $1000.m$ .

**Stack du type B :** Nous avons dit que la courbe  $T_{x_i}$  a la forme d'une hyperbole perturbée. On se propose de l'ajuster à une hyperbole. Une façon de faire est de fixer  $T_o$  à la valeur expérimentale enregistrée en  $x = 0$ , et de faire varier la vitesse, de façon à minimiser les écarts :

$$\sum_{i=0}^N |T_{x_i}^2 - T_o^2 - \frac{x_i^2}{V_s^2}|^2$$

avec  $N$  le nombre d'offsets utilisés (que nous appelons ici degré de couverture). C'est cette procédure qui correspond le plus au stack conventionnel. On notera que cette opération est une procédure heuristique dont le résultat dépend du pas avec lequel on fait varier les vitesses, ce qui veut dire : introduction d'un bruit lié à la précision de la méthode et qui n'est pas forcément le même pour les différents stacks pris sur différents points milieu commun CMP.

**Stack du type A :** Dans ce type de stack, on va minimiser la somme :

$$\sum_{i=0}^N |T_{x_i}^2 - T_o^2 - \frac{x_i^2}{V_s^2}|^2$$

Avec cette fois,  $T_o^2$  et  $V_s$  paramètres de la minimisation.

### Problème pratique

D'un point de vue pratique, on peut se demander ce qui peut influencer l'analyse de stack. La réponse à la question se réfère inévitablement à la pratique courante d'un opérateur : muni d'outils d'analyse, celui-ci peut, suivant sa connaissance *a priori* du problème, agir interactivement sur les fenêtres de temps et de vitesses. De ce fait, seule son expérience peut lui suggérer le choix de la taille d'une fenêtre donnée (Ici degré de couverture.). Ci après, on se propose d'examiner l'impact du choix de la taille de ce degré de couverture  $N$  sur :

1/ Les valeurs des vitesses  $V_s$  et temps  $T_o$  analysées.

2/ La structure spatiale des grandeurs analysées.

**Remarques générales sur l'effet du degré de la couverture.**

Pour voir l'impact du degré de couverture ( $N$ ) sur l'analyse<sup>4</sup>, nous faisons varier celui-ci de 10 à 50 pour les deux milieux décrits à la figure 1.11. Les résultats de cette analyse sont reportés aux tableaux 1 et 2 et les premières remarques que l'on peut avancer sont les suivantes :

Type A	$N = 10$		$N = 20$		$N = 30$		$N = 50$	
$V_s$	1835.	8.25 %	1953.	2.35 %	1992.	0.4 %	2008.	0.40 %
$T_o$	0.997	0.1 %	0.999	0.3%	1.000	0.4 %	1.001	0.5 %
$h$	915.54	8.45 %	975.	2.50 %	996.55	0.35 %	1005.04	0.5 %
Type B	$N = 10$		$N = 20$		$N = 30$		$N = 50$	
$V_s$	1780.	11.%	1920.	4.0 %	1992.	0.4 %	2008.	0.4 %
$T_o$	0.996	0. %	0.996	0. %	0.996	0. %	0.996	0. %
$h$	886.67	11.33 %	956.40	4.36 %	992.47	0.75 %	1000.37	0.04 %

TAB. 1.1 - De haut en bas résultats d'analyses de stack A et B pour le milieu I. Pour chaque degré de couverture nous donnons les résultats d'analyse et l'erreur relative. ( $V_s$  en m/s,  $T_o$  en secondes et  $h$  en mètres. Les erreurs en % ).( L'erreur relative des vitesses est donnée par rapport à la vitesse moyenne du milieu 2000. m/s, L'erreur relative du temps  $T_o$  estimé est donnée par rapport au vrai temps aller-retour calculé expérimentalement. L'erreur relative de  $h$  est donnée par rapport à la vraie profondeur du réflecteur 1000 m.)

Type A	$N = 20$		$N = 50$	
$V_s$	1979.	1. %	2015.	0.7 %
$T_o$	0.9914	0.2 %	0.9935	1.05 %
$h$	981.	1.9 %	1001	0.1 %
Type B	$N = 20$		$N = 50$	
$V_s$	1945.	2.75 %	2010.	0.5 %
$T_o$	0.9943	0. %	1.0040	0. %
$h$	967.	3.3 %	1009	0.9 %

TAB. 1.2 - De haut en bas résultats d'analyses de stack A et B pour le milieu II. Valeurs moyennes sur 150 analyses. ( $V_s$  en m/s,  $T_o$  en secondes et  $h$  en mètres. les erreurs en % ).

4. Ici, nous étudions implicitement l'effet des enregistrements appliqués aux grandes distances.

1/ Plus le degré de couverture est important mieux l'analyse se fait en ce sens que la moyenne des vitesses de stack approche la vitesse moyenne et que la profondeur réelle du réflecteur est bien restituée.

Ainsi dans le cas de milieu  $I$ , par exemple, nous passons d'une erreur de 8.45% pour une couverture de  $N=10$  à une erreur de 0.5% pour une couverture  $N=50$ .

2/ Contrairement au paramètre vitesse  $V_s$ , l'erreur dans l'analyse de  $T_o$  augmente en fonction du degré de couverture. En effet, plus on s'intéresse aux grandes distances, moins on contraint la position de  $T_o$ .

Ces deux remarques coïncident avec l'intuition suivante : plus on augmente le nombre d'offsets, plus  $Tx$  est régulier. Dans la littérature géophysique on peut trouver des résultats pratiques sur l'effet de ce degré quant au calcul de biais d'estimation d'une vitesse par un autre type de vitesses, tel sera l'objet du paragraphe suivant.

### Effet du degré de couverture sur l'estimation des différents types de vitesses

**L'écart  $V_{RMS}^2 - V_M^2$  :** On voit d'après la définition des deux vitesses que cet écart n'est autre que la variance expérimentale des vitesses le long de la trajectoire. Dans le cas où la trajectoire est longue cette valeur tend vers  $\sigma_V^2$ . Soulignons, comme le constate Cordier [5], que Al Chalabi (1973) introduit pour la première fois dans la littérature géophysique [1], sans aucune référence à la terminologie statistique, le coefficient  $g = (V_{RMS}^2 - V_M^2)/V_M^2$ . Il l'appela coefficient d'hétérogénéité et s'en servit comme outil d'interprétation lors des études sur les biais d'estimation des vitesses. Or, il apparaît clairement que  $g = \sigma_V^2/V_M^2$ . **Comparaison entre  $V_s$ ,  $V_{RMS}$  et  $V_M$  :** Notons que  $V_{RMS}/V_M = (1 + g)^{1/2}$  et comme  $g > 0$ , nous avons :  $V_M \leq V_{RMS}$ . Pour comparer  $V_{RMS}$  et  $V_s$ , Al Chalabi réalise expérimentalement une opération de stack qui correspond à l'une de celles que l'on a défini précédemment, il s'agit là du stack de type A. Ainsi  $V_s$  s'écrit :

$$\frac{1}{V_s^2} = \frac{N \sum_{i=1}^N T_{x_i}^2 x_i^2 - \sum_{i=1}^N T_{x_i}^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^4 - \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2} \quad (1.4)$$

Au vu des résultats expérimentaux, Al Chalabi conclut à la surestimation de la vitesse quadratique moyenne ( $V_{RMS} \leq V_s$ ) lorsque nous l'évaluons à partir de la vitesse de stack. Notons au passage qu'à cet égard, Cordier [5] souligne la même conclusion sous forme d'une constatation pratique de géophysicien. Cependant, nous pouvons montrer que le biais peut être aussi bien positif que négatif mais que le biais négatif est faible par rapport

au biais positif. En effet, en développant  $T_x^2$  à l'ordre 4 puis en l'injectant dans 1.4, on a :

$$\frac{1}{V_{RMS}^2} + a_4 \frac{\sum_{i=1}^N x_i^6}{N \sum_{i=1}^N x_i^4 - (\sum_{i=1}^N x_i^2)^2} \leq \frac{1}{V_s^2} \leq \frac{1}{V_{RMS}^2} - a_4 \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N x_i^4}{N \sum_{i=1}^N x_i^4 - (\sum_{i=1}^N x_i^2)^2}$$

l'expression de  $a_4$  est donnée dans [5], celle-ci n'est autre que le moment d'ordre 4 de la vitesse. Finalement, nous voyons bien que  $V_s$  est encadré par des expressions qui dépendent du degré de couverture. De ce fait même, la structure de la vitesse de stack pourrait être affectée par le choix du degré  $N$  et donc pourrait différer de la structure réelle de la vitesse. Comme les calculs analytiques sont complexes, nous envisageons une étude numérique de cet aspect.

### Effet du degré de la couverture sur la structure

Partant de l'exemple du milieu II montré précédemment (*en prenant cette fois ci une taille horizontale de 5000 m pour le champ étudié*) nous examinons le profil des vitesses de stack  $V_s$  analysées ainsi que les temps  $T_o$  et la profondeur  $h$  obtenue après conversion.  $h = V_s \times T_o/2$ . Ces profils sont montrés à la figure 1.12 et correspondent aux trois degrés de couverture suivants :  $N = 20$  et  $N = 30$  et  $N = 40$ .

La première question que l'on se pose est la suivante : comment varie la structure des vitesses en fonction du degré de couverture? Ci-après nous examinons l'effet du degré de couverture sur la variance ainsi que la portée des variogrammes des vitesses de stack.

#### 1/ Effet sur la variance :

Nous pouvons remarquer d'après la figure 1.12 que les fluctuations des profils de vitesse sont plus importantes dans le cas d'un degré de couverture  $N=20$  que dans le cas de  $N=40$ . Il semble en effet que les enregistrements effectués à grandes distances fluctuent peu et contraignent mieux les ajustements.

Pour être plus précis, nous avons tracé les variogrammes des vitesses de stack analysées pour des degrés de couvertures  $N = 10, 20, 30, 50$ . Ainsi pour tous les types de stack nous avons la variance qui augmente lorsque le degré de couverture diminue (Cf TAB. 1.3).

	N=20	N=30	N=50
Stack A	0.50	0.28	0.10
Stack B	0.39	0.28	0.12

TAB. 1.3 - Variances des vitesses analysées pour différents degrés de couvertures rapportées à la variance des vitesses analysées pour  $N = 10$ .

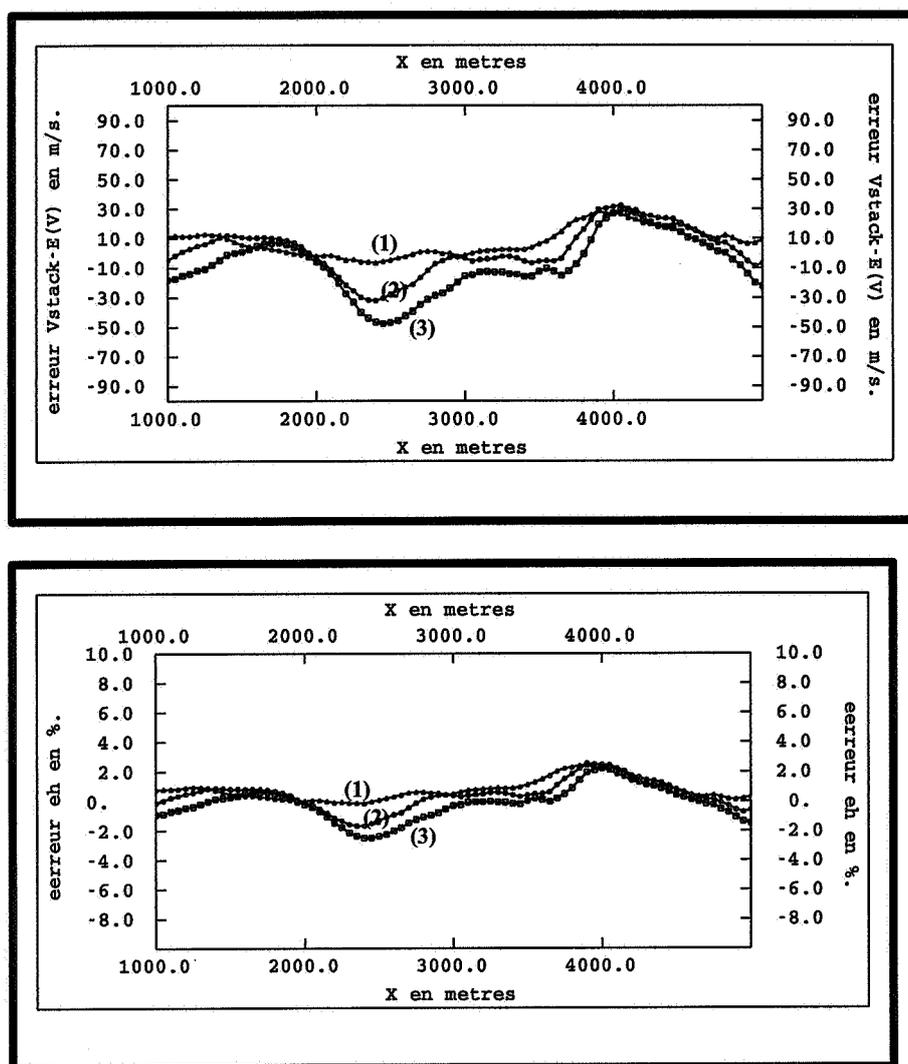


FIG. 1.12 - Résultats typiques d'une analyse de stack. De haut en bas : Profils des vitesses et profils des profondeurs pour 3 exemples de stack. (1)  $N=40$ , (2)  $N=30$  et (3)  $N=20$ .

## 2/ Effet sur la portée :

Pour mieux voir l'effet du degré de couverture sur la portée, nous normalisons les variogrammes et nous les comparons les uns aux autres et par rapport au variogramme de la vitesse réelle. Ainsi d'après la figure 1.13, nous remarquons que plus le degré de couverture diminue, plus on s'éloigne de la structure de la vitesse réelle. En effet aux faibles distances d'enregistrement, on constate une importante fluctuation des temps d'arrivées, si bien que les corrélations entre vitesses de stack pour deux points voisins sont facilement altérées par ces fluctuations (d'où l'affaiblissement de la portée).

Par ailleurs, lorsque l'on fait diminuer le nombre d'offsets, l'expérience montre que  $V_s$  diminue aussi en moyenne. Il semble que cet effet soit dû aux fortes fluctuations au niveau

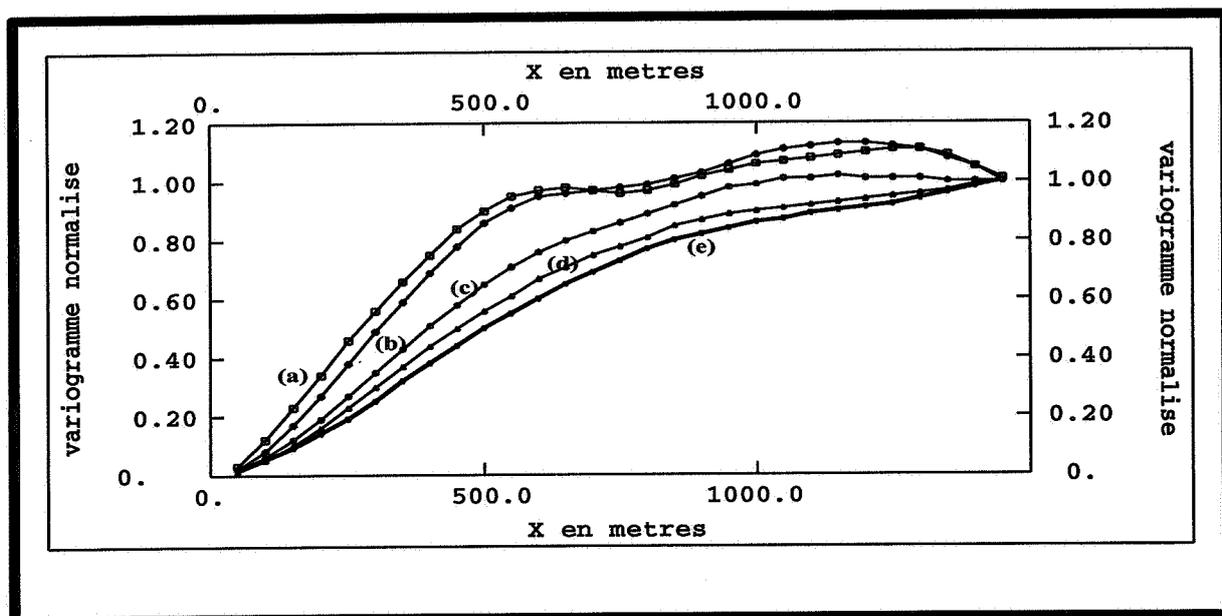


FIG. 1.13 - Effet du degré de la couverture sur la portée de la vitesse de stack. Les variogrammes sont normalisés. (a)  $V_{stack}$  avec  $N=10$ , (b)  $V_{stack}$  avec  $N=20$ , (c)  $V_{stack}$  avec  $N=30$ , (d)  $V_{stack}$  avec  $N=40$ , (e) Vitesse réelle.

de l'origine. En effet, lorsqu'on ne dispose que des enregistrements à petites distances de la source, à cause des fortes fluctuations de ces derniers, ce n'est qu'une grande courbure qui peut ajuster l'hyperbole. D'où le choix d'une faible vitesse de stack.

De là, il apparaît clairement le dilemme suivant : lorsque nous augmentons le nombre d'offsets, nous nous approchons de la structure, paradoxalement l'ajustement du temps  $T_0$  se fait moins bien puisque nous privilégions moins les enregistrements à faibles distances.

Soit maintenant, un milieu perturbé sur lequel nous faisons une série de mesures (Cf fig 1.15) en déplaçant la source en surface. Les données  $T_x$  sont reportées sur un diagramme temps distances (Cf fig 1.14).

Nous obtenons ainsi un nuage de courbes dont les fluctuations sont dues à la perturbation du milieu. Ce nuage est d'autant plus épais que la variance de la perturbation est importante. D'autre part celui-ci est plus dispersé pour les faibles distances source-récepteur, cette allure est intuitivement correcte puisque les rayons sont de plus en plus régularisés. La question que l'on pourrait se poser est : *quelles sont les informations sur la structure des vitesses que l'on peut déduire de l'étude de ce nuage ?*

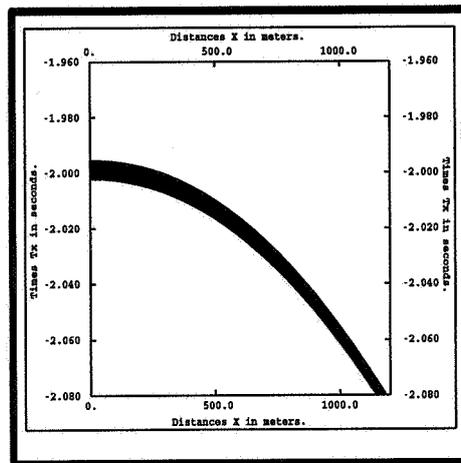


FIG. 1.14 - Un exemple de nuage de courbes  $T_x$  pour un milieu gaussien de  $\text{var}[V] = 10000(m/s)^2$ .

## 1.4 Conclusions

S'agissant des méthodes sismiques, nous venons de voir deux points importants pour lesquels la contribution de la géostatistique pourrait être significative et qui feront l'objet de ce travail.

- D'une part la quantification des erreurs de migration qui est de nos jours une question d'actualité et pour laquelle certains peuvent donner des solutions simples en faisant appel aux corrélations des données de puits et données d'après-stack [23] [20]. Pour notre part, les exemples que nous avons exhibés montrent que nous considérons le problème de manière plus radicale, nous remontons aux données d'avant stack et nous cherchons en effet via une linéarisation le lien entre la perturbation du milieu et l'erreur engendrée. Ce lien respecte d'une part les hypothèses physiques de la propagation d'autre part prend en compte la perturbation du milieu.

- D'autre part, nous avons vu les inconvénients que peut présenter une analyse structurale sur les vitesses de stack. Les vitesses de stack ne présentent pas les mêmes paramètres géostatistiques que les vitesses réelles. Par ailleurs elles dépendent totalement de la méthode d'analyse et de la couverture.

En fonction des remarques exposées ci-dessus nous présentons dans la première partie la modélisation de l'erreur de migration, celle-ci faisant apparaître explicitement la covariance de la perturbation, ou ce qui revient au même celle des vitesses. Nous nous attacherons dans la deuxième partie à l'inversion sismique faible c'est-à-dire la détermination de la covariance des vitesses à partir des temps d'arrivée (Voir schéma du travail Fig. 1.15).

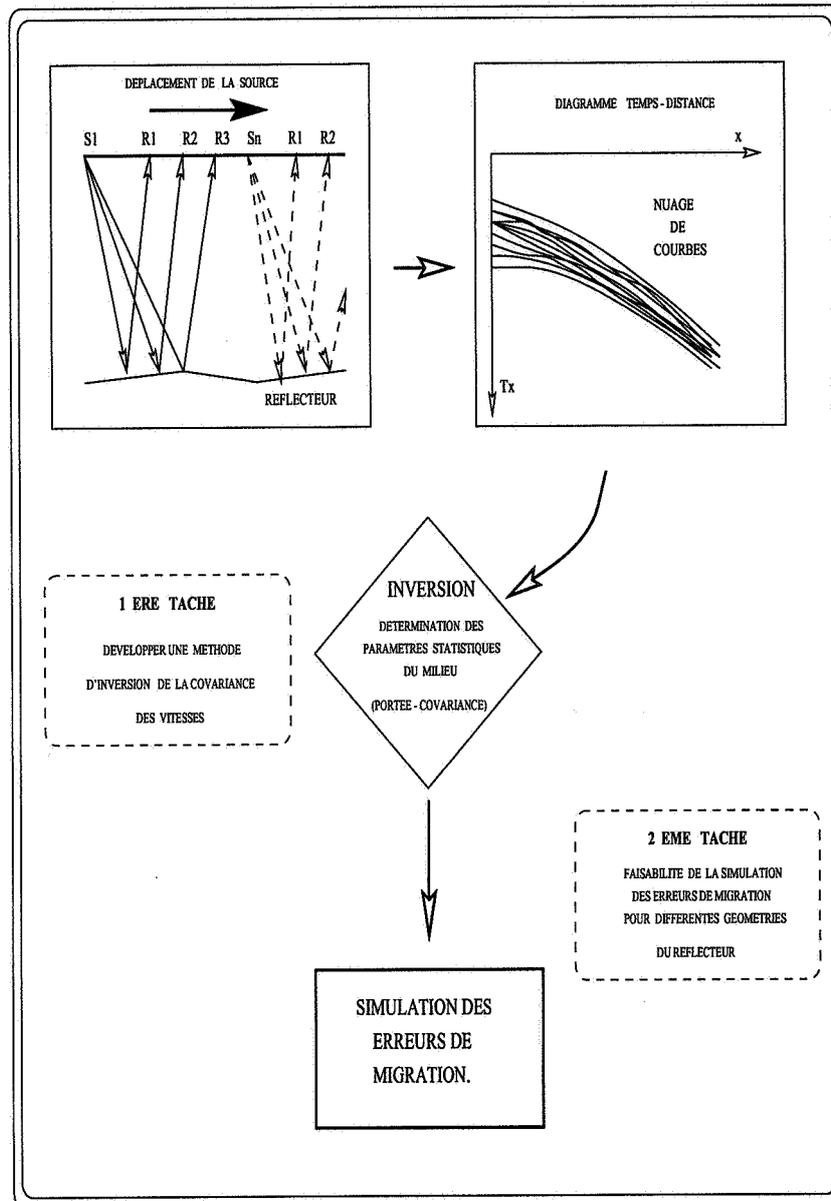


FIG. 1.15 - Schéma du travail.

Le schéma de travail illustré par la figure 1.15, montre la complexité du problème. Cette complexité se manifeste dans le chevauchement des thèmes abordés :

En effet, si l'objectif final revient à simuler les erreurs de migration, celui-ci devrait être logiquement précédé par la phase de détermination de la covariance des vitesses qui constitue le thème inversion.

Paradoxalement si la simulation des erreurs représente le thème traité en fin de parcours, il n'en est pas de même pour les développements théoriques qui quantifient ces erreurs de migration. Ces développements devraient être présentés avant la partie inversion puisqu'ils sont à la base de celle-ci. Ils feront l'objet d'une partie consacrée aux détails des calculs qui diffèrent suivant le choix d'un cadre stationnaire ou non stationnaire pour les champs de vitesses.

A cela s'ajoute un autre fait : l'inversion s'inscrit dans un contexte aléatoire à distinguer des autres cadres d'inversion que l'on pourrait rencontrer dans la littérature géophysique. A cet égard il est naturel d'envisager une brève description de ces méthodes qui peuvent s'apparenter à l'inversion proposée. Enfin, cette même méthode d'inversion fait intervenir des considérations théoriques (approximations de Rytov) qui méritent une discussion. En raison de tout cela, les interférences entre les différents thèmes abordés semblent inévitables. Pour réduire celles-ci, nous avons choisi l'organisation suivante que nous détaillons ci-après :

**Organisation de la suite du document :**

<p>Partie I Erreurs de Migrations</p>	<p>2. Cas stationnaire 3. Cas non stationnaire</p>
<p>Partie II Inversion sismique faible (Cas stationnaire)</p>	<p>4. Généralités sur l'inversion. 5. Fluctuations des eikonales . 6. Expérimentations -Inversion sismique faible 7. Expérimentations - Autres applications 8. Conclusions</p>

TAB. 1.4 - *Plan du document.*

**PARTIE I :** Cette partie contient les développements théoriques mis en œuvre pour l'étude du problème de migration en sismique. Nous distinguons deux cas, chacun de ces deux cas fait l'objet d'un chapitre à part.

**Chapitre 2 : Cadre stationnaire :** Après des rappels sur l'approximation de l'optique géométrique nous présentons quelques exemples analytiques où l'on peut calculer les géodésiques. Dans le cas d'un milieu perturbé stationnaire les rayons fluctuent légèrement autour des trajectoires droites liant la source au récepteur. En faisant usage de méthodes perturbatives nous donnons les expressions des erreurs de migration et proposons la simulation de celles-ci pour quelques cas simples de géométrie de réflecteur.

**Chapitre 3 : *Cadre non stationnaire*** : Le cadre non stationnaire est un peu plus délicat : pour donner une expression valable de l'erreur de migration il faut tenir compte de la trajectoire non perturbée qui n'est plus une droite. Pour le calcul de ces trajectoires non perturbées nous présentons le formalisme de Hamilton-Jacobi qui est souvent utilisé en théorie des tracés de rayons. Nous donnons ensuite une méthode récente de G. Matheron pour exprimer l'erreur de migration dans ces milieux lorsque les réflecteurs présentent de légers pendages. Les calculs de variance des erreurs deviennent une simple question d'intégration numérique.

**PARTIE II** : Cette partie porte sur l'inversion sismique dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique. La question est traitée en quatre petits chapitres.

**Chapitre 4 *Généralités sur le problème d'inversion*** : Sans prétendre être une étude bibliographique exhaustive, le chapitre renseigne le lecteur sur l'état actuel des méthodes stochastiques pour l'inversion des données sismiques. Nous donnons alors une vue rapide sur l'inversion de Tarantola et Valette, puis l'inversion effectuée par Jannaud pour l'extraction des paramètres statistiques du sous-sol à partir des codas. Après cela, nous donnons notre point de vue sur l'inversion qui induit un besoin de l'étude des perturbations des eikonales.

**Chapitre 5 : *Fluctuations des Eikonales*** : Nous présentons le concept de variances et covariances des fluctuations des eikonales. Ensuite deux méthodes sont proposées pour le calcul, une approximation de Rytov et un calcul direct. Il apparaît que le calcul direct est faisable, compliqué, mais plus rigoureux que l'approximation de Rytov.

Les éléments théoriques établis dans ce travail pourraient être appliqués à d'autres disciplines que la sismique telles que le comportement des ondes radio en haute atmosphère, comme c'est le cas des applications envisagées par Rytov.

**Chapitre 6 : *Expérimentations - Inversion sismique faible*** : Ce chapitre est une simple application des résultats théoriques du chapitre précédent. Nous présentons, le principe général d'une inversion sismique faible, celle-ci permet d'obtenir la variabilité latérale du milieu exprimée par sa portée et/ou sa covariance pour des milieux stationnaires et des réflecteurs quasi-horizontaux.

**Chapitre 7 : *Expérimentations - Autres applications*** : La seconde série d'expérimentations concerne l'extension de la méthode d'inversion pour plusieurs cas : des milieux ayant subi des déformations, le cas d'un bicouche et enfin le cas de réflecteurs non plans pour lesquels nous donnons une solution lorsque ces derniers sont légèrement chahutés.

**Chapitre 8 : *Conclusion*** : En guise de conclusion, nous dressons un bilan des nouveaux acquis obtenus par les voies que nous avons explorées, ainsi que les limitations liées aux méthodes proposées et à la nature même des données. ■

**PREMIERE PARTIE**

**ERREURS DE MIGRATION**



## RÉSUMÉ DE LA PREMIÈRE PARTIE

Cette partie est consacrée aux problèmes des erreurs de migration. En raison de la complexité du problème nous abordons le sujet en deux chapitres.

- Le chapitre 2 traite le cas de champs de vitesses déterministes pour lequel nous explicitons la notion de géodésique et d'erreur de migration. Ensuite nous montrons des exemples numériques de calcul des erreurs et leur impact sur l'évaluation de la capacité d'un réservoir pétrolier. Par ailleurs, nous abordons le cas de champs de vitesses stationnaires et le calcul des erreurs par méthode perturbative. Expliciter les formules des erreurs de migration revient à connaître quelques statistiques sur la vitesse du milieu. Pour cela, nous envisageons quelques hypothèses : une optimiste, une autre neutre puis une troisième plus réaliste qui consiste à prendre une vitesse de stack. Après le développement des expressions des erreurs, vient le calcul des variances suivi d'une discussion sur la qualité de la migration en fonction des paramètres du milieu.
- Le chapitre 3 traite le cadre non stationnaire perturbé et en particulier l'évaluation des erreurs de migration dans le cas des faibles pendages. Ceci constitue une restriction par rapport au cas stationnaire. En raison de la grande complexité des formules, seule la variance des estimations est abordée, et encore de manière numérique !



## Chapitre 2

### Cadre stationnaire

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence quelques formulations des erreurs théoriques de migration. Nous proposons ici de voir avec plus de détails, le calcul de ces erreurs lorsque les champs de vitesses sont modélisés à l'aide d'une fonction aléatoire stationnaire.

Avant de passer à un milieu aléatoire, nous examinons le cas de modèles déterministes pour les vitesses. Partant de l'approximation de l'optique géométrique, nous commençons par établir l'équation des géodésiques. Nous donnons ensuite quelques exemples d'intégration dans le cadre d'un milieu stratifié dont la vitesse ne dépend que des profondeurs. Après cela, l'expression générale des erreurs d'une migration effectuée sous l'hypothèse de trajets sismiques droits est établie.

Le cas de champs de vitesses perturbés, est considéré à partir du paragraphe 2.6. L'expression de ces erreurs est établie en faisant l'usage d'une méthode classique de perturbation.

En explicitant les conditions de validité de cette technique, nous donnons les expressions au premier ordre de l'erreur, ainsi que la variance des erreurs. Nous proposons enfin la simulation de celles-ci pour quelques géométries simples de réflecteur.

#### 2.1 Approximation de l'optique géométrique

Le cadre de travail que nous nous sommes fixé est celui de l'optique géométrique. Toute une variété de phénomènes optiques peut être expliquée en incluant seulement le principe de Fermat et les lois de Descartes sur la réflexion et la réfraction [12]. Une telle approximation en sismique suppose que la longueur d'onde propagée est très faible

devant les dimensions des objets qui produisent la diffraction de l'onde incidente (nous discuterons de la validité de cette approximation au chapitre 4).

Dans la suite, nous considérons que la propagation des ondes est régie par le principe de Fermat. "la trajectoire de parcours de l'onde entre deux points, est celle qui minimise le temps de trajet entre ces deux points". Plus explicitement, la figure 2.1 introduit les notations suivantes :

\*  $M(x, y, z)$  : point de coordonnées  $x, y$  et  $z$ .

\*  $v(x, y, z)$  : vitesse de propagation.

\*  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  : abscisse curviligne.

Soient  $M_o$  et  $M_1$  deux points quelconques du milieu. Le rayon qui joint les points  $M_o$  et  $M_1$ , est le rayon qui minimise l'intégrale  $T(M_o, M_1) = \int_{M_o}^{M_1} \frac{ds}{v}$ .

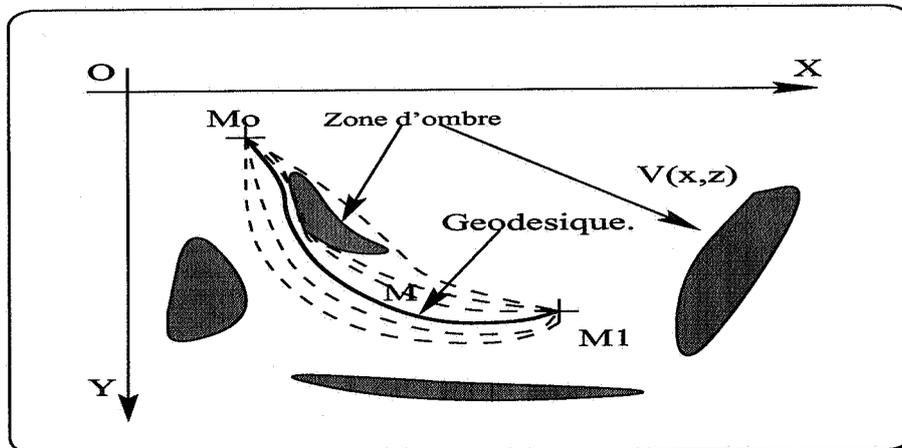


FIG. 2.1 - Géodésique partant du point  $M_o$  et arrivant au point  $M_1$ . En noir des inclusions non pénétrables par les rayons sismiques.

$T(M_o, M_1)$  est alors le temps de parcours entre  $M_o$  et  $M_1$ . La trajectoire qui minimise ce parcours est appelée géodésique. Puisqu'il s'agit de propagations et de temps de propagations, la métrique associée à notre problème est évidemment une métrique temps que l'on définit comme suit :

$$dt^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{v^2}$$

Considérons les notations tensorielles suivantes où les  $g_{ij}$  sont les composantes du tenseur métrique au point  $x$  de coordonnée  $x^i$  ( $i=1,2,3$ ).

$$g_{ij} = \frac{1}{v^2} \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ désigne le symbole de Kronecker}$$

Dans ce cadre de notation, la distance temps s'écrit  $dt^2 = dx^i g_{ij} dx^j$  ( $i=1,2,3$ ). Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer l'équation de celle-ci.

## 2.2 Équation des géodésiques

Nous cherchons à minimiser le trajet, au sens de la métrique précédente, entre les deux points  $M_0$  et  $M_1$ . Ceci correspond en mécanique au principe de moindre action où le système se meut de façon à minimiser l'énergie de ses états de transition [13]. Dans notre cas, l'expression à minimiser est :

$$\int \sqrt{g_{ij} u^i u^j} d\tau$$

Où l'on pose  $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ ,  $\tau$  paramètre arbitraire permettant le passage de  $M$  à  $M_0$ .

Dans le cas qui nous intéresse (ie:  $g_{ij} = \Lambda \delta_{ij}$ ) où  $\Lambda = 1/v^2$ , l'équation de minimisation devient[16] :

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda u^k}{dt} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k} \\ \Lambda \sum_i |u^i|^2 = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ainsi pour suivre la trajectoire des rayons sismiques nous avons à résoudre le système d'équations différentielles 2.1. La résolution analytique de celle-ci est en général impossible à obtenir. Dans le paragraphe suivant nous allons voir un cas très simple d'intégrabilité de celle-ci.

## 2.3 Exemples d'intégration

Pour simplifier le problème nous ne considérons que le cas d'un modèle de lenteur (*inverse de la vitesse*) qui dépend de la seule variable profondeur  $z$ . C'est en pratique le cas d'un milieu stratifié  $\Lambda(x, y, z) = \Lambda(z)$ . Dans ce cas l'équation des géodésiques ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$  et l'on a les deux premières relations suivantes :

$$\Lambda u^1 = C_1 \quad \text{et} \quad \Lambda u^2 = C_2 \quad (2.2)$$

Avec  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes. Si l'on pose  $C = C_1^2 + C_2^2$  alors d'après l'égalité

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^3 |u^i|^2 = 1/\Lambda \text{ nous avons :}$$

$$u^3 = \frac{\sqrt{\Lambda - C}}{\Lambda} \quad (2.3)$$

Nous pouvons donc suivre les trajectoires par une simple intégration des équations 2.2 et 2.3 . En effet, si l'on choisi un paramétrage en  $z$  de la trajectoire, nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(M_o, M_1) = \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda - C}} dz \\ x_1 - x_o = C_1 \int_{z_o}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\Lambda - C}} \\ y_1 - y_o = C_2 \int_{z_o}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{\Lambda - C}} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Les exemples d'intégration sont peu nombreux. Dans le tableau suivant nous donnons un exemple d'intégration pour le carré de lenteur linéaire en  $z$  ( $\Lambda(z) = a - bz$ ).

$x_1 - x_o$	$\frac{2C_1}{b} [(a - C - bz)^{1/2}]_{z_1}^{z_o}$
$y_1 - y_o$	$\frac{2C_2}{b} [(a - C - bz)^{1/2}]_{z_1}^{z_o}$
$T$	$\frac{2}{3b} [(a - C - bz)^{3/2}]_{z_1}^{z_o} + \frac{2C}{b} [(a - C - bz)^{1/2}]_{z_1}^{z_o}$

TAB. 2.1 - *Champ de vitesses de carré de lenteur linéaire en profondeur.*

Il existe d'autres exemples d'intégration (*Exemple le cas de vitesses linéaires*), en réalité intégration analytique ou pas ce n'est pas ici vraiment la question qui nous préoccupe le plus. De toute manière nous pouvons toujours procéder à une intégration numérique.

## 2.4 Erreurs de migration

Nous venons de voir, que contrairement à l'hypothèse très utilisée, les trajectoires des rayons sismiques ne sont pas rectilignes en général. Pourtant, vu la complexité du problème, l'hypothèse de "rayons droits" reste à ce jour fortement utilisée en prospection sismique. Le but de cette section est d'établir les expressions classiques de l'erreur de migration en utilisant l'hypothèse sus-mentionnée. Pour cela mettons en place les quelques notations suivantes :

\* Soit comme le montre la figure 2.2,  $M(x, z)$  le point à partir duquel on fait propager le signal qui se réfléchit perpendiculairement au réflecteur au point  $\tilde{M}_o(\tilde{x}_o, \tilde{z}_o)$ . Soit  $M'$  le point migré qui se trouve à la verticale de  $\tilde{M}_o$ .

\* Soit  $L$  la longueur du rayon  $MR$  qui peut s'écrire  $L = \bar{V}T$  où  $\bar{V}$  est la vitesse du milieu supposée constante.

\* Nous définissons aussi la dérivée temps  $G$  comme  $G = \frac{dT}{dx}$

\* L'angle d'incidence  $\alpha$  est tel que:  $\sin\alpha = \bar{V}.G$  (Ce résultat est obtenu en tenant compte de  $L = X\sin\alpha + Cste$  et  $L = \bar{V}T$ ).

Dans ce cas l'offset  $D = \|\text{MM}'\|$  est tel que:

$$D = L. \sin \alpha = \bar{V}^2.T.G$$

Ou encore

$$MM' = -\bar{V}^2 T^2 G$$

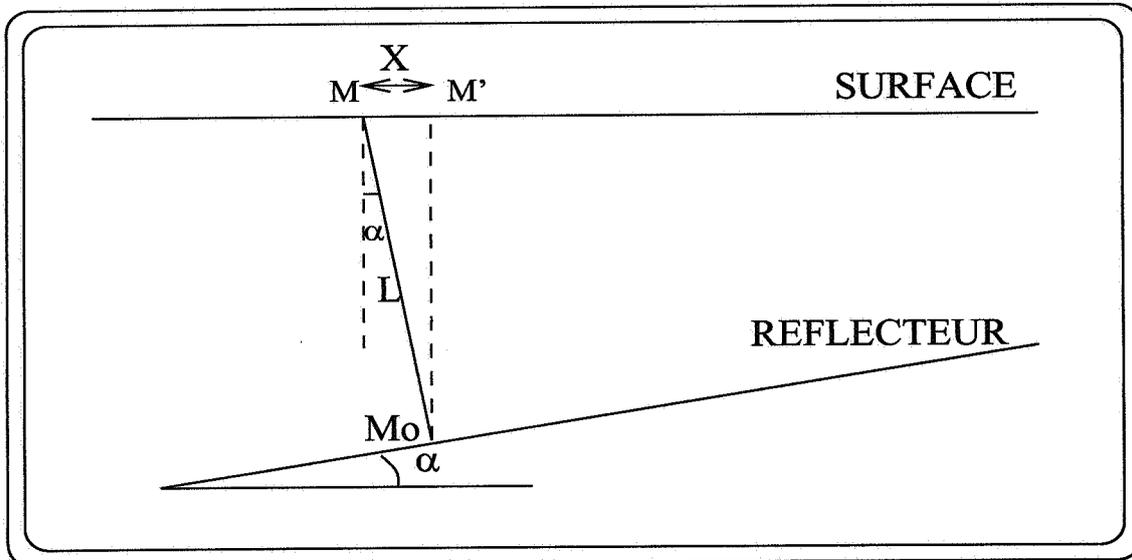


FIG. 2.2 - Migration : descriptif.

Avec  $G = -Gi$  ( $i$  est le vecteur directeur de l'axe horizontal). Ainsi les coordonnées du point migré peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} x - \tilde{x}_o = \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} T^2(M; M_o) \\ z - \tilde{z}_o = [\bar{V}^2 T^2 - (x - \tilde{x}_o)^2]^{1/2} \end{cases}$$

Dans le cas à trois dimensions nous avons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \tilde{x}_o = \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} T^2(M; M_o) \\ y - \tilde{y}_o = \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} T^2(M; M_o) \\ z - \tilde{z}_o = [\bar{V}^2 T^2 - (x - \tilde{x}_o)^2 - (y - \tilde{y}_o)^2]^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Ainsi les coordonnées du point migré peuvent être déterminées à partir de la donnée temps  $T(M, \tilde{M}_o)$ . L'erreur de migration est quant à elle, donnée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_o - x_o = x - x_o - \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} T^2(M; M_o) \\ \tilde{y}_o - y_o = y - y_o - \frac{\bar{V}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} T^2(M; M_o) \\ \tilde{z}_o - z_o = z - z_o - [\bar{V}^2 T^2 - (x - \tilde{x}_o)^2 - (y - \tilde{y}_o)^2]^{1/2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Nous voyons donc que les erreurs de migration peuvent être déterminées à partir de la donnée  $T(M, \tilde{M}_o)$  (qui est la donnée à offset nul), et la vitesse  $\bar{V}^2$ . En première approximation la vitesse de stack et le temps  $T_o$  (obtenus aussi par analyse de stack) sont pris habituellement comme substituts respectifs de  $\bar{V}$  et  $T(M, \tilde{M}_o)$ .

Dans le paragraphe suivant, nous allons montrer quelques applications de calcul des erreurs de migration dans les différents cas de modèles de vitesses cités.

## 2.5 Illustrations numériques

Les exemples montrés dans ce paragraphe concernent deux aspects :

1-/ Idées visuelles sur les allures des terrains migrés par rapport à la forme réelle du réflecteur. Impact du paramètre vitesse sur ces allures.

2-/ Impact des erreurs de migration sur l'estimation du volume d'un dôme pétrolier et les réserves en hydrocarbures.

### 2.5.1 Quelques allures de réflecteurs migrés :

La vitesse du milieu est du type suivant  $\Lambda(z) = a - bz$ . Rappelons que dans ce cas les trajectoires et le temps s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 - x_o = \frac{2C_1}{b} [(a - C - bz)^{1/2}]_{z_1}^{z_o} \\ T = \frac{2}{3b} [(a - C - bz)^{3/2}]_{z_1}^{z_o} + \frac{2C}{b} [(a - C - bz)^{1/2}]_{z_1}^{z_o} \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi, en injectant 2.7 dans le système 2.6, les expressions des erreurs de migration deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o = \frac{2C_1}{b} \{(a - C - bz_o)^{1/2} - (a - C)^{1/2}\} - \bar{V}^2 T \frac{dT}{dx} \\ \tilde{z}_o - z_o = z_o - [\bar{V}^2 T^2 - (x - \tilde{x}_o)^2] \end{cases}$$

Pour procéder au calcul de cette erreur, il reste à exprimer les expressions de  $C_1$  et  $\bar{V}$ . S'agissant de  $C_1$  il suffit d'exprimer que l'on travaille avec des rayons à offsets nuls (*C'est à dire perpendiculaires au réflecteur*). Quant aux vitesses, celles-ci peuvent être estimées de deux manières :

- Estimation 1: qui est une estimation locale pour chaque point du réflecteur que l'on voudrait migrer. Ainsi la vitesse s'écrit :

$$\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

- Estimation 2: qui est une estimation globale dans le sens que  $\bar{V}$  est la moyenne de plusieurs vitesses calculées pour plusieurs points du réflecteur. Cette vitesse moyenne peut être aussi obtenue lors d'un carottage sismique.

Ci-dessous nous allons donner des exemples de migration pour plusieurs cas de figure de réflecteur. La première remarque à signaler est que la migration avec analyse de vitesses locale est plus précise que la vitesse analysée globalement. Ainsi, les figures 2.3 montrent par exemple que dans le cas d'une analyse globale, l'erreur est de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

En effet une estimation globale induit des imprécisions plus importantes de la vitesse. C'est précisément aux endroits où l'on sous-estime la vitesse que l'on surestime la profondeur du réflecteur et *vice-versa*. De ce fait on assiste à une distorsion du dôme. Celle-ci est beaucoup plus importante lorsque nous n'avons qu'une connaissance *a priori* de la vitesse.

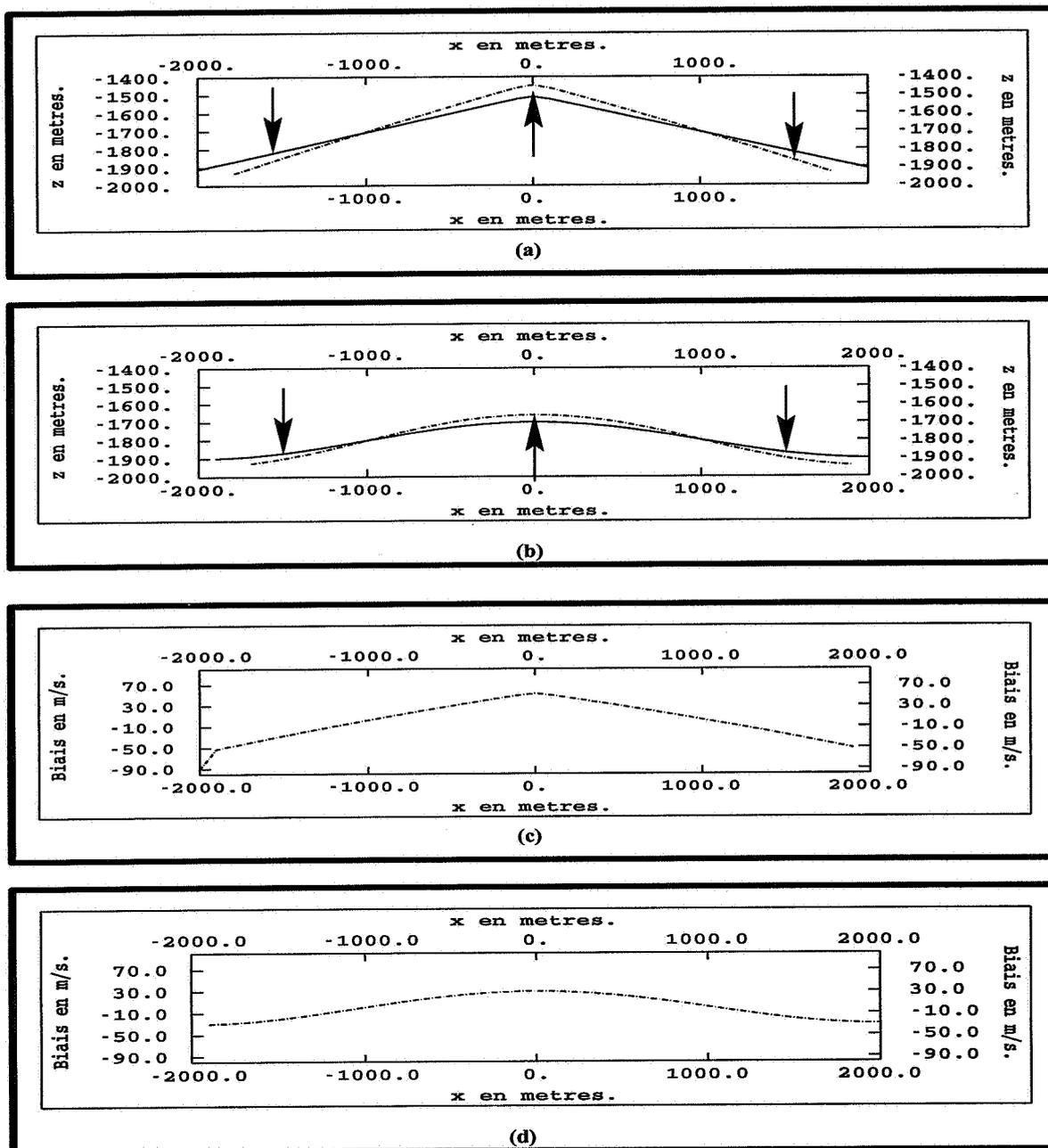


FIG. 2.3 - De haut en bas : (a) Migration d'un dôme de forme triangulaire. (b) Migration d'un dôme anticlinal de forme sinusoidale. Les analyses de vitesses sont des analyses globales. (c et d) Différences entre les vitesses  $\bar{V}$  et  $\bar{V}_{globale}$  correspondants respectivement aux cas a et b. (En trait foncé réflecteur réel, en trait discontinu réflecteur migré)

### 2.5.2 Impact de l'erreur de migration sur l'évaluation des réserves

Nous allons donner ici un ordre de grandeur sur les écarts de l'estimation du volume d'un réservoir et les hydrocarbures en place. Nous proposons alors l'exemple suivant : il s'agit du dôme pétrolier représenté à la figure 2.4.a. Le réservoir est constitué d'une roche mère sableuse avec une porosité totale constante  $p = 10\%$ .

L'évaluation du volume du réservoir et de la quantité d'hydrocarbures en place est effectuée en utilisant les deux estimations de vitesses précédentes :

Voici les résultats de ces estimations pour deux niveaux de l'aquifère ( $-1500m$  et  $-1515 m$ ). L'erreur est faible dans le deuxième cas (*aquifère à  $-1515 m$* ) car on ne tient pas seulement compte des zones où l'on a surestimation mais aussi la zone où l'on a sous-estimation de la vitesse de propagation.

	Volume réservoir	Volume du fluide	Erreur
Réalité	6353.	635.3	—
Estimation 1	7539.	753.9	18.7 %
Estimation 2	7965.	796.5	25.3 %

TAB. 2.2 - Cas où le niveau de l'aquifère se trouve à la côte  $z = -1500 m$

	Volume réservoir	Volume du fluide	Erreur
Réalité	9574.	957.4	—
Estimation 1	10566.	1056.6	10.3 %
Estimation 2	10891.	1089.1	13.7 %

TAB. 2.3 - Cas où le niveau de l'aquifère se trouve à la côte  $z = -1515 m$

Cet exemple précis montre que l'erreur de migration implique une imprécision sur les réserves qui peut atteindre les 20%.

**Cas où l'on travaille avec des vitesses connues grossièrement :** dans ce cas le risque d'erreur est important. En effet, une connaissance *a priori* des vitesses peut être encore moins précise que la prise de la vitesse moyenne comme cela est suggéré par l'estimation 2 définie dans l'analyse globale. D'autre part, l'erreur d'estimation de la vitesse (*que l'on appelle biais*) peut être aussi bien positive que négative. De ce fait, l'erreur d'estimation du volume d'un réservoir pétrolier peut aussi conduire à une sous-estimation des réserves. La figure 2.4 schématise trois réflecteurs :

- Le réflecteur A qui est réel.
- Le réflecteur B qui est migré en prenant une vitesse  $V_m = 1449. m/s$ . Cette vitesse correspond à la vitesse des trajets au niveau de la partie supérieure du réservoir.

- Le réflecteur C qui est migré en utilisant une vitesse  $V_m = 1475$ . m/s. Cette vitesse correspond à la vitesse des trajets au niveau des flancs du réservoir.

La figure 2.5 montre le biais des vitesses. Nous remarquons alors que les zones bien restituées sont les zones où l'on commet le minimum d'erreur d'estimation de la vitesse. Ainsi dans le cas B, c'est le sommet qui est bien restitué. Par contre ce sont les flancs du réservoir qui le sont dans le cas C.

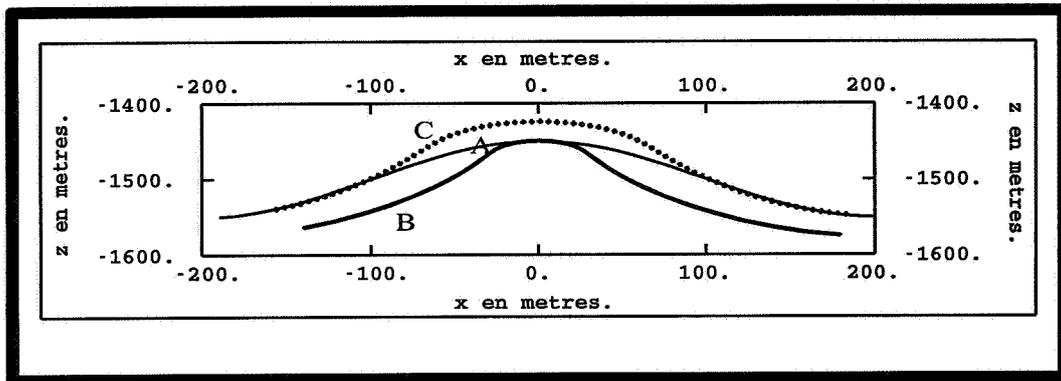


FIG. 2.4 - Exemple d'utilisation de trois vitesses extrêmes.

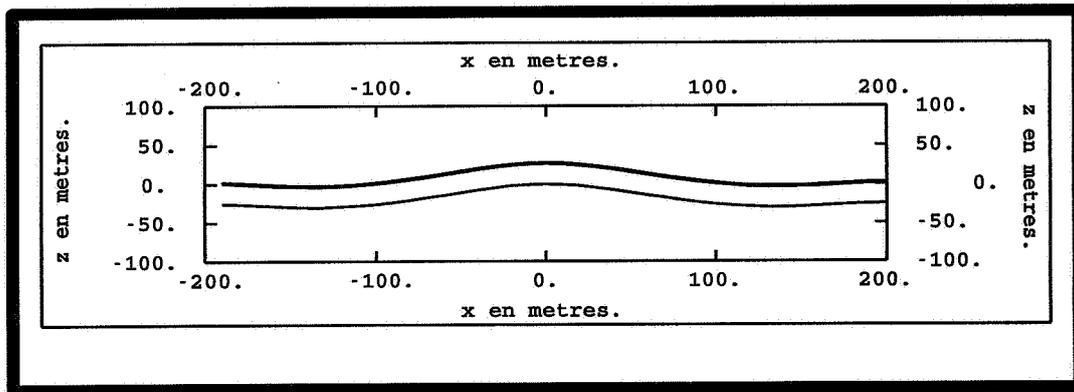


FIG. 2.5 - Biais des vitesses. La courbe foncée est relative à l'estimation C. La deuxième courbe est relative à l'estimation B

Finalement nous montrons dans le tableau suivant les résultats des estimations des volumes du réservoir et du fluide qui s'y trouve piégé.

$V_m$	Volume réservoir	Volume du fluide	Erreur
$V_m=1449$ .	3289.	1316.	-48. %
$V_m=1475$ .	10118.	4047.	59. %

Nous remarquons alors que la migration C conduit à une surestimation du réservoir d'environ 50 %. Cet exemple n'est qu'une manière pessimiste de voir l'effet de l'erreur,

l'impact sur l'évaluation serait beaucoup plus faible si l'on considère des niveaux d'aquifère un peu plus profonds de telle sorte que l'on ne privilégie ni les zones sous-estimées ni les zones surestimées du réflecteur en question.

En bref, même si l'erreur de migration n'est de l'ordre que de quelques pourcents, son impact sur l'estimation du volume des réserves peut être assez important. Cet impact est d'autant plus important que l'analyse des vitesses est mauvaise.

La question que l'on peut se poser maintenant est : *qu'est ce qui se passe dans le cas de champs de vitesses stationnaires?* Tel est l'objet du paragraphe suivant .

## 2.6 Linéarisation

Considérons l'expression de l'erreur de migration donnée par le système 2.6. Dans le cadre de champ de vitesses perturbé le calcul exact n'est plus possible. On a donc recours à une méthode perturbative, en développant le champ de vitesses au premier ordre (Matheron 1991 [16]<sup>1</sup>):

$$\Lambda(x, y, z) = \frac{1}{c_o^2}(1 + \epsilon(x, y, z)) \quad \text{ou encore} \quad v = c_o(1 - \frac{1}{2}\epsilon(x, y, z))$$

Nous rappelons que  $\Lambda = 1/v^2$ ,  $c_o$  est la vitesse moyenne du milieu et  $\epsilon$  est une fonction aléatoire de valeurs très faibles par rapport à 1.

Dans ce qui suit, il s'agit de donner l'expression de l'erreur de migration au premier ordre. La clef de ces calculs est le développement au premier ordre du temps, nous posons alors :

$$c_o T_o(MM_o) = r + \phi \tag{2.8}$$

Dans ce cas nous pouvons établir deux expressions pour le temps  $T_o(M, M_o)$ . D'une part d'après 2.8 nous avons :

$$c_o^2 |\nabla T_o(MM_o)|^2 = 1 + 2 \frac{d\phi}{dr} + |\nabla \phi|^2$$

D'autre part, d'après l'équation de l'eikonale au premier ordre nous avons :

$$c_o^2 |\nabla T_o(MM_o)|^2 = 1 + \epsilon$$

Ce qui permet de faire l'identification suivante, sous l'hypothèse que  $|\nabla \phi|^2$  soit d'ordre supérieur à 1 :

$$1 + \epsilon = 1 + 2 \frac{d\phi}{dr} \tag{2.9}$$

---

1. Dans cette référence, on trouve aussi le calcul de l'erreur de migration dans deux hypothèses neutre et optimiste que nous reprendrons par la suite.

Ceci implique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{2} \epsilon$$

**Conditions sur la perturbation  $\epsilon$  :**

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons d'abord expliciter les conditions que doit vérifier  $\epsilon$ . Pour cela nous allons calculer  $|\nabla \phi|^2$ . D'après 2.9, nous pouvons écrire que :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{r} \int_0^r \epsilon (M_o + s u) ds$$

où  $u = M_o M / r$  est le vecteur unité de la droite  $(M_o M)$ . Ainsi, nous avons :

$$c_o T(M, M_o) = r \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}\right) = r + \phi$$

Le gradient admet donc l'expression suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{1}{2} (\bar{\epsilon} + r \bar{\epsilon}'_i)$$

Pour que l'approximation 2.9 soit valable, il faut non seulement que la perturbation soit de moyenne nulle et négligeable devant l'unité, mais il faut aussi que la somme des gradients de perturbation suivant la trajectoire effectuée soit aussi du premier ordre. Ainsi G.Matheron fait la remarque suivante :

*“ ... Il ne suffit pas que  $\epsilon$  reste très petit il faut aussi que les quantités (sans dimensions) :*

$$r \bar{\epsilon}'_i = r \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\epsilon}$$

*restent notablement inférieures à 1 - et c'est là une condition forte.”*

Dans ce même contexte nous avons donné au paragraphe 2.3.1 deux conditions suffisantes pour que les deux hypothèses évoquées ci-dessus soient vérifiées à savoir :

$$var[\epsilon] = \sigma^2 \ll 1 \quad \text{et} \quad var[r \bar{\epsilon}'] = \frac{2r^2}{3} \int_0^\infty C_1(\tau r) d\tau \ll 1 \quad \text{avec} \quad C_1 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} C$$

Aussi faudrait il contrôler les deux expressions  $var[\epsilon]$  et  $var[h \bar{\epsilon}']$ . Dans le tableau ci-dessous nous donnons quelques expressions de ces deux quantités pour quelques modèles de covariances :

Ces expressions peuvent renseigner sur la validité de l'approximation au premier ordre.

Dans le cas d'une covariance du type exponentielle de Gauss  $C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 e^{-\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right\}}$ , le calcul de l'erreur de migration ne peut se faire que pour les horizons de profondeur  $h$  telle que :

$$\text{var}[h\epsilon'] = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \cos^3 \varphi \left(\frac{b}{a}\right)^2 h \frac{\sigma^2}{b} \ll 1 \implies h \ll h_c = K \frac{\lambda^2}{\sigma^2}$$

Avec  $K^{-1} = \sqrt{2\pi} \cos^3 \varphi / 3b$  et  $\lambda$  rapport d'anisotropie ( $\lambda = a/b$ ). Le calcul est donc valable pour les profondeurs  $h$  qui n'excèdent pas la valeur critique  $h_c$ .  $h_c$  dépend des paramètres du milieu (rapport d'anisotropie, variance de perturbation et portée verticale) ainsi que de la géométrie du réflecteur. La figure 2.3 donne quelques valeurs du rapport  $h_c/K$ .

$\sigma_\epsilon^2$	$\lambda$	$h_c/K$	$\varphi = 0^\circ$ et $b = 5m$	$\varphi = 10^\circ$ et $b = 7.5m$
0.05	1.00	20.0	119.6	187.9
0.05	4.00	320.0	1913.6	3006.4
0.05	7.00	980.0	5860.4	9207.1
0.05	10.00	2000.0	11960.0	18790.0
0.20	1.00	5.0	29.9	47.0
0.20	4.00	80.0	478.4	751.6
0.20	7.00	245.0	1465.1	2301.8
0.20	10.00	500.0	2990.0	4697.5
0.35	1.00	2.9	17.1	26.8
0.35	4.00	45.7	273.4	429.5
0.35	7.00	140.0	837.2	1315.3
0.35	10.00	285.7	1708.6	2684.3
0.50	1.00	2.0	12.0	18.8
0.50	4.00	32.0	191.4	300.6
0.50	7.00	98.0	586.0	920.7
0.50	10.00	200.0	1196.0	1879.0
0.95	1.00	1.1	6.3	9.9
0.95	4.00	16.8	100.7	158.2
0.95	7.00	51.6	308.4	484.6
0.95	10.00	105.3	629.5	988.9

TAB. 2.4 - Dans les colonnes 4 et 5, quelques valeurs des profondeurs critiques  $h_c$  pour lesquelles les formulations au premier ordre de l'erreur de migration sont valables.

Dans le cas d'une stratification horizontale d'une portée latérale  $b = 5$  mètres et une perturbation de 5% par exemple. Le calcul de profondeurs critiques donne :

$K = 5.98$  et les profondeurs critiques sont  $h_c = 1910$  mètres pour  $\lambda = 4$  et  $h_c = 12000$  mètres pour  $\lambda = 10$ . Signalons que ces profondeurs critiques se dégradent rapidement pour les faibles rapports d'anisotropies et les fortes perturbations.

Ainsi dans les conditions sus-explicitées, le développement du temps au premier ordre implique les écritures suivantes.

$$c_o^2 T^2 = r^2 + 2r\phi = r^2(1 + \bar{\epsilon}) \quad (2.10)$$

Ou encore l'expression de la dérivée du carré du temps :

$$\frac{c_o^2}{2} \frac{\partial T^2}{\partial x^i} = x^i - x_o^i + \frac{r^2 \bar{\epsilon}_i'}{2} + \bar{\epsilon}(x^i - x_o^i) \quad (2.11)$$

Dans le paragraphe suivant nous allons utiliser cette dernière expression pour déterminer les erreurs de migration.

## 2.7 Expression des erreurs de migration

L'expression 2.10 ne suffit pas pour expliciter les formules des erreurs de migration. En effet, nous devons aussi cerner le paramètre  $\bar{V}$ . Celui-ci pourrait être donné par une des procédures exhibées au **chapitre 2**. Dans ce paragraphe, nous considérons trois hypothèses pour le choix<sup>2</sup> de  $\bar{V}$ .

1. Hypothèse neutre .
2. Hypothèse optimiste .
3. Hypothèse de stack classique.

### 1- Expression de l'erreur dans le cadre d'une hypothèse neutre :

On se propose de prendre simplement comme vitesse  $\bar{V}$  la vitesse moyenne du milieu. Ainsi un simple remplacement de  $\bar{V}^2$  par  $c_o^2$  et l'utilisation de l'expression 2.6 donne [16] [27] :

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o &= -\bar{\epsilon}(x - x_o) - \frac{1}{2}r^2 \bar{\epsilon}_1' \\ \tilde{z}_o - z_o &= -\bar{\epsilon}(z - z_o) + \frac{r^2}{2(z-z_o)}[\bar{\epsilon} + (x - x_o)\bar{\epsilon}_1'] \end{cases} \quad (2.12)$$

### 2- Expression de l'erreur dans le cadre d'une hypothèse optimiste :

On fait ici l'hypothèse optimiste : c'est à dire celle où l'on admet que par chance nous pouvons évaluer la vraie vitesse moyenne le long de la trajectoire où l'on peut assimiler la vitesse  $\bar{V}$  à  $\bar{V}^2 = c_o^2(1 - \bar{\epsilon})$ . Dans ce cas il est aussi aisé de montrer que [16] :

---

2. Les calculs correspondants aux hypothèses neutre et optimiste sont faits par Matheron [16] de  $\bar{V}$ . Nous ne présentons un supplément de détails que pour le troisième cas où l'on travaille avec une vitesse de stack classique.

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o = -\frac{1}{2}r^2\bar{\epsilon}'_1 \\ \tilde{z}_o - z_o = \frac{1}{2}\left[\frac{x - x_o}{z - z_o}r^2\bar{\epsilon}'_1\right] \end{cases} \quad (2.13)$$

### 3- Expression de l'erreur quand $\bar{V}$ est la vitesse de stack:

Dans ce cas nous allons supposer que l'on peut considérer  $\bar{V} = V_s$  et que l'on peut écrire la vitesse de stack sous la forme suivante:  $V_s = c_o(1 + \epsilon_s)$  avec  $\epsilon_s$  fonction aléatoire stationnaire indépendante de  $\epsilon$ , ayant une covariance  $C_s()$  et une moyenne nulle. Là aussi, comme dans le cas de l'hypothèse neutre, il est simple de montrer que:

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o = -(\bar{\epsilon} + \epsilon_s)(x - x_o) - \frac{1}{2}r^2(\bar{\epsilon}'_1 + \epsilon'_s) \\ \tilde{z}_o - z_o = -(z - z_o)(\bar{\epsilon} + \epsilon_s) + \frac{r^2}{2(z - z_o)}[(\bar{\epsilon} + \epsilon_s) + (x - x_o)(\bar{\epsilon}'_1 + \epsilon'_s)] \end{cases} \quad (2.14)$$

L'erreur de migration est donc affectée par l'erreur  $\epsilon_s = (V_s - c_o)/c_o$ . Plus cette erreur est négligeable par rapport à  $\epsilon$ , plus on tend vers le cas neutre.

Si l'on considère maintenant un cas plus complexe où  $V_s$  est très différent de  $c_o$ , soit par exemple:  $V_s^2 = kc_o^2(1 + \epsilon_s)$  avec  $k \neq 1$ , alors dans ce cas on arrive à montrer que:

$$\tilde{x}_o - x_o = (x - x_o)[1 - k - \bar{\epsilon} - \epsilon_s] - \frac{k}{2}r^2(1 + \bar{\epsilon}'_1 + \epsilon'_s)$$

Dans ce cas  $\tilde{x}_o - x_o$  peut ne pas être négligeable devant la profondeur investiguée et L'erreur  $\tilde{z}_o - z_o$  admet une expression beaucoup plus compliquée et l'on préfère retenir l'expression de  $\tilde{z}_o - z_o$  donnée par le système 2.6.

## 2.8 Qualité des sections migrées

Dans cette section, nous distinguons les variances des erreurs dans les trois cas sus-mentionnés. Les expressions des variances des erreurs sont obtenues par un développement des variances des expressions correspondants à chaque cas. Ces développements que nous pouvons trouver dans [16] [27] sont fastidieux. Nous nous contentons alors de montrer les résultats des calculs. L'exemple que nous considérons est celui où les perturbations ont une covariance du type exponentielle de Gauss:

Dans ce paragraphe nous résumons les résultats correspondants aux cas neutre et optimiste. Pour expliciter les expressions, convenons des notations suivantes:

- $z - z_o = h$  profondeur du miroir.
- $\varphi$  pendage du miroir.
- $x - x_o = -h \tan \varphi$  et  $r = h / \cos \varphi$
- $a$  et  $b$  portées de la covariance de  $\epsilon$ , (On considère que cette covariance est une exponentielle de Gauss de variance  $\sigma_\epsilon^2$ ).
- $b_s$  covariance de la perturbation stationnaire liée à la vitesse de stack. ( $\epsilon_s$  admet une variance  $\sigma_s^2$ ).

Les principaux résultats sont résumés pour les trois types d'hypothèses sur la vitesse  $\bar{V}$  :

### 2.8.1 Cadre optimiste

**1er cas :  $a$  et  $b$  sont petits devant  $h$  :**

C'est le cas d'une stratification approximative.

$$\begin{cases} \sigma_{x_o}^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{12} \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{h^3}{b} \sigma_\epsilon^2 \\ \sigma_{z_o}^2 = \tan^2 \varphi \sigma_{x_o}^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

**2 ème cas :  $a$  et  $h$  sont du même ordre de grandeur :**

C'est le cas d'une stratification stricte de pendage  $\theta$ .

$$\begin{cases} \sigma_{x_o} = \frac{|\sin \theta|}{\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)} \frac{h}{2} \sigma_\epsilon \\ \sigma_{z_o} = \frac{|\sin \theta \tan \varphi|}{\cos \varphi \cos(\varphi - \theta)} \frac{h}{2} \sigma_\epsilon \end{cases} \quad (2.16)$$

Lorsque le pendage de la stratification est nul, la variance des erreurs s'annule aussi.

### 2.8.2 Cadre neutre

Dans le cas d'une stratification horizontale où  $a$  et  $h$  sont du même ordre de grandeur, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_{x_o} = |\tan \varphi| \sqrt{2\pi} b h \sigma_\epsilon \\ \sigma_{z_o} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \sqrt{2\pi} b h \sigma_\epsilon \end{cases} \quad (2.17)$$

### 2.8.3 Cas d'hypothèse de stack classique

Comme l'indique le système 2.14, l'erreur de migration ne diffère du cadre neutre que par l'addition de la perturbation  $\epsilon_s$  et de sa dérivée  $\epsilon'_s$ . Si nous posons  $\epsilon = \bar{\epsilon} + \epsilon_s$ , alors dans ce cas nous obtenons un système analogue au système 2.12 qui correspond au cadre neutre avec cette fois ci:

$$\left\{ \begin{array}{l} var[\epsilon] = var[\bar{\epsilon}] + \sigma_s^2 = \sqrt{2\pi} \cos \varphi \frac{b}{h} \sigma_\epsilon^2 + \sigma_s^2 \\ var[h\epsilon'] = var[h\bar{\epsilon}'] + var[h\epsilon'_s] = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \cos^3 \varphi \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{h}{b} \sigma_\epsilon^2 + \frac{2h^2}{b_s^2} \sigma_s^2 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Contrairement au cas neutre et au cas optimiste, les expressions des variances des erreurs de migrations sont beaucoup plus complexes. Toutefois, celles-ci peuvent être calculées numériquement. Nous retenons d'après la formule 2.18 que l'erreur dépend de la variance des vitesses de stack. Ainsi, en se référant aux commentaires évoqués au sujet de cette variance dans le chapitre 2, nous pouvons prévoir par exemple que plus le degré de couverture est élevé, plus la variance des erreurs de migrations diminue.

Ci dessous, un tableau récapitulatif sur les variances d'estimation, où l'on compare les variances d'estimation verticale et horizontale.

Cas dont il s'agit	Comparaison entre $\sigma_x$ et $\sigma_z$
Cadre optimiste $a$ et $b$ petits devant $h$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_z / \sigma_x = \tan \varphi</math></li> <li>Tout dépend du pendage du réflecteur:</li> <li>• Si le réflecteur est plan de faible pendage l'estimation en profondeur est précise par contre l'estimation horizontale ne l'est pas</li> <li>• Pour des réflecteurs de pendage supérieur à <math>45^\circ</math> c'est l'estimation en profondeur qui est précise</li> </ul>
Cadre optimiste $a$ et $h$ sont du même ordre de grandeur	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_z / \sigma_x = \tan \varphi</math></li> </ul>
Cadre neutre	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sigma_z / \sigma_x = 2 /  \sin 2\varphi </math></li> </ul>

### 2.8.4 Un exemple d'illustration :

La variance de l'erreur de migration est un moyen rapide pour vérifier la précision de l'estimation de la profondeur du réflecteur par les formules classiques de migration. Dans la figure 2.6, nous montrons l'exemple d'un réflecteur de profondeur :

$$z(x) = 1000 + 5\sin(2\pi x/150)$$

L'erreur en profondeur est calculée dans un cadre optimiste pour une stratification stricte inclinée d'un angle  $\theta = \pi/12$ . Nous traçons les limites supérieures et inférieures de l'incertitude avec un niveau de confiance de 64%. La profondeur se situe à  $[z(x) - \sigma_{x_0}, z(x) + \sigma_{x_0}]$ . Si cette erreur de migration peut atteindre les 14%, son étalement le long du réservoir peut fausser d'avantage les calculs des réserves.

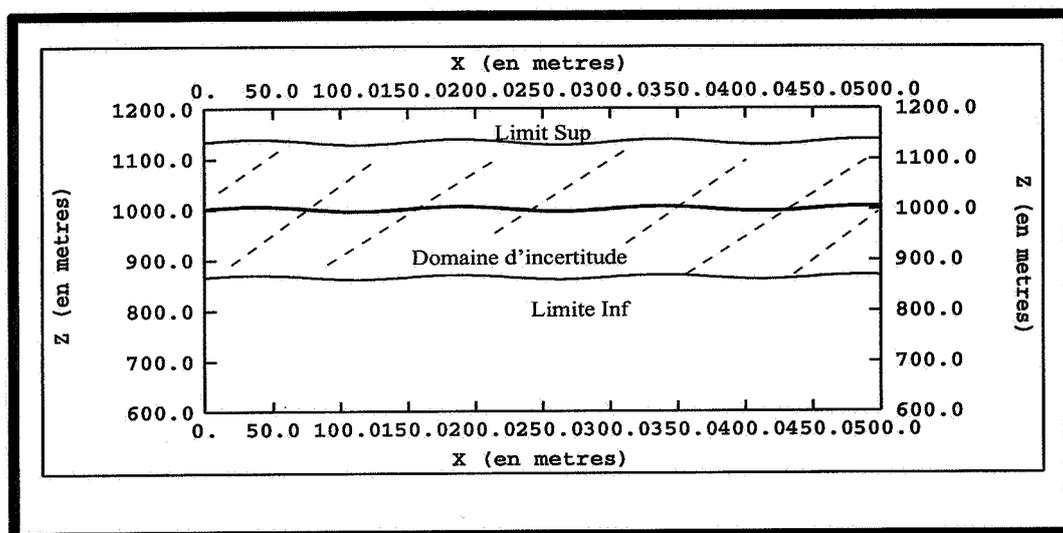


FIG. 2.6 - En traits noirs, limite supérieure et inférieure de l'erreur de localisation du réflecteur. En trait noir foncé réflecteur réel. Le domaine hachuré est le domaine d'incertitude.

Par ailleurs, l'approche habituelle pour la migration des réflecteurs successifs, se fait par étapes : on migre d'abord le premier horizon, puis le second connaissant le premier et ainsi de suite. Ainsi l'erreur commise lors de l'estimation croît avec la profondeur et il en est de même pour sa variance.

En bref, nous venons de voir ce qu'il en est de l'erreur lorsque nous travaillons avec des rayons droits dans un cadre stationnaire. Aussi sommes-nous tentés de considérer, dans le chapitre suivant, le problème dans un cas non stationnaire. ■

## Chapitre 3

# Cadre non stationnaire

Nous avons vu au chapitre 2 comment il était possible d'évaluer l'erreur de migration dans un cadre de milieux modélisés par tranches de vitesses stationnaires. Ceci devrait normalement suffire pour une grande majorité de problèmes de migration traités actuellement par l'hypothèse de rayons droits. Toutefois il est intéressant de généraliser quelque peu le formalisme pour l'étendre au cas de milieux à vitesses non stationnaires (*Par exemple vitesses dépendant de la profondeur*).

Dans le cas de champs complexes de vitesses, beaucoup de méthodes de traitement de données sismiques sont basées sur la théorie des rayons dont nous exposerons ici un bref aperçu. Ces méthodes s'appliquent aux cas de faibles perturbations du champ de vitesses.

Le but du présent chapitre est de tenir compte de ces perturbations lors de la résolution du cas non stationnaire pour caractériser la variance des temps d'arrivée et évaluer l'erreur de migration. Pour ce faire nous subdivisons ce chapitre en quatre sections.

La section 3.1. donne une idée sur quelques méthodes classiques pour traiter le tracé de rayons dans le cadre non stationnaire.

La section 3.2. traite le problème des erreurs de migration. Celle-ci est relativement longue en raison de la complexité des calculs intermédiaires.

La section 3.3. traite un exemple numérique d'évaluation des erreurs de migration dans un cas de faibles perturbations du champ de vitesses.

Enfin, en guise de complément à l'étude des fluctuations des temps d'arrivée, la section 3.4 traite quelques résultats dûs à une approche de Rytov.

### 3.1 Cadre non stationnaire - approche déterministe

Dans ce cas les vitesses peuvent posséder un gradient non nul suivant une ou plusieurs directions. Les problèmes d'inversion de vitesses et de migrations dans ce type de champs de vitesses complexes font l'objet d'un grand nombre d'études depuis les années 80. On assiste en effet depuis plusieurs années à l'élaboration de nouvelles méthodes pour le tracé de rayons dans de tels milieux appliquées à l'inversion sismique et le calcul de sismogrammes synthétiques. Les approches qui sont adoptées sont classiquement basées soit sur les équations des ondes résolues par éléments finis, soit par théorie des rayons. Le succès de ces méthodes d'inversion est lié en partie à la rapidité de la résolution puisqu'il s'agit de comparer les données réelles et les données synthétiques du problème direct.

**Remarque :** dans la mesure où nous voulons montrer les similitudes entre les méthodes issues de la théorie des rayons avec l'approche qui sera adoptée dans le cas non stationnaire, nous destinons l'annexe C à un bref exposé de la théorie des rayons.

Le suivi des rayons ne suffit pas, les sismiciens ont besoin de reconstituer des sismogrammes synthétiques en évaluant l'amplitude. Le calcul des amplitudes est de plus en plus réalisé via une méthode récente basée comme beaucoup d'autres sur l'évaluation de l'énergie contenue dans un tube de rayons : les rais sont agencés autour d'un rayon central (Cf Fig 1). La différence par rapport aux méthodes classiques, réside dans le fait que les rayons voisins du rayon central, dits rayons paraxiaux, sont calculés par une méthode dite paraxiale :

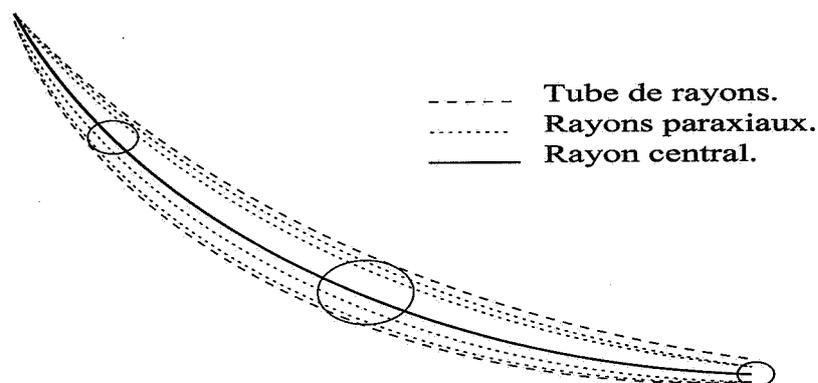


FIG. 3.1 - Rayon central et rayons paraxiaux.

La théorie paraxiale ou théorie dynamique de tracés de rayons [6] calcule les rayons voisins par méthode perturbative (Voir annexe C). La méthode paraxiale a l'avantage d'obtenir très rapidement le tracé des rayons voisins. Par rapport à la stratégie qui consiste à tracer chaque rayon en reprenant chaque fois le système 2.4, les temps de calculs sont largement réduits. C'est aussi dans le cadre d'une méthode perturbative que l'on envisage cette-fois ci de formuler l'erreur de migration. La seule différence par rapport à la méthode présentée ci-dessus est la suivante :

Nous ne perturbons pas les paramètres tout au long du rayon central pour retrouver les rayons voisins, mais nous perturbons au niveau d'un point du réflecteur pour retrouver l'erreur de migration.

Nous exposerons alors dans le paragraphe qui suit, une approche (G.Matheron 1994) pour exprimer les erreurs et variances des erreurs de migration dans le cas où le champ de vitesses admet un gradient des vitesses suivant, uniquement, la direction des profondeurs.

### 3.2 Cadre non stationnaire - approche probabiliste

En raison de la complexité des calculs, nous subdivisons ce paragraphe en quatre sections où nous traitons successivement les points suivants :

- 1/ - Covariance des temps d'arrivée dans le cas des faibles pendages.
- 2/ - Expressions des erreurs de migration.
- 3/ - Calcul de la dérivée du terme du premier ordre dans le développement en série des temps d'arrivée.
- 4/ - Expressions des variances des erreurs de migration.

**Quelques notations :** Procédons à une légère modification dans les notations. L'espace de propagation de l'onde considérée est un plan  $R^2$  paramétré en  $\xi = (x, z)$ . Soit un point source  $\xi_0 = (x_0, z_0)$  et un point récepteur  $\xi_1 = (x_1, z_1)$ . On s'intéresse aux enregistrements qui se font en surface  $z_1 = cste$ , et l'on notera  $S(\xi_1)$  ou encore  $S(x_1)$ , la géodésique passant par  $\xi_0$  et  $\xi_1$ . On note  $T_0(\xi_0, \xi_1)$ , le temps d'arrivée mesuré par un récepteur en  $x_1$ .

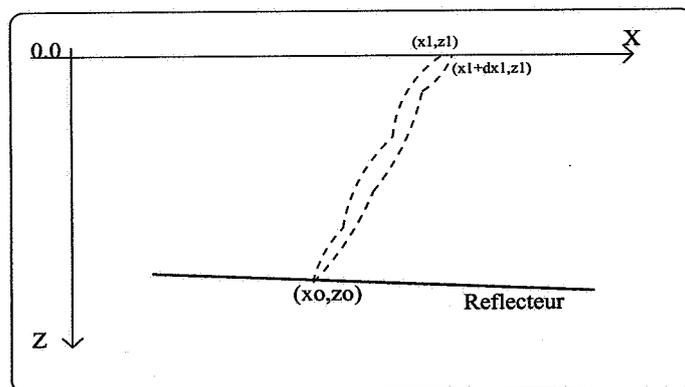


FIG. 3.2 - Notations: non stationnaire perturbé.  $\xi_0 = (x_0, z_0)$  est la source .  $\xi_1 = (x_1, z_1)$  est le récepteur .  $T_0(\xi_0, \xi_1)$  est le temps de parcours entre  $\xi_0$  et  $\xi_1$ .

Dans le cas de champ de vitesses perturbés nous noterons  $\tilde{\Lambda}(z) = \Lambda(z)(1 + \epsilon(x, z))$  avec  $\Lambda(z)$  une fonction et  $\epsilon(x, z)$  une fonction aléatoire. Le temps de propagation vérifie l'équation suivante.

$$(\nabla T)^2 = \Lambda(z)(1 + \epsilon(x, z))$$

Dans la suite, plus précisément lors de la formulation des erreurs de migration, nous aurons besoin des expressions des termes perturbés et non perturbés du temps. Soit alors l'expression au premier ordre de celui-ci :  $T = T_o + T_1$ . Le terme  $T_o$  est le terme non perturbé. Il vérifie l'équation :

$$(\nabla T_o)^2 = \Lambda(z)$$

En conséquence, le terme  $T_1$  qui est le terme perturbé au premier ordre, vérifie l'équation :

$$2\nabla T_o \nabla T_1 = \Lambda(z)\epsilon(x, z) \quad (3.1)$$

En somme, l'obtention de  $T_o$  peut s'obtenir par quadrature comme cela fut explicité au chapitre précédent dans le cas de champs de vitesses non stationnaire et sans perturbation. L'obtention du terme perturbé  $T_1$  revient à intégrer l'équation ci-dessus. Soit donc :

$$T_1(\xi_o, \xi_1) = \frac{1}{2} \int_o^{T_o(\xi_o, \xi_1)} \epsilon(\xi(\tau)) d\tau \quad (3.2)$$

### 3.2.1 Covariance des temps d'arrivée

Ce paragraphe donne des résultats intermédiaires concernant la variance de la régularisée de la perturbation suivant les géodésiques. Ces résultats seront utiles pour le calcul des variances des erreurs de migration. Nous donnons des expressions approchées de la variance et covariance des deux expressions  $X(z_1) = \int_{z_o}^{z_1} \epsilon(x(z), z) f(z) dz$  et  $Y(z_1) = \int_{z_o}^{z_1} \epsilon(x(z), z) g(z) dz$ . Avec,  $f(z)$  et  $g(z)$  deux fonctions de la variable  $z$ .

$X(z_1)$  et  $Y(z_1)$  sont des régularisations des perturbations  $\epsilon$  le long de la géodésique<sup>1</sup>.

#### **Proposition concernant la variance et covariance de X et Y:**

*Dans le cas de miroir sismique à pendage faible les expressions de la variance et covariance de X et Y sont données par :*

$$\text{var}[X] = \int_{z_o}^{z_1} f^2(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon, \epsilon} [0, h] dh$$

$$\text{cov}[X(z_1), Y(z_1)] = \int_{z_o}^{z_1} f(z)g(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\epsilon, \epsilon} [0, h] dh$$

1. Nous verrons des cas particuliers des fonctions f et g qui correspondent aux variables  $X(z) = T_o(z)$  et  $Y(z) = T_1(z)$

**Preuve:** Les expressions brutes sont en effet données par les systèmes :

$$\begin{cases} \text{var}[X] &= \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} f(z)f(z')K_{\epsilon,\epsilon}[x(z) - x(z'), z - z'] dzdz' \\ \text{cov}[X(z_1), Y(z_1)] &= \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} f(z)g(z')K_{\epsilon,\epsilon}[x(z) - x(z'), z - z'] dzdz' \end{cases}$$

Essayons de majorer l'expression  $x(z) - x(z')$  qui figure dans les intégrales exprimées ci-dessus et rappelons à cet effet que l'on a :

$$x(z) - x(z') = \int_{z'}^z \frac{C}{\sqrt{\Lambda - C^2}} dz'$$

Si on suppose maintenant que  $\Lambda(z)$  est décroissant<sup>2</sup> on a alors la majoration du type :

$$\int_{z'}^z \frac{C}{\sqrt{\Lambda - C^2}} dz' < \frac{C}{\sqrt{\Lambda_0 - C^2}} \|z' - z\|$$

Mais comme nous avons  $\tan \theta_0 = C/\sqrt{\Lambda_0 - C^2}$  comme pendage du réflecteur, nous avons  $\|x - x'\| \leq \|z - z'\| \tan \theta_0$ . Finalement, si l'on a des faibles pendages et lorsque la portée verticale est très faible on peut alors avec une bonne approximation remplacer  $K[x(z) - x(z'), z - z']$  par  $K[0, z - z']$  et  $f(z')$  par  $f(z)$ :

en effet le produit  $f(z)f(z')K_{\epsilon,\epsilon}[x(z) - x(z'), z - z']$  serait non nul que si  $z \simeq z'$ . On obtient donc les expressions énoncées ci-dessus. ■

### 3.2.2 Expression des erreurs de migration

Passons maintenant à une étape plus importante. On se propose en effet d'exprimer les erreurs de migration dans le cadre non stationnaire. Pour cela, on va adopter une méthode perturbative :

Nous allons fixer le point d'enregistrement, perturber légèrement la constante du milieu  $C_1$  et voir l'impact de la perturbation sur la position de  $\xi_0$ .

Soit alors le paramètre perturbé  $\tilde{C}_1 = C_1 + \delta C_1$  où  $C_1$  est le paramètre initial et  $\delta C_1$  la perturbation. Soit d'autre part,  $\tilde{\xi}_0 = (x_0 + \delta x_0, z_0 + \delta z_0)$ , la position perturbée. Nous avons donc les deux systèmes suivants :

$$1- \text{Milieu non perturbé} \quad \begin{cases} T(\xi_0, \xi_1) &= T_0 \\ \frac{\partial T(\xi_0, \xi_1)}{\partial x} &= T'_0 \end{cases}$$

---

2. Hypothèse juste dans la plupart des cas de champs de vitesses trouvés dans la nature.

2- Milieu perturbé

$$\begin{cases} T(\tilde{\xi}_o, \xi_1) &= T_o + T_1 \\ \frac{\partial T(\tilde{\xi}_o, \xi_1)}{\partial x} &= T'_o + T'_1 \end{cases}$$

Or nous avons vu au chapitre 2 que le paramètre du milieu s'écrit aussi  $C_1 = \frac{\partial T}{\partial x}$  et l'on a donc :

$$\tilde{C}_1 = T' = T'_o + T'_1 \quad \text{et} \quad C_1 = T'_o$$

Ce qui signifie que  $T'_1 = \delta C_1$ . Dans la suite nous allons utiliser cette perturbation pour voir quel est son impact sur la position de  $\xi_o$ . La différence entre la nouvelle et l'ancienne position de  $\xi_o$  est l'erreur de migration dans le cas non stationnaire. Ci-dessous, nous procédons à des calculs intermédiaires pour le calcul de cette erreur  $\delta x_o$  et  $\delta z_o$ .

———— Début des calculs intermédiaires ————

Nous pouvons développer le temps  $T$  des deux manières suivantes :

$$\begin{aligned} T &= T_o + T_1 = \int_{z_o + \delta z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz \\ &= \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz - \int_{z_o}^{z_o + \delta z_o} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz \end{aligned}$$

En posant  $\Lambda(z_o) = \Lambda_o$ , et en faisant l'approximation  $\tilde{C}_1 \simeq C_1$ , on obtient pour la seconde intégrale.

$$\int_{z_o}^{z_o + \delta z_o} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz \simeq \frac{\Lambda_o \delta z_o}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} \quad (3.3)$$

Maintenant occupons nous de la première intégrale. Pour cela, appliquons le développement de Taylor au premier ordre pour la fonction  $H(C) = \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C)^2}} dz$ .

$$\begin{aligned} H(C + \delta C) &= H(C) + H'(C) \delta C \\ &= \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C)^2}} dz + C \delta C \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - (C)^2)^{3/2}} dz \\ &= T_o + C \delta C \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - (C)^2)^{3/2}} dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_1 \simeq -\frac{\Lambda_o \delta z_o}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} + C_1 \delta C_1 \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - C_1^2)^{3/2}} dz \quad (3.4)$$

Fin des calculs intermédiaires

Dans la suite, pour simplifier, nous adopterons l'écriture :

$$U(z, C) = \int_{z_o}^z \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - C^2)^{3/2}} dz$$

expression de  $\delta z_o$

D'après ce qui précède, en remplaçant  $\delta C_1$  par  $T_1'$  dans 3.4 , nous arrivons à établir l'expression de l'erreur de migration dans le cadre non stationnaire perturbé :

$$\delta z_o \simeq \frac{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}}{\Lambda_o} [C_1 T_1' U(z_1; C_1) - T_1] \quad (3.5)$$

expression de  $\delta x_o$

De la même manière d'après 3.3 et 3.4 nous pouvons évaluer l'erreur  $\delta x_o$ .

$$\begin{aligned} x_1 - (x_o + \delta x_o) &= \int_{z_o + \delta z_o}^{z_1} \frac{C_1 + \delta C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz \\ &= \int_{z_o}^{z_1} \frac{C_1 + \delta C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz - \int_{z_o}^{z_o + \delta z_o} \frac{C_1 + \delta C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz \\ &\simeq \int_{z_o}^{z_1} \frac{C_1 + \delta C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz - \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} \delta z_o \end{aligned}$$

Or le même développement que celui appliqué à  $H(C)$ , montre que l'on a :

$$\int_{z_o}^{z_1} \frac{C_1 + \delta C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - (C_1 + \delta C_1)^2}} dz = \int_{z_o}^{z_1} \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - C_1^2}} dz + \delta C_1 \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - C_1^2)^{3/2}} dz$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 - (x_o + \delta x_o) &\simeq \int_{z_o}^{z_1} \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda(z) - C_1^2}} dz + \delta C_1 \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - C_1^2)^{3/2}} dz - \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} \delta z_o \\ \Rightarrow \delta x_o &\simeq \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda - C_1^2}} \delta z_o - \delta C_1 \int_{z_o}^{z_1} \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda(z) - C_1^2)^{3/2}} dz \end{aligned}$$

Soit donc:

$$\delta x_o = \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda - C_1^2}} \delta z_o - T_1' U(z_1, C_1)$$

Et d'après l'expression 3.4 de  $\delta z_o$ , nous obtenons:

$$\delta x_o \simeq -T_1 \frac{C_1}{\Lambda_o} - \frac{\Lambda_o - C_1^2}{\Lambda_o} U(z_1, C_1) T_1' \quad (3.6)$$

Pour mener à bout les calculs des expressions des erreurs décrites ci-dessus, il suffira d'évaluer les termes  $T_1$  et  $T_1'$ . Pour ce faire, nous nous restreignons au cas où l'on peut utiliser un paramétrage en  $z$ , c'est à dire le cas où le rayon ne retourne pas.

### 3.2.3 Calcul des termes $T_1$ et $T_1'$

L'expression de  $T_1$  est la somme de la perturbation suivant la géodésique, tandis que  $T_1'$  est la dérivée  $T_1$  par rapport à  $x$ . Ainsi l'on a les écritures suivantes:

terme  $T_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_o} \epsilon(\xi(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{z_1} \epsilon(\xi(z)) \frac{d\tau}{dz} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_o}^{z_1} \epsilon(x(z), z) \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - C^2}} dz \end{aligned}$$

terme  $T_1(x_1 + \delta x_1)$ :

Pour avoir l'expression de  $T_1(x_1 + \delta x_1)$ , il suffit d'effectuer la même intégrale que précédemment sur la trajectoire voisine non perturbée, mais cette fois ci avec une constante  $C + \delta C^3$ :

$$T_1(x_1 + \delta x_1) = \frac{1}{2} \int_{z_o}^{z_1} \epsilon(x(z) + \delta x(z)) \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda(z) - (C + \delta C)^2}} dz$$

$\delta C$  vérifie:

3. le  $\delta C$  n'a rien à voir avec le  $\delta C_1$  précédent

$$x_1 + \delta x_1 - x_o = \int_{z_o}^{z_1} \frac{C + \delta C}{\sqrt{\Lambda - (C + \delta C)^2}} dz$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= \delta C \int_{z_o}^{z_1} \frac{\partial}{\partial C} \frac{C}{\sqrt{\Lambda - C^2}} dz \\ &= \delta C U(z_1, C) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ce résultat reste valable pour toute côte  $z$  où l'on n'atteint pas le retournement du rayon :

$$\begin{aligned} \delta x(z) &= \delta C \int_{z_o}^z \frac{\partial}{\partial C} \frac{C}{\sqrt{\Lambda - C^2}} dz \\ &= \delta C \cdot U(z, C) \end{aligned} \quad (3.8)$$

terme  $T_1'(x_1)$ : Finalement, si l'on écrit  $T_1'(x_1) = \frac{T_1(x_1 + \delta x_1) - T_1(x_1)}{\delta x_1}$ , et en tenant compte de 3.7,3.8 et nous pouvons montrer aisément que :

$$T_1' = \frac{1}{2U(z_1, C)} \left[ \int_{z_o}^{z_1} U(z) \frac{\partial}{\partial x} \epsilon(x(z)) \frac{\Lambda(z)}{\sqrt{\Lambda - C^2}} dz + C \int_{z_o}^{z_1} \epsilon(x(z)) \frac{\Lambda(z)}{(\Lambda - C^2)^{3/2}} dz \right]$$

### 3.2.4 Variance des erreurs de migration

Maintenant, il reste à évaluer la variance des erreurs pour contrôler la qualité de la migration. Notons à ce stade que la majorité des méthodes de migration utilisées chez les géophysiciens ne s'intéressent pas à la qualité de migration en usant de ce critère. En général, lorsqu'on parle d'une migration cela sous-entend que l'on a une solution unique. Pour la modifier, toute l'étape d'analyse des vitesses est à refaire. Afin de simplifier les écritures de variance et covariance des erreurs de migration nous posons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} f(z) &= \frac{\Lambda(z)}{2\sqrt{\Lambda(z) - C^2}} \\ g(z) &= \frac{C\Lambda(z)}{2U(z_1, C)(\Lambda(z) - C^2)^{3/2}} \\ h(z) &= \frac{\Lambda(z)U(z, C)}{2U(z_1, C)\sqrt{\Lambda(z) - C^2}} \end{aligned} \right.$$

Dans ce cadre de notations, les termes  $T_1$  et  $T_1'$  s'écrivent :

$$T_1 = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\epsilon(z)dz \text{ et } T'_1 = \int_{z_0}^{z_1} (h(z)\epsilon'(z) + g(z)\epsilon(z))dz$$

D'autre part, toujours dans le but de simplifier les notations, soient les trois portées intégrales des covariances  $C_{\epsilon,\epsilon}$ ,  $C_{\epsilon,\epsilon'}$  et  $C_{\epsilon',\epsilon'}$  :

$$\begin{cases} A_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\epsilon,\epsilon}(0, h)dh \\ A_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\epsilon',\epsilon}(0, h)dh = \int_{-\infty}^{+\infty} C'_{\epsilon,\epsilon}(0, h)dh \\ A_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\epsilon',\epsilon'}(0, h)dh = - \int_{-\infty}^{+\infty} C''_{\epsilon,\epsilon}(0, h)dh \end{cases}$$

D'après ces écritures, lorsqu'il s'agit d'un miroir avec un faible pendage, en utilisant la propriété établie au paragraphe 3.2.1. il est aisé de montrer que :

$$\begin{cases} var[T_1] = A_0 \int_{z_0}^{z_1} f^2(z)dz \\ var[T'_1] = \int_{z_0}^{z_1} \{A_0 g^2(z) + 2A_1 h(z)g(z) + A_2 h^2(z)\} dz \\ cov(T_1, T'_1) = \int_{z_0}^{z_1} \{A_1 f(z)h(z) + A_0 f(z)g(z)\} dz \end{cases}$$

Pour des raisons de simplification, nous adopterons par la suite le choix d'une covariance factorisée  $C_{\epsilon,\epsilon}(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_X(x)C_Z(z)$ . Dans ce cas nous avons :

$$A_1 = A_0 C'_X(0) \quad ; \quad A_2 = -A_0 C''_X(0)$$

Ainsi si la covariance est gaussienne par exemple  $C_X(h_x) = e^{-h_x^2/a^2}$ , nous avons  $A_1 = 0$  et  $A_2 = 2A_0/a^2$ , et les expressions de la variance et la covariance deviennent :

$$\begin{cases} var[T_1] = A_0 \int_{z_0}^{z_1} f^2(z)dz \\ var[T'_1] = A_0 \int_{z_0}^{z_1} \left\{ g^2(z) + \frac{2}{a^2} h^2(z) \right\} dz \\ cov(T_1, T'_1) = A_0 \int_{z_0}^{z_1} f(z)g(z)dz \end{cases}$$

Enfin, s'agissant des variances de ces erreurs de migration, d'après les expressions 3.5 et 3.6 on déduit que :

$$\begin{cases} var[\delta_{x_o}] = \frac{C_1^2}{\Lambda_o^2} var[T_1] + \frac{(\Lambda_o - C_1^2)^2}{\Lambda_o^2} U^2(z_1, C_1) var[T_1'] + 2 \frac{C_1(\Lambda_o - C_1^2)}{\Lambda_o^2} U(z_1, C_1) cov(T_1, T_1') \\ var[\delta_{z_o}] = \frac{(\Lambda_o - C_1^2)}{\Lambda_o^2} [C_1^2 U^2(z_1, C_1) var[T_1'] + var[T_1] - 2C_1 U(z_1, C_1) cov(T_1, T_1')] \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} var[\delta_{x_o}] = \frac{A_o}{\Lambda_o^2} \int_{z_o}^{z_1} \left\{ C_1^2 f^2(z) + (\Lambda_o - C_1^2)(g^2(z) + \frac{2}{a^2} h^2(z)) U^2(z_1, C_1) + 2(\Lambda_o - C_1^2) U(z_1, C_1) f(z) g(z) \right\} dz \\ var[\delta_{z_o}] = \frac{A_o(\Lambda_o - C_1^2)}{\Lambda_o^2} \int_{z_o}^{z_1} \left\{ C_1^2 U^2(z_1, C_1)(g^2(z) + \frac{2}{a^2} f^2(z)) - 2C_1 U(z_1, C_1) f(z) g(z) \right\} dz \end{cases}$$

Les expressions établies ci-dessus pour les erreurs ainsi que leurs variances et covariances, sont trop complexes pour en déduire des implications directes et simples sur la qualité des migrations. En vue d'obtenir facilement quelques commentaires sur la question, nous supposons qu'il s'agit de très faibles perturbations.

### 3.3 Cas de faibles perturbations

Réécrivons les équations 3.5 et 3.6 en supposant que  $\delta C_1 \simeq 0$ :

$$\delta z_o \simeq -T_1 \frac{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}}{\Lambda_o} \quad \text{et} \quad \delta x_o \simeq \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} \delta z_o$$

Ceci implique les expressions simples :

$$\delta z_o \simeq -T_1 \frac{C_1}{\Lambda_o} \tan \theta \quad \text{et} \quad \delta x_o \simeq \frac{C_1}{\sqrt{\Lambda_o - C_1^2}} \delta z_o$$

On voit alors d'après ces expressions que les mêmes remarques faites dans le cadre stationnaire subsistent. En effet l'erreur augmente en fonction de la profondeur et en fonction du pendage du miroir. De plus les formulations des variances des erreurs, sont simples à interpréter :

$$var[\delta_{z_o}] = \frac{C_1^2}{\Lambda} \tan^2 \theta var[T_1] \quad \text{et} \quad var[\delta_{x_o}] = \tan^2 \theta var[\delta_{z_o}]$$

**Un Cas d'illustration :** l'exemple suivant porte sur un champ de vitesses tel que  $\Lambda(z) = a - bz$ .  $b$  étant le gradient du carré de lenteur. Dans le cas de perturbation gaussienne de variance  $\sigma_\epsilon^2$  et de portée  $\alpha$ , nous avons  $A_o = \alpha \sigma_\epsilon^2 \sqrt{2\pi}$ . Nous supposons

pour simplifier que  $\sigma_\epsilon^2 = 1/\alpha\sqrt{2\pi}$  de telle sorte que  $A_o = 1$ . Dans ce cas nous pouvons montrer que :

$$var[\delta z_o] = A_o \frac{\cos^2 \theta}{4} \left\{ (a + C_1^2)z + \frac{b}{2}z^2 + \frac{C^4}{b} \log\left(1 - \frac{b}{a - C^2}z\right) \right\}$$

Dans ce cas la figure ci-dessous montre trois courbes de variance pour différents gradients  $b_1, b_2$  et  $b_3$ .

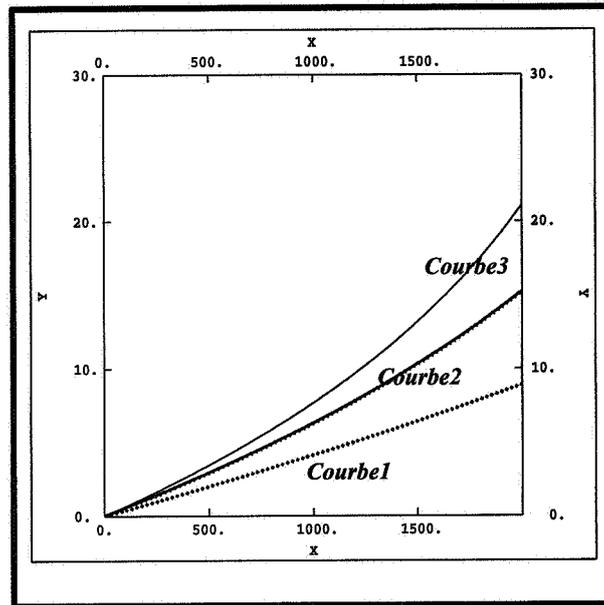


FIG. 3.3 -  $Y = \sigma_{z_o}$  : écart-type de l'erreur de migration .  $X$  : profondeur du miroir sismique. Les courbes suivantes : **Courbe1**, **Courbe2** et **Courbe3** correspondent respectivement aux gradients  $b_1, b_2$  et  $b_3$  dont les valeurs sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Puisque nous sommes habitués à manipuler les vitesses et non pas le carré des lenteurs, nous donnons au tableau suivant la conversion vitesses pour quelques profondeurs ainsi que la variance de l'erreur pour un pendage quasi-nul et les gradients  $b_1, b_2$  et  $b_3$ .

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$v_0$ en m/s 500	500	500	500
$v_{1000}$ en m/s	533	574	694
$v_{2000}$ en m/s	574	694	2500
$\sigma_{z_o}(500)$	1.99	2.92	3.45
$\sigma_{z_o}(1000)$	4.13	6.30	7.66
$\sigma_{z_o}(2000)$	8.88	15.19	21.08

TAB. 3.1 - Quelques ordres de grandeur de la variance des erreurs de migration dans le cas d'une perturbation de covariance gaussienne.

Ainsi l'on remarque que plus le gradient  $b$  augmente, plus l'écart-type de la migration devient important. Dans le cas d'un réflecteur à 2000 m de profondeur et un champ de vitesses tel que  $\Lambda$  est linéaire et de faible gradient, l'erreur n'est pas très importante 0.3 % pour  $b_0$  contre 0.44 % pour  $b_1$ , 0.75% pour  $b_2$  et 1.05 % pour  $b_3$ . Cette erreur serait d'autant plus élevée que la perturbation est importante.

Par ailleurs, ces erreurs s'amplifient pour des gradients plus élevés. La figure ci-dessous montre la croissance du rapport  $\sigma_{z_0}/z$  pour plusieurs gradients. Ce rapport croît rapidement lorsque l'on s'approche de 2000 mètres de profondeur. D'autre part, la contribution des différentes couches du milieu dans la variance des erreurs de migration n'est pas linéaire en profondeur.

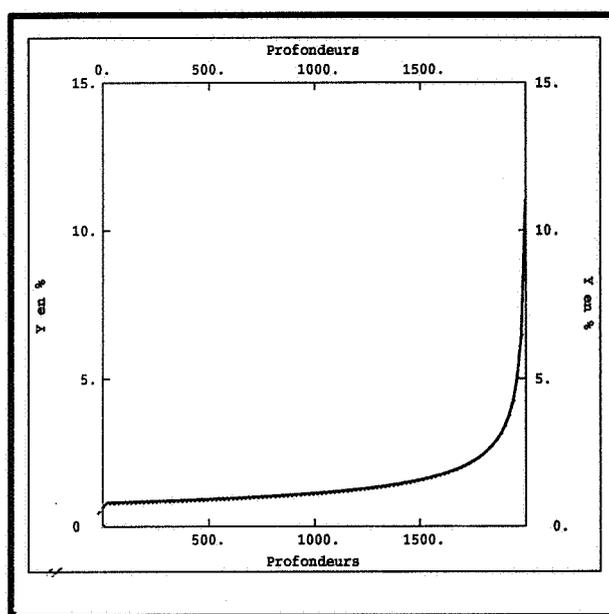


FIG. 3.4 - Evolution du rapport  $\sigma_z/z$  en pourcents en fonction de la profondeur  $z$ .

Ainsi, à titre d'exemple, la contribution de la couche de 100 m d'épaisseur qui se trouve au-dessus du réflecteur à 2000 mètres de profondeur contribue à plus de 50% de l'erreur standardisée. Autrement dit lorsque l'on s'approche des zones profondes l'erreur de migration croît très rapidement, on assiste ainsi à une détérioration rapide de la qualité de migration. Ce résultat a été prévu par Rytov. Dans le paragraphe suivant nous montrons les grandes lignes du raisonnement qui conduit Rytov à la même conclusion.

### 3.4 Les résultats de Rytov

Pour exprimer la covariance des temps d'arrivée en fonction de la covariance de la perturbation du milieu, commençons d'abord par rappeler l'équation de l'eikonale perturbée, et introduisons quelques notations :

Equation de l'eikonale perturbée :

$$(\nabla T)^2 = \Lambda(1 + \epsilon)$$

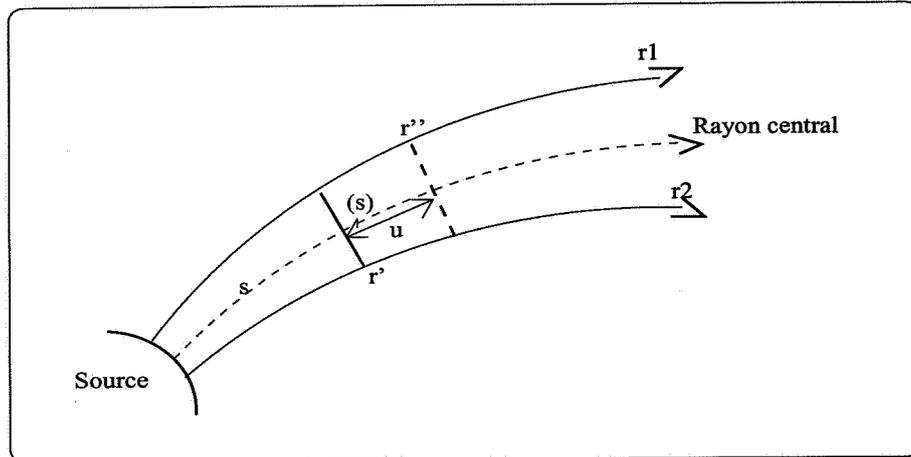


FIG. 3.5 - Quelques Notations.

Soient comme le montre le dessin :

- $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  : Deux rayons curvilignes.
- $\mathbf{r}'$  est  $\mathbf{r}''$  : positions quelconques dans  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$
- $L_1$  et  $L_2$  : Les longueurs respectives de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ .
- $L$  :  $\inf(L_1, L_2)$ .
- $\mathbf{r}$  : Rayon central de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ .
- $\mathbf{t}_o(s)$  : Vecteur unitaire du rayon central.
- $s$  : distance parcourue par l'onde.
- $\delta(s)$  : distance entre les rayons à l'abscisse curviligne  $s$ .
- $\mathbf{r}_o(s)$  : "position du centre de gravité"  $\mathbf{r}_o(s) = (\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')/2$ .

Dans ce cas ;  $T(\mathbf{r}) = \int_0^r \frac{ds}{c(s)} + \frac{1}{2} \int_0^r \frac{\epsilon(s)}{c(s)} ds.$

Si nous posons ensuite  $T_o(\mathbf{r}) = \int_0^r \frac{ds}{c(s)}$  et  $T_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_0^r \frac{\epsilon(s)}{c(s)} ds$ , avec :

- $T_o(\mathbf{r})$  : contient les informations temps pour le champ de vitesses non perturbé.
- $T_1(\mathbf{r})$  : contient les informations temps relatives aux perturbations du champ de vitesses.

Sous ces conditions nous énonçons l'approximation suivante.

**Approximation de Rytov dans le cadre non stationnaire.**

Une approximation de la covariance des eikonales est donnée par l'expression suivante :

$$C_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{ds}{c^2[\mathbf{r}_o(s)]} \int_0^\infty C_\epsilon(\boldsymbol{\delta}(s) + \mathbf{t}_o(s)\zeta, \mathbf{r}_o(s)) d\zeta.$$

De là découle l'expression de la variance de fluctuations :

$$\sigma_T^2(L) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{ds}{c^2[\mathbf{r}_o(s)]} \int_0^\infty C_\epsilon(\zeta \mathbf{t}_o, \mathbf{r}_o(s)) d\zeta$$

**Application :**

Nous définissons maintenant les milieux à fluctuations quasi-homogènes [22]. Il s'agit de milieux où l'on peut effectuer l'approximation suivante :

$$C_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \simeq \sigma_\epsilon^2(\mathbf{R}) \rho_\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{R})$$

avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2 & : \text{Centre de gravité de } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{r}' \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' & : \text{distance entre } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{r}' \\ \sigma_\epsilon(\mathbf{R}) & : \text{variance au point } \mathbf{R} \\ \rho_\epsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{R}) & : \text{Coefficient de corrélation entre } \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{r}' \end{array} \right.$$

Dans ce cas,<sup>4</sup> nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_\epsilon^2[\mathbf{r}_o(s)] ds}{c^2[\mathbf{r}_o(s)]} \int_0^\infty \rho_\epsilon(\boldsymbol{\delta}(s) + \mathbf{t}_o(s)\zeta, \mathbf{r}_o(s)) d\zeta \\ \sigma_T^2(L) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_\epsilon^2[\mathbf{r}_o(s)] ds}{c^2[\mathbf{r}_o(s)]} \int_0^\infty \rho_\epsilon(\zeta \mathbf{t}_o, \mathbf{r}_o(s)) d\zeta \end{array} \right.$$

Néanmoins, on pourrait tirer de l'expression intégrale de la variance de perturbation quelques résultats pratiques sur l'interprétation des données sismiques. C'est l'objet de ce qui suit.

Si l'on définit maintenant  $A(s) = \int_0^\infty \rho_\epsilon(\xi \mathbf{t}_o, \mathbf{r}_o) d\xi$  comme la portée intégrale de la corrélation correspondant à l'abscisse  $s$ . Cette portée intégrale dépend non seulement de la position de  $\mathbf{r}_o(s)$  mais aussi de la direction  $\mathbf{t}_o$ . On peut écrire la variance de perturbation de l'eikonale sous la forme suivante :

$$\sigma_T^2(L) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\sigma_\epsilon^2[\mathbf{r}_o(s)]}{c^2(\mathbf{r}_o(s))} A(s) ds$$

4. Remarquons que l'on ne peut pas user facilement d'une hypothèse de covariance factorisée, comme ce fût le cas dans le cadre stationnaire, en effet dans le cadre où nous sommes, les rayons sont curvilignes et changent de direction. On pourrait écrire l'hypothèse  $C_\epsilon(\mathbf{u}t_o, \mathbf{r}_o(s)) = C_1(\mathbf{u}t_o)C_2(\mathbf{r}_o(s))$ , en tirant quelques simplifications calculatoires, sans que celles-ci aient une signification simple et directe sur la description spatiale de la perturbation du milieu. De là, on reconnaît la difficulté du problème de construction d'une méthode simple d'inversion dans le cadre non stationnaire.

Restreignons nous pour l'illustration au cas des perturbations homogènes (ie : le cas où la perturbation est une F.A.S.T.), dans ce cas on a :

$$\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2 A}{2} \int_0^L \frac{ds}{c^2(r_o(s))}$$

Considérons, des lenteurs au carré linéaire en profondeur,  $\Lambda(r_o(s)) = a - \gamma z(s)$ . Rytov [21] montre que la variance d'un rayon d'incidence  $\theta$  à la hauteur  $z = 0$  qui poursuit son chemin dans le milieu jusqu'à émergence en  $z = 0$ <sup>5</sup>.

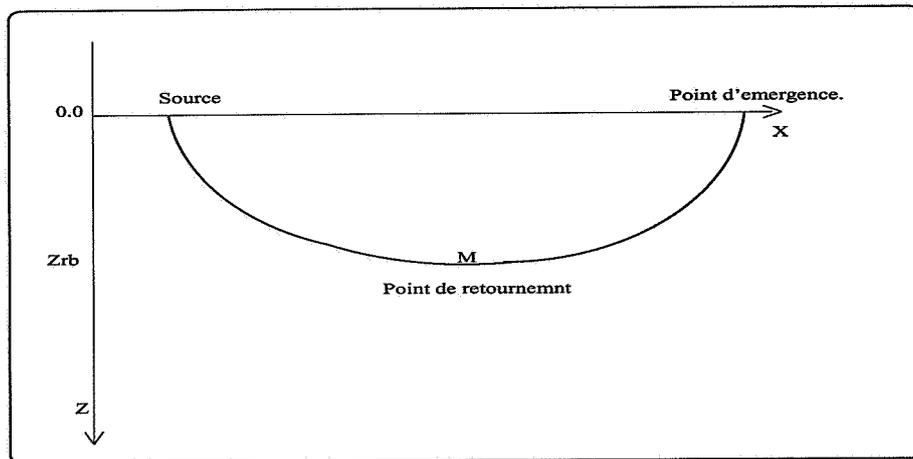


FIG. 3.6 - Rayon émanant d'une source à  $z = 0$ , puis émergeant en  $z = 0$ . (La vitesse du milieu est du type  $\Lambda(z) = a - \gamma z$ )

L'expression de la variance des temps est donnée par :

$$\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2 A}{\gamma} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

Nous en concluons que la variance de fluctuations augmente pour les faibles gradients de lenteurs et les faibles angles d'incidence. Ces formules approximatives de Rytov, méritent une comparaison avec des calculs plus exacts. Une telle comparaison est réalisée dans le cas stationnaire et fait l'objet du chapitre 6.

### 3.5 Vers une simulation des erreurs ?

Plutôt que d'effectuer une simple estimation de la variance de l'erreur, il serait plus intéressant de la simuler. L'erreur est en effet loin d'être indépendante d'un point du réflecteur à un autre. Aussi, au lieu d'utiliser une simple simulation type Monte-Carlo, il paraît plus approprié d'effectuer des simulations Géostatistiques de celle-ci.

5. Un tel exemple serait adapté à la sismologie et sismique entre puits, plutôt qu'à la sismique de réflexion puisque l'on suit effectivement le rayon jusqu'à émergence en surface

A partir de là, une reproduction de la variabilité spatiale du terrain migré nous permettrait de donner des simulations de l'incertitude commise pour l'évaluation de la capacité d'un réservoir à partir des sections sismiques migrées.

La variabilité dans l'espace de l'erreur de migration est contenue dans l'expression de la covariance de la vitesse. Ce lien peut être exprimé de manière analytique de telle sorte que pour réaliser effectivement la simulation de l'erreur, il suffise de connaître la covariance de vitesses réelles du milieu. La question que l'on se pose alors est la suivante? "Comment obtenir la covariance des vitesses?" Pour une première approche il existe deux possibilités :

**Utiliser les vitesses de stack :**

Actuellement cette idée est la plus souvent utilisée lorsque l'on veut simuler le champ de vitesse après stack. A l'égard de ceci nous avons montré la non fiabilité de la méthode au chapitre 2. Nous avons vu en effet qu'une telle analyse pourrait être responsable de la genèse d'un effet de pélite et que d'autre part la portée peut être mal restituée.

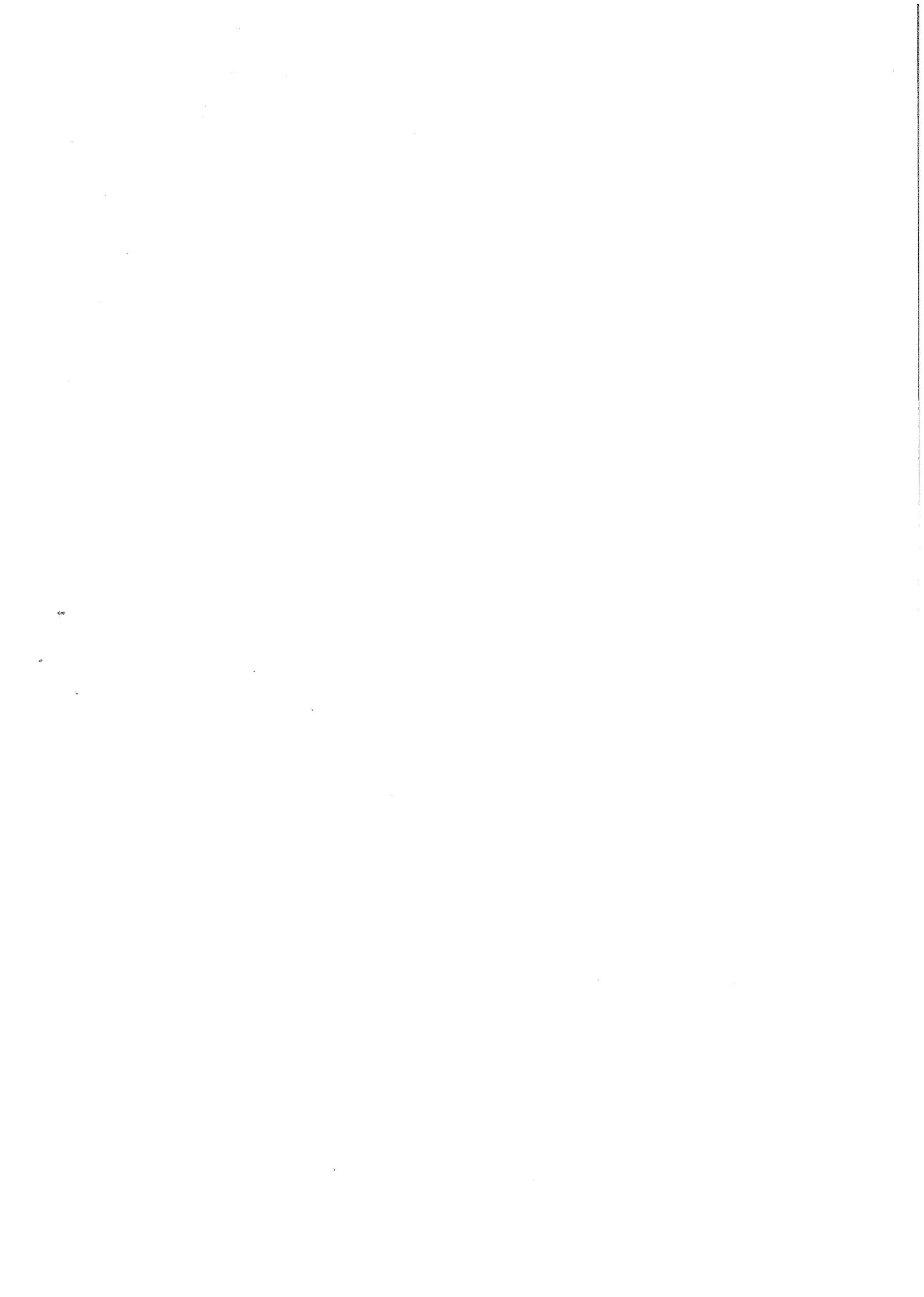
**Utiliser les vitesses réelles :**

Pour les deux raisons sus-mentionnées, nous proposons de travailler directement avec les covariances des vitesses réelles extraites des temps d'arrivées sans avoir recours au stack. A ce sujet nous avons construit une sorte d'inversion de la covariance que nous avons baptisé inversion sismique faible puisqu'il s'agit implicitement d'un produit scalaire. Cette inversion fait l'objet de la troisième partie.■



**DEUXIEME PARTIE**

**INVERSION SISMIQUE FAIBLE**



## RÉSUMÉ DE LA DEUXIÈME PARTIE

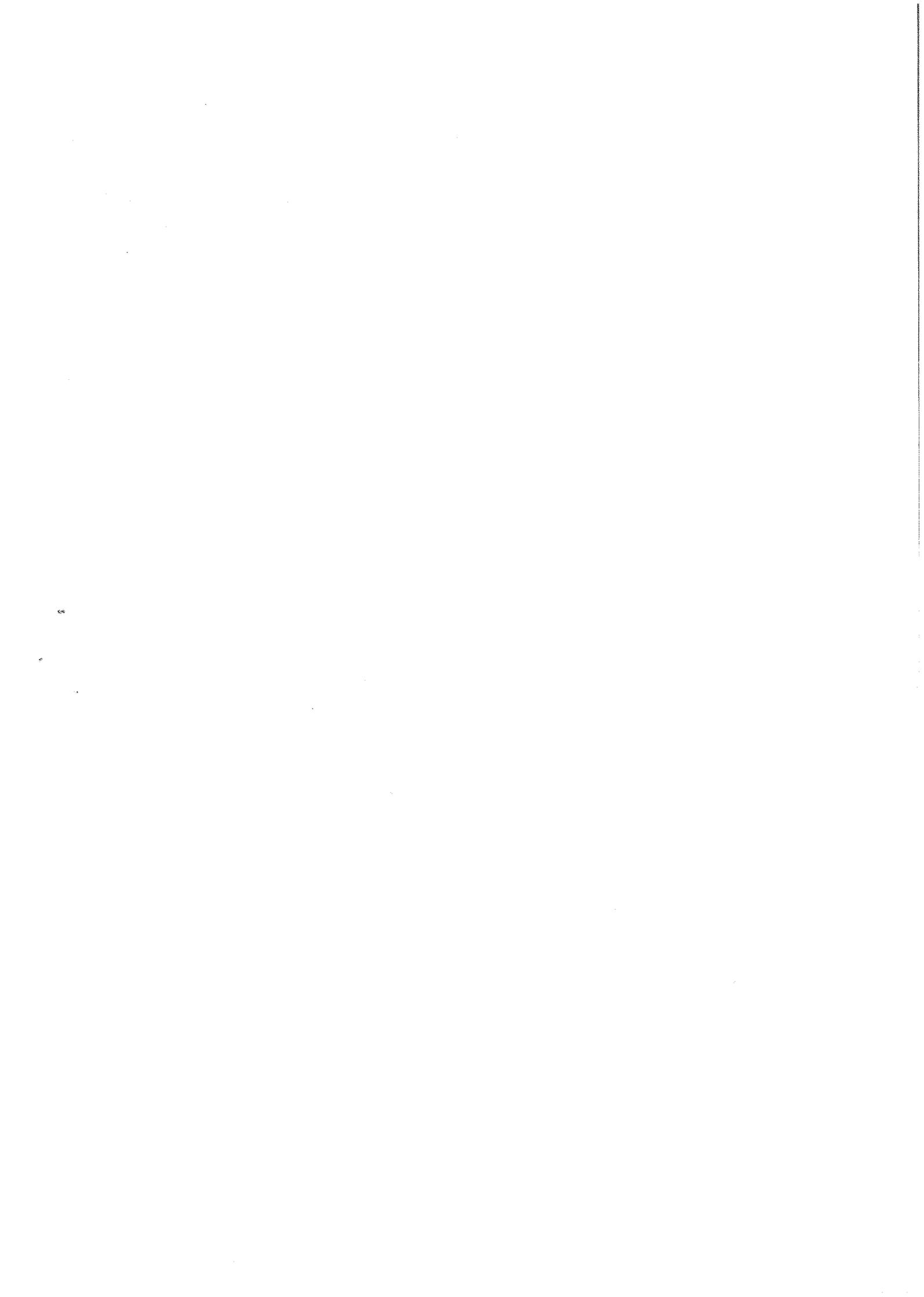
Dans la première partie de cette thèse, nous avons vu le problème des erreurs de migration, pour lequel nous avons proposé une solution simple et rapide, qui consiste à simuler celle-ci. Comme cette erreur est liée à la perturbation du milieu, la covariance du milieu doit être connue pour réaliser cette simulation. Dans la pratique plusieurs cas peuvent se présenter :

- On dispose des données de puits et des données sismiques de surface: dans ce cas la variabilité verticale est déduite des données de puits, tandis que la variabilité horizontale est déduite des vitesses de stack, avec ou sans conditionnement par les données de puits.
- On ne dispose que des données de surface: c'est le cas le plus courant. C'est là où l'on doit profiter de l'abondance des données et les exploiter pour quantifier la variabilité latérale du milieu.

Comme nous l'avons annoncé au premier chapitre, l'analyse de stack n'est pas très fiable pour la restitution d'une telle variabilité. Il s'avère donc utile de trouver une méthode permettant d'extraire la covariance du milieu en fonction des temps d'arrivée.

Cette opération s'apparente à une inversion, il s'agit en effet de remonter aux paramètres du sous sol à partir des données mesurées. Nous attaquons ce problème en quatre étapes successives dont chacune fait l'objet d'un chapitre :

- Mise en évidence du problème d'inversion en sismique. Dans ce chapitre, nous rappelons les travaux de Jannaud qui peuvent être considérés comme une synthèse des travaux théoriques qui portent sur l'inversion en transmission, puis les travaux de Tarantola et Valette qui permettent l'inversion du champ des vitesses en introduisant les connaissances des modèles à priori à l'aide des concepts probabilistes bayesiens.
- Etude des fluctuations des eikonales en milieux perturbés suivant une approximation de Rytov dont on se propose de définir le domaine de validité. Ce chapitre constitue la base du formalisme théorique mis en place pour l'introduction à l'inversion sismique faible.
- Définition de l'inversion sismique faible et première série de tests expérimentaux sur des cas relativement simples de milieux et de réflecteurs.
- Extension théorique à des cas plus complexes et deuxième série de tests expérimentaux sur ces milieux.



## Chapitre 4

# Généralités sur le problème de l'inversion

Dans ce chapitre, nous présentons l'inversion sismique que nous envisageons de développer pour l'extraction des paramètres statistiques du milieu. Celle-ci n'a pas grand chose à voir avec l'inversion habituellement considérée par le sismicien puisque nous ne nous intéressons pas au champ de vitesses en entier mais juste aux paramètres statistiques qui peuvent le caractériser. Cette inversion suppose l'hypothèse de stationnarité non exigée en inversion classique.

La dénomination "inversion stochastique" existe souvent dans la littérature géophysique, celle-ci figure essentiellement dans les travaux que nous allons résumer :

- Inversion de la fonction de corrélation du milieu à partir du coefficient de rétropropagation lors des études de codas en sismologie à l'échelle du globe.
- Inversion stochastique de Tarantola et Valette, des sismogrammes acoustiques.

Après un tour d'horizon sur ces méthodes, nous expliquons pourquoi celles-ci ne nous conviennent pas. Nous donnons ensuite notre point de vue sur l'inversion que l'on va adopter et qui répond à notre besoin qui est la simulation de l'erreur de migration.

Nous terminons enfin ce chapitre par une introduction consacrée aux fluctuations des eikonales. Celles-ci seront traitées au chapitre suivant et constitueront la base du formalisme théorique d'inversion que nous proposons pour extraire la covariance des vitesses à partir des temps d'arrivées.

### 4.1 Les résultats de Jannaud

Jannaud pose le problème suivant: "*Comment extraire des codas (queues des sismogrammes qu'on approxime comme stationnaires), des informations sur la perturbation du milieu ?*". Jannaud se place alors dans le cadre de l'approximation acoustique. La propa-

gation des ondes est régie par le système classique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{r}, t) - \Delta u(\mathbf{r}, t) = S_o(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Equation aux Dérivées Partielles}) \\ u(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in D, \forall t \geq 0 \quad (\text{Conditions Initiales}) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Le champ  $u$  obéit à l'équation aux dérivées partielles, avec un terme source  $S_o$ , dans un milieu " $D$ " défini par la vitesse  $v(\mathbf{r})$ . Lorsque cette vitesse est constante ( $v = c_o$ ), nous savons expliciter la solution exacte du problème 4.1 (Voir par exemple Bamberger [2]). Si nous appelons  $M$  le point repéré par le vecteur  $\mathbf{r}$  et  $\Sigma_{c_o t}^M$  (la sphère de centre  $M$  et de rayon  $c_o t$ ) la solution serait égale à :

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c_o} \int_0^t \frac{d\tau}{c_o(t-\tau)} \oint_{\Sigma_{c_o t}^M} S_o(\mathbf{r}, \tau) d^2\mathbf{r} \quad (4.2)$$

La source d'excitation est souvent ponctuelle, ce qui permet d'écrire,  $S_o(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) S_o(t)$  pour  $0 \leq t$  où  $\delta$  étant la masse de Dirac à l'origine. La solution 4.2 se ramène alors à [2]:

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r c_o} S_o\left(t - \frac{r}{c_o}\right) \quad (4.3)$$

En appliquant la transformation de Fourier<sup>1</sup> en temps à l'équation des ondes du problème 4.1 sans terme source, nous obtenons l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta \tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{4\pi^2 \omega^2}{v^2(\mathbf{r})} \tilde{u}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (4.4)$$

Cette équation est très utile dans la mesure où elle permet, de déduire des informations statistiques sur le milieu [11].

Soit un milieu 2D avec une distribution homogène de vitesse caractérisée par  $c_o$  dans laquelle est incluse une partie hétérogène de surface  $\delta S$  et caractérisée par sa vitesse moyenne  $c_o$  et la fonction de corrélation  $C(r)$  (Cf fig 4.1).

Soit aussi une onde monochromatique incidente ayant une fréquence donnée  $\omega$ . Pour un point d'observation situé à une distance  $R$  du centre de l'hétérogénéité, Chernov [4] démontre que pour une direction caractérisée par l'angle  $\theta$  avec l'onde incidente et un nombre d'onde  $k = 2\pi\omega/c_o$ , l'énergie de l'onde diffractée est :

$$\frac{g(k, \theta) \delta S}{2\pi R}$$

Avec  $g(k, \theta)$  facteur dit coefficient de rétrodiffusion. Il est connu (Frankel et Clayton 1986 [7]) que le coefficient de rétrodiffusion  $g(k, \theta)$  et la fonction de corrélation  $C(r)$  sont

1. Le tilde est réservé pour la transformée de Fourier

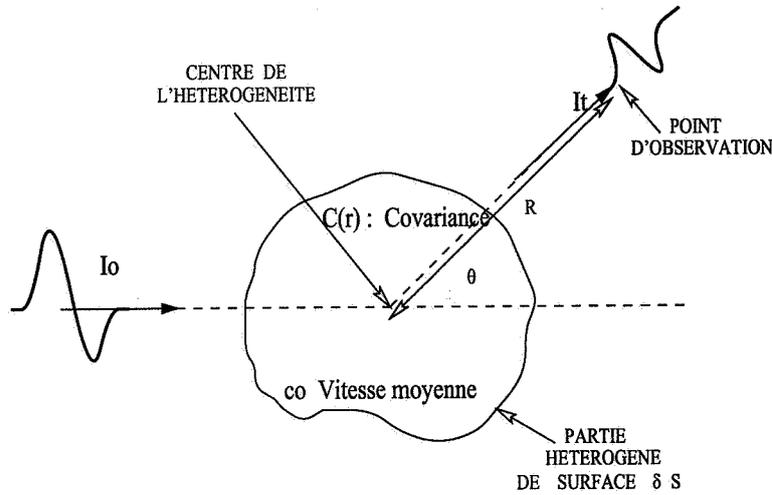


FIG. 4.1 -  $I_o$  : Amplitude de l'onde monochromatique incidente  $I_o = 1$ .  $I_t$  : Amplitude de l'onde transmise  $I_t = g(k, \theta) \delta S I_o / 2\pi R$

reliés par la formule suivante<sup>2</sup> :

$$g(k, \theta) = 2\pi k^3 \int_0^\infty r C(r) J_0(2k \sin(\theta/2) r) dr$$

En particulier pour  $\theta = \pi$ , nous avons :

$$g(k, \pi) = 2\pi k^3 \int_0^{+\infty} r C(r) J_0(2kr) dr$$

Une telle formule peut être inversée en utilisant les propriétés de la transformée de Hankel qui est sa propre inverse. On obtient alors la fonction de corrélation du milieu :

$$C(r) = \int_0^\infty \frac{2g(k, \pi)}{\pi k^2} J_0(2kr) dk \quad (4.5)$$

Jannaud [11] utilise cette formulation pour l'extraction de la covariance du milieu à partir des mesures expérimentales du coefficient de rétrodiffusion qui est fonction du facteur de qualité de la propagation.

## 4.2 Inversion stochastique de Tarantola et Valette

L'approche de Tarantola et Valette, consiste à minimiser, à l'aide des techniques classiques d'optimisation, une fonctionnelle qui décrit l'écart entre les données observées et

2. Jannaud montre [11] que pour une covariance exponentielle, (*respectivement gaussienne*), le coefficient de rétrodiffusion est :

$$g(\omega, \theta) = \sqrt{\pi} \omega^4 a^3 \sigma^2 \exp(-\omega^2 a^2 \sin^2 \theta / 2)$$

$$g(\omega, \theta) = \frac{8\omega^4 a^3 \sigma^2}{(1 + 4\omega^2 a^2 \sin^2 \theta / 2)}$$

Ces deux formules montrent que c'est le facteur  $\omega a$  qui est important, soit le rapport de la longueur d'onde sur la portée.

les données synthétiques obtenues à l'aide d'un modèle. Dans leur article [26] Tarantola et Valette considèrent des distributions de probabilité sur deux espaces : l'espace des données et l'espace des modèles. Ces deux distributions, décrivent respectivement l'erreur sur les mesures et l'incertitude dans la connaissance du modèle *a priori*. Tarantola et Valette définissent alors :

le vecteur données:  $\mathbf{d} = [u(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}_1, t_1), \dots, u(\mathbf{r}_n, \mathbf{s}_m, t_l)]$ , où les  $u(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j, t_k)$  étant les traces sismiques observées au récepteur  $\mathbf{r}_i$  pour une source  $\mathbf{s}_j$  au temps  $t_k$ .

le vecteur modèle:  $\mathbf{m} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_{1,1}), \dots, \mathbf{p}(\mathbf{x}_{k,l})]$  où  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_{i,j})$  est la composante locale du modèle au point  $\mathbf{x}_{i,j}$ .

Pour effectuer la minimisation de la fonctionnelle, le critère le plus souvent utilisé est le critère des moindres carrés. Dans le cas où les erreurs commises au cours de l'acquisition des données ainsi que le modèle *a priori* admettent des distributions de probabilités gaussiennes, nous avons le critère de minimisation qui suit :

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{mod})^T \mathbf{C}_u^{-1}(\mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{mod}) + \frac{1}{2}\mathbf{m}^T \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{m}$$

$\mathbf{C}_u$  et  $\mathbf{C}_m$  sont les covariances associées aux données et aux modèles. Pour un problème inverse linéaire  $F$  est une fonction quadratique et l'on peut écrire que  $\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{m}$  avec  $\mathbf{G}$  opérateur linéaire. On peut montrer [26] que les distributions de probabilités *a posteriori* sont gaussiennes et ont pour valeur moyenne :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_i - \mathbf{H}_i^{-1} \phi_i$$

$\mathbf{m}_i$  étant le modèle de départ,  $\phi$  la dérivée de Fréchet de la fonction  $F$  et  $H$  est le hessien qui lui est associé.

$$\begin{aligned} \phi_i &= \mathbf{C}_m \mathbf{G}^T \mathbf{C}_u^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{m}_i - \mathbf{d}_{obs}) \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{I} + \mathbf{C}_m \mathbf{G}^T \mathbf{C}_u^{-1} \mathbf{G} \end{aligned}$$

A propos de ces méthodes, (G.Lambaret[14] 1991) signale dans une étude bibliographique faite à ce sujet, le fait que ces méthodes sont limitées par la difficulté dans le calcul du Hessien ainsi que l'inversion de la matrice de covariance *a posteriori*.

Devant ces limitations, la résolution du problème inverse a trouvé d'autres issues par méthodes itératives. Ceci fait penser à la méthode essai-erreur pour le traitement des problèmes mal posés, où l'on doit réactualiser le modèle en fonction de l'erreur et le calcul direct est incontournable.

### 4.3 Inversion sismique faible

Bien qu'elle permette d'extraire la covariance du milieu, l'inversion pratiquée par Jannaud n'est pas applicable aux données sismiques de surface. Quant au titre "inversion stochastique" dénommant la méthode de Tarantola et Valette, celui-ci ne fait que refléter l'aspect méthodologique d'une minimisation d'erreur entre données synthétiques et observables, l'aspect probabiliste ne tient pas compte de la perturbation du milieu en tant

que telle mais suppose qu'elle joue le rôle d'un bruit gaussien qui influe sur le modèle en sortie. De surcroît, l'inversion de Tarantola et Valette, exige une connaissance *a priori* de la covariance, ce qui est loin d'être vérifié dans le cas où nous nous plaçons.

L'inversion de Tarantola et Valette, ne correspond pas à notre objectif qui est plus simple, dans la mesure où il s'agit d'obtenir des informations sur la covariance des vitesses à partir des temps d'arrivée (Implicitement, Tarantola et Valette, supposent connues beaucoup plus d'informations que nous cherchons). L'optique de Jannaud est plus proche de la notre, nous nous intéressons à des milieux plus complexes en utilisant des équations plus simples.

Le cadre adopté dès le départ pour la simulation des erreurs, est celui de l'optique géométrique. La présente section explicite les deux conditions d'utilisation de l'approximation de l'optique géométrique et donne la signification de ces conditions pour la résolution de l'eikonale en milieu perturbé.

### 4.3.1 Deux conditions nécessaires pour l'application de l'optique géométrique

Si l'on suppose que le milieu est faiblement hétérogène, ceci veut dire que la perturbation  $\epsilon(r)$  dans l'équation de Helmholtz  $\Delta u + k^2(1 + \epsilon(r))u = 0$  varie de façon très faible sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde  $\lambda_o$ . Dans ce cas nous pouvons supposer que la solution de l'équation d'Helmholtz peut être approchée par  $u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\omega T(\mathbf{r})}$ . l'amplitude  $A(\mathbf{r})$  et le nombre d'onde  $k(\mathbf{r}) = \frac{2\pi\omega}{c_o}$  varient de façon très faible le long de la longueur d'onde  $\lambda_o$ . Ce qui revient à écrire [12]:

$$\lambda_o \ll \frac{|A|}{|\nabla A|} = l_\epsilon$$

Où  $l_\epsilon$  est la portée du schéma de covariance du milieu. On peut aussi trouver une autre condition nécessaire pour l'application de l'approximation de l'O.G [12]. Celle-ci fait intervenir la fréquence et la distance parcourue par l'onde.

$$\sqrt{\lambda_o L} \ll l_\epsilon \quad (4.6)$$

Les deux conditions, montrent que plus la fréquence est élevée plus l'approximation est valide.

### 4.3.2 Equations de bases - linéarisation

Nous nous plaçons dans les conditions décrites au paragraphe précédent, dans ce cas le champ  $u$  solution de l'équation de Helmholtz peut être approximé par une onde plane  $u = Ae^{ik\varphi}$  ( $\varphi(\mathbf{r}) = c_o T(\mathbf{r})/2\pi$  étant la phase de l'onde au point  $\mathbf{r}$ ), où l'amplitude et le gradient de la phase varient faiblement à l'échelle de  $\lambda_o$ . Pour obtenir les équations auxquelles obéissent  $A$  et  $\varphi$ , plusieurs méthodes sont possibles [12]. Nous proposons celle

de Debye qui consiste à développer en série à termes inversement proportionnels au nombre d'onde :

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik)^m};$$

Où les coefficients  $A_m$  sont généralement complexes et contribuent par conséquent pour la phase du champ résultant.

Dans ce cas le champ  $u$  s'écrit comme suit :

$$u = (A_o + \frac{A_1}{ik} + \frac{A_2}{(ik)^2} + \dots)e^{ik\varphi} \quad (4.7)$$

En substituant dans 4.7 l'équation d'Helmholtz et en égalisant à zéro la somme des termes du même ordre, nous obtenons le système :

$$(k^2) \quad (\nabla\varphi)^2 = 1 + \epsilon \quad (4.8)$$

$$(k) \quad 2\nabla\varphi\nabla A_o + A_o\Delta\varphi = 0 \quad (4.9)$$

$$(k^0) \quad 2\nabla\varphi\nabla A_1 + A_1\Delta\varphi = -\Delta A_o \quad (4.10)$$

$$(k^{1-n}) \quad 2\nabla\varphi\nabla A_n + A_n\Delta\varphi = -\Delta A_{n-1} \quad (4.11)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation que l'on appelle classiquement équation de l'eikonale (4.8) et les équations de transport (4.9 à 4.11) pour l'amplitude à l'ordre  $n$ .

En général on se limite à l'approximation d'ordre 1; la raison de ce choix peut être résumée dans l'argumentation que donne Y. Kravstov dans [12] :

*“les termes d'ordre supérieurs sont éliminés, non seulement à cause des difficultés rencontrées dans l'implémentation numérique, mais surtout parce qu'il s'agit d'une série asymptotique, et l'on sait que pour une série asymptotique, il n'est pas toujours certain d'améliorer les résultats en remontant les calculs à des ordres supérieurs.”*

L'équation de l'eikonale que nous appellerons tout court eikonale, caractérise l'évolution des rayons dans le temps, celle-ci renferme le principe de Fermat, ces rayons sont en effet les géodésiques suivant lesquelles la fonctionnelle  $\int \frac{\sqrt{1 + \epsilon(s)}}{c_o} ds$  est minimale.

## 4.4 Eikonales en milieux perturbés

Si nous revenons au cas d'un milieu aléatoire stationnaire, il n'est pas possible de trouver une solution analytique à l'équation eikonale 4.8 pour une vitesse qui varie de manière arbitraire.

Nous abordons alors le problème en utilisant une méthode de perturbation. De la même manière que pour l'amplitude, nous écrivons l'eikonale sous la forme suivante :

$$T = T_o + T_1 + T_2 + \dots \quad (4.12)$$

$T_o$  est supposé satisfaire à l'équation non perturbée de l'eikonale:  $(\nabla T_o)^2 = 1/c_o^2$ .  
Substituant 4.12 dans 4.8, nous obtenons l'équation linéaire suivante:

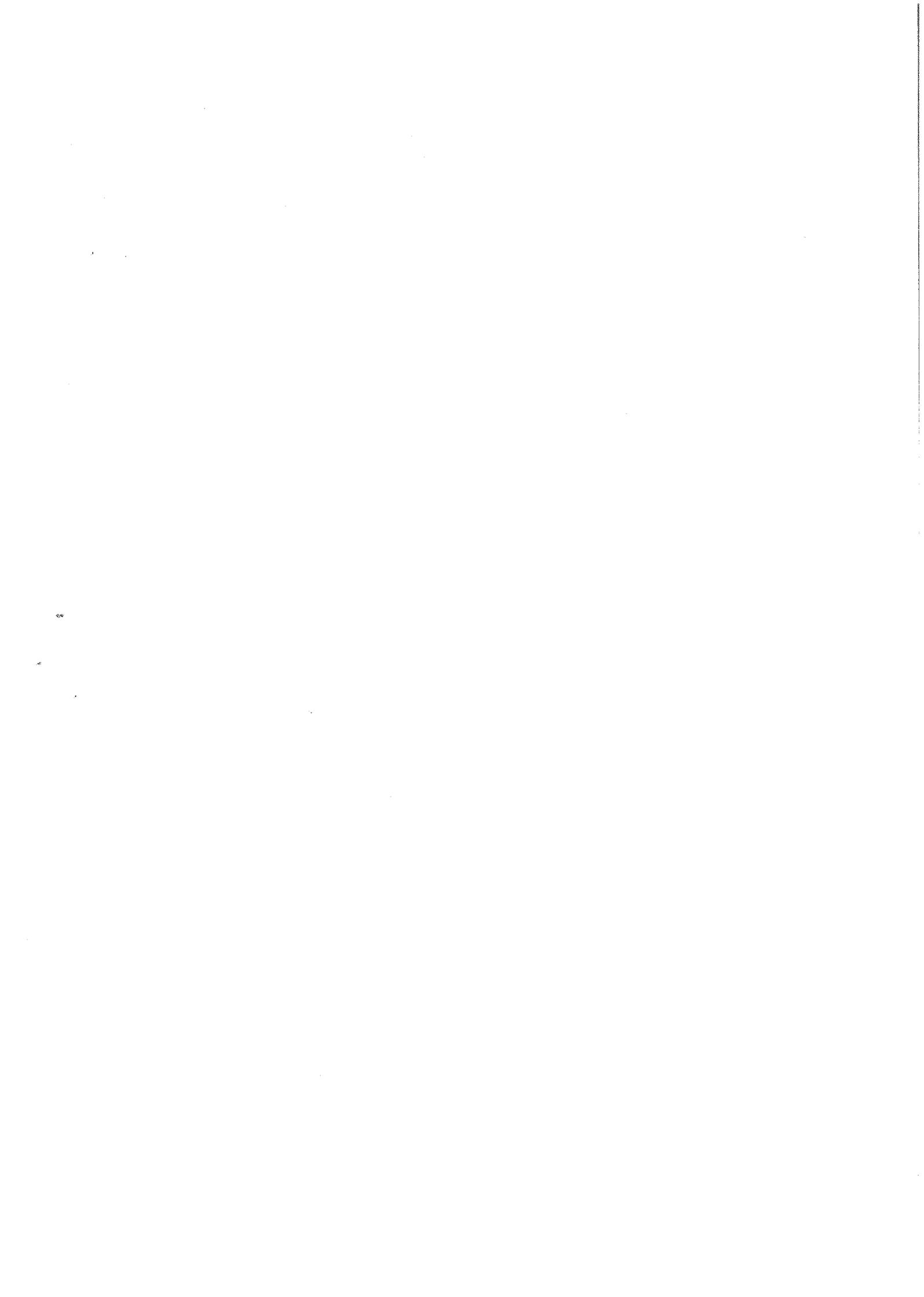
$$2(\nabla T_o \nabla T_1) = \frac{\epsilon}{c_o^2} \quad (4.13)$$

Nous avons ainsi, comme démontré dans le paragraphe 3.6:

$$T(r) = \frac{1}{c_o} r (1 + \bar{\epsilon}/2)$$

avec  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{r} \int_0^r \epsilon(s) ds$

Ce sont les covariances de ces temps d'arrivée que nous étudierons au chapitre qui suit ■



## Chapitre 5

# Fluctuations des eikonales

Nous avons vu au cours du chapitre précédent des rappels bibliographiques sur les problèmes de l'inversion en sismique et les méthodes proposées pour les résoudre. Nous remarquons qu'en dépit de la très large littérature qui est consacrée à ce sujet, rares sont les travaux qui répondent au problème d'inversion de la covariance des vitesses.

Les travaux de Frankel et Clayton (1970 [7]) et Jannaud (1990 [11]) dégagent des résultats importants sur l'inversion de la covariance de vitesses à partir du coefficient de rétrodiffusion. Ces travaux sont traités dans le cadre de l'approximation acoustique et sont pris dans un domaine spectral, de surcroît les applications pratiques de ces travaux se limitent au cadre d'inversion des codas et au mieux à la sismique entre puits.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier les fluctuations des eikonales en milieux perturbés stationnaires, dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique. Le chapitre est divisé en trois parties :

- D'abord, nous explicitons les formulations de Rytov pour les variances et covariances des fluctuations des eikonales.
- Nous montrons, à l'aide d'un contre exemple, un cas d'échec de l'approximation de Rytov.
- Nous donnons enfin les expressions plus précises des variances et covariances puis nous faisons une comparaison avec les formules de Rytov.

### 5.1 Fluctuations des eikonales - *Approximations de Rytov*

Classiquement, lorsqu'il s'agit d'une étude de la propagation des ondes en milieux homogènes, nous distinguons entre plusieurs types d'ondes: planes, cylindriques, coniques ou sphériques. Ce sont les formes de ces ondes qui sont à l'origine de leurs appellations. Dans le cas de milieux hétérogènes, ces formes sont bien évidemment détruites à cause des fluctuations des eikonales. Cependant, en moyenne, on garde plus ou moins la même

géométrie que dans le cas d'un milieu homogène. Nous continuerons alors à utiliser les mêmes appellations dans les milieux perturbés.

Dans cette section, nous allons définir les approximations de Rytov, en faisant la distinction entre ondes planes et ondes sphériques.

### 5.1.1 Première approximation de Rytov - Ondes planes

Considérons d'après Rytov [21] une onde plane  $u$  (Cf. Fig. 5.1) se propageant dans un milieu de vitesse stationnaire  $v(x, z) = c_o(1 - \epsilon(x, z)/2)$  où  $(x, z)$  sont les coordonnées spatiales et  $\epsilon(x, z)$  est une perturbation très faible par rapport à l'unité, de moyenne nulle et de covariance stationnaire  $C_\epsilon$ . Nous supposons pour simplifier que l'onde se propage dans la direction  $z$ .

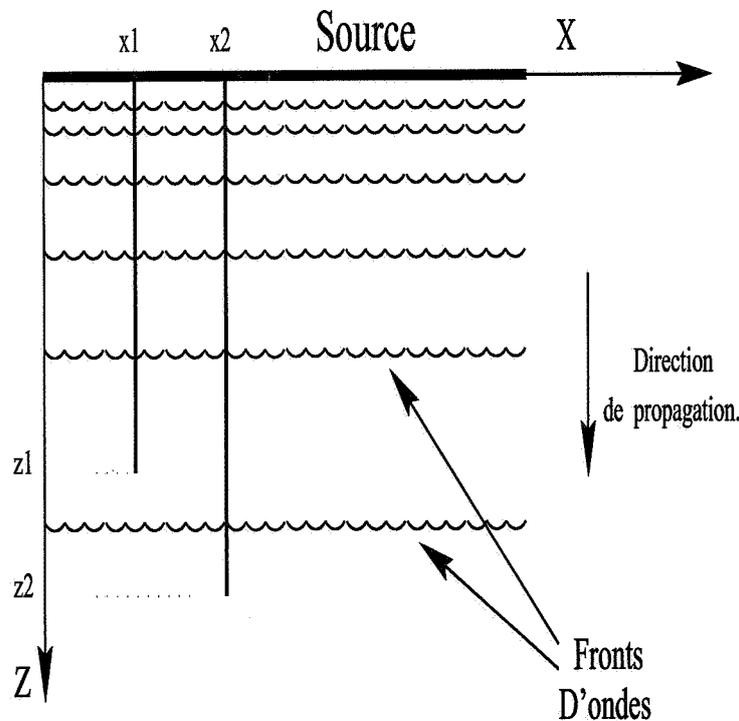


FIG. 5.1 - Onde plane se propageant dans la direction  $OZ$ . La source n'est pas ponctuelle. La source est un segment de droite tracé en trait noir foncé.

Comme signalé à plusieurs reprises, dans l'approximation du premier ordre de la théorie des perturbations, l'eikonale peut s'écrire:  $T = T_o + T_1$  où  $T_1$  est le terme perturbé de moyenne  $E[T_1] = 0$ , et de covariance:

$$cov(T_{r_1}, T_{r_2}) = cov(T_1(\mathbf{r}_1), T_1(\mathbf{r}_2))$$

$\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont les vecteurs position des deux points d'observations situés à même distance de la source.

$$[ \mathbf{r}_1 = (x_1, z_1) \text{ et } \mathbf{r}_2 = (x_2, z_2) ]$$

$$\text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) = \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{z_1} dz' \int_0^{z_2} C_\epsilon(x_1 - x_2, z' - z'') dz''$$

Pour simplifier cette formule, Rytov [21] définit deux nouvelles variables d'intégrations :

$$\begin{cases} u = z' - z'' \\ v = (z' + z'')/2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ainsi l'on a comme équivalent de 5.1 l'égalité ci dessous où  $\Sigma$  est le nouveau domaine d'intégration dans le plan  $(U, V)$  :

$$\text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) = \frac{1}{4c_0^2} \int \int_{\Sigma} dudv C_\epsilon(x_1 - x_2, u)$$

Deux cas sont alors à distinguer.

1<sup>er</sup> Cas : Si  $z_2 > z_1$ , alors le domaine d'intégration  $\Sigma$  est un parallélogramme (Cf Fig 5.2).

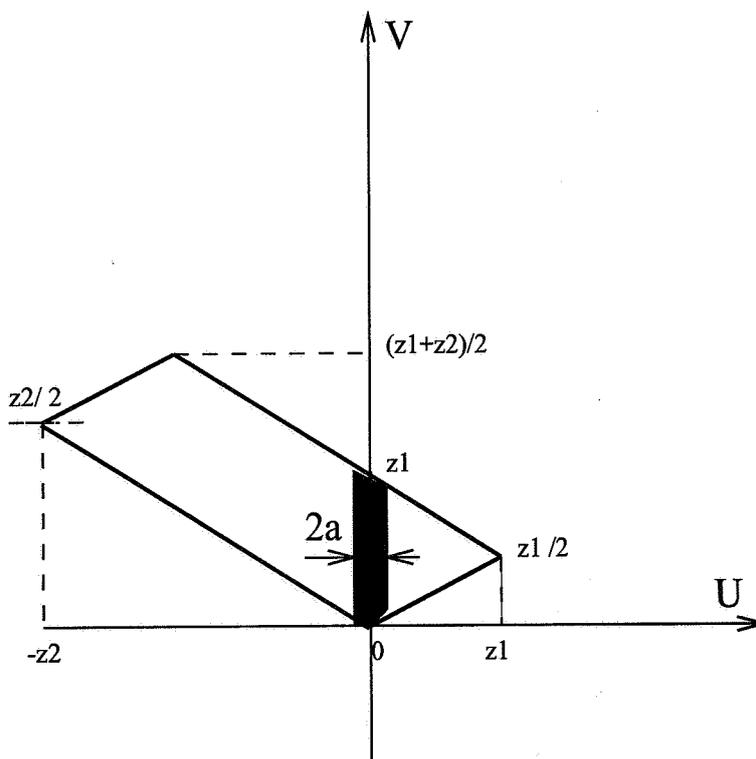


FIG. 5.2 - Domaine d'intégration

Dans ce cas, si nous supposons que la portée 'a', de la covariance, est très faible devant  $z_1$  nous obtenons :

$$\text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) \simeq \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{z_1} dv \int_{-\infty}^{\infty} C_\epsilon(x_2 - x_1, u) du = \frac{z_1}{2c_0^2} \int_0^{\infty} C_\epsilon(x_1 - x_2, u) du$$

2<sup>ème</sup> Cas : Si  $z_2 < z_1$ , nous arriverons à une expression similaire :

$$\text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) \simeq \frac{\min(z_1, z_2)}{2c_0^2} \int_0^\infty C_\epsilon(x_1 - x_2, v) dv \quad (5.2)$$

**Remarque:** Nous noterons aussi  $C_T^P(x, L)$  avec  $x = x_1 - x_2$  et  $L = \min(z_1, z_2)$ .

Le résultat ci-dessus constitue la première approximation de Rytov. Nous allons voir maintenant la seconde approximation qui, elle, est relative aux ondes sphériques.

### 5.1.2 Deuxième approximation de Rytov - Ondes Sphériques

Dans le cas d'une onde sphérique, les rayons  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  ne sont pas parallèles (Cf fig 5.3) et la distance entre rayons dépend de la distance parcourue par l'onde. Un équivalent à la relation 5.2 est donné dans ce cas par la formule (5.3) qui constitue la seconde approximation de Rytov.

$$\text{cov}(T \mathbf{r}_1, T \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2c_0^2} \int_0^{\text{Min}(L_1, L_2)} ds \int_0^\infty C_\epsilon(\delta(s), u) du \quad (5.3)$$

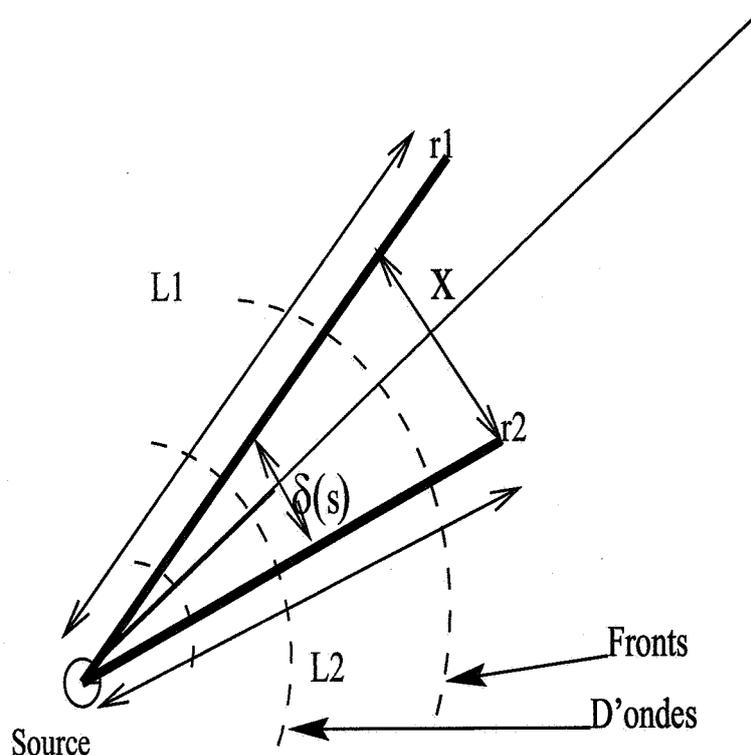


FIG. 5.3 - Onde sphérique se propageant dans la direction OZ.

Où  $L_1$  et  $L_2$  sont les longueurs de rayons,  $\delta(s)$  la distance entre les rayons à l'abscisse  $s$  dans le rayon central. Le front d'onde est supposé avoir une forme sphérique et nous

avons  $\delta(s) = \frac{x}{L}s$ . Avec :  $L = \text{Min}(L_1, L_2)$  et  $x$  la distance entre les rayons lorsque la longueur  $L$  est atteinte.

En substituant  $C_T^P(\delta(s), L)$  dans 5.3, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{cov}(T \mathbf{r}_1, T \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{L} \int_0^L C_T^P\left(x \frac{s}{L}, L\right) ds = \int_0^1 C_T^P(\tau x, L) d\tau \\ \text{ou encore : } \quad \text{cov}(T \mathbf{r}_1, T \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{x} \int_0^x C_T^P(y, L) dy. \end{aligned} \quad (5.4)$$

**Remarque:** Nous noterons dans la suite  $C_T^{Sph}(x, L)$ , l'expression donnée par 5.4.

Ainsi si l'on considère par exemple une perturbation  $\epsilon(x, z)$  de moyenne nulle et de covariance gaussienne  $C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 e^{-\frac{x^2+z^2}{2a^2}}$  on arrive facilement à établir les expressions des variances et covariances :

$$\begin{aligned} \sigma_T^2(L) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}c_0^2} a \cdot L \sigma_\epsilon^2 \quad \text{et} \quad C_T^P(x, L) = \sigma_T^2(L) \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \\ C_T^{Sph}(x, L) &= \sigma_T^2(L) \frac{a}{x} \phi\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{où,} \quad \phi\left(\frac{x}{a}\right) = \int_0^{\frac{x}{a}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \end{aligned}$$

Malgré la simplicité et la souplesse de ces approximations pour le calcul des variances et covariances, nous sommes tentés de voir les limites de ces approximations en faisant appel à des calculs directs. Commençons d'abord par montrer un cas d'échec de l'approximation.

## 5.2 Un cas d'échec de l'approximation

Soit une perturbation  $\epsilon(x, z)$  de moyenne nulle et de covariance  $C_\epsilon$  telle que  $C_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma_\epsilon^2 \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2}{2a^2}\right\}$  pour tous vecteurs  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  pris dans le domaine d'intégration.

Maintenant, prenant une longueur infinie pour la profondeur investiguée  $L$ , nous voulons comparer la valeur approximée de la covariance de l'eikonale et la valeur exacte de celle-ci.

### Expression approximative :

D'après l'exemple exhibé dans le paragraphe précédent, la formule approchée est donnée comme suit<sup>1</sup> :

1. Dans tout le texte, le tilde correspond aux formules approximatives de Rytov.

$$C_T^{\tilde{S}^{ph}}(x, L) = \frac{\sqrt{2\pi} L}{4} \frac{a^2 \sigma_\epsilon^2}{x} \int_0^{\frac{x}{a}} e^{-u^2/2} du$$

Ici  $\theta$  est l'angle entre les deux rayons. Nous avons donc  $x \simeq 2 \sin(\theta/2)L \simeq L\theta$  (pour des faibles angles d'incidence) et l'on a par conséquent<sup>2</sup> :

$$C_T^{\tilde{S}^{ph}}(x, L) = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{4\theta \sqrt{\pi}} \sigma_\epsilon^2 \int_0^{x/a} e^{-u^2/2} du$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C_T^{S^{ph}}(\theta, L) = \frac{\pi a^2}{4\theta} \sigma_\epsilon^2$$

### Expressions réelles :

Posons,  $\rho = \cos \theta$  et  $\sigma^2 = \frac{a^2}{1 - \rho^2}$ . La formule exacte de la covariance des eikonales pour les ondes sphériques est évaluée en intégrant la covariance entre tous les points des deux rayons :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C_T^{S^{ph}}(\theta, L) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_\epsilon^2 e^{-\frac{(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta)}{2a^2}} dudv$$

Posons maintenant  $u = \sigma s$  et  $v = \sigma t$ , nous avons donc :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} C_T^{S^{ph}}(\theta, L) = \frac{1}{4} \frac{2\pi a^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sigma_\epsilon^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2\pi \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{(s^2 + t^2 - 2\rho st)}{2(1 - \rho^2)}} dsdt$$

Soient les variables  $X$  et  $Z$  telles que  $(X, Z)$  est bigaussien avec un coefficient de corrélation  $\rho$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} C_T^{S^{ph}}(\theta, L) &= \frac{1}{4} \frac{2\pi a^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \sigma_\epsilon^2 \mathcal{P}(X > 0; Z > 0) \\ &= \frac{1}{4} \frac{2\pi a^2}{\sqrt{1 - \rho^2}} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \rho\right) \sigma_\epsilon^2 \\ &= \frac{\pi a^2}{4 \sin \theta} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right) \sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

La différence entre l'approximation de Rytov et la formule exacte est alors :

---

2. Nous écrivons ici  $C_T^{\tilde{S}^{ph}}(\theta, L)$  au lieu de  $C_T^{S^{ph}}(x, L)$ . Ici  $\theta$  est fixé quand  $x$  et  $L$  sont rejetés à l'infini.

$$|C_T^{Sph}(\theta, +\infty) - C_T^{\tilde{S}ph}(\theta, +\infty)| = \frac{a^2 \sigma_\epsilon^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{|C_T^{Sph}(\theta, +\infty) - C_T^{\tilde{S}ph}(\theta, +\infty)|}{C_T^{Sph}(\theta, +\infty)} = \frac{\theta}{\pi}$$

Nous voyons donc que l'erreur est proportionnelle au carré de la portée et de la variance de perturbation. De plus, l'expression de l'erreur relative montre que l'approximation de Rytov est plus valide pour des angles petits.

### 5.3 Expressions générales de la covariance des eikonales

Dans ce paragraphe, nous allons donner l'expression des covariances de fluctuations dans un cas général puis dans un cas de covariances positives et à portée finie. La covariance peut être calculée en sommant la covariance entre les points des deux rayons.

Pour ne pas alourdir le texte avec des calculs simples et fastidieux, nous envoyons le lecteur en annexes pour les calculs détaillés.

Dans le cas général où la covariance est isotrope avec une portée non-finie, le calcul de covariance d'eikonale entre deux rayons issus d'une même source  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  est établie dans l'annexe A.2. La formule est complexe, on se propose alors de donner une expression plus simple en se restreignant au cas de covariance positive entre deux rayons droits possédant la même longueur. C'est à l'aide de cette expression que l'on fera le point sur la validité de l'approximation de Rytov.

#### 5.3.1 Covariance des eikonales dans le cas d'un milieu isotrope à portée finie

Nous traitons le cas d'une covariance  $C_\epsilon$  isotrope avec une portée finie  $a$ . Nous considérons deux rayons  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  qui émergent d'une même source  $S$ .  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  font un angle  $\theta$  et possèdent la même longueur  $R = L / \cos(\theta/2)$  (Cf Fig 5.4).

On se propose de calculer la covariance des temps  $C_T^{Sph}(x, L) = cov(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2))$ . Elle peut être écrite sous la forme suivante.

$$C_T^{Sph}(x, L) = \int_0^{L/\cos(\theta/2)} dz \int_{\text{Max}(0, a(z))}^{b(z)} C(z, z') dz'$$

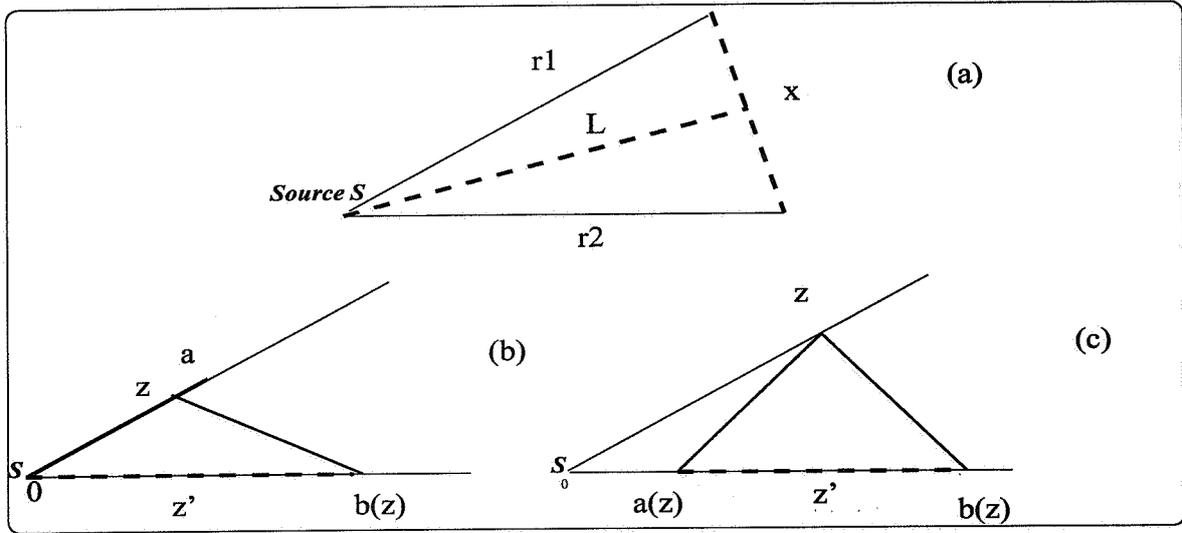


FIG. 5.4 - (a) Les deux rayons  $r_1$  et  $r_2$ ; (b)  $[0, b(z)]$  est l'intervalle d'influence pour  $z < a$ ; (c)  $[a(z), b(z)]$  est l'intervalle d'influence pour  $z < a$ ;  $a < z$ .

avec  $[a(z), b(z)]$  étant le segment dans le second rayon ( $r_2$ ) pour lequel, nous avons :

$$\forall z' \in [a(z), b(z)]; C_\epsilon(z, z') \neq 0$$

Nous pouvons facilement montrer que :  $a(z) = z \cos \theta - \sqrt{a^2 - z^2 \sin^2 \theta}$  et  $b(z) = z \cos \theta + \sqrt{a^2 - z^2 \sin^2 \theta}$ . Dans l'annexe A, nous avons développé l'expression de la covariance de l'eikonale. Celle-ci peut s'écrire sous la forme suivante. Nous la notons  $C_T^{Sph}$  pour la distinguer de l'approximation de Rytov  $C_T^{\tilde{S}ph}$ .

$$C_T^{Sph}(x, L) = C_T^{\tilde{S}ph}(x, L) + \frac{\theta}{4c_0^2 \sin \theta} \int_0^a u C(u) du \quad (5.5)$$

**Nota:** Pour un faible angle de tir, nous avons  $\theta \simeq 0$  ( $x \ll L$ ) ce qui donne au premier ordre :

$$C_T^{Sph}(x, L) = C_T^{\tilde{S}ph}(x, L) - \frac{1}{4c_0^2} \int_0^a u C(u) du$$

Et donc nous avons aussi :

$$\frac{d}{dx} C_T^{Sph}(x, L) = \frac{d}{dx} C_T^{\tilde{S}ph}(x, L) \quad (5.6)$$

Ce qui signifie que si la covariance du milieu s'obtient à partir de dérivation de l'expression intégrale de  $C_T^{Sph}(x, L)$ , que l'on travaille avec la formule de Rytov ou les expressions données par le calcul direct les résultats seraient analogues.

### 5.3.2 Calcul des covariances des eikonales dans le cas de milieu anisotrope de covariances factorisées

Lors des applications, nous allons distinguer entre deux cas : les covariances factorisées et celles qui ne le sont pas. Les covariances factorisées présentent en effet l'avantage de donner des expressions simples pour les formulations des covariances des eikonales :

En effet, si l'on applique les formules de Rytov aux cas d'une covariance factorisée  $C_\epsilon(x, z) = C_X(x)C_Z(z)$  nous obtenons :

$$\sigma_T^2(L) = \frac{L}{2c_0^2} \int_0^\infty C_Z(u) du$$

$$C_T^P(x, L) = \frac{L}{2c_0^2} C_X(x) \int_0^\infty C_Z(u) du$$

$$C_T^{Sph}(x, L) = \frac{\sigma_T^2(L)}{x} \int_0^x C_X(u) du$$

Maintenant que l'on a établi les expressions exactes des covariances des eikonales, nous nous attachons dans ce qui suit à les comparer aux approximations de Rytov et d'en déduire quelques propriétés.

## 5.4 Validité de l'approximation de Rytov

Nous cherchons à évaluer les écarts entre les approximations de Rytov et les calculs directs. Nous signalons au passage que les calculs qui vont suivre ainsi que les détails correspondants en annexes font intervenir fréquemment le théorème de Cauchy [18] qui permet le passage d'une intégrale double à une intégrale simple par l'intermédiaire du covariogramme géométrique [18]. Dans la suite nous désignons par  $K(h)$  le covariogramme géométrique de la fonction indicatrice  $f(u) = 1_{]0, z[}(u)$ , ( $K(h) = \int f(x)f(x+h)dx$ ).

Conformément à ce que nous avons annoncé, le but ici est d'établir les propriétés des approximations de Rytov et les limites de validité de celles-ci. Nous traitons successivement les trois points suivants :

- Approximation de la variance des eikonales.
- Approximation de la covariance dans le cas des ondes planes.
- Approximation de la covariance dans le cas des ondes sphériques.

### 5.4.1 Variance des Eikonales

Pour simplifier le problème, nous allons considérer ici des rayons qui sont parallèles à l'axe des profondeurs. Dans ce cas, la formulation exacte de la variance de l'eikonale

consiste à sommer les corrélations entre les perturbations implantées aux points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  qui balayent l'intervalle  $[0, z]$ , ce qui peut se traduire par la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{var}[T(\mathbf{r})] &= \frac{1}{4c_o^2} \int_0^z \int_0^z C_\epsilon(0, z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \\ &= \frac{1}{4c_o^2} \int_{-\infty}^{\infty} C_\epsilon(0, u) K(u) du \\ &= \frac{1}{2c_o^2} \int_0^z (z - u) C_\epsilon(0, u) du \end{aligned}$$

Ainsi, contrairement à la formule de Rytov, l'intégration ne se fait pas entre zéro et l'infini mais juste sur l'intervalle  $[0, z]$  c'est à dire exactement sur la longueur du rayon. Dans le tableau suivant, nous donnons un formulaire de la variance des eikonales. Ici  $\sigma_T^2(L)$  et  $\tilde{\sigma}_T^2(L)$  désignent respectivement les formules exactes et approchées de la variance.

Dans ce tableau, nous distinguons le cas des covariances factorisées et celles qui ne le sont pas. Cette distinction tient au fait que les covariances factorisées ont l'avantage d'être facilement manipulables lors des calculs qui vont suivre, surtout ceux relatifs à l'inversion au chapitre qui suit.

Type de la covariance	$\sigma_T^2(L)$	$\tilde{\sigma}_T^2(L)$
$C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_X(x) C_Z(z)$	$\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^L (L - u) C_Z(u) du$ $\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^L u \chi_Z(u) du$ <p>Où <math>\chi_Z(x) = \frac{1}{x} \int_0^x C_Z(u) du</math></p>	$\tilde{\sigma}_T^2(L) \simeq \frac{L\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^\infty C_Z(u) du$
$C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_o(\sqrt{x^2 + z^2})$	$\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^L (L - u) C_o(u) du$ $\sigma_T^2(L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^L u \chi(u) du$	$\tilde{\sigma}_T^2(L) \simeq \frac{L\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^\infty C_o(u) du$

TAB. 5.1 - Tableau des formules des variances des eikonales. Nous distinguons deux cas, le cas de covariance factorisée et le cas de covariance non factorisée isotrope.

Soit l'erreur relative :

$$\eta = [\sigma_T^2(L) - \tilde{\sigma}_T^2(L)] / \sigma_T^2(L)$$

Celle-ci ne dépend que de :

\* La portée  $a$  qui est la portée verticale dans le cas de covariance factorisée et la portée tout court dans le cas de covariance isotrope.

\* La profondeur  $L$  du rayon en question.

Dans un but illustratif, nous donnons quelques expressions de l'erreur  $\eta(a, L)$  calculée pour deux schémas de covariance. Ces erreurs sont aussi représentées dans la figure 5.5. Comme celles-ci ne dépendent que du rapport  $a/L$  nous notons  $\eta(a/L)$ .

Type de covariance	Erreur relative: $ \eta(a/L) $
$e^{-\frac{u}{a}}$	$\frac{a(1 - e^{(-L/a)})}{L - a(1 - e^{(-L/a)})}$
$e^{-u^2/2a^2}$	$\frac{a(1 - e^{-L^2/2a^2}) + L\sqrt{\pi/2}(Erf(L/\sqrt{2}a) - Erf(+\infty))}{a(1 - e^{-L^2/2a^2}) + L\sqrt{\pi/2}Erf(L/\sqrt{2}a)}$

TAB. 5.2 - Deux exemples de calcul d'erreur relative  $\eta(a/L)$  dans le cadre de covariance  $C_Z(u)$  positive.

Des expressions du tableau ci-dessous et de la figure 5.5. nous dégageons les remarques suivantes :

1/ La validité de l'approximation ne dépend pas de la portée horizontale mais seulement de la portée verticale comparée à la profondeur investiguée.

2/ Dans les deux cas exponentiels et gaussiens, nous avons  $\eta(\frac{a}{L}) < 0$ , ce qui signifie que l'approximation de Rytov surestime la variance des eikonales.

3/ L'erreur relative dépend du type du modèle. Ainsi dans le cas de covariance exponentielle, nous avons à travailler avec des profondeurs telle que:  $a \ll 0.1 \times L$  pour être sûr que nous restons dans le domaine de validité de l'approximation ( $\eta(a/L) \leq 10\%$ ). Dans le cas de covariance gaussienne nous pouvons vérifier que  $\eta(a/L) \leq 20\%$  pour  $a/L \leq 50\%$ .

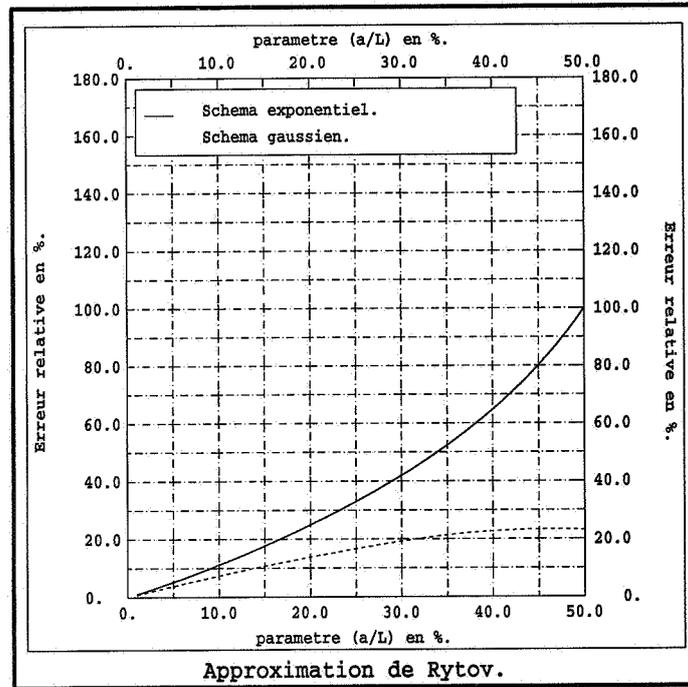


FIG. 5.5 - Tracés des erreurs relatives correspondant aux deux cas de covariances  $C_z$  gaussienne et exponentielle. En ordonnées l'erreur  $\eta(a/L)$  en abscisse le rapport  $a/L$

4/ Lorsque la portée verticale est faible devant la profondeur investiguée ( $a \ll L$ ) l'approximation est bonne, en effet  $\lim_{a/L \rightarrow 0} \eta(a/L) = 0$ .

Les deux dernières remarques sont facilement généralisables pour tous les types de covariances. Nous proposons dans les paragraphes qui vont suivre de généraliser ces remarques.

### 5.4.2 Propriétés de l'approximation de Rytov pour les variances des eikonales

**Proposition 1** Dans le cas de covariance positive et de portée finie  $a \leq L$ , nous avons :  
 (i) l'approximation de Rytov pour la variance des eikonales surestime la vraie valeur

$$\sigma_T^2(L) < \tilde{\sigma}_T^2(L).$$

(ii) Nous avons aussi dans ce cas  $\lim_{a/L \rightarrow 0} \eta(a/L) = 0$ .

Ce résultat est facilement vérifiable dans le cas de covariance factorisée en effet :

$$\begin{aligned}\sigma_T^2(L) - \tilde{\sigma}_T^2(L) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_0^2} \int_0^a (L-u)C_Z(u)du - L \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_0^2} \int_0^a C_Z(u)du \\ &= -\frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_0^2} \int_0^a uC_Z(u)du \leq 0\end{aligned}$$

Si nous avons  $\forall u \in [0, a], 0 \leq uC_Z(u) \leq k \leq a$ , alors :

$$|\eta(a/L)| \leq \frac{ka}{L \int_0^a C_Z(u) - ka} \leq \frac{k}{L\chi_z(a) - k} \leq \frac{a}{L\chi_z(a) - a}$$

**Contrôle du domaine de validité de l'approximation :**

Posons maintenant  $\epsilon$  le maximum d'erreur que l'on voudrait tolérer. Cette contrainte pourrait être exprimée comme suit :

$$\frac{a}{L} \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \leq \chi_z(a)$$

et donc la portée intégrale  $A_z$ , doit obéir à la relation suivante :

$$l_C(\epsilon) = \frac{a^2}{L} \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \leq A_z$$

Ceci veut dire que la portée intégrale doit être supérieure à une valeur critique  $l_C(\epsilon)$ . Plus la tolérance  $\epsilon$  est restrictive, plus le rapport  $a^2/L$  doit être très faible. Autrement dit, le trajet  $L$  doit être supérieur à la portée de la perturbation. De surcroit, la remarque que  $\lim_{a/L \rightarrow 0} \eta(a/L) = 0$ , montre que l'approximation est plus valable en profondeur qu'en surface.

Pour illustrer ceci nous donnons un exemple. Considérons le cas de covariance sphérique. Dans ce cas  $A_z = \frac{3}{8}a$  et donc l'approximation de Rytov ne serait valide avec une tolérance  $\epsilon$  que si le rapport  $a/L$  est tel que :

$$\frac{a}{L} \leq \frac{3}{8} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \tag{5.7}$$

La figure ci-dessous donne quelques ordres de grandeurs de l'amplitude du rapport  $a/L$  pour quelques erreurs. Sur la même figure, nous avons hachuré le domaine de validité de l'approximation de Rytov.

Nous notons enfin que le cas de covariance anisotrope vérifie les mêmes remarques. Nous passons maintenant aux calculs des covariances.

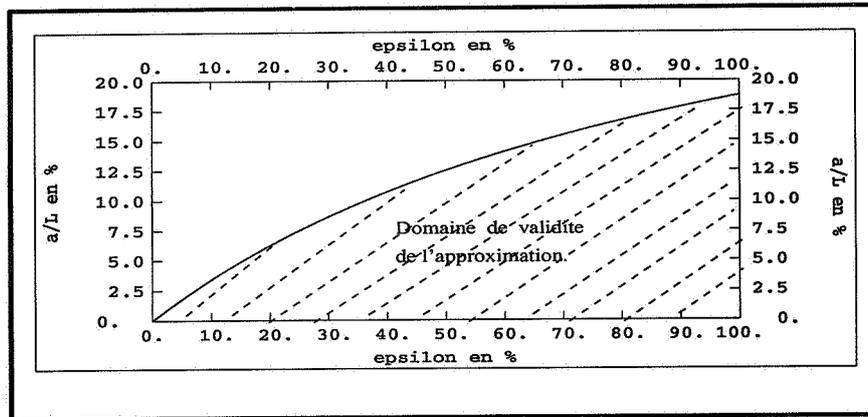


FIG. 5.6 - Cas d'une covariance primaire sphérique. Domaine de validité de l'approximation de Rytov en fonction de l'erreur tolérée.

### 5.4.3 Covariances des eikonales pour les ondes planes

Revenons maintenant au calcul de la covariance entre deux rayons  $r_1$  et  $r_2$  (Cf Fig. 5.7). La formulation exacte est la suivante :

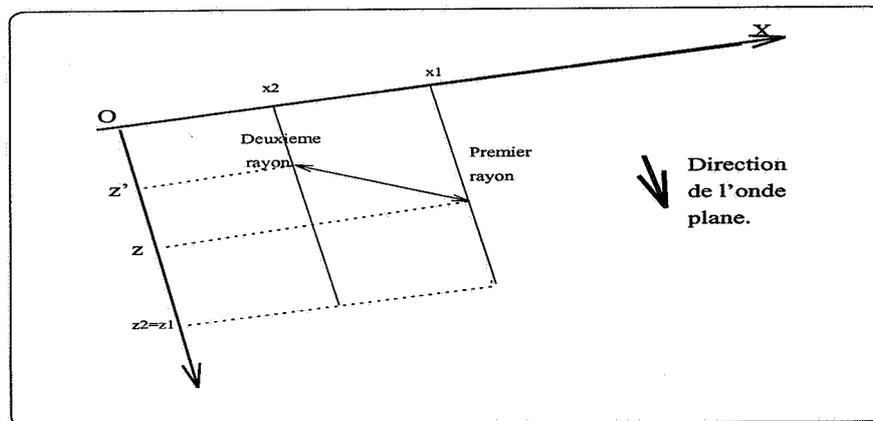


FIG. 5.7 - Quelques notations.

$$\begin{aligned} cov(T(r_1), T(r_2)) &= \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{z_1} dz \int_0^{z_2} C_\epsilon(x_1 - x_2, z - z') dz' \\ &= \frac{1}{4c_0^2} \int_0^\infty C_\epsilon(x_1 - x_2, u) K_{z_1, z_2}(u) du \end{aligned}$$

$$\text{Avec } K_{z_1, z_2}(h) = \int_0^\infty 1_{]0, z_1[}(u) \cdot 1_{]0, z_2[}(u - h) du.$$

Nous nous restreignons au cas où  $r_1$  et  $r_2$  ont même longueur (ie:  $z_1 = z_2$ ).

Dans ce cas, nous donnons au tableau suivant l'expression réelle et approximée des covariances des eikonales des ondes planes. Là aussi nous définissons l'erreur relative:  $\eta^P(x, a/L) = (C_T^P(x, L) - \tilde{C}_T^P(x, L))/C_T^P(x, L)$ .

Covariance	$C_T^P(x, L)$	$C_T^P(\tilde{x}, L)$
$C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_X(x) C_Z(z)$	$C_T^P(x, L) = \sigma_T^2(L) C_X(x)$	$\tilde{C}_T^P(x, L) = \tilde{\sigma}_T^2(L) C_X(x)$
$C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_o(\sqrt{x^2 + z^2})$	$C_T^P(x, L) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^L (L-u) C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du$	$\frac{L\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^\infty C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du$

TAB. 5.3 - Tableau des formules des covariances des eikonales. Nous distinguons toujours le cas de covariances factorisées et le cas de covariances non-factorisées isotropes.

**Proposition 2** Dans le cas de covariance positive et de portée finie  $a \leq L$  nous avons :  
 (i) l'approximation  $\tilde{C}_T^P(x, L)$  surestime la vraie valeur de  $C_T^P(x, L)$ .

(ii)  $\lim_{a/L \rightarrow 0} \eta^P(a/L) = 0$ .

Pour démontrer ces deux propriétés nous distinguons le cas factorisé et le cas non factorisé.

1/ Cas factorisé :

Dans ce cas, il est aisé de vérifier que  $\eta^P(a/L) = \eta(a/L)$ . On en déduit que les deux propriétés ci-dessus restent valables.

2/ Cas non factorisé isotrope :

Dans le cas non factorisé isotrope nous obtenons des expressions plus compliquées pour l'erreur relative. Dans le cas isotrope, si  $x \leq a$  et  $a \leq L$  où  $a$  est la portée de la covariance  $C_o$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\eta^P(x, a/L) &= \frac{-\int_0^\infty u C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du}{\int_0^\infty (L - u) C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du} \\ &= \frac{-\int_0^a u C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du}{L \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) - \int_0^a u C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du}\end{aligned}$$

D'après cette dernière égalité, nous déduisons que l'approximation de Rytov surestime la covariance de l'eikonal. De plus nous avons :

$$|\eta^P(x, a/L)| \leq \frac{a \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du}{L \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) - a \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du}$$

Nous obtenons les mêmes relations que pour les variances :

$$|\eta^P(x, L)| \leq \frac{a}{L - a} \quad \text{et} \quad \lim_{a/L \rightarrow 0} \eta^P(x, a/L) = 0$$

Ainsi, nous remarquons que pour les milieux stratifiés avec un modèle de covariance factorisée la condition *sine qua non* pour la validité de l'approximation de Rytov est que la portée verticale est négligeable devant la profondeur estimée.

### 3/ Extension au cas non factorisé anisotrope

Considérons maintenant un milieu anisotrope de covariance anisotrope avec une stratification horizontale :

$$C_\epsilon(x, z) = C_o(\sqrt{x^2 + \lambda^2 z^2})$$

Où  $\lambda$  étant le rapport d'anisotropie  $\lambda = a/b$  où  $a$  et  $b$  désignent respectivement la portée horizontale et verticale.

Dans ce cas, pour que l'approximation de Rytov soit valable, il suffit que  $b \ll L$ .

En effet, dans ce cas, les expressions de la vraie covariance et de l'approximation sont données comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_T^P(x, L) &= \frac{L\sigma_\epsilon^2}{2\lambda c_o^2} \int_0^\infty C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du \\ C_T^P(x, L) &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\lambda c_o^2} \int_0^{\lambda L} (L - \frac{u}{\lambda}) C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\lambda c_o^2} \int_0^\infty (L - \frac{u}{\lambda}) C_o(\sqrt{x^2 + u^2}) du \quad (\text{si } b \leq L).\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'expression de l'erreur relative. Dans le cas où  $a \leq L$  nous avons :

$$\begin{aligned}\eta^P(x, a/L) &= \frac{\int_0^a v C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) dv}{\lambda L \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) - \int_0^a v C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) dv} \\ &= \frac{a \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) dv}{\lambda L \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) - a \int_0^a C_o(\sqrt{x^2 + v^2}) dv}\end{aligned}$$

Dans ce cas  $\eta^P$  dépend de  $b/L$ . Nous avons alors :

$$|\eta(x, b/L)| \leq \frac{1}{L/b - 1}, \quad \lim_{b/L \rightarrow 0} \eta(x, b/L) = 0$$

#### 5.4.4 Covariances des eikonaux pour les ondes sphériques

Dans cette section nous allons voir le cas d'ondes sphériques. Soit alors l'erreur relative :

$$\eta^{Sph}(x, a/L) = \frac{C_T^{Sph}(x, L) - \tilde{C}_T^{Sph}(x, L)}{C_T^{Sph}(x, L)}$$

Puisque nous avons  $C_T^{Sph}(x, L) = \frac{1}{x} \int_0^x C_T^P(y, L) dy$ , et comme  $\tilde{C}_T^{Sph}(x, L) = \frac{1}{x} \int_0^x \tilde{C}_T^P(y, L) dy$ , l'erreur  $\eta^{Sph}$  peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\eta^{Sph}(x, a/L) &= \frac{\int_0^x [C_T^P(y, L) - \tilde{C}_T^P(y, L)] dy}{\int_0^x C_T^P(y, L) dy} \\ &= \frac{\int_0^x \eta^P(y, L) C_T^P(y, L) dy}{\int_0^x C_T^P(y, L) dy}\end{aligned}$$

Comme  $\eta^P(y, a/L) \leq 0$  ( $\forall y \in [0, x]$ ), nous avons  $\eta^{Sph}(x, a/L) \leq 0$  pour n'importe quel type de covariance. De surcroît, il est simple de montrer pour le cas factorisé que :

$$\forall x \in [0, a], \eta^{Sph}(x, a/L) = \eta^P(a/L) = \eta(a/L)$$

Considérons maintenant le cas d'une stratification horizontale avec une covariance non factorisée avec un coefficient d'anisotropie  $\lambda$  tel que  $\lambda = a/b \ll L$ . Dans ce cas, nous avons :

$$|\eta^P(x, b/L)| \leq \max_{y \in [0, x]} |\eta(y, b/L)| \leq \frac{1}{L/b - 1} \implies \lim_{b/L \rightarrow 0} \eta^{Sph}(x, b/L) = 0$$

Sur ce dernier résultat, nous mettons fin à ce chapitre dans lequel nous avons introduit des notions importantes pour aborder le problème d'inversion en sismique. ■

## Chapitre 6

# Expérimentations - Inversion sismique faible

Ce chapitre est fondamental pour les applications pratiques, il donne la définition de l'inversion sismique faible qui est utilisée en amont de la simulation des erreurs de migration pour reconnaître la variabilité latérale du milieu.

La section 6.1 traite le problème d'inversion sismique faible. Partant des expressions des covariances des eikonales dont nous avons longuement discutées au chapitre précédent, nous formulons les variances des temps d'arrivée. A partir de ces expressions, il est possible dans certains cas de remonter à la covariance latérale du milieu. Si cette inversion de la covariance s'avère parfois pénible, il est cependant toujours possible de retrouver une bonne approximation de la portée latérale du milieu grâce à la propriété d'indépendance de rapport standardisé de variance des temps d'arrivée.

Les sections 2 à 6 montrent des exemples expérimentaux validant la méthode proposée. Ces expériences sont effectuées sur des données synthétiques.

Enfin, puisque l'inversion sismique faible ne donne aucune information sur la variabilité verticale du milieu, nous reportons au chapitre suivant le problème d'extraction du facteur d'anisotropie et la généralisation de la méthode pour des milieux légèrement déformés et le modèle multicouches.

### 6.1 Calcul de la variance des temps de première arrivée

Nous nous intéressons au temps de première arrivée au point  $P$  d'un rayon émis au point  $O$  et réfléchi sur le réflecteur  $R$ . Si l'on considère le milieu symétrisé par rapport au réflecteur, le temps de parcours considéré est le même que le temps de  $O$  à  $P'$ .

Dans ce milieu, le temps considéré est celui de la géodésique joignant  $O$  à  $P'$ , dont la variance s'exprime en fonction de la covariance  $\tilde{C}$  du milieu par :

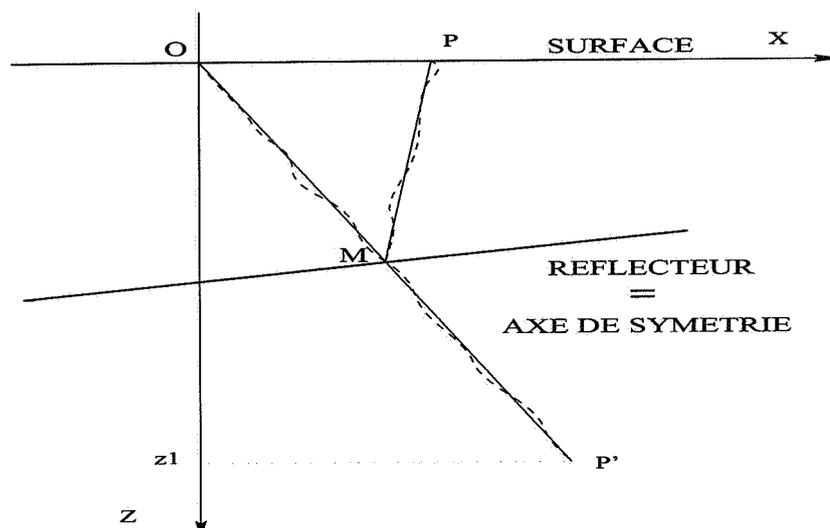


FIG. 6.1 - Notations

$$\text{var}[T(P)] = \text{var}[T(P')] = \int_0^{z_1} \int_0^{z_1} \tilde{C}(x(u) - x(v), u - v) du dv$$

Mais compte-tenu de la forme de  $\tilde{C}$  et du fait que le point correspond à la réflexion d'un rayon se propageant dans un milieu à vitesse constante, le calcul de cette variance se ramène au calcul suivant :

$$\text{Var}[T(P)] = \text{var}[T(O, M)] + \text{var}[T(M, P)] + 2\text{cov}(T(O, M), T(M, P))$$

Dans le milieu initial comme si ces temps correspondaient au premier ordre, on pouvait calculer la variance de  $T(P)$  en assimilant le trajet du rayon au trajet "moyen". Dans le cas d'un réflecteur plan le point  $M$  est le point milieu commun.

## 6.2 Inversion sismique faible

Comme nous l'avons annoncé à plusieurs occasions, nous entendons par inversion sismique faible une méthode pour l'extraction de quelques paramètres statistiques du champ des vitesses à partir des temps d'arrivée. Commençons par introduire d'abord les notations qui nous permettront d'explicitier le formalisme de cette inversion.

Comme le montre la figure 6.2, nous considérons une source  $S$ , de coordonnées  $(0, 0)$ , à partir de laquelle nous faisons propager une onde qui est réfléchi au point  $M(\mathbf{r}_1)$  localisé sur un réflecteur horizontal<sup>1</sup> situé à une profondeur  $L$ . Le signal réfléchi est enregistré au point  $x$  situé en surface.

1. En pratique, nous pouvons faire l'approximation de réflecteur horizontal lorsque les fluctuations temps dues à la forme de celui-ci sont très faibles par rapport aux fluctuations dues au champ de vitesses. Nous dirons alors qu'il s'agit d'un réflecteur quasi-horizontale.

Le temps de parcours du trajet est alors  $T(x) = T(\mathbf{r}_1) + T(\mathbf{r}_2)$ , où  $T(\mathbf{r}_1)$  et  $T(\mathbf{r}_2)$  sont respectivement les temps effectués pour parcourir les trajets descendants  $\mathbf{r}_1$  et ascendants  $\mathbf{r}_2$ .

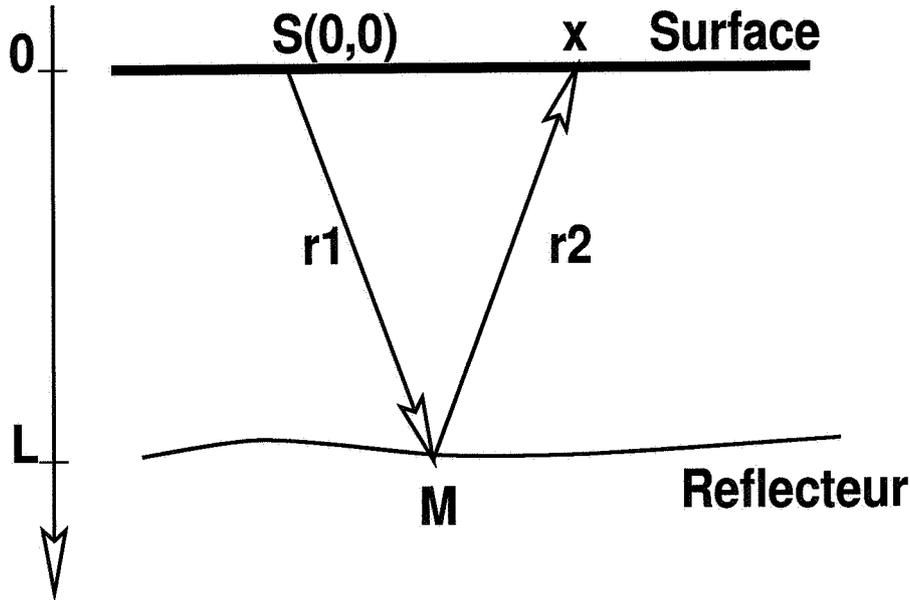


FIG. 6.2 - Notations concernant la variance des temps d'arrivée.

Dans le cadre de ces notations, la variance des temps d'arrivée admet l'expression simple qui suit :

$$\begin{aligned} \text{var}[T(x)] &= \text{var}[T(\mathbf{r}_1)] + \text{var}[T(\mathbf{r}_2)] + 2\text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) \\ &= 2\sigma_T^2(L) + 2C_T^{Sph}(x, L) \end{aligned} \quad (6.1)$$

### 6.2.1 Quelques propriétés de la variance des temps d'arrivée

A partir de l'expression 6.1, nous proposons d'étudier la variance des temps d'arrivée et de l'utiliser pour extraire les informations sur la perturbation du champ de vitesses.

En effet cette variance vérifie quelques propriétés que l'on énonce dans la proposition suivante :

**Proposition 3** *Dans le cas d'un champ de vitesses stationnaire et d'un réflecteur quasi-horizontale, le rapport d'inversion défini par  $\text{var}[T(a)]/\text{var}[T(0)]$  ne dépend pas de la portée  $a$ , mais seulement du type de la covariance du milieu.*

Pour prouver cette propriété, nous distinguons entre les deux cas habituels de covariance factorisée et non factorisée :

1- Cas de covariance factorisée:

Dans le cas d'une covariance factorisée  $C_\epsilon(x, z) = \sigma_\epsilon^2 C_X(x)C_Z(z)$ . Une application simple de la formule 6.1 montre que:

$$var[T_a] = \frac{1 + \chi(a)}{1 + \chi(0)} var[T_0]$$

Or comme  $\chi(0) = C_X(0) = 1$  et comme  $\chi(a) = \frac{1}{a} \int_0^a C_X(u)du = \int_0^1 C_X(av)dv$  ne dépend pas de la portée  $a$  mais seulement du type de la covariance  $C_X()$  le rapport suivant ne dépend que du type de la covariance latérale  $C_X()$ .

$$\frac{var[T_a]}{var[T_0]} = \frac{1 + \chi(a)}{2}$$

2- Cas de covariance non factorisée:

Dans le cas de covariance type anisotropie géométrique  $\lambda$ , et de direction  $\theta$ . Si la covariance s'écrit :

$$C_\epsilon(x, y) = C_o(\sqrt{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2 + (-x \lambda \sin \theta + y \lambda \cos \theta)^2})$$

Avec  $C_o$  covariance isotrope de portée  $a$ , alors la covariance des eikonales pour les ondes sphériques (Cf Annexe B) peut s'écrire :

$$C_T^{Sph}(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^{\sqrt{d}} d\tau \int_\tau^\infty \frac{xvC_o(xv)}{\lambda\sqrt{d}\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv$$

où  $e = \sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta$  et  $d = \cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta$ . Dans ce cas, le rapport entre variances est :

$$\frac{var[T(a)]}{var[T(0)]} = 0.5 + \frac{\sqrt{e} \int_0^{\sqrt{d}} d\tau \int_\tau^\infty \frac{vC_o(av)}{\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv}{\lambda\sqrt{d} \int_0^\infty C_o(av)dv}$$

Si nous écrivons que  $C_o(ax) = \tilde{C}_o(x)$  où  $\tilde{C}_o$  étant une covariance du même type que  $C_o$  mais de portée unité. Alors si l'on remplace  $C_o$  par  $\tilde{C}_o$  dans l'expression ci-dessus, nous remarquons que le rapport  $var[T(a)]/var[T(0)]$  ne dépend pas de la portée mais seulement du type de la covariance  $\tilde{C}_o$ .

### 6.3 Application à l'inversion de la portée

Une application directe des propriétés que nous venons de voir est de retrouver la portée du champ des vitesses à partir des statistiques sur le temps. Une méthode simple pour retrouver la portée du milieu est décrite dans la figure 6.3:

Si l'on a une connaissance *a priori* du type de la covariance du milieu, on peut alors à ce moment se référer au rapport d'inversion "K" calculé théoriquement pour le type de covariance choisi. La portée est alors l'abscisse du point *I* de la courbe  $y(x) = \text{var}[T(x)]/\text{var}[T_0]$  (calculée expérimentalement) d'ordonnée K.

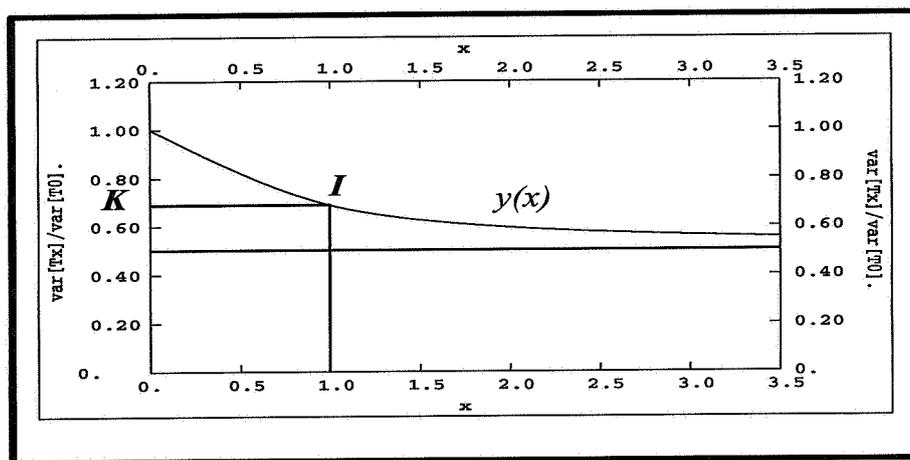


FIG. 6.3 - Exemple d'inversion de la portée latérale dans un cas de covariance sphérique de portée unité.

Ci-dessous (Cf Tableau 6.1), nous donnons quelques valeurs du rapport d'inversion. A ce stade plusieurs questions sont intéressantes: y'a-t-il lieu de comparaison entre covariances factorisées et non factorisées? Quelle erreur commet-on si l'on se trompe dans le choix d'hypothèse sur le modèle de covariance?

Covariance $C_X(x)$	ratio $K = \text{var}[T_a]/\text{var}[T_0]$
exponentielle	0.820
Sphérique	0.688
gaussienne	0.870
cubique	0.685
Covariance $C_o$	ratio $K = \text{var}[T_a]/\text{var}[T_0]$
Exponentiel	0.828
Spherique	0.709
cubique	0.746

TAB. 6.1 - Rapport d'inversion de la portée *a*. Les covariances  $C_X()$ , sont les covariances latérales dans le cas de schémas factorisés. Les covariance  $C_o()$  sont les covariances non factorisées isotropes. (Ces rapports sont arrondis à trois chiffres après la virgule)

S'agissant de la comparaison entre modèles de covariances, on peut remarquer que les rapports d'inversion sont proches les uns des autres. Comme nous le verrons au paragraphe 6.7.3 des écarts de 2% peuvent générer au maximum des erreurs de l'ordre de 10%.

## 6.4 Application à l'inversion de la covariance

D'après la formule 6.1 les variances des temps d'arrivée s'expriment sous forme intégrale à partir de la covariance de vitesses. Il est alors simple d'extraire complètement la covariance du milieu par inversion de l'expression intégrale.

Une telle opération peut être instable. L'étude de cette instabilité ne fût pas la préoccupation de premier degré, nous nous sommes simplement limités à vérifier que la méthode marche. Là encore nous considérons les deux cas habituels :

### 1- Cas de covariance factorisée

L'extraction de la covariance latérale " $C_X(x)$ " peut s'obtenir par simple dérivation de  $x\chi(x) = \int_0^x C_X(u)du$ . A partir de la relation 6.1 nous pouvons déduire :

$$C_X(x) = \frac{d}{dx} \left\{ x \frac{\text{var}[T_x]}{2\sigma_T^2(L)} - x \right\} \quad (6.2)$$

L'inversion est donc facilement réalisable numériquement et à partir des données expérimentales d'avant stack.

### 2 - Cas de covariance non factorisée

Dans le cas d'une stratification quasi-plane et une covariance non factorisée  $C_o$  admettant une portée finie, nous avons (Cf Annexe B):

$$\frac{\text{var}[T(ax)]}{\text{var}[T0]} = \begin{cases} 0.5 + \frac{\frac{\pi}{2x} \int_0^x uC_o(au)du + \frac{1}{x} \int_x^1 uC_o(au) \text{Arcsin}(x/u)du}{\int_0^1 C_o(au)du} & \text{Si } x \leq 1 \\ 0.5 + \frac{\pi \frac{1}{x} \int_0^1 uC_o(au)du}{4 \int_0^1 C_o(au)du} & \text{Si } 1 \leq x \end{cases} \quad (6.3)$$

Regardons de plus près l'expression ci-dessus, nous remarquons alors que la portée verticale n'intervient pas. Tout se passe comme si l'information sur la variabilité verticale a disparu. D'autre part, l'inversion de cette expression n'est pas simple. On propose alors d'ajuster le rapport standardisé à l'aide de la formule donnée par le système, en injectant à chaque fois un type de covariance dans l'intégrale. Un tel ajustement donne une idée sur le type de covariance qui serait acceptable comme modèle du milieu.

La figure 6.4 montre le tracé de courbes des rapports de variances pour plusieurs schémas de covariances factorisées et non-factorisées.

Les modèles à portée non finie (*Gaussiens, exponentiels*) présentent une décroissance moins rapide que les modèles à portée finie (*Cubique sphérique*). Ceci permet de faire une distinction visuelle.

D'autre part, comme le prévoit la formule 6.1, tous ces modèles ont pour asymptote (pour les distances *source-récepteur* plus élevées que la portée) la valeur 0.5, ceci permet de voir dans l'expérience que l'on reste conforme ou non à la 'théorie'.

Quant au comportement à l'origine, les figures montrent que les modèles présentent les mêmes allures et il est difficile de distinguer une différence à ce niveau.

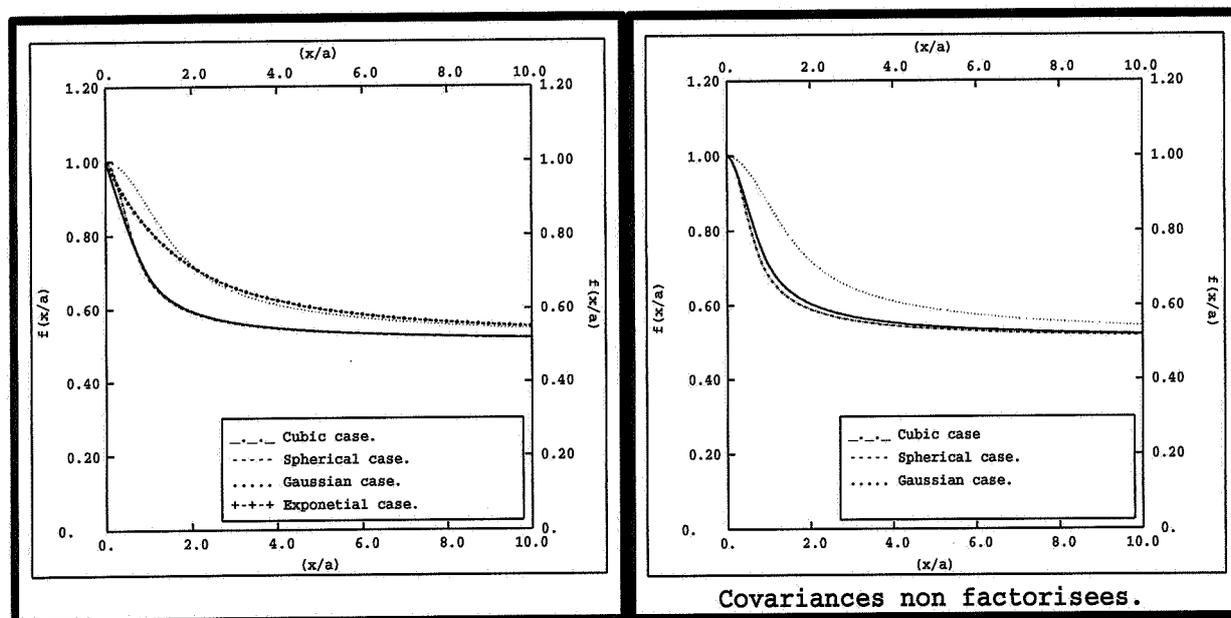


FIG. 6.4 - De gauche à droite: (a) courbes  $var[T(ax)]/var[T0]$  dans le cas de covariances factorisées. (b) courbe  $var[T(ax)]/var[T0]$  dans le cas de covariances non factorisées.

## 6.5 Validation par expériences sur des données synthétiques :

Maintenant, nous allons valider les méthodes d'inversion proposées sur des jeux de données synthétiques. Par données synthétiques nous entendons les temps obtenus par simulations numériques de propagation d'ondes dans des milieux hétérogènes. Ces milieux

stationnaires et de stratification quasi-horizontale, sont simulés en se donnant la moyenne et la covariance du milieu.

## 6.6 Mise en œuvre

Commençons par une brève description de la mise en œuvre expérimentale. Celle-ci comprend les deux étapes suivantes :

- La simulation des milieux hétérogènes.
- Puis la simulation de la propagation des ondes dans les milieux pré-définis.

### 6.6.1 Simulations des milieux aléatoires

Comme peut le suggérer n'importe quel ouvrage traitant le sujet, nous avons le choix entre plusieurs méthodes de simulation. Nous avons choisi les méthodes séquentielles pour la simulation des modèles factorisés et bandes tournantes pour la simulation des modèles possédant une anisotropie géométrique. Le champ de vitesses est discrétisé sur un réseau maillé. Ainsi le milieu physique réel se trouve remplacé par un milieu physique virtuel constitué de mailles à vitesses constantes.

Naturellement, nous allons propager des ondes au sein de ces milieux. Or la précision de l'approximation, adoptée pour la propagation, va dépendre du pas choisi pour la discrétisation du milieu. En pratique les signaux considérés sont à bande limitée et le pas de la maille doit être choisi en fonction de la longueur d'onde du signal en respectant le théorème d'échantillonnage de Shannon.

### 6.6.2 Propagation des ondes en milieux hétérogènes

Pour faire propager les ondes en milieux hétérogènes, nous avons utilisé un code aux différences finies dont l'algorithme<sup>2</sup> est dérivé d'une méthode de Vidal [31]. L'intérêt de ce code est qu'il est plus rapide que les méthodes basées sur les tracés de rayons, ce qui constitue pour nous un avantage, de point de vue temps de calculs, lors des tests de validations.

Contrairement à la méthode de Vidal [31], Podvin [19] rajoute une contrainte "temps de première arrivée" dans son calcul aux différences finies<sup>3</sup>. En certains points, les noeuds de grille de discrétisation, nous disposons de plusieurs estimateurs physiquement acceptables qui correspondent à plusieurs fronts d'ondes entre lesquels nous choisissons le plus court.

---

2. Il s'agit d'un algorithme aux différences finies développé au Centre de Géophysique de l'ENSMP, par P.Podvin .

3. De fait l'équation eikonale ne donne pas seulement le temps de première arrivée. Celle-ci décrit en quelque sorte tous les rayons transmis en chaque point.

Le calcul est basé sur une approximation locale des fronts d'ondes plans. D'après le principe de Huygens, nous savons que les points du premier entourage du point N se comportent comme des sources lorsque le signal les atteint. Il s'agit donc d'évaluer tous les temps d'arrivée possibles et de garder pour le point N (Cf figure 6.5) le temps le plus court. Ces temps tiennent en compte de plusieurs phénomènes physiques :

**Transmission 2-D :** ce cas suppose qu'il existe un rayon qui atteint le point P à partir de l'interface MN. Cette condition appelée aussi condition d'éclairement qui est formulée par l'expression :

$$t_{P1} = t_N + \sqrt{(hs)^2 - (t_N - t_M)^2}$$

où  $h$  est la taille de la maille,  $s$  est la lenteur et  $t_x$  est le temps d'arrivée au point  $x$ .

**Transmission 1-D :** la transmission 2D ne tient pas compte du phénomène de génération d'onde d'interface entre deux cellules contigües lorsque la lenteur  $s'$  est inférieure à la lenteur  $s$ . Cela donne une autre estimation du temps :

$$t_{P2} = t_N + h \min(s, s')$$

**Front d'onde diffracté :** Considérons une zone d'ombre au point M. Ce qui signifie que P ne peut être atteint par un rayon en provenance de M, ce qui donne une troisième estimation du temps :

$$t_{P3} = t_N + h.s\sqrt{2}$$

Comme le point P est entouré de huit sources fictives dans le cas 2D, En raison des symétries du problème, nous avons 16 estimations du temps (*pour le cas 3D, nous avons 170 estimations du temps [19]*). On choisit alors le minimum de ces estimations, pour chaque point de la grille.

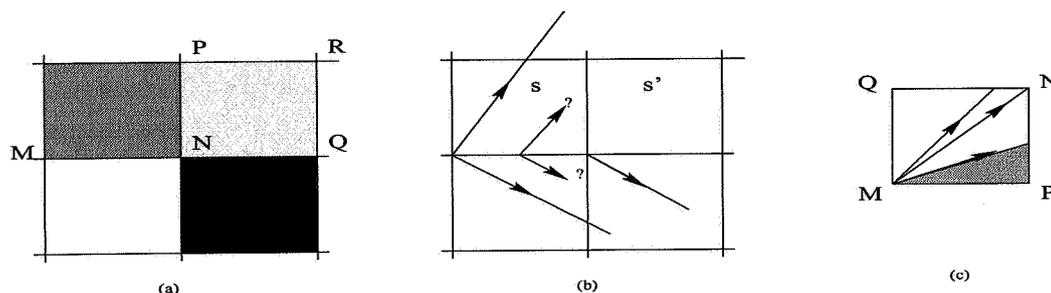


FIG. 6.5 - Le temps d'arrivée au point P est estimé par trois voies indépendantes auxquelles s'ajoute l'effet de symétrie lié au fait que le Point P est entouré de huit sources fictives de la première auréole.

## 6.7 Résultats des tests - commentaires

Dans ce paragraphe figurent quelques exemples de milieux testés. Les résultats, montrés ici, concernent les deux points suivants que l'on va développer un à un :

- L'influence du nombre de données sur la convergence des résultats.
- Exemples d'inversions de la portée et de la covariance.

### 6.7.1 Types de milieux testés

Nous considérons ici des milieux stationnaires avec deux schémas de covariances sphérique et gaussienne. Le choix de ces deux schémas se justifie par le fait de vouloir examiner deux modèles qui diffèrent par leur comportement au voisinage de l'origine et la nature finie ou non de leur portée. Pour ces schémas, nous faisons varier le rapport d'anisotropie, nous faisons aussi varier faiblement le pendage (moins de 10%).

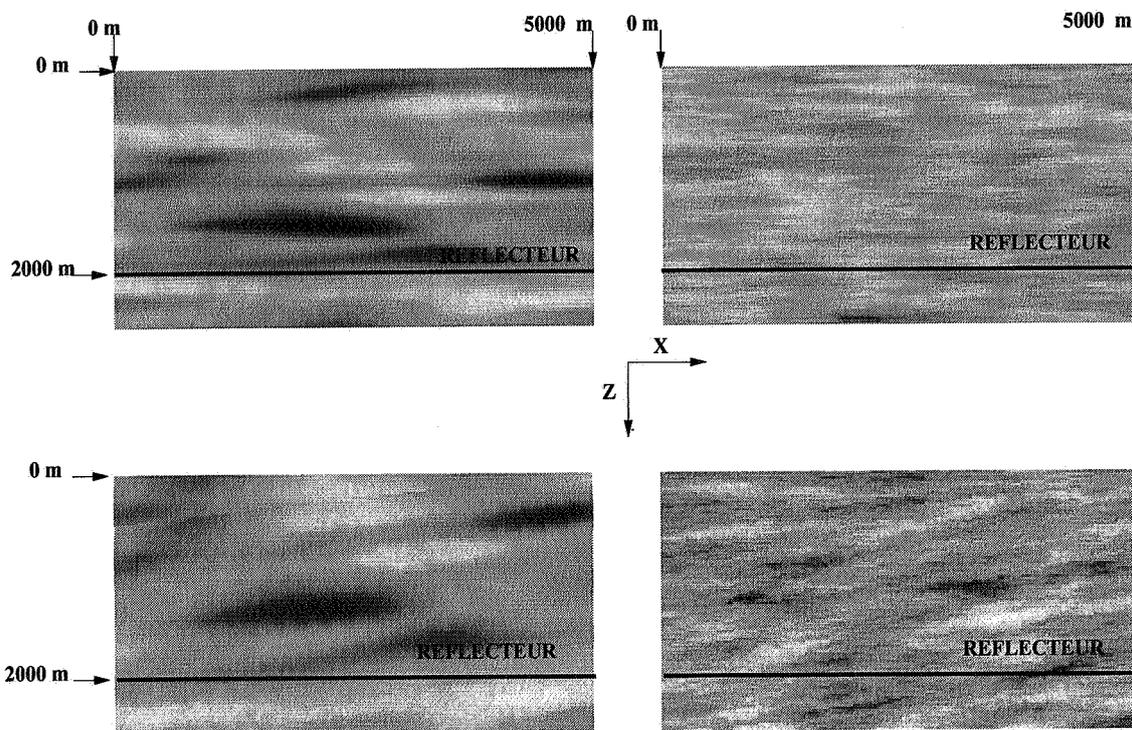


FIG. 6.6 - Quelques exemples de milieux testés : De gauche à droite, puis de haut en bas (a) Gaussien anisotrope  $a = 1000m$  et  $b = 100m$ , (b) Sphérique anisotrope  $a = 1000m$  et  $b = 100m$ , (c) Gaussien anisotrope  $a = 1000m$  et  $b = 100m$  pendage  $\tan\theta = 0.10$ , (d) Sphérique anisotrope  $a = 1000m$  et  $b = 100m$ , pendage  $\tan\theta = 0.10$ .

### 6.7.2 Convergence de la variance expérimentale

Le calcul des variances expérimentales des temps d'arrivée, devrait se faire sur un nombre suffisant d'échantillons de manière à assurer la convergence des résultats. A ce sujet, nous avons réalisé les tests expérimentaux suivants :

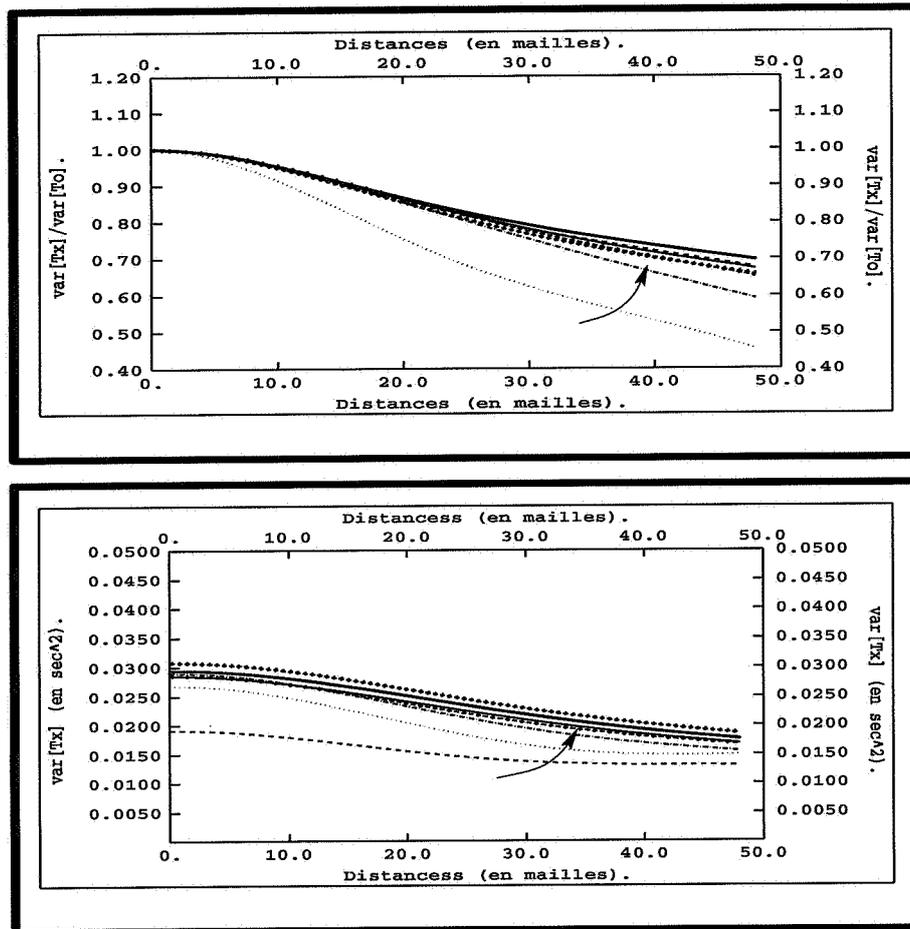


FIG. 6.7 - De haut en bas convergence des courbes expérimentales (a) Courbes normalisées  $y(x) = var[Tx]/var[T0]$ . (b) courbes  $var[Tx]$ . Il y a sept courbes du trait fin (correspondant à 200 points) jusqu'au trait foncé (correspondant à 1400 échantillons).

La variance des temps d'arrivée est calculée sur plus de 7 échantillons de tailles allant de 200 à plus de 1000 données. Nous remarquons alors qu'au delà de 1000 données, les courbes expérimentales de  $var[T(ax)]$  (Cf fig 6.7) convergent. Dans la suite, pour effectuer correctement l'analyse (*inversions de la portée et de la covariance*), nous décidons de travailler sur des échantillons de 1000 données.

### 6.7.3 Inversion de la portée

Comme expliqué au paragraphe 6.2, la figure 6.8 montre un exemple d'inversion de la portée à partir des courbes normalisées de variance des temps d'arrivée.

Comme les rapports d'inversion sont proches les uns des autres, si l'on veut une estimation rapide de la portée, on peut adopter le chiffre 0.8 qui est la moyenne de ces rapports. Pour affiner cette estimation il faudra faire des hypothèses sur la covariance du milieu en question.

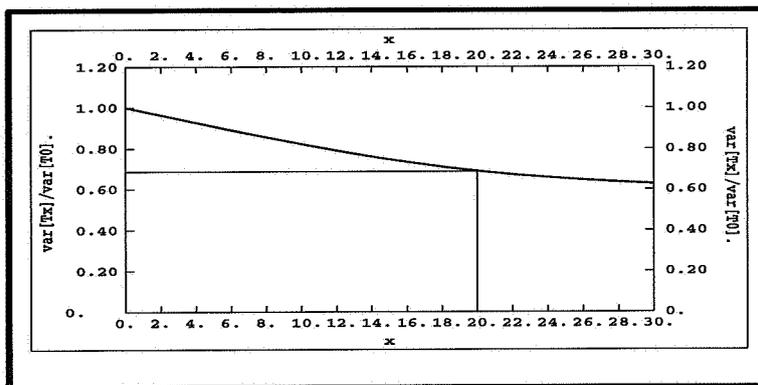


FIG. 6.8 - exemple d'inversion de la portée

Les rapports varient de 0.69 à 0.82 selon les schémas considérés, et une question importante que l'on peut se poser est : *Comment une erreur sur le choix du rapport d'inversion peut se répercuter sur la détermination de la portée ?* . Il suffit de voir la variation du rapport  $\Delta a/a$  , lorsque l'on fait varier légèrement  $K$  , au voisinage de sa valeur théorique pour un schéma donné.

Pour discuter de ces derniers, nous nous référons à quelques résultats résumés au tableau ci-dessous pour différents schémas : pour une erreur relative  $\delta a/a$  fixée, nous donnons l'erreur correspondante sur le rapport d'inversion  $K$ . Autrement dit nous donnons l'erreur sur le rapport d'inversion  $K$  qui engendre une erreur ' $\delta a/a$ ' pré-fixée.

Type de la covariance	$\delta a/a = -0.10$	$\delta a/a = -0.05$	$\delta a/a = -0.01$	$\delta a/a = 0.05$	$\delta a/a = 0.10$
sphérique	0.020	0.010	0.001	-0.009	-0.017
Cubique	0.020	0.010	0.001	-0.009	-0.016
Gaussien	0.019	0.009	0.002	-0.009	-0.018
Exponentiel	0.013	0.008	0.002	-0.006	-0.012

Type de la covariance	$\delta a/a = -0.10$	$\delta a/a = -0.05$	$\delta a/a = -0.01$	$\delta a/a = 0.05$	$\delta a/a = 0.10$
sphérique	0.023	0.011	0.002	-0.009	-0.018
Cubique	0.020	0.010	0.002	-0.008	-0.015

TAB. 6.2 - De haut en bas (a) Cas de covariances factorisées (b) Cas de covariances non factorisées à portée finie.

Nous pouvons alors constater que :

- Le rapport  $\delta a/a$  ne dépasse pas les 10% lorsque l'on commet une erreur de moins de 2% dans le choix du rapport d'inversion K.

- Parmi les modèles proposés, les modèles les plus sensibles à cette opération d'inversion sont les modèles exponentiel et sphérique.

### 6.7.4 Inversion de la covariance

Là aussi, il a été prévu une distinction entre le cas de covariance factorisé et le cas non factorisé.

#### Cas factorisé :

La figure 6.9 montre quatre exemples d'inversion a,b,c et d. Les propriétés relatives à chaque covariance ainsi que le nombre de traces sur lequel l'analyse a été faite, sont résumées au tableau suivant.

	$\sigma_v^2$ en $(m/s)^2$	Type de $C_x()$	Nombre de traces
a	10000	Sph(10)	800
b	10000	Sph(10)	1200
c	10000	Gauss(10)	800
d	10000	Gauss(10)	1200

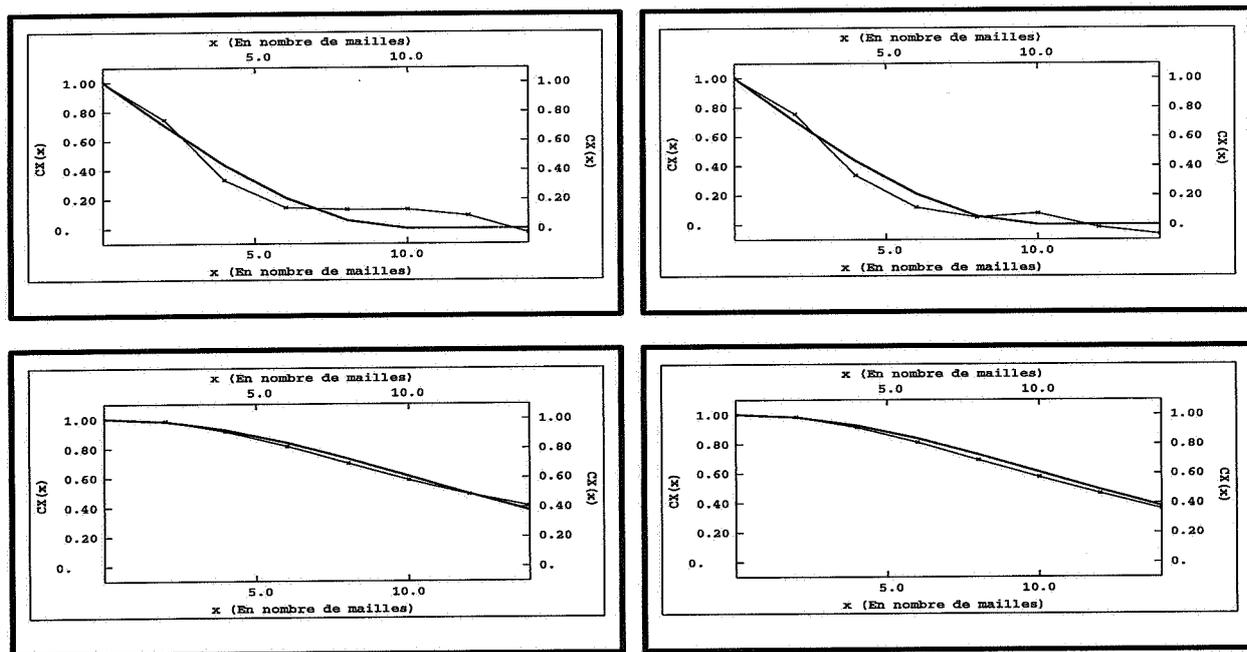


FIG. 6.9 - Exemples d'inversion de la covariance. De haut en bas (a et b) cas sphérique. (c et d) cas gaussien. En trait lisse: covariance théorique du milieu testé. En trait brisé: covariance obtenue par inversion en dérivant numériquement.

- Avant d'introduire un critère quantitatif de la qualité de l'inversion, nous pouvons remarquer visuellement que la méthode peut restituer assez fidèlement le comportement de la covariance. Néanmoins, la question qui se pose, est la stabilité de l'inversion. La dérivation est une opération instable, et le choix de travailler sur des données synthétiques élimine un certain nombre de problèmes que l'on risque de trouver en manipulant des données réelles.

- Pour juger de l'efficacité de l'inversion, nous pouvons utiliser l'erreur quadratique moyenne sur le champ d'inversion. Celle-ci est définie par :

$$\|C_R - C_I\|^2 = \frac{1}{\text{mes}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} (C_R(h) - C_I(h))^2 dh$$

Où  $C_R$  est la covariance réelle,  $C_I$  est la covariance obtenue par inversion.  $\mathcal{D}$  le champ d'inversion, par exemple l'intervalle  $[0, d_{max}]$ . Cette erreur est calculée numériquement selon que l'on s'intéresse aux faibles ou aux grandes distances. On pourrait choisir des fonctions de pondération pour celle-ci.

Les tableaux 6.3 et 6.4, montrent des valeurs d'erreurs quadratiques moyennes pour les deux exemples de covariances sphérique et gaussienne montrés ci-dessus.

$d_{max}$ en mailles	4.	8.	12.	16.
a	0.008	0.009	0.011	0.028
b	0.010	0.007	0.005	0.040

TAB. 6.3 - Cas sphérique : Erreur quadratique pour différentes étendues du champ ( $d_{max}$ ).

$d_{max}$ en mailles	4.	8.	12.	16.
c	0.0002	0.0007	0.0006	0.0024
d	0.0003	0.0011	0.0011	0.0010

TAB. 6.4 - Cas gaussien : Erreur quadratique pour différentes étendues du champ ( $d_{max}$ ).

Les comparaisons entre les deux cas (a et b) puis (c et d) pour différentes valeurs de traces, montrent que plus le nombre de traces augmente plus l'inversion est meilleure. Pour les faibles distances la valeur de l'erreur est faible. Comparée au cas gaussien l'inversion dans le cas sphérique est moins bonne.

**Remarque :** Ce critère teste la qualité de l'inversion lorsque l'on connaît la covariance du milieu mais en pratique nous n'avons aucun moyen pour contrôler cette inversion, le problème que l'on risque de trouver en manipulant des données réelles et celui des imprécisions qui pourraient être dues aux bruits de mesures par exemple.

**Cas non factorisé :**

Dans le cas non factorisé on se limite à modéliser l'expression intégrale du rapport  $var[Tx]/var[T0]$  donnée par la formule 6.3. Ci-dessous, nous donnons deux exemples d'inversion :

- Covariance sphérique de variance  $10000.(m/s)^2$  et de portée 20 mailles
- Covariance Gaussienne de variance  $10000.(m/s)^2$  et de portée 20 mailles

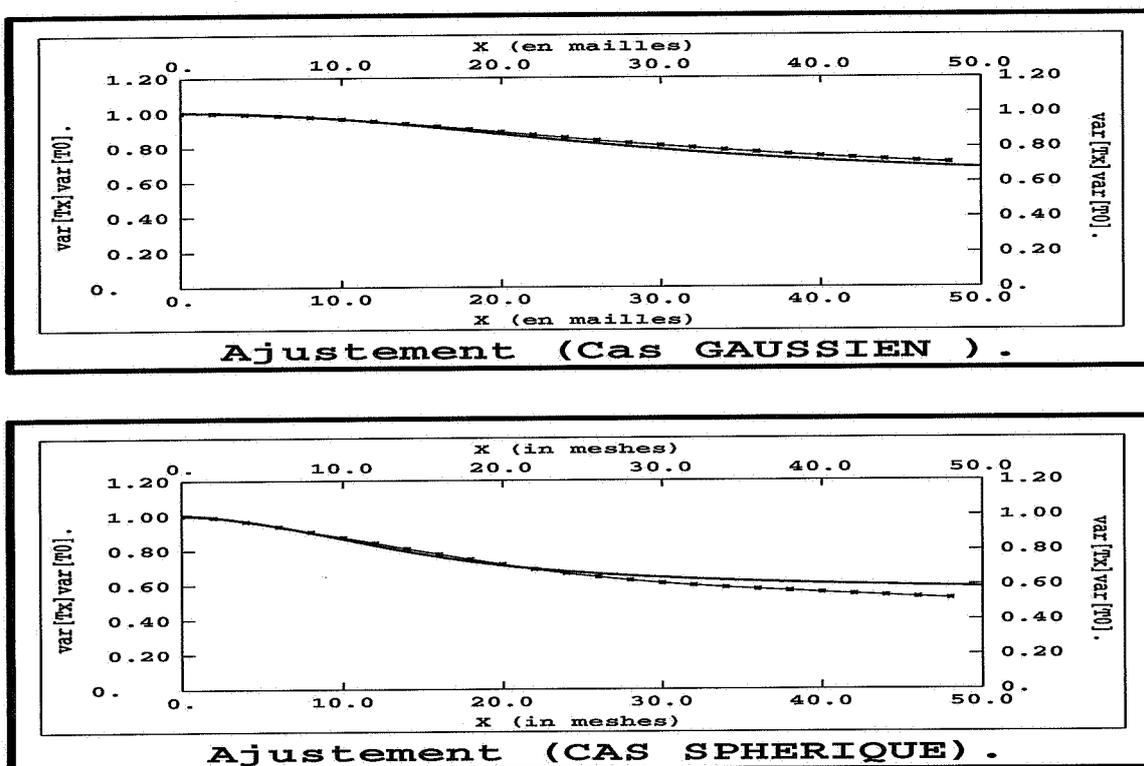


FIG. 6.10 - Ajustement des courbes  $var[T(ax)]/var[T0]$  , De haut en bas : (a) Cas gaussien (b) cas Sphérique

Contrairement au cas factorisé la dérivation de l'expression intégrale ne donne pas exactement la covariance du milieu.

**6.7.5 Récapitulation des résultats**

Pour clore ce chapitre, où l'on montre la première série de tests, nous en résumons les résultats importants :

1/ Nous avons montré le formalisme général des inversions sismiques faibles bâti sur l'étude statistique des réflexions des eikonales. Celle-ci donne des résultats satisfaisants dans le cas de milieux stationnaires avec une stratification et un réflecteur quasi-horizontaux.

Cependant, contrairement au cas factorisé où il est possible de remonter à la covariance latérale, dans le cas non factorisé nous ne pouvons que vérifier si l'hypothèse faite sur le choix de modèle de vitesse est acceptable ou non.

2/ Concernant l'inversion de la portée il est possible de restituer celle ci en faisant une hypothèse sur la covariance en utilisant le rapport d'inversion que nous avons défini à cet effet. Si l'on veut une inversion précise, nous devons avoir une idée correcte sur le type de covariance du milieu pour utiliser le rapport adéquat, par contre si l'on souhaite effectuer une analyse rapide quitte à la payer avec une imprécision qui peut atteindre jusqu'à 20 %, nous pouvons toujours supposer que le rapport d'inversion est de l'ordre de 0.8,

Ces méthodes d'inversion ont la limitation majeure que l'on cite ci-dessous :

L'inversion ne restitue pas la variabilité verticale du champ de vitesse. Ce problème est dû à la nature elle même des données qui ne reflètent que la variabilité horizontale. Pour surmonter ce problème nous pouvons envisager le recours à d'autres types de données.

- Examiner les réflexions partielles contenues dans la section sismique (Cf fig 6.11.b).
- Effectuer la même méthode avec les données sismiques de puits (Cf fig 6.11.a) . (*Le rôle des axes se trouve alors inversé*).

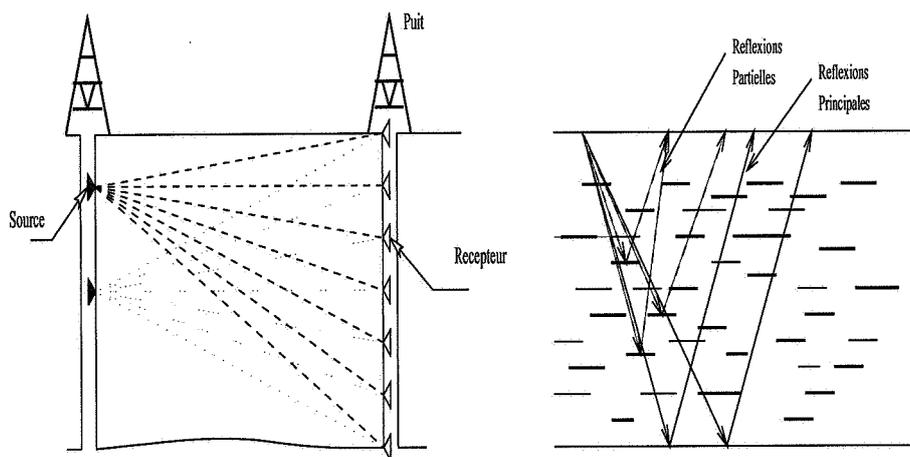


FIG. 6.11 - De Droite à gauche: (a) Réflexions partielles contenant les informations verticales. (b) Essais sismiques entre puits.

Par ailleurs subsistent deux problèmes que l'on peut traiter avec le même formalisme défini au chapitre précédent sur des données adaptées. Il s'agit en premier lieu d'extraire l'anisotropie. D'autre part, pour être conforme aux habitudes des sismiciens qui sont celles de modéliser le sous-sol en plusieurs couches à vitesses constantes, nous allons traiter le cas d'inversions sismiques faibles pour des champs de vitesses stationnaires à vitesses moyennes

constantes. Ces deux points constituent les principaux objectifs de la deuxième série de tests que nous abordons au chapitre qui suit. ■



## Chapitre 7

# Extension multicouches et autres applications

Le but du chapitre précédent était de valider l'inversion sur des cas simples pour la stratification du milieu. Dans ce chapitre, il s'agit d'étendre le formalisme théorique à plusieurs cas, plus complexes, mais plus réalistes de point de vue pratique. Les idées développées ici sont des extensions des formulations antérieures. Ces extensions concernent principalement, trois types de milieux et de réflecteurs :

- Milieux ayant subi une déformation géologique (*plissages*).
- Terrains multicouches en raison de leur grand usage chez les géophysiciens.
- Réflecteur non plan et stratification horizontale.

Par ailleurs, il est à rappeler que les données sismiques de surface, relatives à un seul réflecteur, ne favorisent pas l'extraction de l'anisotropie. En pratique, on a recours aux données de puits qui renferment l'information sur la verticale. Ici nous traitons le problème en nous plaçant dans la même optique tracée au chapitre 6: nous établirons la formulation de la variance des vitesses dans le cas d'un milieu à covariance du type anisotropie géométrique en fonction de l'angle d'inclinaison avec les axes principaux.

D'autre part, dans le paragraphe 7.5 nous revenons au problème ultime qui est la simulation des erreurs de migration. Ce problème est traité en trois sous-paragraphe :

- La section 7.5.1 est consacrée à la redéfinition du problème de simulation des erreurs.
- La section 7.5.2 traite le problème de simulation en trois étapes : les solutions proposées dépendent en effet de la géométrie du réflecteur qui prédétermine celle des rayons réfléchis.

Nous traitons le cas d'un réflecteur horizontal, le cas d'un réflecteur plan incliné, puis le cas d'une géométrie complexe. Ce dernier cas est un peu plus délicat car les rayons considérés sont très loin d'avoir des géométries comparables (*leur longueur et leur pendage vont varier à  $x$  fixé.*) et l'on se contente de trouver un encadrement de l'erreur de migration.

Enfin, nous terminons le chapitre en montrant les limitations pratiques des méthodes suggérées.

## 7.1 Milieux déformés

On pourrait se demander si la méthode d'inversion proposée marcherait dans le cas des mêmes milieux considérés précédemment mais ayant subis des déformations. Les solutions que l'on pourrait proposer sont de deux natures :

- transformations conformes :

Supposons que nous travaillons sur un milieu complexe qui peut être ramené à un milieu stratifié par transformation conforme.

L'intérêt est de nous ramener à un milieu stratifié où nous avons déjà établi des méthodes d'inversion. Le type de transformation que l'on pourrait proposer pourrait être celui emprunté aux méthodes hydrologiques où l'on fait la transformation grâce aux lignes de courant. Là aussi on peut facilement démontrer que l'équation d'Helmholtz est invariante par ce genre de transformation. Néanmoins, le problème qui se poserait est que les récepteurs ne seraient plus localisés sur une droite horizontale.

- transformation 'ordinaire' :

La transformation consiste à remettre à plat une stratification donnée. Ainsi la transformation est l'inverse d'une transformation primaire qui a été appliquée à un milieu de structure tabulaire pour devenir ce qu'il est dans son état actuel (Cf fig 7.1).

Dans la réalité géologique, ces transformations sont très complexes et très variées. Nous espérons montrer ici que, pour quelques unes d'entre elles, les inversions suggérées mènent à des résultats satisfaisants. La section 7.1.1 examine le côté théorique du problème (*toujours à partir de l'étude des eikonales*). Quant à la section suivante, elle montre des expériences synthétiques positivement concluantes.

### 7.1.1 Perturbation des Eikonales dans un milieu déformé

Considérons les deux milieux (*milieu 1 et milieu 2*) décrits à la figure 7.1. Soient alors  $(u, v)$  et  $(x, z)$  les coordonnées respectives du milieu 1 et du milieu 2. Nous voulons donner une formulation de  $\psi$  qui assure la transformation  $(x, z) = \psi(u, v)$ .

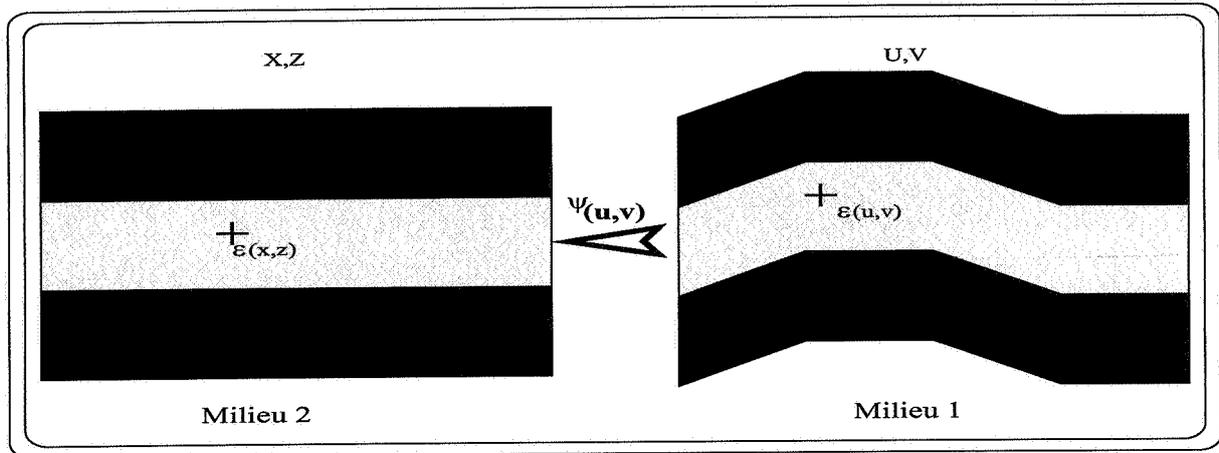


FIG. 7.1 - Milieu déformé.

Soit alors,  $\Delta$  une fibre fine de stratification dans le domaine  $(U, V)$  d'équation  $\xi = f(u)$  (Cf Fig 7.2) que nous voulons transformer en ligne  $D$  dans le domaine  $(X, Z)$ . Une simple transformation peut être du type suivant :

$$\psi : \begin{cases} x = \int_{s_0}^{s_u} ds = l(u) & s \text{ abscisse curviligne et } l(u) \text{ longueur de la fibre } u \\ z = v + f(u) & \text{Transformation ajoutée à la profondeur} \end{cases}$$

Soit maintenant une perturbation  $\epsilon(u, v)$  dans le domaine  $(U, V)$ . Cette perturbation se trouve dans le domaine  $(X, Z)$  au point  $(x, z)$  tel que :

$$(x = l(u) \text{ et } z = v + f(u))$$

**Relations entre covariances :**

Examinons les relations entre covariances des milieux 1 et 2. Si nous notons  $\tilde{\epsilon}$  la perturbation dans le domaine  $(X, Z)$ , alors  $\epsilon(u, v) = \tilde{\epsilon}(x, z)$  et l'on a :

$$\begin{aligned} C_{\epsilon}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) &= Cov(\epsilon(u_1, v_1), \epsilon(u_2, v_2)) \\ &= cov(\tilde{\epsilon}(l(u_1), v_1 + f(u_1)), \tilde{\epsilon}(l(u_2), v_2 + f(u_2))) \\ &= C_{\tilde{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), v_1 - v_2 + f(u_1) - f(u_2)) \end{aligned}$$

Le champ des perturbations est stationnaire dans le domaine  $(X, Z)$  et non pas dans  $(U, V)$ .

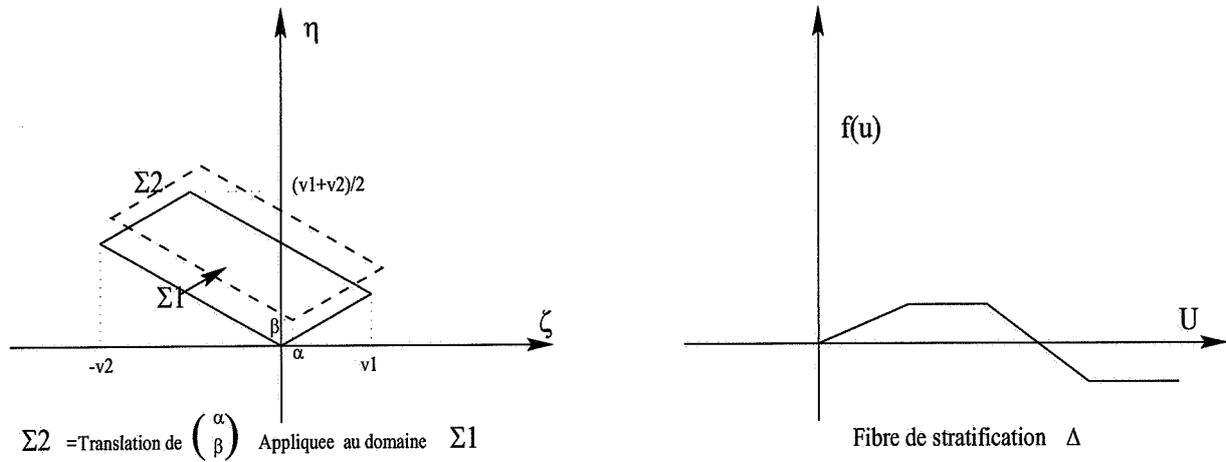


FIG. 7.2 - De Gauche à droite : (a) Domaine d'intégration ; (b) Fibre de stratification.

### Covariances des eikonales :

Soit à calculer la covariance des fluctuations entre deux rayons  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Avec  $\mathbf{r}_1 = (u_1, z_1)$  et  $\mathbf{r}_2 = (u_2, z_2)$  deux rayons issus d'une onde plane dans le domaine  $U, V$ .

$$\begin{aligned}
 C_T^P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \text{cov}(T(\mathbf{r}_1), T(\mathbf{r}_2)) \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{v_1} dv' \int_0^{v_2} dv'' \text{cov}(\epsilon(u_1, v'), \epsilon(u_2, v'')) \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{v_1} dv' \int_0^{v_2} dv'' C_{\bar{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), v' + f(u_1) - v'' - f(u_2)) \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} \int \int_{\Sigma_2} C_{\bar{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), \zeta) d\eta d\zeta.
 \end{aligned}$$

Où  $\Sigma_2$  est le domaine d'intégration (Cf Fig 7.2) et  $\zeta, \eta$  sont tels que :

$$\begin{cases} \zeta &= v' + f(u_1) - v'' - f(u_2) = v' - v'' + \alpha \\ 2\eta &= v' + f(u_1) + v'' + f(u_2) = v' - v'' + 2\beta \end{cases}$$

Le nouveau domaine d'intégration est une simple translation du domaine  $\Sigma_1$  vu au chapitre 6.

Si l'on considère que  $\alpha$  est quasiment nul à l'échelle de la portée ' $a$ ' de  $C_{\bar{\epsilon}}$  ( $\alpha \ll a$ ). Alors, par analogie à ce qui a été explicité au paragraphe 7.1.1 si  $v_1 \leq v_2$  la covariance correspondante, peut s'écrire alors :

$$\begin{aligned} C_T^P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\simeq \frac{1}{4c_0^2} \int_{\beta}^{v_1+\beta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta C_{\bar{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), \zeta) \\ &= \frac{v_1}{2c_0^2} \int_0^{\infty} C_{\bar{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Une expression analogue est obtenue si  $v_2 \leq v_1$ , et l'on peut écrire que :

$$C_T^P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\min(v_1, v_2)}{2c_0^2} \int_0^{\infty} C_{\bar{\epsilon}}(l(u_1) - l(u_2), \zeta) d\zeta$$

Dans le cas de covariance factorisée  $C_{\epsilon}(x, z) = \sigma_{\epsilon}^2 C_X(x) C_Z(z)$ , ces expressions sont simples à formuler.

$$\begin{cases} \sigma_T^2(L) = C_T^P(0, L) \doteq \frac{L}{2c_0^2} \sigma_{\epsilon}^2(L) \int_0^{\infty} C_Z(\eta) d\eta. \\ C_T^P(u_1 - u_2, L) = \sigma_T^2(L) C_X(l(u_1) - l(u_2)). \end{cases}$$

**Remarques:**

1/ - Pour que la formulation ci-dessus soit valable, une condition doit être vérifiée : sur le domaine de travail, nous devons avoir  $\alpha \ll a$ . C'est-à-dire :

$$\forall u_1, \forall u_2 \quad \text{nous avons} \quad f(u_1) - f(u_2) \ll a$$

Pour que cela soit vérifié, il suffit que l'amplitude maximale des perturbations soit négligeable devant la portée.

2/ - Pour que  $C_T^P(u_1 - u_2, L)$  soit quasi-stationnaire en  $u$  ( $u \in [0, a]$ ), alors il suffit que  $l(u)$  soit quasiment linéaire sur les intervalles d'observations. De ce fait, la période des déformations doit être très grande comparée à la portée 'a'.

Enfin lorsque ces conditions sont remplies, dans le cas d'une onde sphérique, soient deux rayons  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  provenant d'une même source.

- 'L' longueur parcourue par l'onde.
- 'u' distance entre maximums des points extrêmes des deux rayons.

La covariance des deux rayons s'écrit :

$$C_T^{Sph}(u, L) = \frac{1}{u} \sigma_T^2(L) \int_0^u C_X(l(u)) du$$

Dès lors une simple procédure d'inversion peut s'écrire comme suit :

$$C_X(l(u)) = \frac{d}{du} \left\{ \frac{u C_T^{Sph}(u, L)}{\sigma_T^2(L)} \right\}$$

Finalement, il reste le passage à la phase expérimentale qui fait l'objet de la section suivante.

### 7.1.2 Expérimentations

Les milieux qui sont examinés, sont des milieux stationnaires stratifiés ayant subi de légères déformations. Il s'agit essentiellement ici de déformations sinusoidales dont la période est très élevée par rapport à la portée du milieu et l'amplitude maximale des déformations est très faible devant la portée. La figure 7.3 donne une idée sur les milieux qui ont été considérés au cours de ce genre de tests.

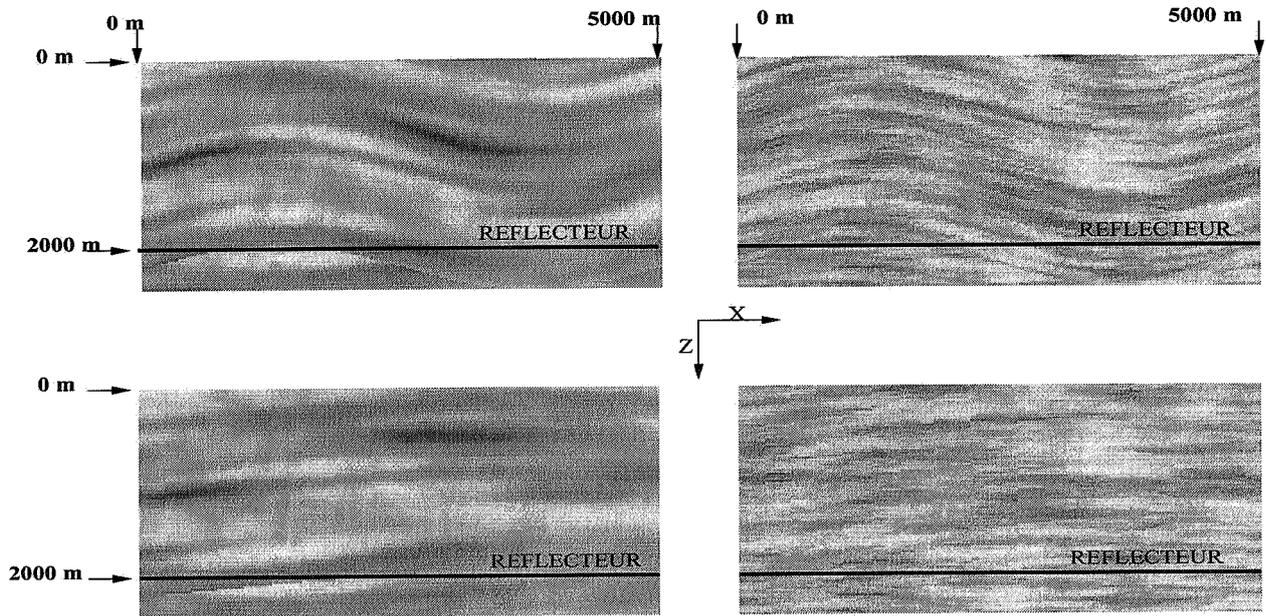


FIG. 7.3 - Deux exemples de milieux testés : de gauche à droite (a) Gaussien anisotrope  $a = 1000m$   $b = 100m$  avec une déformation sinusoidale de période  $5000m$ , (b) Sphérique anisotrope  $a = 1000$   $b = 100m$ , avec une déformation sinusoidale de période  $5000m$ , (c) Gaussien anisotrope  $a = 1000m$   $b = 100m$ , avec une déformation sinusoidale de période  $15000m$ , (d) Sphérique anisotrope  $a = 1000$   $b = 100m$ , avec une déformation sinusoidale de période  $15000m$ . Dans tous les cas la variance des vitesses est de  $10000(m/s)^2$ .

L'inversion montre que l'on continue à avoir une idée valable sur ce type de milieu. Concernant la convergence des rapports normalisés des variances des temps d'arrivée, la figure 7.4 montre le même type de test que celui décrit au paragraphe (6.7.2). Nous faisons varier le nombre de traces de 100 jusqu'à plus de 1000 traces et traçons les profils de variances normalisées. Nous arrivons à la même conclusion que dans le cas stationnaire sans déformation : travailler sur des statistiques faites sur plus de 1000 traces.

D'autre part la figure 7.5 montre un exemple d'inversion de la portée et de la covariance pour ce type de milieu. Dans cet exemple la covariance est sphérique de portée horizontale 16 mailles et de portée verticale de 2 mailles. La déformation est sinusoidale de période 200 mailles et d'amplitude maximale 5 mailles.

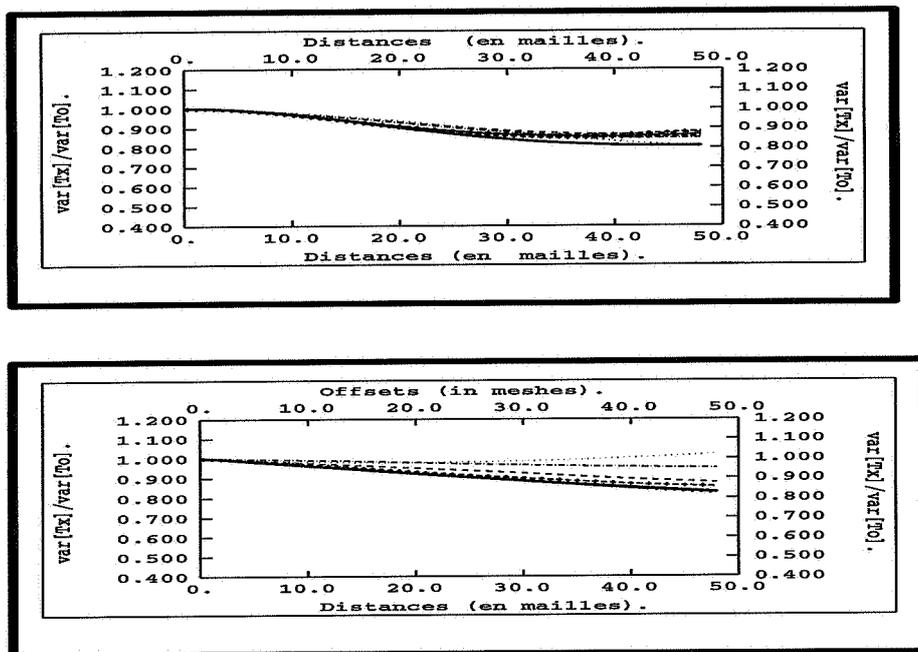


FIG. 7.4 - Inversion: Exemples de tests expérimentaux concernant la convergence des rapports normalisés de variance. Ici le milieu testé est un milieu à covariance gaussienne avec une portée horizontale de 30 mailles. De haut en bas, l'anisotropie est 1/10 puis 1/4.

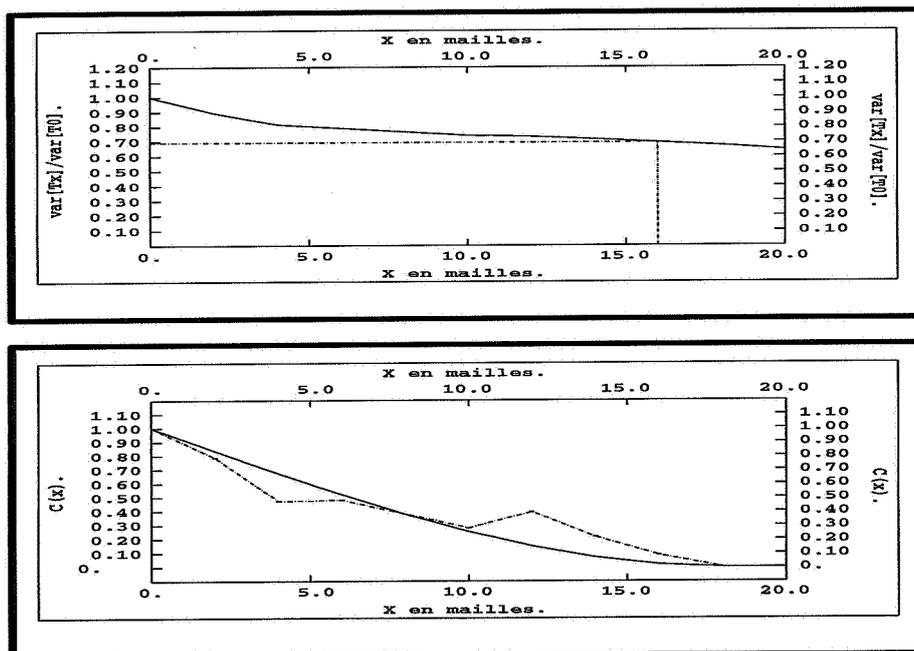


FIG. 7.5 - De haut en bas. (a): Profil des variances normalisées des temps d'arrivée en fonction de la distance source récepteur. (b) Comparaison de la covariance obtenue par inversion et la covariance du milieu.

## 7.2 Modèles multicouches

L'usage de modèles multicouches à vitesses constantes est très courant dans la pratique des analyses de vitesses en sismique. Ce paragraphe traite la généralisation de l'inversion sismique faible pour ce type de modèles. En raison de la complexité des calculs, nous allons nous restreindre au cas d'un bicouche.

### 7.2.1 Description des milieux étudiés:

Un exemple des milieux étudiés est illustré par la figure 7.2.1. Il s'agit de deux milieux stationnaires ; on s'intéresse à extraire l'information relative à la seconde couche connaissant la première couche. L'extraction de cette information repose toujours sur l'étude de la variance des temps d'arrivée. Ci-dessous nous allons définir quelques notations et hypothèses utiles pour les calculs.

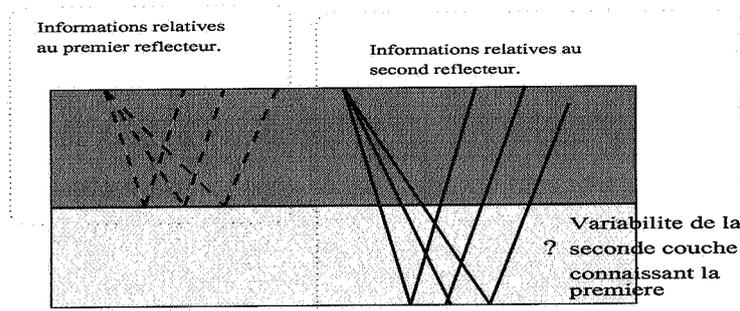


FIG. 7.6 - Exemple d'un bicouche: on s'intéresse à la deuxième couche connaissant la première.

#### Informations relatives à la 1<sup>ère</sup> couche :

- vitesse:  $v_1(x, z) = c_1(1 + \epsilon_1(x, z))$  avec  $c_1$  la moyenne de la vitesse et  $\epsilon_1(x, z)$  perturbation très faible.
- moyenne de la perturbation:  $E(\epsilon(x, z)) = 0$
- covariance anisotrope:  $cov(\epsilon_1(x, z), \epsilon_1(x + h_x, z + h_z)) = \sigma_{\epsilon_1}^2 C_X^1(h_x) C_Z(h_z)$

#### Informations relatives à la 2<sup>ème</sup> couche :

- vitesse:  $v_2(x, z) = c_2(1 + \epsilon_2(x, z))$  avec  $c_2$  la moyenne de la vitesse et  $\epsilon_2(x, z)$  perturbation très faible.
- moyenne de la perturbation:  $E(\epsilon(x, z)) = 0$

- covariance anisotrope:  $cov(\epsilon_2(x, z), \epsilon_2(x + h_x, z + h_z)) = \sigma_{\epsilon_2}^2 C_X^2(h_x) C_Z(h_z)$

**Liens structuraux entre les deux couches :**

pour simplifier les calculs de la variance des temps d'arrivée, nous allons utiliser les deux hypothèses suivantes.

- Les perturbations  $\epsilon_1(x, z)$  et  $\epsilon_2(x', z')$ , sont supposées être indépendantes l'une de l'autre pour tous couples  $(x, z)$  et  $(x', z')$ .

- Les covariances verticales sont supposées les mêmes, ce qui voudrait dire en pratique que la genèse de la première couche est identique à la seconde<sup>1</sup>.

**7.2.2 Propriétés de la variance des temps d'arrivée**

Comme dans le cas d'un monocouche il s'agit ici de calculer la variance des temps d'arrivée puis d'en déduire le procédé d'inversion de la covariance horizontale de la deuxième couche.

**Résultats préliminaires**

Soit  $T_x$  le temps enregistré à l'offset  $x$  correspondant à un événement de réflexion qui a eu lieu au niveau du second réflecteur. En se référant aux notations de la figure 7.7 , on pourrait écrire :

$$T_x = T_{1x}^1 + T_{1x}^2 + T_{2x}^1 + T_{2x}^2$$

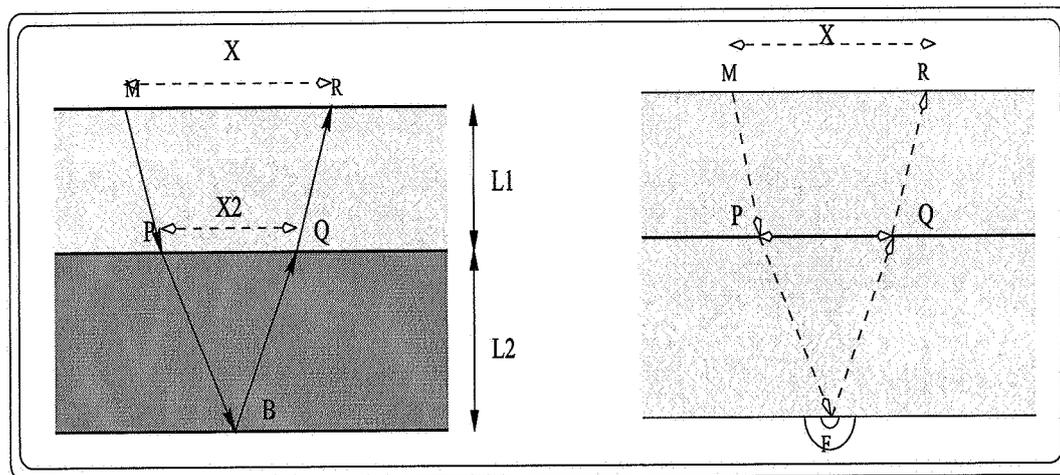


FIG. 7.7 - notations.

1. Si l'on se prive d'une telle hypothèse, les calculs restent toujours possibles bien que compliqués.

avec :

$T_{1x}^1$  temps de propagation de l'onde descendante dans la première couche.  
 $T_{2x}^1$  temps de propagation de l'onde montante dans la première couche  
 $T_{1x}^2$  temps de propagation de l'onde descendante dans la seconde couche.  
 $T_{2x}^2$  temps de propagation de l'onde montante dans la seconde couche.

$\theta$  angle d'incidence du rayon  
 $x_2$  distance entre les points  $P$  et  $Q$  sur l'interface  $x_2 = x \frac{L_2}{L_1 + L_2}$ .  
 $L_1$  épaisseur de la première couche.  
 $L_2$  épaisseur de la seconde couche.

Pour calculer la variance des temps  $T_x$ , on se propose d'abord de calculer la covariance des temps  $T_{1x}^1$  et  $T_{2x}^1$ . Jusqu'ici nous n'avons pas fait le calcul des covariances de temps de trajet entre deux rayons non issues d'une même source. Pour cela nous étendons fictivement le milieu 1 de manière à ce que les ondes qui arrivent aux points  $P$  et  $Q$  aient une même source fictive  $F$  (Cf fig 7.7). Nous notons alors  $t_{1x}^F$  et  $t_{2x}^F$  les temps de propagation fictifs entre les points  $(P,F)$  et  $(F,Q)$ . D'après la notation introduite au chapitre 5, nous pouvons écrire :

$$cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^1 + t_{2x}^F) = C_T^1(x, L_1 + L_2) \quad (7.1)$$

mais nous pouvons aussi développer le terme de gauche de la manière suivante :

$$\begin{aligned} cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^1 + t_{2x}^F) &= cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^1) + cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^F) \\ &= cov(T_{1x}^1, T_{2x}^1) + cov(T_{1x}^F, T_{2x}^1) + cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^F) \\ &= cov(T_{1x}^1, T_{2x}^1) + cov(T_{1x}^F, T_{2x}^1 + t_{2x}^F) \\ &\quad - cov(T_{1x}^F, T_{2x}^F) + cov(T_{1x}^1 + t_{1x}^F, T_{2x}^F) \end{aligned}$$

D'autre part, toujours d'après les notations introduites au chapitre 7 on a :

$$\begin{cases} cov(T_{1x}^F, T_{2x}^1 + T_{2x}^F) \simeq C_T^1(x_2, \min(L_2, L_1 + L_2)) = C_T^1(x_2, L_2) \\ cov(T_{1x}^1 + T_{1x}^F, T_{2x}^F) \simeq C_T^1(x_2, \min(L_2, L_1 + L_2)) = C_T^1(x_2, L_2) \\ cov(T_{1x}^F, T_{2x}^F) = C_T^1(x_2, L_2) \end{cases}$$

ce qui permettrait d'écrire :

$$cov(T_{1x}^1, T_{2x}^1) \simeq C_T^1(x, L_1 + L_2) - C_T^1(x_2, L_2)$$

### Calcul de la variance

Le développement de la variance de  $T_x$  en utilisant les expressions ci dessus donne :

$$\begin{aligned} var[T_x] = & var[T_{1x}^1] + var[T_{2x}^1] + var[T_{1x}^2] + var[T_{2x}^2] + 2cov(T_{1x}^1, T_{2x}^1) + \\ & 2cov(T_{1x}^1, T_{2x}^2) + 2cov(T_{1x}^2, T_{2x}^2) + 2cov(T_{1x}^2, T_{2x}^1) + \\ & 2cov(T_{1x}^1, T_{1x}^2) + 2cov(T_{2x}^2, T_{2x}^1) \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{cases} \text{var}[T_{1x}^1] = \text{var}[T_{1x}^2] = \sigma_{T_1}^2(L_1) \\ \text{var}[T_{2x}^1] = \text{var}[T_{2x}^2] = \sigma_{T_1}^2(L_2) \\ \text{cov}(T_{1x}^1, T_{2x}^2) = \text{cov}(T_{1x}^2, T_{2x}^1) = 0. \quad (\text{indépendance entre } \epsilon_1 \text{ et } \epsilon_2) \\ \text{cov}(T_{1x}^1, T_{1x}^2) = \text{cov}(T_{2x}^2, T_{2x}^1) = 0. \quad (\text{indépendance entre } \epsilon_1 \text{ et } \epsilon_2) \end{cases}$$

Ceci donne alors l'expression :

$$\text{var}[T_x] = 2\sigma_{T_1}^2(L_1) + 2\sigma_{T_2}^2(L_2) + 2\text{cov}(T_1^1, T_2^1) + 2\text{cov}(T_1^2, T_2^2)$$

Finalement nous pouvons écrire que :

$$\text{var}[T_x] = 2\sigma_{T_1}^2(L_1) + 2\sigma_{T_2}^2(L_2)\chi^2(x_2) + 2\sigma_{T_1}^2(L_1 + L_2)\chi^1(x) - 2\sigma_{T_1}^2(L_2)\chi^1(x_2)$$

Enfin à cause de la proportionnalité entre  $\sigma_T^2(L)$  et  $L$ , l'expression de la variance est :

$$\boxed{\text{var}[T_x] = 2\sigma_{T_1}^2(L_1)(1 + (1 + (L_2/L_1))\chi^1(x) - (L_2/L_1)\chi^1(x(L_2/L_1 + L_2))) + 2\sigma_{T_2}^2(L_2)(1 + \chi^2(x_2))}$$

A partir de ce résultat nous pouvons déduire une procédure d'inversion de la covariance pour la deuxième couche. Ce résultat pourrait être généralisé pour un milieu de plus de deux couches.

### 7.3 Cas de réflecteur non horizontal

L'application de la méthode d'inversion sismique faible repose sur l'hypothèse contraignante de réflecteur quasi-horizontale. Nous voulons nous affranchir de cette restriction en proposant une autre méthode d'inversion utilisant seulement les temps à offsets nuls ces derniers possèdent en effet la propriété suivante :

**Propriété :** Lorsqu'il s'agit d'un champ de vitesses stationnaire et d'un réflecteur plan horizontal (*respectivement incliné*) les temps à offsets nuls (*respectivement leurs résidus*) admettent des covariances stationnaires proportionnelles à la covariance de perturbation des vitesses.

Pour montrer cette propriété, désignons par  $T_o(x)$  le temps à offset nul recueilli au point d'abscisse  $x$  en surface. Calculons alors la covariance de  $T_o$  en distinguant les deux cas suivants :

Cas de réflecteur horizontal : Le réflecteur se trouve à une côte  $z = H$  ( $l_x = l_{(x+h)} = H$ ). Dans ce cas d'après les notations nous avons :

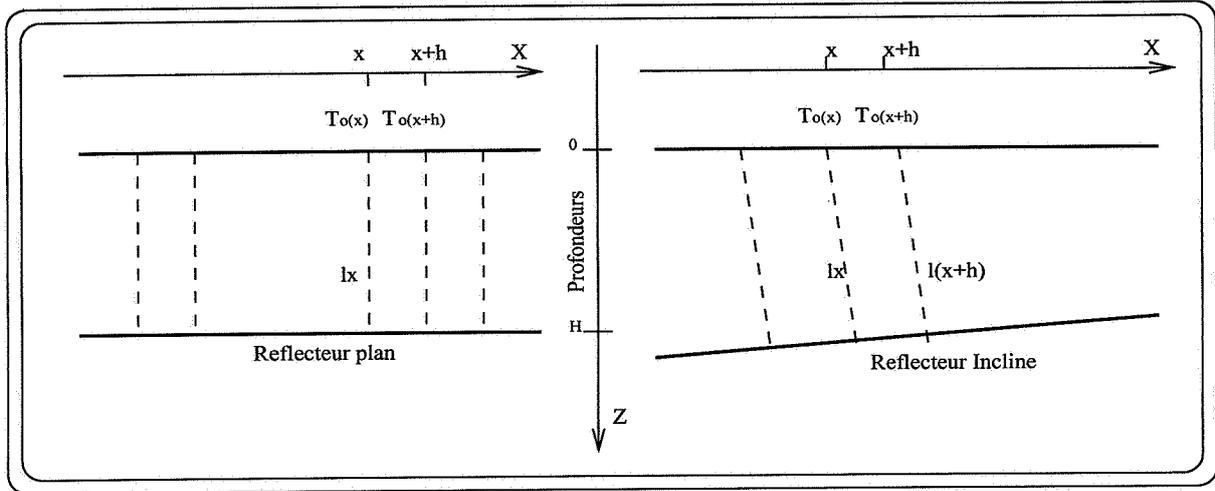


FIG. 7.8 - Extraction des covariances à partir des données à offsets nuls. Nouvelles notations dans le cas de réflecteur horizontal et incliné

$$\begin{aligned}
 C_{T_o}(h) &= cov(T_o(x), T_o(x+h)) \\
 &= cov(l_x(1 + \overline{\epsilon(x)}/2)/c_0, l_{x+h}(1 + \overline{\epsilon(x+h)}/2)/c_0) \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} cov\left(\int_{l_x} \epsilon(s) ds, \int_{l_{x+h}} \epsilon(s') ds'\right) \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} C_X(h) \int_0^H \int_0^H C_Z(u-v) dudv \\
 &= \frac{1}{4c_0^2} \overline{C_Z(H)} \cdot C_X(h)
 \end{aligned}$$

Nous avons donc la formule de proportionnalité suivante :

$$C_X(h) = (C_X(0)/C_{T_o}(0))C_{T_o}(h) \quad (7.2)$$

**Cas de réflecteur incliné :** dans ce cas le temps  $T_o(x)$  admet une dérive due à la forme du réflecteur ce qui suggère d'écrire :  $T_o(x) = t_o(x) + \tau_o(x)$  avec  $t_o(x)$  dérive qui renferme l'information sur le réflecteur et  $\tau_o(x)$  résidu qui détient l'information sur la perturbation et correspond aux retards dus aux perturbations rencontrées au cours du trajet parcouru.

$$\begin{aligned}
 C_{\tau_o}(h) &= \text{cov}(\tau_o(x), \tau_o(x+h)) \\
 &= \frac{1}{4c_o^2} \text{cov}\left(\int_{l_x} \epsilon(s) ds, \int_{l_{x+h}} \epsilon(s') ds'\right) \\
 &\simeq \frac{1}{4c_o^2} C_X(h) \overline{C_Z}(l_x)
 \end{aligned}$$

Le paragraphe 7.3.2 est consacré à quelques exemples d'inversion de ce type.

### 7.3.1 Limite de la méthode

Si la méthode donne des résultats satisfaisants pour des réflecteurs peu perturbés horizontaux ou pentés. Celle-ci échoue lors du passage aux grandes fluctuations du réflecteur. Les limites de cette méthode sont, en effet, de deux natures. La première est liée à l'échantillonnage. Soit en effet la figure 7.9, celle-ci montre deux types de réflecteurs. Le premier admet de faibles fluctuations quant à l'autre présente des fluctuations très importantes. Pour les deux cas, on a procédé aux mêmes mesures de temps à offsets nuls grâce à l'échantillonnage numéroté 1,2, ... ,6. On peut voir alors que si cet échantillonnage peut bien rendre compte sur la forme du premier réflecteur, celui-ci favorise les anticlinaux dans le second cas.

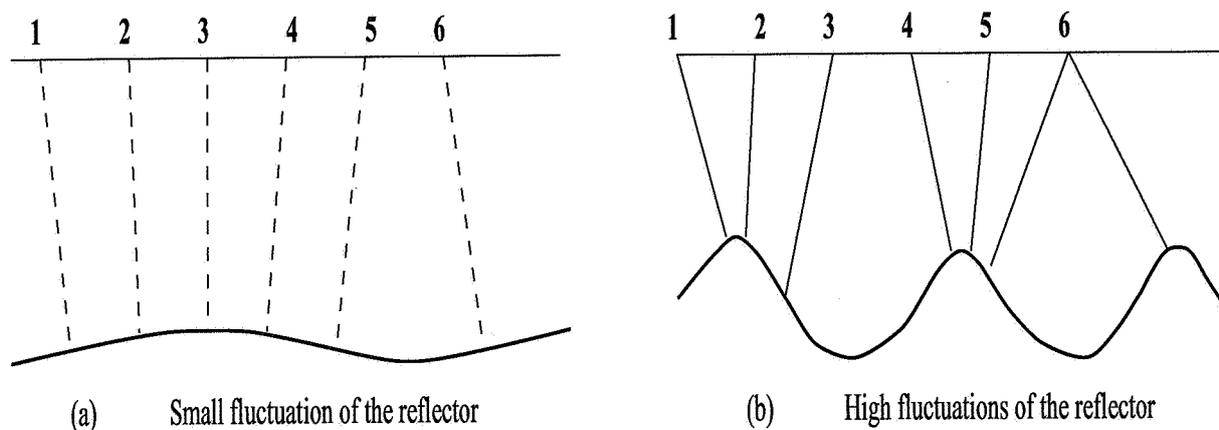


FIG. 7.9 - Effet de l'échantillonnage

La seconde limitation est due au fait que l'on travaille avec des données à offsets nuls. La méthode la plus souvent utilisée pour obtenir les temps à offsets nuls est l'analyse de stack. Or on sait que ces méthodes introduisent une erreur sur la détermination de ce temps.

### 7.3.2 Exemples expérimentaux

Ci-dessous figurent quatre exemples d'inversion en utilisant les temps à offsets nul. Dans le cas de faibles fluctuations du réflecteur, la méthode permet de restituer la forme du réflecteur et les résidus restituent la variabilité latérale du milieu.

Réflecteur plan horizontal

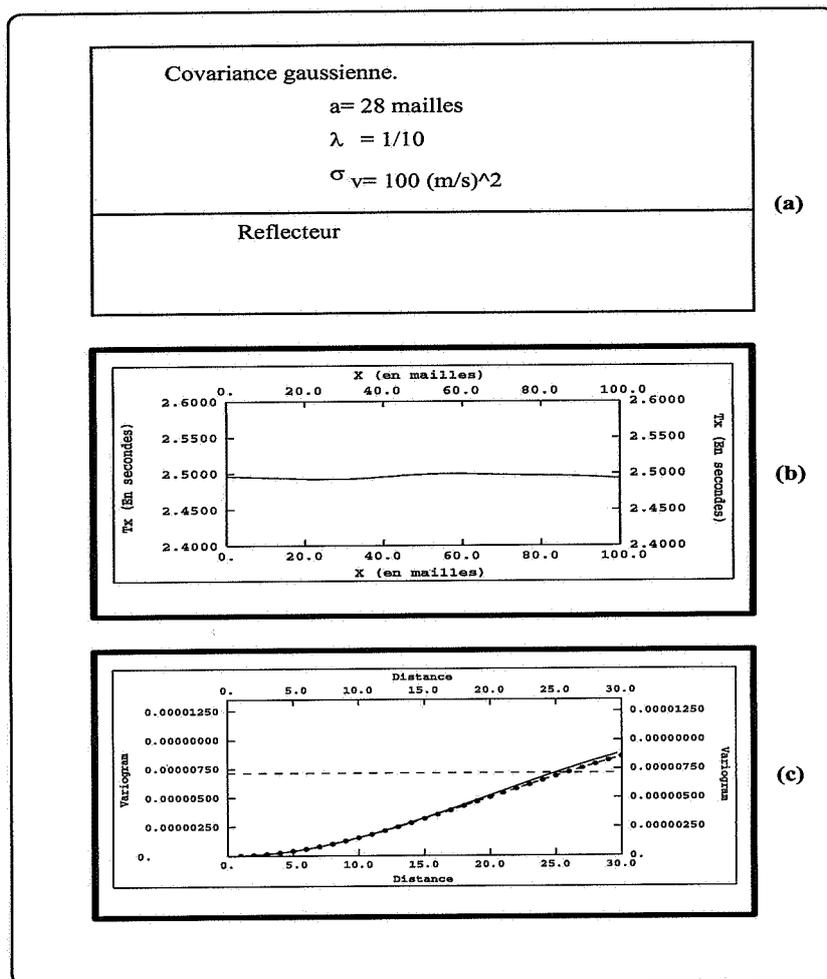


FIG. 7.10 - De haut en bas: (a) Modèle primaire de milieu et de réflecteur (b) Profil des temps observés (c) Covariance des temps à offsets nul comparée au modèle primaire de vitesses. Le filtrage des résidus est effectué par moindres carrés.

Réflecteur plan incliné

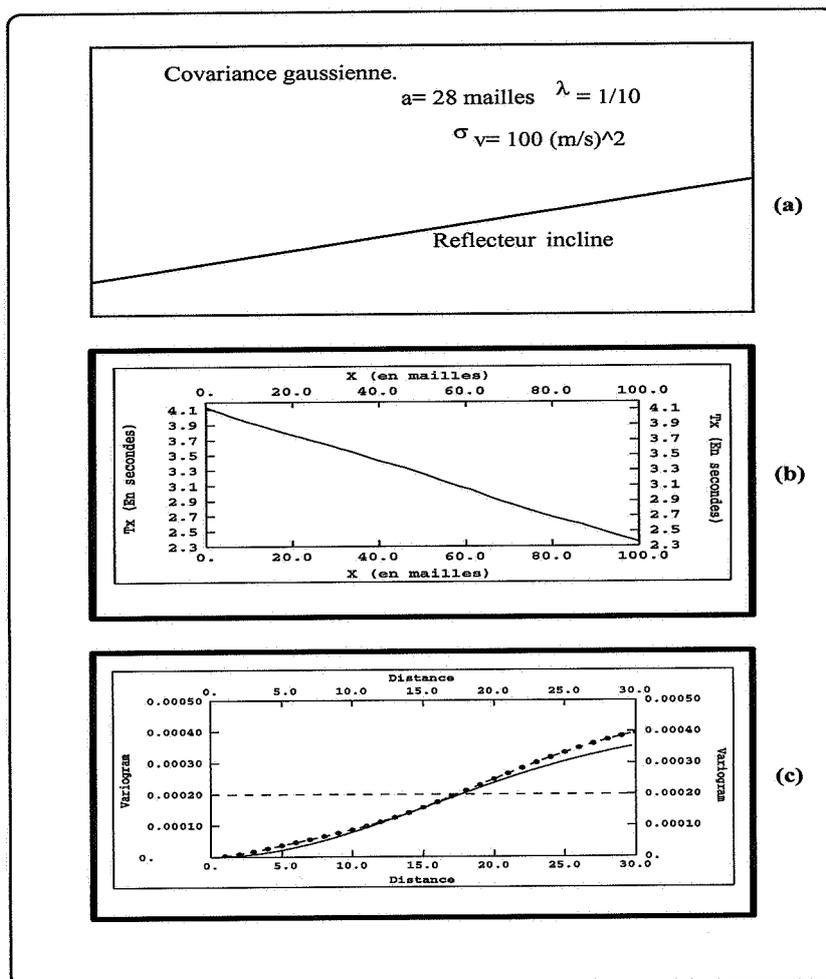


FIG. 7.11 - De haut en bas : (a) Modèle primaire de milieu et de réflecteur (b) Profil des temps observés (c) Covariance des temps à offsets nul comparée au modèle primaire de vitesses. Les résidus sont extraits en faisant la différence entre temps obtenus en milieu perturbé et temps obtenus en milieu non perturbé en considérant le même réflecteur.

Réflecteurs synclinal et sinusoidal

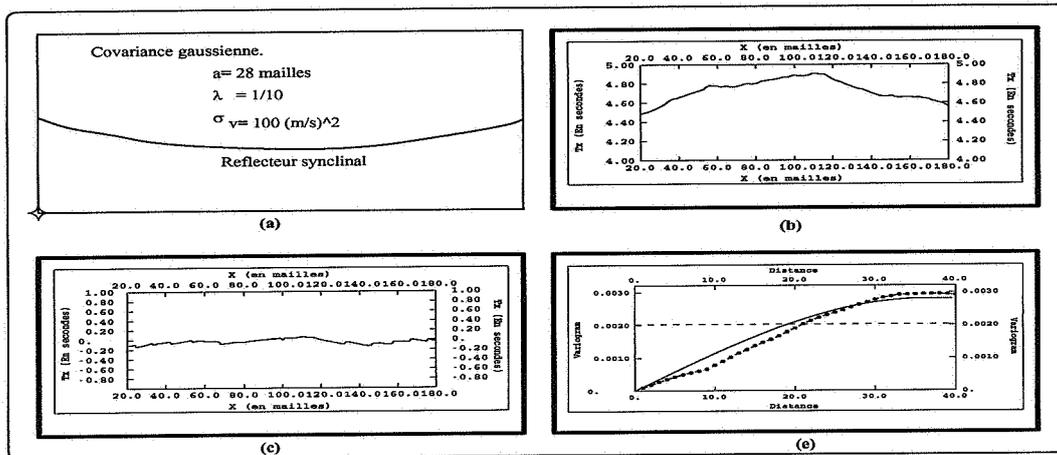


FIG. 7.12 - De haut en bas : (a) Modèle primaire de milieu et de réflecteur (b) Profil des temps observés (c) Les résidus sont extraits en faisant la différence entre temps obtenus en milieu perturbé et temps obtenus en milieu non perturbé en considérant le même réflecteur (d) Covariance des temps à offset nul comparée au modèle primaire de vitesses.

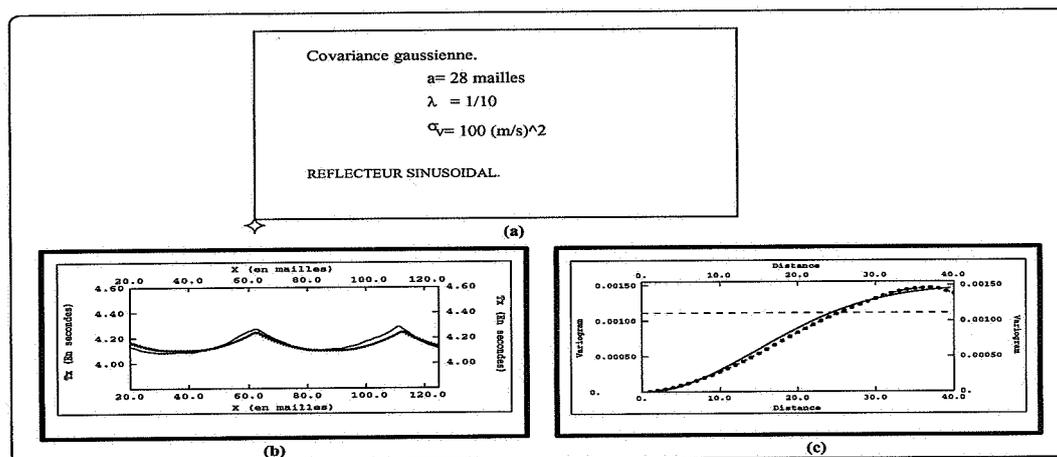


FIG. 7.13 - De haut en bas : (a) Modèle primaire de milieu et de réflecteur (b) Profil des temps observés (c) Covariance des temps à offset nul comparée au modèle primaire de vitesses. ( On ne voit pas les triplications dues aux synclinaux car on ne considère que les temps de première arrivée ).

## 7.4 Problème de l'anisotropie

L'objectif est de déterminer l'anisotropie du champ de vitesses. Pour ce faire, nous utilisons les temps d'arrivée dans plusieurs directions. Si la moyenne du temps de propagation est la même dans les différentes directions, il n'en est pas de même pour les variances. Celles-ci vérifient en effet la propriété suivante.

**Propriété:** Soit un milieu anisotrope défini par son rapport d'anisotropie  $\lambda$  et un axe principal incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale. Si  $T_\alpha(\mathbf{r})$  est le temps de propagation d'une onde provenant de la source  $S(0, 0)$  jusqu'au point  $M(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ . Alors nous avons :

$$\text{var}[T_{\pi/2-\theta}(r/\lambda)]/\text{var}[T_\theta(r)] = 1 \quad \forall r \in ]0, \infty[$$

En effet, soit l'expression explicite de la variance :

$$\begin{aligned} \text{var}[T_\alpha(r)] &= \text{var}\left[\int_0^1 \frac{1}{c_o} (1 + \epsilon(\tau r)) d\tau\right] \\ &= \frac{1}{c_o^2} \int_0^1 \int_0^1 C_\epsilon((u-s)r \cos \alpha, (u-s)r \sin \alpha) duds \end{aligned}$$

En exprimant  $C_\epsilon$  à l'aide de covariance isotrope  $C_o$  (voir annexe B<sub>1</sub>), nous obtenons :

$$\text{var}[T_\alpha(r)] = \frac{1}{c_o^2} \int_0^1 \int_0^1 C_o\left((u-s)r \sqrt{\cos^2(\theta - \alpha) + \lambda^2 \sin^2(\theta - \alpha)}\right) duds$$

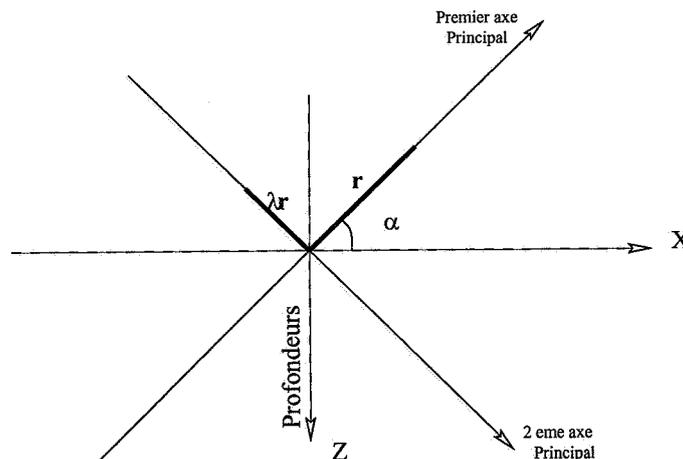


FIG. 7.14 - Quelques notations.

Il est donc clair que pour  $\alpha = \theta$  et  $\beta = \pi/2 - \theta$  nous avons :

$$\text{var}[T_\theta(r)] = \frac{1}{c_o^2} \int_0^1 \int_0^1 C_o((u-s)r) dr$$

$$\text{var}[T_{\pi/2-\theta}(r)] = \frac{1}{c_o^2} \int_0^1 \int_0^1 C_o((u-s)\lambda r) dr$$

Par conséquent nous avons :

$$\frac{\text{var}[T_{\frac{\pi}{2}-\theta}(r/\lambda)]}{\text{var}[T_\theta(r)]} = 1 \quad \forall r \in ]0, \infty[$$

Plus généralement, si l'on note  $f_\theta(\alpha) = 1/\sqrt{\cos^2(\theta - \alpha) + \lambda^2 \sin^2(\theta - \alpha)}$ , on peut alors montrer que :

$$\text{var}[T_\alpha(r f_\theta(\alpha))] = \text{var}[T_\theta(r)]$$

En particulier pour une stratification horizontale, ( $\theta = 0$ ) nous avons :  $\text{var}[T_0(r)] = \text{var}[T_\alpha(r) f_0(\alpha)]$ . La figure 7.15 montre le lieu de la fonction  $f_0(\alpha)$  pour  $\lambda = 1, 2, 4$  et  $10$ .

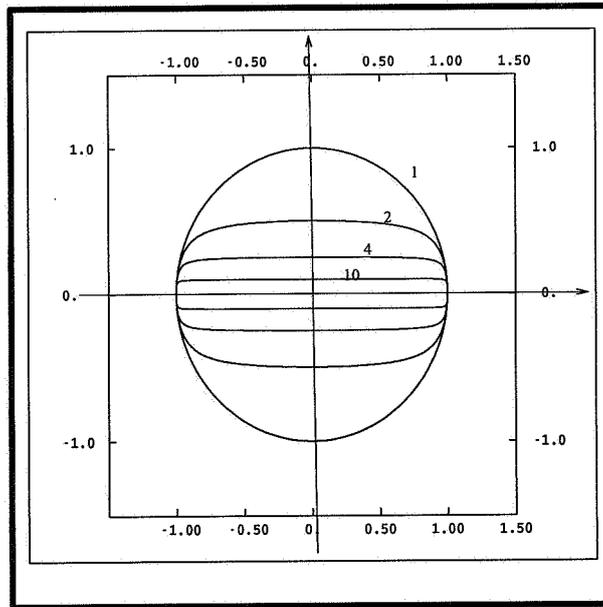


FIG. 7.15 - Lieu de la fonction  $f_0(\alpha)$  pour quatre rapport d'anisotropie  $\lambda=1,2,4$  et  $10$ .

Ainsi, rien qu'un examen visuel, de la variance des temps de propagation dans différentes directions, peut rendre compte sur l'ordre de grandeur de l'anisotropie.

### 7.4.1 Validation expérimentale

Le présent paragraphe est destiné à l'exploitation du résultat montré ci-dessus pour l'extraction du facteur d'anisotropie. L'exemple est celui d'un milieu anisotrope de facteur

$\lambda = 2$  et de stratification horizontale  $\theta = 0$ . La source est placée au centre d'une grille (Cf fig 7.16), et l'on fait propager les ondes sur plusieurs réalisations du même milieu puis l'on calcule les variances des temps d'arrivée.

La figure 7.17 montre la carte des variances des temps d'arrivée. De celle-ci nous pouvons voir une allure semblable à celle montrée dans la figure 7.15 pour le facteur d'anisotropie 2. Pour donner un résultat plus quantitatif nous proposons l'algorithme qui suit :

cet algorithme consiste à établir le lieu d'un indicateur d'anisotropie que l'on définit ci-dessous.

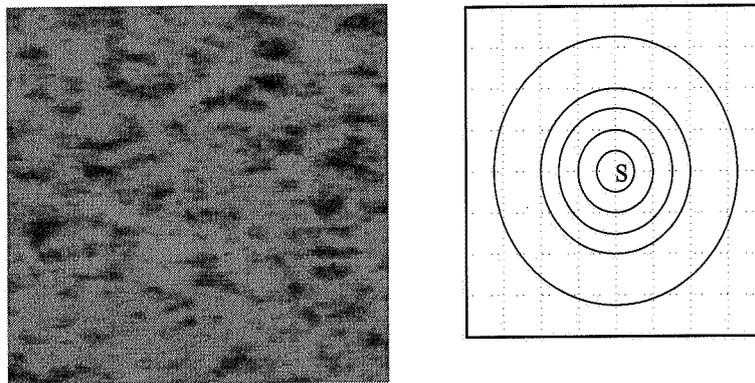


FIG. 7.16 - De Gauche à droite. (a) : milieu anisotrope. (b) source de propagation placée au centre du milieu.

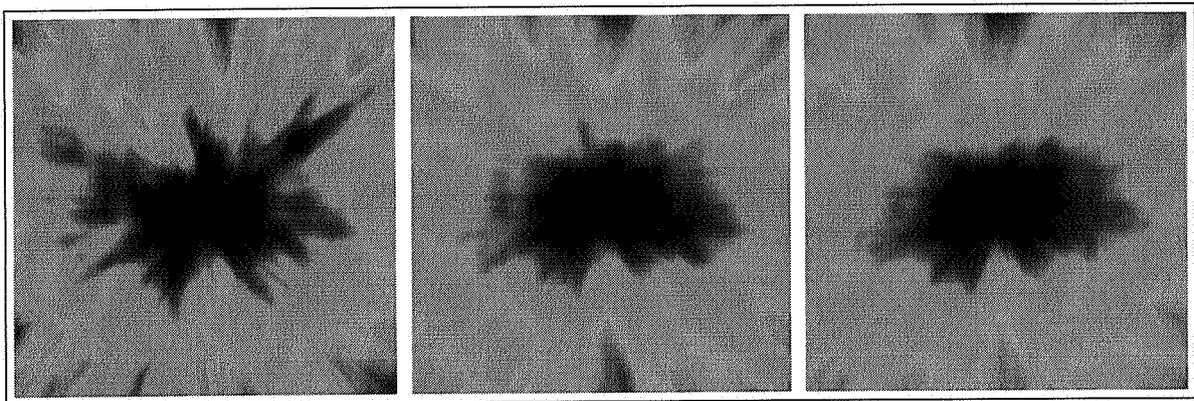


FIG. 7.17 - Variance des temps d'arrivée. De gauche à droite : Les variances des temps d'arrivée sont calculées sur 30,60 puis 90 simulations.

Soit  $I(x, z) = \text{var}[Tx]/\text{var}[Tz]$  avec  $Tx$  (resp  $Tz$ ) est le temps de propagation sur un trajet de longueur  $x$  suivant la direction  $OX$  (resp sur un trajet  $z$  suivant la direction  $OZ$ )

Si l'on cartographie cet indicateur, alors la courbe  $I(x, \lambda x) = 1$  est une droite. Autrement dit le lieu de l'indicateur  $I(x, z) = 1$  est une droite dont la pente est le coefficient d'anisotropie. Les figures 7.17 montrent le lieu pour le même exemple.

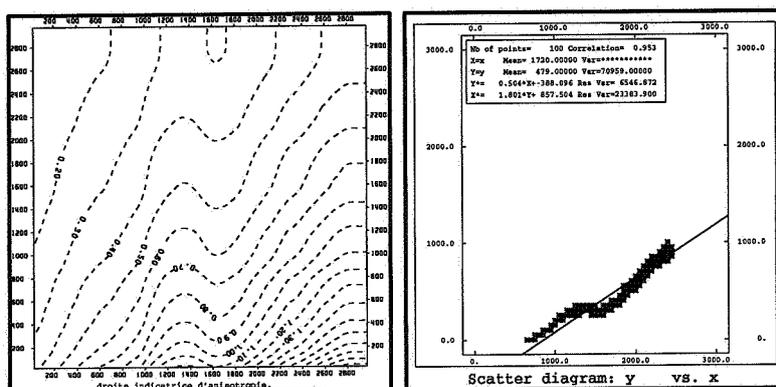


FIG. 7.18 - Exemple d'inversion de l'anisotropie: (a) Cartographie de l'indicateur de l'anisotropie sur 30 simulations (b)  $I(x, z) = 1$ .

L'expérience que l'on vient de montrer pour la détermination du coefficient d'anisotropie exige un grand nombre de données de propagation directe dans les deux directions verticales et horizontales. C'est pour cette raison que les données sismiques de réflexion ne peuvent pas se prêter à un tel traitement. On peut alors penser à l'exploitation de deux types de données :

- Données sismiques entre puits pour l'horizontale et soniques pour la verticale.
- Données sismiques de réfraction pour l'investigation des couches peu profondes.

## 7.5 Simulation des erreurs de migration

### 7.5.1 Généralités

Commençons par rappeler d'abord les expressions des erreurs de migration dans les deux cas optimiste et neutre :

1- Cas optimiste:

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o &= -\frac{1}{2}r^2\epsilon_1' \\ \tilde{z}_o - z_o &= \frac{1}{2}\left[\frac{x - x_o}{z - z_o}r^2\epsilon_1' + \frac{y - y_o}{z - z_o}r^2\epsilon_2'\right] \end{cases}$$

2- Cas neutre :

$$\begin{cases} \tilde{x}_o - x_o &= -\bar{\epsilon}(x - x_o) - \frac{1}{2}r^2\bar{\epsilon}'_1 \\ \tilde{z}_o - z_o &= \frac{r^2}{2(z-z_o)}[\bar{\epsilon} + (x - x_o)r^2\bar{\epsilon}'_1 + (y - y_o)r^2\bar{\epsilon}'_2] \end{cases}$$

Au vu de ces deux expressions nous pouvons suggérer deux procédés pour la simulation de celle-ci :

1- Simuler  $\bar{\epsilon}(x_o)$  à partir de la donnée de la covariance  $C_\epsilon$  et simuler  $\bar{\epsilon}'(x_o)$  à partir de la donnée de la covariance  $C_{\epsilon'}$  pour  $x_o \in I$ , en respectant ses corrélations avec  $\bar{\epsilon}$ .

2- Simuler  $\bar{\epsilon}(x_o)$  à partir de la donnée  $C_\epsilon$  pour  $x_o \in I$  et obtenir  $\bar{\epsilon}'(x_o)$  par simple dérivation.

Nous rappelons que pour simuler  $\epsilon'$  il faut avoir la covariance de  $C_\epsilon$  doublement différentiable en  $x$ . L'avantage du second procédé est l'économie en simulations puisqu'on ne simule que  $\bar{\epsilon}$ . Une simulation est en effet plus coûteuse qu'une simple dérivation. C'est pour cette raison que nous allons procéder dans la suite en utilisant la seconde méthode.

Soient deux points du réflecteur,  $X_o(x_o, L_1) \in I$  et  $Y_o(y_o, L_2) \in I$ . Soient aussi  $T_{X_o}$  et  $T_{Y_o}$  les temps aller-retour enregistrés en  $X_o$  et en  $Y_o$ . En pratique, nous ne disposons que de ces temps et nous voudrions simuler les erreurs de migration à partir de ces derniers. Aussi somme-nous amenés à établir une relation entre la covariance des temps (*Non issues de la même source*) et celle de  $\bar{\epsilon}$  pour nous ramener aux expressions des erreurs rappelées en début de paragraphe. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes (Cf figure 7.19) :

- $L$  le minimum des deux profondeurs.
- $B_2$  la distance entre les deux rayons à la côte  $z = L$ .
- $B_1$  la distance entre les deux rayons à la côte  $z = 0$ .
- $b_1$  le minimum  $\min(B_1, B_2)$ .
- $b_2$  le maximum  $\max(B_1, B_2)$ .
- $F$  source fictive à partir de laquelle les deux rayons divergent.
- $L'$  distance maximale parcourue par l'onde provenant de la source fictive  $F$ .

L'introduction de la notion de source fictive  $F$  tient au fait que l'on voudrait calculer la covariance entre deux rayons qui n'émergent pas d'une même source<sup>2</sup>.

$$\text{cov}(r(X_o)\bar{\epsilon}(X_o), r(Y_o)\bar{\epsilon}(Y_o)) = \frac{1}{c_o^2}C_T(T_{X_o}, T_{Y_o})$$

Or nous savons (voir paragraphe 7.2.2) :

---

2. Ceci est un simple 'artifice' de calcul empreinté aux techniques de calcul des variances d'estimation entre segment-segment block-block etc (G.Matheron [18])

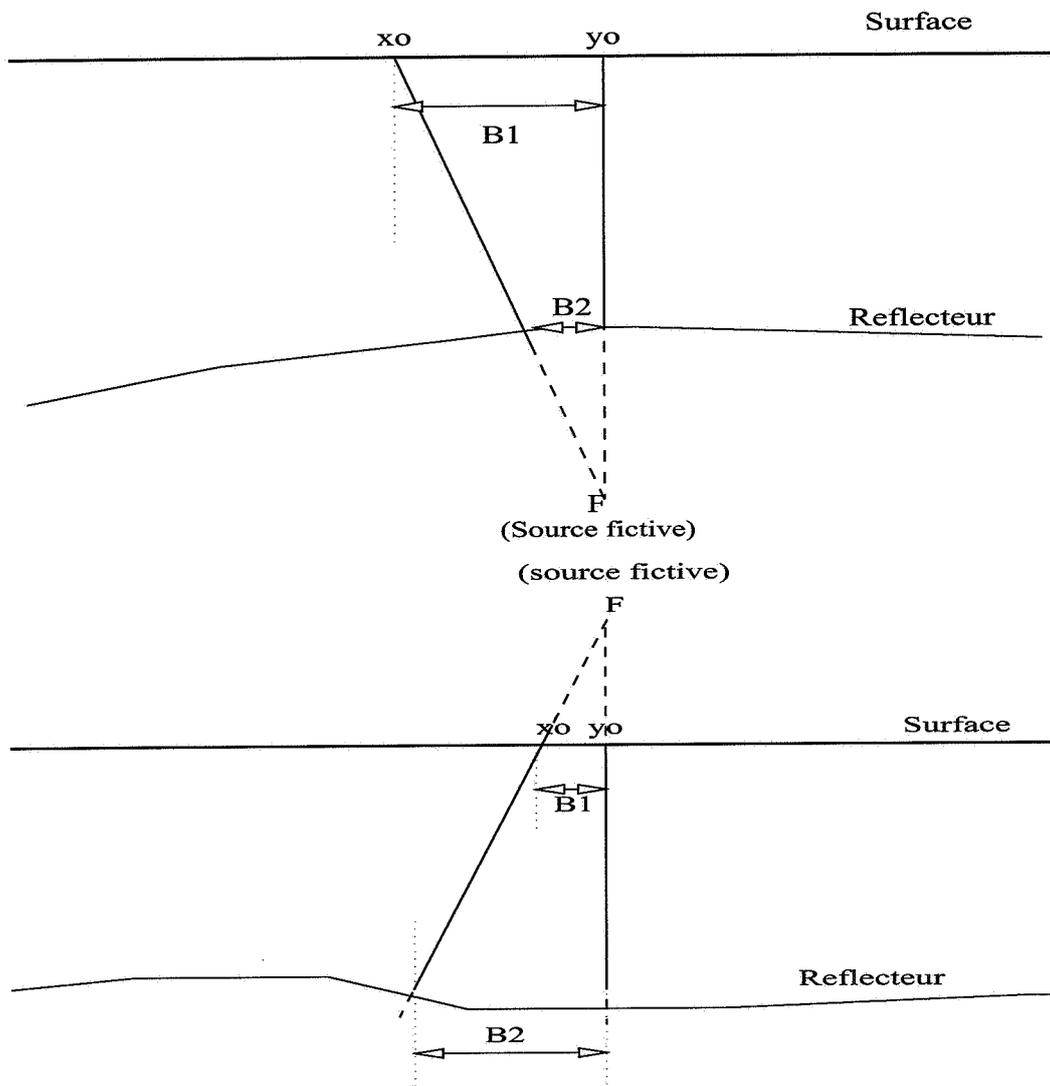


FIG. 7.19 - Notations

$$C_T(T_{X_o}, T_{Y_o}) \simeq C_T(b_2, L') - C_T(b_1, L' - L)$$

Nous avons donc :

$$cov(r(X_o)\bar{e}(X_o), r(Y_o)\bar{e}(Y_o)) = \frac{1}{c^2} \{C_T(b_2, L') - C_T(b_1, L' - L)\}$$

Dans cette expression nous pouvons constater que la covariance des erreurs de migration introduit de manière implicite les caractéristiques géométriques du réflecteur. Elle n'est donc pas stationnaire. Pour cette raison nous allons d'abord étudier le cas simple de réflecteur plan.

### 7.5.2 Quelques exemples de simulations de l'erreur

Les simulations envisagées ici concernent le cadre neutre. Nous distinguons deux cas. D'abord le cas de réflecteur horizontal puis celui de réflecteur plan incliné.

#### Cas de réflecteur horizontal :

Dans ce cas l'interface est le plan  $z = L$  et donc pour tous points  $X_o$  et  $Y_o$  appartenant au réflecteur I, nous avons  $r(X_o) = r(Y_o) = L$  et comme les rayons sont parallèles, nous avons :

$$\text{cov}(r(X_o)\bar{\epsilon}(X_o), r(Y_o)\bar{\epsilon}(Y_o)) = C_T^P(x_o - y_o, L) \quad (7.3)$$

Avec  $C_T^P$  la covariance de l'eikonale pour l'onde plane. Dans le cas où l'on a une covariance factorisée  $C_\epsilon(x_o, y_o) = \sigma_\epsilon^2 C_X(x) C_Z(z)$

$$\text{cov}(\bar{\epsilon}(x_o), \bar{\epsilon}(y_o)) = \frac{\sigma_T^2(L)}{L^2} C_X(x_o - y_o)$$

avec  $\sigma_T^2(L) = \frac{L}{2} \int_0^\infty C_Z(u) du$ . Dans ce cas la simulation de  $\bar{\epsilon}$  est facile à partir du moment où l'on retrouve la covariance latérale  $C_X$ .

#### Cas de réflecteur incliné :

Introduisons quelques notations :

- $a_X$  portée latérale de  $C_X(h_x)$ .
- $a$  plongement du réflecteur .
- $b$  sinus de l'angle de pendage.
- $L$   $L(X)$ .
- $L'$   $L(Y)$ .

A partir de la relation 7.3 nous savons que:

$$\text{cov}(bL(X_o)\bar{\epsilon}(X_o), bL(Y_o)\bar{\epsilon}(Y_o)) = \sigma_T^2(L) C_X(x_o - y_o)$$

La covariance n'est donc pas stationnaire. C'est pour cette raison que nous introduisons la nouvelle variable  $\nu(X_o) = b\bar{\epsilon}(X_o)\sqrt{L(X)}$ .

D'autre part, nous savons que  $\sigma_T^2(L) \simeq \alpha L$  avec  $\alpha = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2c_o^2} \int_0^\infty C_Z(u) du$ , et donc nous avons :

$$\text{cov}(\nu(X_o), \nu(Y_o)) = \alpha \frac{L}{\sqrt{LL'}} C_X(x_o - y_o)$$

Si nous utilisons la relation  $L = L' - a|y_o - x_o|$ , nous pouvons écrire que :

$$\text{cov}(\nu(X_o), \nu(Y_o)) = \alpha \sqrt{1 - \frac{a|y_o - x_o|}{L'}} C_X(x_o - y_o)$$

Finalement dans le cas de faibles pendages nous pouvons écrire que  $a|y_o - x_o| \leq aa_X \ll L'$ . Dans ce cas nous avons approximativement :

$$C_\nu(x_o - y_o) \simeq \alpha C_X(x_o - y_o)$$

Notons bien que l'hypothèse ci-dessus n'est pas très contraignante car en pratique les réflecteurs ont un pendage faible et nous pouvons nous attendre à des portées plus faibles que la profondeur investiguée.

**Exemple numérique de simulation :**

Dans ce paragraphe il s'agit de donner un exemple numérique de profil des erreurs simulées. Nous allons considérer un réflecteur de profondeur  $L = 1000m$ . Le champ de vitesses est tel que :

$$c_o = 2000.m/s , C_\nu(x, z) = \sigma_c^2 C_X(x) C_Z(z) \text{ et } \sigma_v^2 = 10000.(m/s)^2$$

Nous désignons par  $a$  et  $b$  les portées dans le sens horizontal et vertical. La portée  $a$  est fixée à 1000 m . Nous faisons varier la valeur de  $b$  de 5 m et 1000 m. Les figures 7.20 et 7.21 montrent le profil des erreurs de migration. Celles-ci sont exprimées en mètres. Les deux courbes correspondent aux deux types d'anisotropie  $b/a = 100/1000$  et  $b/a = 5/1000$ .

Conformément aux résultats théoriques rencontrés au chapitre 2, l'erreur de position (c'est à dire l'erreur suivant l'axe des  $x$ ) est plus forte que l'erreur en profondeur. D'autre part, ces erreurs s'affaiblissent pour les fortes anisotropies.

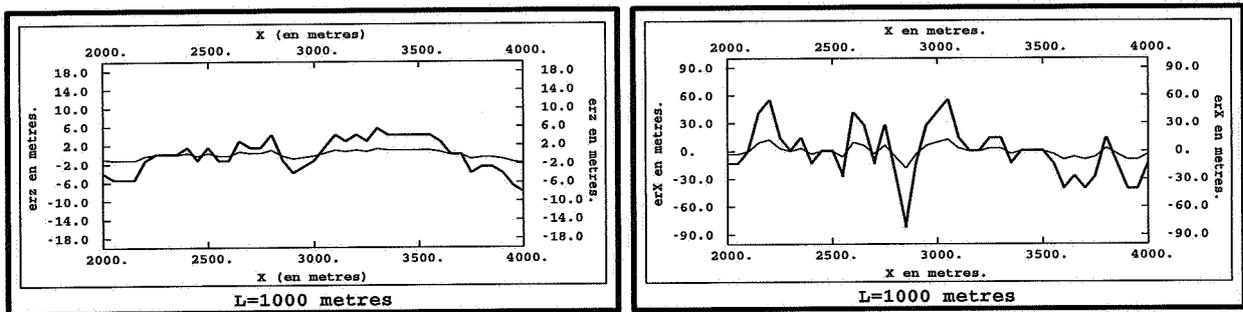


FIG. 7.20 - De gauche à droite: profils de l'erreur de profondeur (erz) et de position (erx). Ces profils sont donnés pour deux valeurs d'anisotropie : (10%) et (0.5% en trait noir foncé).

### 7.5.3 Cas de géométries complexes.

Le cas d'une géométrie non plane pour le réflecteur pose deux problèmes :

- D'abord, Les rayons à offsets nuls ne sont pas quasi-parallèles entre eux, pour pouvoir appliquer une formule analogue au cas plan.
- Ensuite La variable  $\nu(x)$  n'est pas stationnaire.

Nous proposons alors de considérer le cas simple d'un réflecteur de faibles pentages avec l'hypothèse que le réflecteur admet une limite supérieure et inférieure. C'est le cas, par exemple, du réflecteur montré à la figure 7.20 Les limites supérieure et inférieure du réflecteur sont respectivement  $L_o + z_1$  et  $L_o + z_2$ .

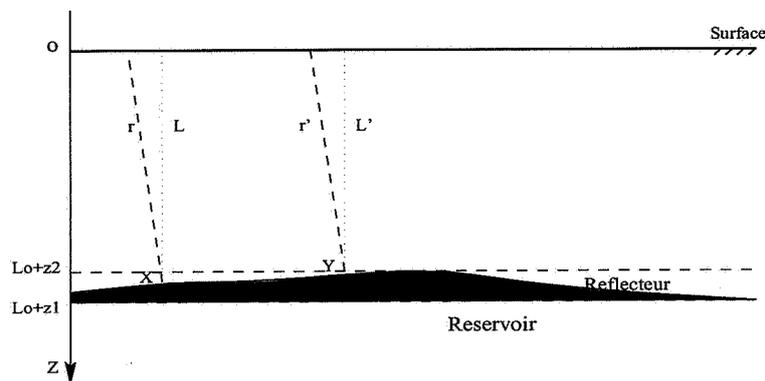


FIG. 7.21 - Cas d'un réflecteur à faible pendage

Dans cette figure, nous convenons des notations suivantes :

- X et Y deux points quelconques du réflecteur en question.
- r,  $\theta$  et L sont respectivement le rayon à offset nul, le pendage du réflecteur et la profondeur de X. Nous avons :

$$r = L/\cos(\theta(X)) \text{ et } r' = L'/\cos(\theta(Y))$$

Compte tenu des limites supérieure et inférieure attribuées à la profondeur, nous avons :  $L_o + z_1 \leq L(X) \leq L_o + z_2$  pour tout X abscisse d'un point du réflecteur. D'autre part, nous avons :

$$cov(\nu(x_o), \nu(y_o)) = \alpha \frac{L(X)}{\sqrt{L(X)L(Y)}} C_X(x_o - y_o)$$

Et comme nous avons :

$$\sqrt{\frac{L_o + z_1}{L_o + z_2}} \leq \frac{L(X_o)}{\sqrt{L(X_o)L(Y_o)}} \leq \sqrt{\frac{L_o + z_2}{L_o + z_1}}$$

Nous déduisons que :

$$\sqrt{\frac{L_o + z_1}{L_o + z_2}} C_X(x - y) \leq \frac{\text{cov}(\nu(x), \nu(Y))}{\sigma_T^2(L_o)} \leq \sqrt{\frac{L_o + z_2}{L_o + z_1}} C_X(x - y)$$

Nous avons donc deux fonctions de covariances positives l'une majorante et l'une minorante de la vraie covariance de  $\nu$ . Nous pouvons donc simuler 2 fonctions ayant une variabilité proportionnelle à  $\nu$ . ■

# Chapitre 8

## Conclusions

Dans ce travail, nous nous sommes placés dans un cadre où les variables étudiées sont liées par les équations décrivant la propagation des rayons en optique géométrique. Il s'agit là évidemment d'une approximation des équations réelles beaucoup plus complexes. C'est là nous semble-t-il une des originalités de ce travail qui diffère par là de la plupart des applications de la géostatistique à la sismique qui à ce jour ne prennent pas en compte cet aspect.

Les thèmes abordés, au cours de la présente étude, tiennent en cinq points :

### **1/ Identification des limites de l'analyse structurale des vitesses après stack. Ces limites se résument en deux points importants :**

- D'une part les vitesses de stack sont sensibles aux algorithmes d'analyse et au choix des paramètres d'analyse notamment le nombre d'offsets pris en considération. A cet égard, nous avons vu que ce problème remonte déjà aux premières publications concernant l'analyse de stack [24] [1].

- D'autre part, nous avons montré expérimentalement que l'analyse structurale faite sur ce genre de vitesses ne restitue pas les paramètres variographiques du milieu et que de ce fait il serait illusoire de croire que l'on restitue la vraie variabilité du champ de vitesses.

### **2/ Abord du problème de la localisation des miroirs sismiques :**

Ce problème rentre dans les grandes préoccupations actuelles des géophysiciens. Il suffit de consulter les publications récentes [23] [20] pour se rendre compte de deux points qui reflètent l'état actuel de l'emploi des outils géostatistiques pour aborder un tel problème :

- Les quelques tentatives d'évaluation des erreurs de migration ne sont pas tellement novatrices du point de vue méthodologique puisque pour la plupart d'entre elles on reconnaît l'aspect classique de calage des données de surface et données de puits. De surcroit, l'analyse de stack reste l'outil en vigueur pour approcher les vraies vitesses ; nous venons de voir ses limites.

Compte tenu de ces remarques, nous avons insisté dans la rédaction de cette thèse sur l'aspect méthodologique, pour le calcul de l'erreur de migration dans les deux cas suivants :

- **Cadre stationnaire :**

dans le cadre stationnaire, les hypothèses neutres et optimistes de G.Matheron permettent de donner des estimateurs explicites de l'erreur de migration. Les formules de G.Matheron sont des développements du premier ordre de l'erreur sous réserve que  $r\bar{e}$  nettement inférieure à l'unité.

Concernant ce point, nous avons donné une condition suffisante pour la validité de ces formules. Cette condition définit la profondeur critique. Pour une profondeur en dessous de celle-ci, les expressions des erreurs ne sont plus valables.

D'autre part, plutôt que d'examiner la variance de celle-ci, nous avons vu que la simulation de l'erreur est un bon moyen pour reproduire l'allure de l'erreur commise sur les terrains migrés. A partir de là nous avons vu des applications à la simulation des erreurs d'estimation du volume d'un réservoir pétrolier. Du point de vue temps de calculs ces simulations sont assez rapides et l'on pense qu'elles pourraient constituer un moyen d'aide à la décision pour les exploitations pétrolières.

- **Cas non stationnaire :**

suivant une méthode perturbative appliquée sur l'eikonale en milieux non stationnaires, nous avons donné l'expression des erreurs de migration. Ces formules sont plus compliquées que dans le cas stationnaire. Nous n'avons proposé ici que le critère de calculs de variance pour l'examen de la fiabilité de la prospection. Les expressions de variance des erreurs sont données sous l'hypothèse de faible pendage.

Que ce soit dans le cadre stationnaire ou dans le cadre non stationnaire, le paramètre primordial pour l'étude des erreurs de migration est la covariance des vitesses. Dans le cas stationnaire, il est possible de remonter à ce paramètre. Les covariances qui nous intéressent sont les covariances doublement dérivables dans la direction horizontale.

Il faut noter que dans le cas de champs de vitesses stationnaires, les réflecteurs ne sont pas de n'importe quelle forme. Nous n'avons considéré que des terrains de faible pendage, ce qui constitue en réalité une limitation importante pour les méthodes que nous venons de proposer.

### **3/ Construction d'une nouvelle méthode d'inversion de la covariance des vitesses en milieux stationnaires :**

dans le même ordre d'idée que celle proposée par Thaner et Choler concernant l'analyse de stack qui consiste à caler le modèle qui ajuste mieux l'hyperbole, nous proposons

d'analyser statistiquement le nuage de ces hyperboles. Une simple analyse de la variance des temps d'arrivée, montre que l'on peut restituer le moment d'ordre deux de la vitesse. Cette opération d'inversion a été testée pour différents modèles de covariance de milieux.

Les covariances factorisées présentent un avantage particulier qui est celui de la simplicité des formulations théoriques obtenues.

Signalons enfin que nous avons utilisé essentiellement des formules de Rytov. Ces formules approximatives ont fait l'objet d'une étude à part.

#### **4/ Etude des approximations de Rytov pour le calcul des variances et covariances de fluctuations des eikonales :**

d'un point de vue chronologique de cette étude, nous avons eu d'abord recours à quelques approximations de Rytov. Les approximations proposées par Rytov pour le calcul des covariances des eikonales simplifient les calculs qui ont permis d'établir les résultats théoriques d'inversion. Comme toute approximation, elle a un domaine de validité, que nous avons investigué.

Les résultats importants auxquels a abouti cette étude sont les suivants :

- Les approximations de Rytov surestiment les variances et covariances de fluctuations.
- Dans le cas isotrope, les approximations de Rytov sont valables si la profondeur investiguée est de dimension très supérieure à la portée du milieu. Lorsqu'il s'agit de milieux anisotropes, l'approximation est valable dans le cas où la profondeur investiguée est très élevée par rapport à la portée verticale.
- Enfin, par la même occasion, on s'est aperçu que l'on peut se passer de ces approximations.

Les résultats de cette partie peuvent non seulement être appliqués à la sismique mais aux problèmes de propagation des ondes en milieux aléatoires en toute généralité.

#### **5/ Validations expérimentale de la méthode d'inversion proposée :**

Cette validation a été réalisée à l'aide de données synthétiques obtenues par propagations d'ondes dans des milieux aléatoires simulés au préalable. La majorité de ces tests sont probants en ce sens que l'on arrive à déterminer le type de covariance du milieu.

### **Orientations futures du problème:**

La simulation de l'erreur ainsi réalisée, reste conditionnée par la fiabilité du procédé d'inversion de la covariance du milieu. Si dans le cas stationnaire nous avons pu proposer une méthode d'inversion, le cas non stationnaire reste encore en voie d'exploration.

D'autre part, la validation expérimentale sur des données synthétiques que nous considérons comme un stade pilote pour les applications pratiques, reste à améliorer pour se placer dans un cadre encore plus proche des applications réelles :

Les traces sismiques se présentent sous forme d'impulsions possédant une durée donnée et il faudra relever le temps d'arrivée sur cette trace. Cette opération dite "pickage des temps" est naturellement imprécise et il faudra tenir compte de celle-ci. A cet égard, on pourra supposer qu'il s'agit d'une erreur indépendante du champ de vitesse de moyenne nulle et de variance connue *a priori*.

Enfin, vu le volume important de problèmes que pose le cadre stationnaire à lui seul, le thème de non-stationnarité n'a été que partiellement abordé. Les calculs numériques de la variance des erreurs de migration peuvent être envisagés pour des cas plus complexes que celui qui fût présenté.■

## A N N E X E S

**Annexe A.** Covariances des eikonales.

**Annexe B.** Formules pour covariances non factorisées.

**Annexe C.** Théorie des rayons - Approximation paraxiale.



## Annexe A

### Covariances des eikonales

Cette annexe est consacrée à la démonstration de certaines formules rencontrées au chapitre 6 concernant les calculs directs des covariances des eikonales. Il s'agit uniquement du cas isotrope.

#### A.1 Calcul direct de la covariance entre deux rayons droits issus d'une même source.

Ci-dessous nous explicitons les calculs qui ont permis d'établir la formule 7.7 au chapitre 7. Nous partons de l'expression 7.6.

$$\begin{aligned}
 4c_o^2 C_T(x, L) &= \int_0^a dz \int_0^{b(z)} C(\|z - z'\|) dz' + \int_a^{a/\sin \theta} dz \int_{a(z)}^{b(z)} C(\|z - z'\|) dz' \\
 &= \int_0^a dz \int_0^{b(z)} C(\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \theta}) dz' + \\
 &\quad \int_a^{a/\sin \theta} dz \int_{a(z)}^{b(z)} C(\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \theta}) dz' \\
 &= - \int_0^a dz \int_{a(z)}^0 C(\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \theta}) dz' + \\
 &\quad \int_0^{a/\sin \theta} dz \int_{a(z)}^{b(z)} C(\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \theta}) dz'
 \end{aligned}$$

Si nous posons;  $z'' = z \cos \theta - z'$ , alors nous avons :

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^{a/\sin \theta} dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2 \sin^2 \theta}} C(\sqrt{z''^2 + z^2 \sin^2 \theta}) dz'' \\
 &\quad - \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2 - z^2 \sin^2 \theta}}^{-z \cos \theta} C(\sqrt{z''^2 + z^2 \sin^2 \theta}) dz''
 \end{aligned}$$

Posons maintenant le nouveau changement de variable;  $z'^2 + z^2 \sin^2 \theta = u^2$  et supposons que  $L < a \cos \theta$ , alors nous avons :

$$4c_o^2 C_T(x, L) = 2 \int_0^{L/\cos(\theta/2)} dz \int_{z \sin \theta}^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du - \int_0^a \int_z^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du$$

En guise d'évaluation de la première intégrale, nous effectuons le changement de variable suivant:

$$w = \frac{\cos(\theta/2)}{L} z, \text{ ce qui donne l'expression :}$$

$$2 \int_0^{L/\cos(\theta/2)} dz \int_{z \sin \theta}^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du = 2 \frac{L}{\cos \theta/2} \int_0^1 dw \int_{wL \sin \theta / \cos(\theta/2)}^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - (wL \sin \theta / \cos^2(\theta/2))^2}}$$

Comme nous avons approximativement au premier ordre  $x = 2L \sin \theta/2$ , si l'on commet l'hypothèse que la covariance de la perturbation admet une portée finie, nous pouvons dès lors écrire :

$$2 \int_0^{L/\cos(\theta/2)} dz \int_{z \sin \theta}^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du = 2L \int_0^1 \int_{wx}^\infty \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - (wx)^2}} = 4c_o^2 \tilde{C}_T^{\tilde{S}ph}(x, L)$$

Enfin, nous avons :

$$C_T(x, L) = C_T^{\tilde{S}ph}(x, L) - \frac{1}{4c_o^2} \int_0^a \int_z^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du$$

A partir de cette dernière expression, nous avons l'erreur d'estimation de la covariance par l'approximation de Rytov :

$$C_T(x, L) - C_T^{\tilde{S}ph}(x, L) = -\frac{1}{4c_o^2} \int_0^a \int_z^a \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - z^2 \sin^2 \theta}} du$$


---

## A.2 Expression générale de la covariance

Soient deux rayons  $r_1$  et  $r_2$  de longueurs respectives  $r_1$  et  $r_2$  émergeant d'une même source  $S$  et formant un angle  $\theta$ , avec  $\theta = \arccos(\rho)$ . Nous voulons calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{r_1} d\tau \int_0^{r_2} C(\sqrt{\tau'^2 + \tau^2 - 2\rho\tau\tau'}) d\tau'$$

Posons le changement de variable suivant :  $u = \sqrt{\tau'^2 + \tau^2 - 2\rho\tau\tau'}$ . Nous notons aussi  $\sigma = \sqrt{1 - \rho^2}$  de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$d\tau' = -\frac{u}{\rho\tau - \tau'} du, \text{ et } u^2 - \sigma^2\tau^2 = (\tau' - \rho\tau)^2$$

Maintenant, nous considérons séparément deux cas où nous avons  $\tau' < \rho\tau$  et  $\rho\tau < \tau'$ . Soient alors les deux intégrales correspondants à chacun de ces deux cas :

$$I_1 = \int_0^{r_1} d\tau \int_0^{\rho\tau} C(\sqrt{\tau^2 + \tau'^2 - 2\rho\tau\tau'}) d\tau' \text{ and } I_2 = \int_0^{r_1} d\tau \int_{\rho\tau}^{r_2} C(\sqrt{\tau^2 + \tau'^2 - 2\rho\tau\tau'}) d\tau'$$

1/ Si  $\tau' < \rho\tau$  :

Convenons alors des notations suivantes :  $\xi_o(u) = \min(r_1, u/\sigma)$  et  $\eta(u) = \text{Arcsin}(\frac{\sigma}{u}\xi_o(u)) - \text{Arcsin}(\sigma)$ . Voici alors le développement de l'intégrale  $I_1$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^{r_1} d\tau \int_{\tau}^{\sigma\tau} \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du \\ &= \int_0^{r_1} d\tau \int_{\sigma\tau}^{\tau} \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du \\ &= \int_0^{r_1} uC(u) du \int_u^{\xi_o(u)} \frac{d\tau}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{r_1} uC(u) \int_{\sigma}^{u\xi_o(u)/\sigma} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{r_1} uC(u) \text{Arcsin}(u\xi_o(u)/\sigma) - \text{Arcsin}(\sigma) \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{r_1} uC(u)\eta(u) du \end{aligned}$$

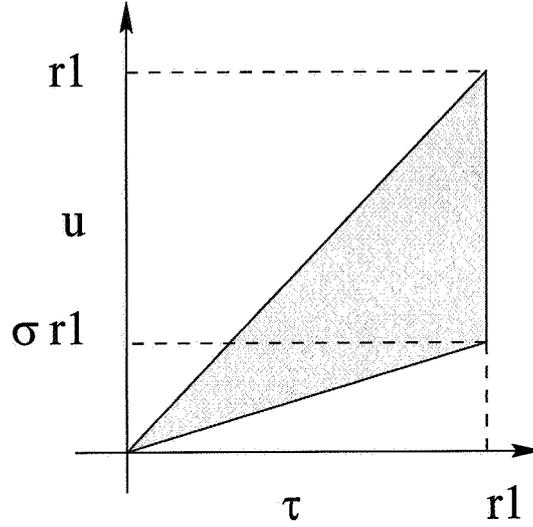


FIG. A.1 - Domaine d'intégration dans le premier cas  $\rho\tau < \tau'$

2/ Si  $\rho\tau < \tau'$ :

Dans ce cas, nous posons :

-  $\varphi(\tau) = \sqrt{r_2^2 + \tau^2 - 2r_2\tau}$

- Pour  $u \in [\sigma r_2, r_2]$ ,  $\beta_1(u)$  et  $\beta_2(u)$  sont tels que :

$\varphi(\beta_1(u)) = \varphi(\beta_2(u)) = u$  et  $0 \leq \beta_1(u) \leq \beta_2(u)$ .

$$I_2 == \int_0^{r_2} d\tau \int_{\sigma\tau}^{\varphi(\tau)} \frac{uC(u)}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du$$

Suivant l'évolution de  $\varphi(\tau)$  sur l'intervalle  $[0, r_1]$ , deux cas d'intégration se présentent.

**1 er cas:**  $\rho r_2 \leq r_1$ , dans ce cas, nous avons le domaine d'intégration *I* schématisé dans la figure A.2

**1 er cas:**  $r_1 \leq \rho r_2$ , dans ce cas, nous avons le domaine d'intégration *II* schématisé dans la même figure A.2.

En général, puisque nous manipulons deux rayons de longueurs égales  $r_1 = r_2$  et comme  $0 \leq \rho \leq 1$ , on se retrouve dans le premier cas et l'on divise alors le domaine en trois parties :

$$I_2 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\text{Où } \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \int_0^{\sigma r_1} uC(u) \int_0^{\frac{u}{\sigma}} \frac{d\tau}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du \\ A_2 = \int_{\sigma r_1}^{\sigma r_2} uC(u) \int_0^{r_1} \frac{u}{\sigma} \frac{d\tau}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du \\ A_3 = \int_{\sigma r_2}^{r_2} uC(u) \left\{ \int_0^{\beta_1(u)} \frac{d\tau}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} + \int_{\beta_2(u)}^{r_1} \frac{d\tau}{\sqrt{u^2 - \sigma^2\tau^2}} du \right\} \end{array} \right.$$

Dans ce cas si l'on pose :

$$\psi(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sigma} & \text{Si } u \in [0, \sigma r_1] \\ \frac{1}{\sigma} \arcsin \frac{\sigma r_1}{u} & \text{Si } u \in [\sigma r_1, \sigma r_2] \\ \frac{1}{\sigma} \left( \arcsin \frac{\sigma \beta_1(u)}{u} + \arcsin \frac{\sigma r_1}{u} - \arcsin \frac{\sigma \beta_2(u)}{u} \right) & \text{Si } u \in [\sigma r_2, r_2] \end{cases}$$

Nous pouvons écrire que :

$$C_T^{Sph}(r_1, r_2) = \frac{1}{\sigma} \int_0^{r_2} u C(u) \psi(u) du + \frac{1}{\sigma} \int_0^{r_2} u C(u) \eta(u) du$$

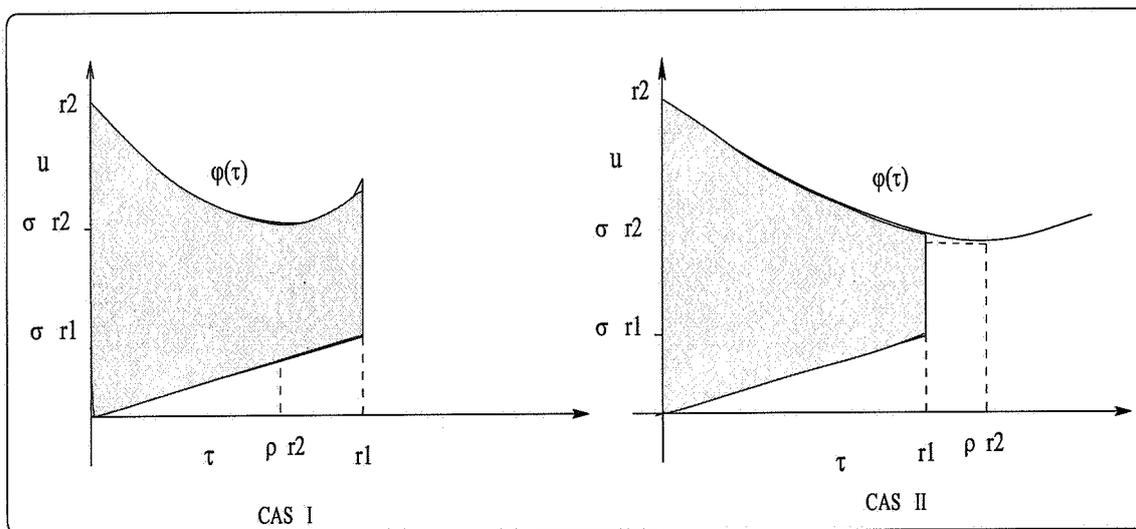


FIG. A.2 - Domaine d'intégration . De gauche à droite; Cas 1/ :  $\rho\tau < \tau'$  et Cas 2/ :  $\rho\tau < \tau'$

## Annexe B

# Formules pour covariances non factorisées

Le but de la présente annexe est de montrer quelques formules énoncées au chapitre 7. Ces formules, concernent :

- Les covariances des eikonales dans le cadre d'ondes planes et sphériques.
- Les rapports standardisés dans le cas d'une stratification quasi-horizontale.

### B.1 Covariance des eikonales

Si nous prenons les notations traditionnelles, les expressions de la covariance sont alors données comme suit :

$$\begin{cases} C_T^P(x, L) = \frac{L}{2c^2} \int_0^\infty C_\epsilon(x, u) du. & \text{Onde plane.} \\ C_T^{Sph}(x, L) = \frac{1}{x} \int_0^x C_T^P(y, L) dy. & \text{Onde Sphérique} \end{cases}$$

Considérons une stratification donnée de première direction principale  $\theta$  par rapport à l'horizontale et un rapport d'anisotropie  $\lambda$ .  $C_\epsilon(x, u)$  est la covariance de perturbation.  $C_\epsilon$  peut être exprimée par une covariance isotrope  $C_o$ , telle que  $C_\epsilon(x, u) = C_o(x_1, u_1)$ .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\lambda \sin \theta & \lambda \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

Dans le but de simplifier les notations nous posons :

$$A = \cos \theta, B = \sin \theta, C = -\lambda \sin \theta, D = \lambda \cos \theta \\ d = \cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta, e = \sin^2 \theta + \lambda^2 \cos^2 \theta \text{ and } f = (1 - \lambda) \sin \theta \cos \theta.$$

a/ Cas d'une onde plane :

$$C_T^P(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^\infty C_\epsilon(x, u) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^\infty C_o(\sqrt{(xA + uB)^2 + (xC + uD)^2}) \quad (B.1)$$

Nous intégrons en effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} v^2 &= (xA + uB)^2 + (xC + uD)^2 \\ &= u^2e + 2xf(1 + \lambda)u + x^2d \end{aligned}$$

Nous avons,  $du = vdv/(ue + xf(1 + \lambda)) = vdv/\sqrt{ev^2 - x^2\lambda^2}$  et nous obtenons :

$$C_T^P(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_{x\sqrt{d}}^{\infty} \frac{vC_o(v)}{\sqrt{ev^2 - \lambda^2x^2}} dv \quad (B.2)$$

**b/ Cas d'onde sphérique:**

Calculons maintenant la variance  $C_T^{Sph}(0, L)$  et la covariance  $C_T^{Sph}(x, L)$  de l'eikonale de l'onde sphérique :

$$\begin{aligned} C_T^{Sph}(0, L) &= \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_0^{\infty} C_o(u\sqrt{B^2 + D^2}) du \\ &= \frac{aL}{2c_o^2\sqrt{e}} \int_0^{\infty} C_o(av) dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_T^{Sph}(x, L) &= \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_0^{\infty} C_o(\sqrt{(\tau xA + uB)^2 + (\tau xC + uD)^2}) du \quad (B.3) \\ &= \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_0^{\infty} C_o(\tau x \sqrt{(A + uB/(\tau x))^2 + (C + uD/(\tau x))^2}) du \\ &= \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_0^{\infty} \tau x C_o(\tau x \sqrt{(A + vB)^2 + (C + vD)^2}) dv \end{aligned}$$

posons maintenant,  $(xA + vB)^2 + (xC + vD)^2 = w^2$  nous obtenons alors :

$$C_T^{Sph}(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_{\sqrt{d}}^{\infty} \frac{\tau x w C_o(\tau x w)}{\sqrt{ew^2 - \lambda^2}} dw \quad (B.3 - bis)$$

Finalement nous pouvons écrire les deux expressions suivantes :

$$C_T^{Sph}(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^{\sqrt{d}} d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{xvC_o(xv)}{\lambda\sqrt{d}\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv \quad (B.4)$$

$$C_T^{Sph}(x, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{d xvC_o(x\sqrt{dv})}{\lambda\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv \quad (B.5)$$

Nous avons alors :

$$C_T^{Sph}(a, L) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^{\sqrt{d}} d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{avC_o(av)}{\lambda\sqrt{d}\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv \quad (B.6)$$

$$C_T^{Sph}\left(\frac{a}{\sqrt{d}}, L\right) = \frac{L}{2c_o^2} \int_0^1 d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{\sqrt{d} avC_o(av)}{\lambda\sqrt{\frac{ed}{\lambda^2}v^2 - \tau^2}} dv \quad (B.7)$$

## B.2 Cas d'une stratification quasi-horizontale :

Le but des calculs suivants est d'établir les expressions du rapport  $var[T(ax)]/var[T0]$  dans le cas d'une stratification quasi-horizontale. D'abord nous rappelons que :

$$\frac{var[T(ax)]}{var[T0]} = 0.5 + \frac{C_T^{Sph}(ax, L)}{2C_T^{Sph}(0, L)}$$

$$\begin{aligned} C_T^{Sph}(ax, L) &= \frac{L}{2c_o^2\lambda} \int_0^1 d\tau \int_\tau^\infty \frac{axvC_o(axv)}{\sqrt{v^2 - \tau^2}} dv \\ &= \frac{aL}{2c_o^2\lambda} \int_0^\infty xvC_o(axv) \int_0^{inf(1,v)} \frac{d\tau}{v^2 - \tau^2} dv \\ &= \frac{aL}{2c_o^2\lambda} \int_0^1 xvC_o(axv) \int_0^v \frac{d\tau}{\sqrt{v^2 - \tau^2}} + \frac{aL}{2c_o^2\lambda} \int_1^\infty xvC_o(axv) \int_0^v \frac{d\tau}{\sqrt{v^2 - \tau^2}} \end{aligned}$$

Si nous posons un simple changement de variable  $t = \tau/v$  et  $u = xv$ , nous pouvons obtenir :

$$\frac{var[T(ax)]}{var[T0]} = 0.5 + \frac{\frac{1}{x} \int_0^x \frac{\pi}{2} uC_o(au) du + \frac{1}{x} \int_x^\infty uC_o(au) Arcsin(x/u) du}{2 \int_0^\infty C_o(au) du}$$

Ainsi dans le cas de covariance admettant une portée finie, nous obtenons :

$$\frac{var[T(ax)]}{var[T0]} = \begin{cases} 0.5 + \frac{\frac{\pi}{2x} \int_0^x uC_o(au) du + \frac{1}{x} \int_x^1 uC_o(au) Arcsin(x/u) du}{2 \int_0^1 C_o(au) du} & \text{Si } x \leq 1 \\ 0.5 + \frac{\frac{\pi}{4} \frac{1}{x} \int_0^1 uC_o(au) du}{\int_0^1 C_o(au) du} & \text{Si } 1 \leq x \end{cases}$$

Par conséquent nous avons le rapport d'inversion de portée qui s'écrit :

$$K_1 = 0.5 + \frac{\pi \int_0^\infty vC_o(av) dv}{4 \int_0^\infty C_o(av) dv}$$

## Annexe C

# Théorie des rayons - Approximation paraxiale

Cette annexe est destinée à quelques rappels sur la théorie des rayons ainsi que l'approximation paraxiale vues au chapitre 3.

### C.1 Théorie des rayons - approche hamiltonienne

Par analogie aux problèmes de la mécanique, la théorie des rayons peut être vue sous un formalisme Hamiltonien ou Lagrangien [13]. Dans le formalisme Hamiltonien,

l'état d'un système peut être décrit par l'équation de Hamilton-Jacobi qui est de la forme :

$$H \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, q_1, q_2, \dots, q_n \right] = 0$$

avec  $q_i$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} = p_i$  sont respectivement les coordonnées spatiales et les moments qui leur sont associés.  $\varphi[q_1, q_2, \dots, q_n]$  est la fonction à déterminer.

L'équation de l'eikonale  $(\nabla \varphi)^2 = n^2$  ( $n$  est l'indice du milieu) qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre peut être résolue comme une équation différentielle ordinaire soluble par intégration en posant (Kravstov [12]) :

$$\frac{dq_i}{\partial H / \partial p_i} = -\frac{dp_j}{\partial H / \partial q_j} = -\frac{dp_j}{\partial H / \partial q_i} = \frac{d\varphi}{\sum_{i=1}^n p_i (\partial H / \partial p_i)} = d\tau$$

Ainsi dans le cadre général d'un système à  $n$  coordonnées, on obtient un système à  $(2n+1)$  équations que l'on appelle communément en mécanique système caractéristique.

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

Dans le cas de coordonnées cartésiennes, on a  $H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  et les équations suivantes que l'on pourra résoudre par quadrature:<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}; & \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \mathbf{p} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}; & \mathbf{p} = \nabla \varphi \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La solution est en effet:  $\varphi = \varphi_o + \int_{\tau_o}^{\tau} \mathbf{p} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\tau$ . avec  $\varphi_o = \varphi(\tau_o)$ .

Pour ce genre de problème on 'choisit' le hamiltonien:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{r})) = 0$$

Le système à résoudre est alors:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Et la solution peut s'écrire:

$$\varphi = \varphi_o + \int_{\tau_o}^{\tau} n^2[\mathbf{r}(\tau)] d\tau$$

### Cas d'un milieu stratifié:

Dans le cas d'un milieu stratifié  $n = n(z)$ , nos équations prennent la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = p_x; & \frac{dy}{d\tau} = p_y; & \frac{dz}{d\tau} = p_z \\ \frac{dp_x}{d\tau} = 0; & \frac{dp_y}{d\tau} = 0; & \frac{dp_z}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dz} \end{cases} \quad (\text{avec } p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = n^2)$$

Nous obtenons comme solution le système suivant:

$$\begin{cases} x - x_o = \int_{z_o}^z \frac{p_x dz}{\sqrt{n^2(z) - p_x^2 - p_y^2}} \\ y - y_o = \int_{z_o}^z \frac{p_y dz}{\sqrt{n^2(z) - p_x^2 - p_y^2}} \\ \tau = \int_{z_o}^z \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - p_x^2 - p_y^2}} \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

1. L'opérateur  $\partial/\partial \mathbf{a}$  est aussi l'opérateur différentiation  $\nabla_{\mathbf{a}} = (\partial/\partial a_x, \partial/\partial a_y, \partial/\partial a_z)$

Ainsi, l'on peut suivre les rayons par intégration. La théorie paraxiale exposée dans le paragraphe suivant propose de tracer les rayons voisins sans passer par ces intégrations numériquement onéreuses.

### C.1.1 Méthodes paraxiales et approximation hautes fréquences

Les sismiciens ont besoin de reconstituer des sismogrammes synthétiques en évaluant l'amplitude. Le calcul des amplitudes est de plus en plus réalisé via une méthode récente basée comme beaucoup d'autres sur l'évaluation de l'énergie contenue dans un tube de rayons : les rais sont agencés autour d'un rayon central (Cf Fig 1). La différence par rapport aux méthodes classiques, réside dans le fait que les rayons voisins du rayon central, dits rayons paraxiaux, sont calculés par une méthode dite paraxiale:

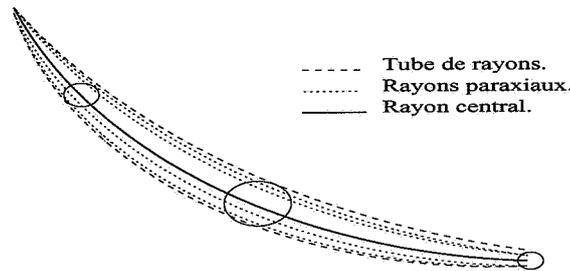


FIG. C.1 - Rayon central et rayons paraxiaux.

La théorie paraxiale ou théorie dynamique de tracés de rayons [6] calcule les rayons voisins par méthode perturbative. Voici dans ce qui suit les grandes lignes de la méthode.

**Rayon central :** Considérons le rayon central comme rayon de référence caractérisé par  $\mathbf{r}_o(\tau)$  et  $\mathbf{p}_o(\tau)$ , avec  $\tau$  paramètre. On a d'après C.1 le système suivant :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_o}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{p}}H(\tau, \mathbf{r}_o, \mathbf{p}_o) \\ \frac{d\mathbf{p}_o}{d\tau} &= \nabla_{\mathbf{r}}H(\tau, \mathbf{r}_o, \mathbf{p}_o)\end{aligned}$$

#### Rayon paraxial:

Le rayon voisin est défini à partir du rayon central par :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\tau) &= \mathbf{r}_o(\tau) + \delta \mathbf{r}(\tau) \\ \mathbf{p}(\tau) &= \mathbf{p}_o(\tau) + \delta \mathbf{p}(\tau)\end{aligned}$$

Les paramètres du rayon voisin sont obtenus par méthode perturbative et l'on peut montrer [32] que la solution du problème revient à résoudre l'équation différentielle qui fait intervenir l'écriture matricielle suivante.

$$\delta \mathbf{y}^T = (\delta \mathbf{r}, \delta \mathbf{p})^T; \quad A = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{r}}H & \nabla_{\mathbf{p}}\nabla_{\mathbf{p}}H \\ \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}}H & \nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{p}}H \end{pmatrix} \quad \frac{d\delta \mathbf{y}}{d\tau} = A\delta \mathbf{y}.$$

Cette méthode a l'avantage d'obtenir très rapidement le tracé des rayons voisins. Par rapport à la stratégie qui consiste à tracer chaque rayon en reprenant chaque fois le système C.2, les temps de calculs sont largement réduits. C'est aussi dans le cadre d'une méthode perturbative que l'on envisage cette-fois ci de formuler l'erreur de migration.

# Bibliographie

- [1] M. Al-Chalabi, 1973, Analysis of stacking RMS. average and interval velocity, Geophysical Prospecting, Vol 22, pp 458-475.
- [2] A. Bamberger, 1982, Cours d'analyse numérique des équations hyperboliques, Ecole des Mines de Paris.
- [3] P.Bois et all., 1971, Essai de détermination automatique des vitesses sismiques par mesures entre puits, Geophysical Prospecting, Vol 19, pp 42-83.
- [4] L.A Chernov, 1960, Wave Propagation in a random medium, Mc Graw-Hill, New York.
- [5] J.P. Cordier. 1983, les vitesses en sismique réflexion, Tec & Doc, Paris.
- [6] 1993, O Dubrule & A Haas Simulations de Réservoirs Pétroliers par inversion géostatistique. Cahiers de Géostatistique, Fascicule 3. Compte rendu des Journées de Géostatistique, 25-26 Mai 1993, Fontainebleau, pp 87-99.
- [7] A. Frankel and R. Clayton., 1986, Finite difference simulations of seismic scattering; implications for wave propagation of short-period seismic waves in the crust and models of crustal heterogeneity, Journal of Geophysical Research, Vol. 91 , No B6, pp 6465-6504.
- [8] G. Grau., 1990, La recherche pétrolière, Collection Technologies de pointe, Editions Hermès, Paris.
- [9] A. Haas., 1975, Krigeage applied to Geophysics the answer to the problem of estimates and contouring, Geophysical Prospecting, Vol. 26, N 1, pp 49-69.
- [10] A. Haas et Jousslin., 1974, Geostatistic in the petroleum industry, NATO - A.S.I. "Geostat 75" Rome, Italie, pp 13-25.
- [11] L. Jannaud, 1991, Propagation d'onde en milieux aléatoires, Thèse de Docteur en Sciences, Université de Paris Sud Orsay.
- [12] Yu.A.Kravstov and Yu.I. Orlov., 1990, Geometrical Optics of Inhomogeneous Media, Springer-Verlag.
- [13] L.Landau et E.Lifchitz Physique théorique . Editions Mir Moscou.

- [14] G. Lambaré., 1991, Inversion linéarisée de données de sismique réflexion par une méthode quasi-newtonnienne, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VII.
- [15] M. Lavergne., 1986, Méthodes sismiques, Editions Technip, Paris.
- [16] G.Matheron, 1991, Géodésiques Aléatoires: application à la prospection sismique , Cahiers de Géostatistique, 1, ENSMP, 1991, pp. 1-18.
- [17] G.Matheron, 1970, La Théorie des variables régionalisées, et ses applications, Fascicule 5, Les cahiers du centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Ecole des Mines de Paris.
- [18] G.Matheron. 1965, Les variables régionalisées, et leurs estimations. Une théorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature, Masson, Paris.
- [19] P.Podvin et I. Lecompte, 1991, Finite difference computation of traveltimes in very contrasted velocity models: a massively parallel approach and its associated, Geophysical Journal International, Vol. 105, pp 271-284.
- [20] D. Psalia, 1995, Geostatistical Depth conversion from well and seismic data, EAEG Glasgow meeting.
- [21] S.M. Rytov. Yu.A.Kravstov . V.I.Tatarskii., 1986, Principles of Statistical Radiophysics, Vol 4, Wave propagation through random media, Springer-Verlag.
- [22] S.M. Rytov. Yu.A.Kravstov . V.I.Tatarskii., 1986, Principles of Statistical Radiophysics, Vol 3, Wave propagation through random media, Springer-Verlag.
- [23] P.Ruffo, 1995, Geostatistical simulation of seismic horizons. EAPG Glasgow.
- [24] M.T. Taner - F.Koehler, 1969, Velocity spectra - digital derivation and applications of velocity functions, Geophysics, 1969, Vol 34, pp 859-881.
- [25] A.Tarantola, A.Pica, J.P Diet. 1990, Practice of non linear inversion of real seismic reflection in laterally invariant medium, Geophysics, Vol 55, pp 284-292
- [26] Tarantola A. and Valette B., 1982, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion, Reviews for Geophys. and Space Phys., Vol 20, pp 219-232.
- [27] M.Touati, A.Galli, 1993, Migration with uncertainty , 1, computation of the error Technical report. Ecole des Mines de Paris. N-49/93/G.
- [28] M. Touati, A. Galli, 1994, Migration with uncertainty ,2 , seismic inversion, Technical report. Ecole des Mines de Paris.N-16/94/G.
- [29] M. Touati, A. Galli, 1994, Migration with uncertainty ,3 , Developpment guide, Technical report. Ecole des Mines de Paris.N-16/94/G.
- [30] M. Touati, A. Galli, 1995, The validity domain of the Rytov approximation, Technical report. Ecole des Mines de Paris.N-16/94/G.

- [31] J. Vidal, 1988, Finite Difference Calculation of Travel times, Buletin of the Seismological Society of America, Vol. 78, No. 6, pp. 2062-2076.
- [32] J.Virieux, V.Farra, R.Madriaga, 1988, Ray tracing in lateraly heterogeneous media for earthquake location, Journal of Geophysical Research., Vol. 93, pp 6585-6599.